به نام خدا

مدارهای منطقی

چند تعریف

- سلول دودویی: هر وسیله ای که دو حالت پایدار برای نشان دادن صفر و یک داشته باشد. مثل لامپ
- ثبات (Register): مجموعه ای از چند سلول دودویی
- متغیر دودویی: هر متغیری که فقط مقادیر صفر و یک را اختیار کند.
- منطق دودویی: از متغیرهای دودویی و عملگرهای منطقی تشکیل می شود.

A	B	OR(A+B)	AND(A.B)	NOR	NAND
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

جبر بول

یک ساختار جبری است که در مجموعه ای مانند B که حداقل دو عضو دارد، به همراه دو عملگر + و . تعریف می شود و اصول زیر که به اصول هانتینگتون معروفند در آن صدق می کند :

$a, b, c \in B$

۱- بسته بودن $a + b \in B \qquad a \cdot b \in B$

۲- جابجائی $a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$

۳- وجود عضو خنثی $a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$

۴- شرکت پذیری $a + (b + c) = (a + b) + c$

۵- توزیع پذیری $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

۶- وجود عضو مکمل $a + a' = 1$

$a \cdot a' = 0$

تئوریهای جبر بول

۱- $a+a=a$

$a\cdot a=a$

$$\begin{aligned} a+a &= (a+a)\cdot 1 \\ &= (a+a)\cdot(a+a') \\ &= a+(a\cdot a') \\ &= a+0 \\ &= a \end{aligned}$$

۲- $a+1=1$

$a\cdot 0=0$

$$\begin{aligned} a+1 &= (a+1)\cdot 1 \\ &= (a+1)\cdot(a+a') \\ &= a+(1\cdot a') \\ &= a+a' \\ &= 1 \end{aligned}$$

تئوریهای جبر بول(ادامه)

۳- $(a')'=a$

۴- **قوانین جذب** $a+ab=a$

$a\cdot(a+b)=a$

$$\begin{aligned} a+a\cdot b &= a\cdot 1+a\cdot b \\ &= a\cdot(1+b) \\ &= a\cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

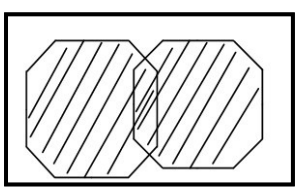
۵- **قوانین دمورگان**

$(a+b)'=a'\cdot b'$

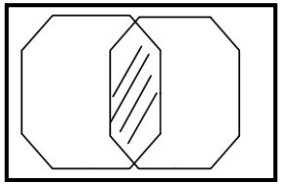
$(a\cdot b)'=a'+b'$

دیاگرام ون

برای نشان دادن روابط بین متغیرهای دودویی بکار می رود. در دیاگرام ون عمل OR را با اجتماع مجموعه ها و عمل AND را با اشتراک مجموعه ها متناظر در نظر می گیرند.



$A+B=A\bigcup B$



$A\cdot B=A\bigcap B$

می توان نشان داد که مجموعه $B=\{0,1\}$ به همراه دو عمل AND و OR یک ساختار جبر بول را ایجاد می کنند.

A	B	OR(A+B)	AND(A.B)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

توابع دودویی

یک تابع دودویی از متغیرهای دودویی و مکمل آنها به همراه عملگرهای AND و OR بدست می آید. مانند :

$$f(x,y)=xy'$$
$$g(x,y,z)=xy+z'$$

هر تابع دودویی را می توان توسط جدول ارزشی نشان داد.

جدول ارزشی یا جدول درستی مقدار تابع را به ازای مقادیر مختلف ورودی نشان می دهد.

مثال :

$$f(x,y,z)=xy+z'$$

x	y	z	xy	z'	$f(x,y,z)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

مکمل یک تابع

مکمل تابع f که آن را با f ′ نشان می دهند از یک کردن صفرها و صفر کردن یک ها در جدول ارزشی آن بدست می آید.

$$f(x,y,z)=xy+z'$$

x	y	z	xy	z'	$f(x,y,z)$	$f'(x,y,z)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	0

با استفاده از قوانین دمورگان و تعمیم آن برای چند متغیر ، می توان عبارت مربوط به مکمل توابع را به دست آورد.

$$(a+b)'=a'\cdot b'$$
$$(a\cdot b)'=a'+b'$$

مثال:

$$(a+b+c')'=a'\cdot b'\cdot c$$

$$f(x,y,z)=xy+z' \qquad f'=(xy)'\cdot(z')'=(x'+y')\cdot z$$

بیان توابع به صورت متعارف و استاندارد

- مین ترم ها : جملات حاصل ضربی که شامل همه متغیرهای یک تابع یا مکمل آنها باشد.
- مثال برای سه متغیر:

$$f(x,y,z)$$
$$xyz \quad , \quad x'y'z$$

- ماکس ترم ها : جملات حاصل جمعی که شامل همه متغیرهای یک تابع یا مکمل آنها باشد.
- مثال برای سه متغیر:

$$f(x,y,z)$$
$$x+y+z \quad , \quad x'+y+z'$$

- هر تابع دودویی را می توان به صورت جمع مین ترم ها بیان کرد.
- مثال:

$$f(x,y)=xy+x'$$
$$f(x,y)=xy+x'(y+y')$$
$$f(x,y)=xy+x'y+x'y'$$
$$f(x,y)=m_3+m_1+m_0$$
$$f(x,y)=\sum(0,1,3)$$

- روش دیگر به دست آوردن مکمل یک تابع قرار دادن مکمل هر متغیر در دوگان آن تابع است.
- دوگان هر تابع از AND کردن ORها و OR کردن AND ها به دست می آید.
- مثال:

$$f(x,y,z)=xy+z'$$
$$\hat{f}=(x+y)\cdot z'$$
$$f'=(x'+y')\cdot z$$

x	y	z	مین ترم ها	ماکس ترم ها
0	0	0	$x'y'z'=m_0$	$x+y+z=M_0$
0	0	1	$x'y'z=m_1$	$x+y+z'=M_1$
0	1	0	$x'yz'=m_2$	$x+y'+z=M_2$
0	1	1	$x'yz=m_3$	$x+y'+z'=M_3$
1	0	0	$xy'z'=m_4$	$x'+y+z=M_4$
1	0	1	$xy'z=m_5$	$x'+y+z'=M_5$
1	1	0	$xyz'=m_6$	$x'+y'+z=M_6$
1	1	1	$xyz=m_7$	$x'+y'+z'=M_7$

$$f(A,B,C,D) \qquad AB'C'D=m_?$$

$$f(A,B,C,D) \qquad A+B'+D+C'=M_?$$

- مثال:

$$f(x,y,z)=xy+z'$$
$$f(x,y,z)=xy(z+z')+z'(x+x')$$
$$f(x,y,z)=xyz+xyz'+z'x(y+y')+z'x'(y+y')$$
$$f(x,y,z)=xyz+xyz'+z'xy+z'xy'+z'x'y+z'x'y'$$
$$f(x,y,z)=m_7+m_6+m_6+m_4+m_2+m_0$$
$$f(x,y,z)=\sum(0,2,4,6,7)$$

$$f(x,y,z)=xy+z'$$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x,y,z)=x'y'z'+x'yz'+xy'z'+xyz'+xyz$$
$$f(x,y,z)=m_0+m_2+m_4+m_6+m_7=\sum(0,2,4,6,7)$$

- نکته:

$$f(x,y,z)$$
$$m_6=?$$
$$m_6=xyz'$$
$$(m_6)'=(xyz')'=x'+y'+z=M_?$$
$$(m_6)'=M_6$$

- درحالت کلی:

$$(m_i)'=M_i$$

- هر تابع دودویی را می توان به صورت ضرب ماکس ترم ها بیان کرد.

$$f(x,y,z)=xy+z'$$

- مثال:

$$f(x,y,z)=(x+z')\cdot(y+z')$$
$$f(x,y,z)=(x+z'+yy')\cdot(y+z'+xx')$$
$$f(x,y,z)=(x+z'+y)\cdot(x+z'+y')\cdot(y+z'+x)\cdot(y+z'+x')$$
$$f(x,y,z)=M_1\cdot M_3\cdot M_1\cdot M_5$$
$$f(x,y,z)=\prod(1,3,5)$$

- نکته:

برای تبدیل یک تابع از حالت جمع مین ترمها به ضرب ماکس ترمها کافیست اندیسهایی که در یک حالت بیان شده اند ، در حالت دیگر در نظر گرفته نشوند و بالعکس.

مثال:

$$f(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,5,7,8,9,10,13,14)=\prod ?$$

$$f(A,B,C,D)=\prod(3,4,6,11,12,15)$$

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f'(x,y,z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$f(x,y,z)=m_0+m_2+m_4+m_6+m_7=\sum(0,2,4,6,7)$$

$$f'(x,y,z)=m_1+m_3+m_5$$

$$f(x,y,z)=(f')'=(m_1+m_3+m_5)'$$

$$f(x,y,z)=m_1'\cdot m_3'\cdot m_5'$$

$$f(x,y,z)=M_1\cdot M_3\cdot M_5=\prod(1,3,5)$$

- بیان کردن تابع بصورت جمع مین ترم ها یا ضرب ماکس ترم ها را فرم متعارف بیان یک تابع می نامیم.
- بیان کردن تابع بصورت جمع حاصل ضربها یا ضرب حاصل جمعها را فرم استاندارد بیان یک تابع می نامیم.

$$f(x,y)=xy+x'y$$

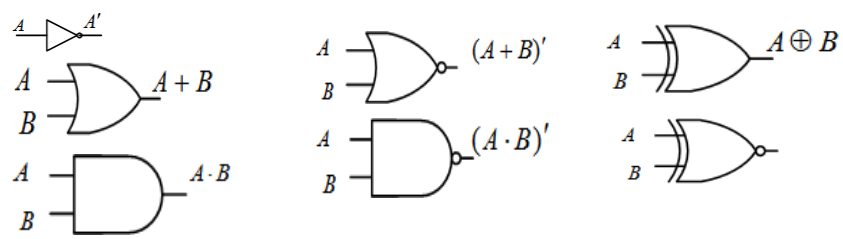
$$f_1(x,y,z)=xy+z'$$

$$f_2(x,y,z)=(x+y')\cdot z'$$

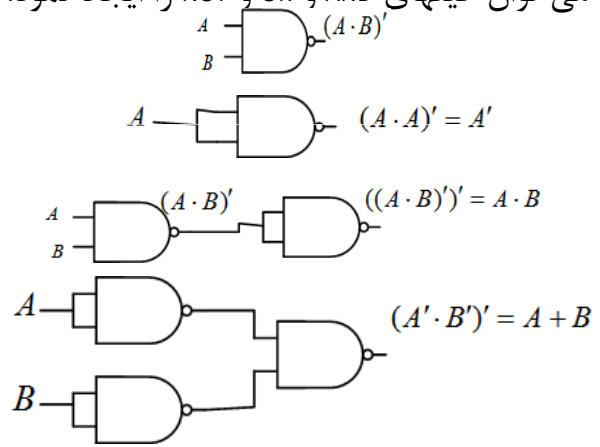
$$f_3(x,y,z)=xy+z'(x+y')$$

گیتهای منطقی

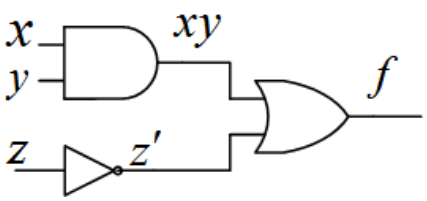
A	B	NOT(A')	OR(A+B)	AND(A.B)	NOR	NAND	XOR	XNOR
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1



- نکته: فقط با استفاده از گیتهای NAND (یا NOR) می توان هر تابعی را پیاده سازی نمود.
- برای اثبات این مطلب نشان می دهیم که با استفاده از گیتهای NAND می توان گیتهای AND و OR و NOT را ایجاد نمود.



پیاده سازی توابع دودویی

- از آنجا که هر تابع دودویی را می توان به صورت جمع حاصلضربها و یا ضرب حاصل جمعها بیان کرد، با استفاده از گیتهای AND و OR و NOT می توان هر تابعی را پیاده سازی نمود.

$$f_1(x, y, z) = xy + z'$$