محاسبه انتگرال معین توابع قدرمطلق دار:

قبلاً در مثال راجع به توابع قدرمطلق دار (ساده) که عبارت داخل قدر فقط مثبت یا فقط منفی بود و حل کردیم. حال به محاسبه این انتگرالها در حالتی می‌پردازیم که عبارت داخل قدر دارای هر علامتی و بخصوص با چندبار تغییر علامت بر بازه انتگرال‌گیری باشد.

توجه کنید که در جدول انتگرالها فرمول خاصی برای انتگرال‌گیری از توابع دارای قدرمطلق ارائه نکردیم و در اینجا از ساده کردن عبارت استفاده می‌نمائیم.

روش حل: برای حل این مسائل ابتدا عبارت یا عبارتهای داخل قدرمطلق(ها) را تعیین علامت می‌نمائیم و یک جدول تعیین علامت تشکیل می‌دهیم. سپس برای هر قسمت از جدول براساس علامت بدست آمده قدرمطلق عبارتها را حذف می‌نمائیم و عبارات را بدون قدرمطلق می‌نویسیم. حال با شکستن انتگرال بر روی بازه های موجود و جایگزینی عبارات بدون قدرمطلق در آنها به سراغ انتگرال‌گیری معمول می‌رویم. پس به صورت خلاصه و الگوریتم‌دار:

تکنیک محاسباتی:

1) محاسبه ریشه های عبارات داخل قدر ⟸ رسم یک جدول تعیین علامت
2) شکستن انتگرال در نقاط با تغییر علامت در جدول
3) برداشتن قدرمطلق موجود در هر انتگرال
4) محاسبه هر انتگرال
5) جمع نهایی پاسخها

توجه کنید $|x+1|$ نه زوج است و نه فرد.

مثال: انتگرال $I=\int_{-2}^{2}|x+1|\,dx$ را بیابید.

حل: مرحله ۱ ابتدا تعیین علامت:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow$$

x	-2	الف	-1	ب	2
$x+1$		$-$	0	$+$	

مرحله ۲ شکستن انتگرال:

$$I=\underbrace{\int_{-2}^{-1}|x+1|\,dx}_{\text{الف}}+\underbrace{\int_{-1}^{2}|x+1|\,dx}_{\text{ب}}$$

(داخل قدر منفی) (داخل قدر مثبت)

می توان همزمان انجام داد:

مرحله ۳ برداشتن قدر مطلق:

$$=\underbrace{\int_{-2}^{-1}-x-1\,dx}_{\text{الف}}+\underbrace{\int_{-1}^{2}x+1\,dx}_{\text{ب}}$$

مرحله ۴ محاسبه هر انتگرال:

الف: $\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx=-\frac{x^2}{2}-x\Big|_{-2}^{-1}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-\left(\cancel{-\frac{4}{2}+2}\right)=\frac{1}{2}$ (صفر)

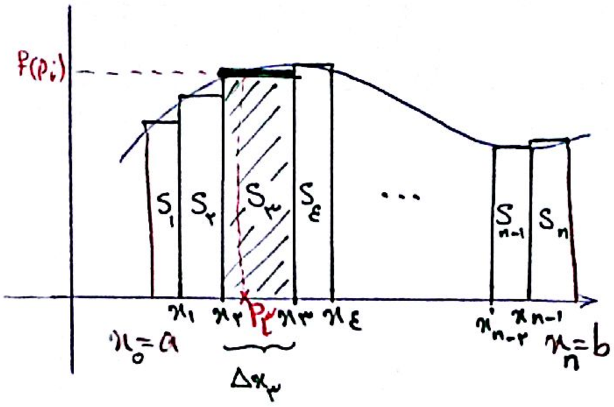
ب: $\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{2}=\left(\frac{4}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=4+\frac{1}{2}$

مرحله ۵ جمع بندی پاسخ:

$$I=\text{الف}+\text{ب}=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(4+\frac{1}{2}\right)=\underline{5}\ \square$$

مفهوم هندسی انتگرال معین :

انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ مساحت زیر منحنی تابع $f(x)$ را در بالای محور x ها و بین دو خط $x=a$ و $x=b$ (روی بازه $[a,b]$) محاسبه می‌کند.



$p_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$S_i = f(p_i)\Delta x_i \Rightarrow S_{\text{کل}} \simeq \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

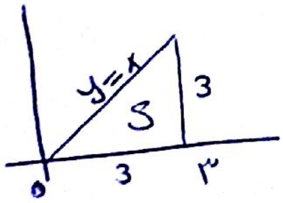
برای دقت بیشتر باید تعداد نوارهای مستطیلی را زیاد کرد که در نتیجه $n \to \infty$ یا $\max_i\{\Delta x_i\} \to 0$ ($\hookrightarrow dx$)

به این گونه جمعی که روی بازه‌های با طول بسیار کوچک محاسبه می‌شوند جمع پیوسته یا انتگرال معین می‌گوییم پس:

$$\boxed{S_{\text{کل}} = \int_a^b f(x)\,dx} := \lim_{\max_i\{\Delta x_i\} \to 0} \sum f(p_i)\Delta x_i$$

مثال: مساحت زیر تابع $y=x$ را روی بازه $[0,3]$ بیابید.

الف



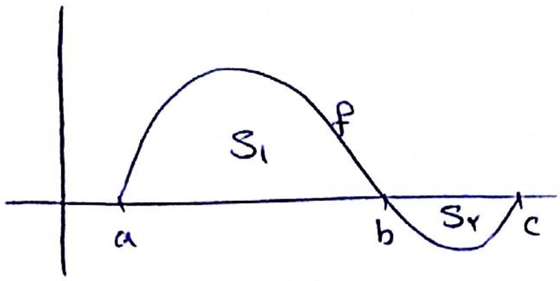
$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$ (هندسی)

ب (انتگرال معین) $S = \int_0^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$

نکته مهم :

انتگرال معین مساحت بالای محور x را محاسبه می کند که اگر نمودار تابع یا قسمتی از آن زیر محور قرار بگیرد ، مساحت مربوط به آن قسمت را به صورت منفی خواهد دارد .

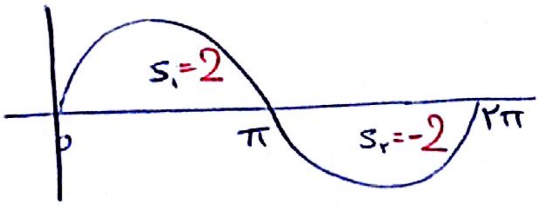
به بیان ساده تر انتگرال معین تفاضل مساحت بین نمودار تابع و محور x را در بالا و پایین محور محاسبه می کند.



$$\int_a^c f(x)dx = S_1 - S_2$$

اگر حاصل + باشد مساحت قسمت بالا بیشتر است و اگر منفی باشد مساحت قسمت پایین بیشتر است و اگر حاصل صفر شود ، مساحت بالا و پایین برابر است :

مثال: مساحت تابع $y=\sin x$ را در بازه $[0,2\pi]$ محاسبه کنید.



ترم: $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = +1+1=2$

$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = -1-1=-2$

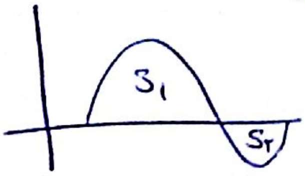
$$\int_0^{2\pi} \sin x = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -1+1 = 0$$

جمع مساحت بالا و پایین & تساوی مساحت بالا و پایین.

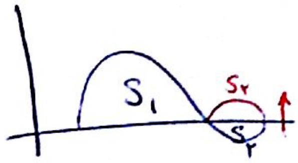
انتگرال معین و مساحت :

با توجه به نکات قبل برای محاسبه مساحت (کامل) بین نمودار و محور xها بدون منفی کردن مساحت زیر محور باید از تابع انتگرالده «قدرمطلق» بگیریم تا کل مساحت را مثبت محاسبه کند:

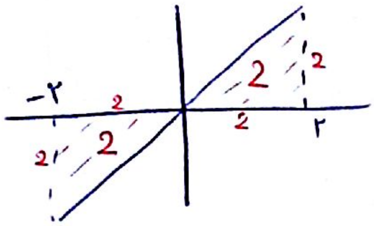
انتگرال معین : $\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2$



مساحت : $\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1 + S_2$



مثال: انتگرال معین و مساحت محصور به نمودار تابع $y=x$ را بر بازه $[-2,2]$ بیابید.



تابع فرد

انتگرال معین : $\int_{-2}^{2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$

مساحت : $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$

$|x| \to x = 0 \Rightarrow$

x	-2	0	2
x	$-$	0	$+$

$= \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$

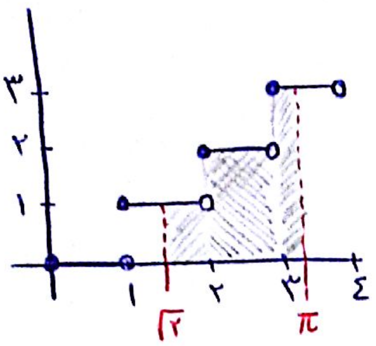
$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = (0+2) + (2-0) = 4$

محاسبه با دقت !! :
تابع زوج
$2\int_0^2 |x|\,dx = 2\int_0^2 x\,dx = 4$

هردو را با شکل مقایسه کنید.

باتوجه به این نکات می‌توان برخی مسائل دیگر را با کمک مساحت نیز حل نمود:

مثال: حاصل $\int_{\sqrt{2}}^{\pi} [x]\,dx$ چیست؟



راه اول

مساحت $= (2-\sqrt{2})\times 1 + (3-2)\times 2 + (\pi-3)\times 3$

$$= 3\pi - 5 - \sqrt{2} = \int_{\sqrt{2}}^{\pi} [x]\,dx$$

راه دوم

انتگرال: $\int_{\sqrt{2}}^{\pi} [x]\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{2} [x]\,dx + \int_{2}^{3} [x]\,dx + \int_{3}^{\pi} [x]\,dx$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} 1\,dx + \int_{2}^{3} 2\,dx + \int_{3}^{\pi} 3\,dx$$

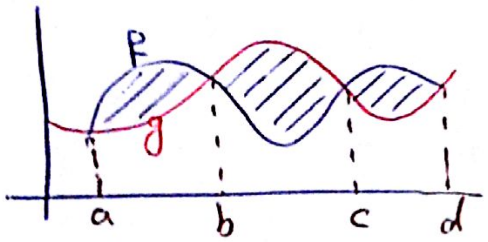
$$= (2-\sqrt{2}) + 2(3-2) + 3(\pi-3) =$$ جواب فوق

کران بالا منهای پایین

محاسبه مساحت محصور بین دو منحنی :

برای محاسبه محصور شده بین نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌یابیم :

الف) اگر بازه مشخص نشده است، دو تابع را تلاقی دهیم و کمترین و بیشترین طول نقاط را به عنوان دو سر بازه در نظر بگیریم :



ب) انتگرال زیر را حساب می‌کنیم :

$$S = \int_a^b |f-g|\, dx$$

مثال : مساحت محصور بین دو منحنی توابع $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ را بیابید.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x^2=\sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

دلخواه ۴

x	0		1	
$x^2-\sqrt{x}$	0	$-$	0	$+$

$16-2>0$

$$S=\int_0^1 |\underbrace{x^2-\sqrt{x}}_{\text{منفی}}|$$

$$= \int_0^1 -x^2+\sqrt{x}\, dx = \int_0^1 -x^2 + x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) - (0) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

مقدار میانگین انتگرال گیری تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$:

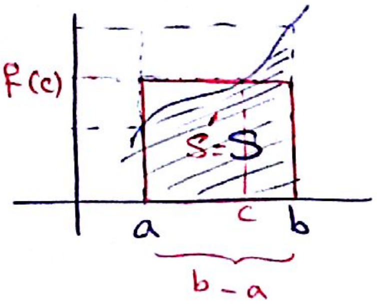
$$\bar{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها :

اگر f تابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشد در این صورت مقدار $c\in[a,b]$ موجود است به طوری که

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

توضیح :



$$S=\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) = S'$$

مثال : مقدار c صادق در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ها را برای $f(x)=3x^2+1$ بر $[1,4]$ بیابید.

حل: $$\int_1^4 3x^2+1\, dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}+x\Big|_1^4$$

$$= (4^3+4)-(1+1) = 66$$

$$f(c)= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{4-1}\times 66 = \frac{66}{3} = 22$$

$$\Rightarrow 3c^2+1=22 \Rightarrow 3c^2=21 \Rightarrow c^2=7 \Rightarrow c=\pm\sqrt{7}$$

$-\sqrt{7}$ غ ق ق $\notin [1,4]$