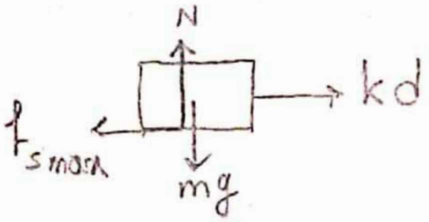
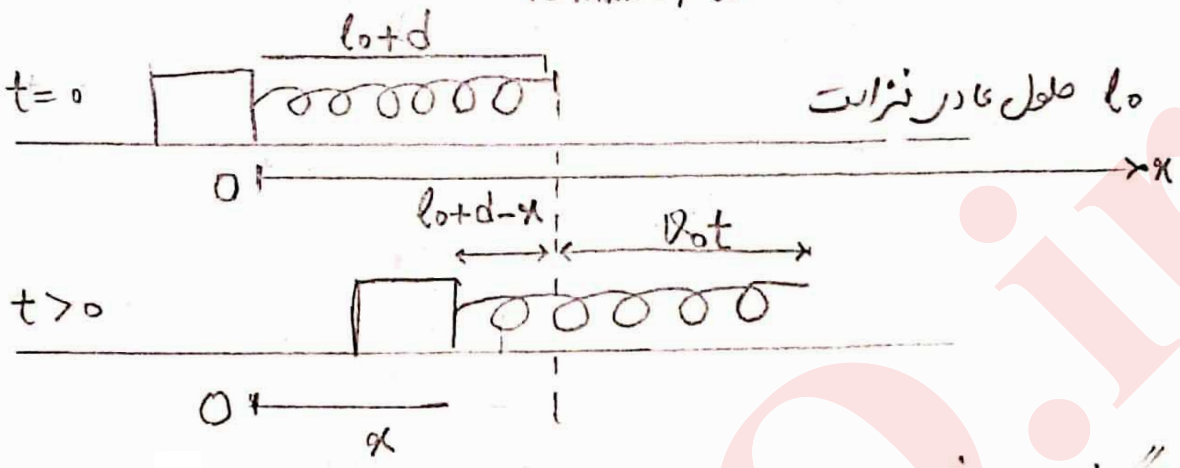
آ)



$$N=mg$$
$$kd=f_{s\,max} \Rightarrow d=\frac{\mu_s mg}{k}$$
$$f_{s\,max}=\mu_s N$$

ب) l_0 طول عادی فنر است



کشیدگی فنر در لحظهٔ t، $(l_0+d-x+v_0t)-l_0$ است، در نتیجه

$$N=mg$$
$$k(d-x+v_0t)-f_k=ma \Rightarrow a=\frac{k}{m}(v_0t-x)+(\mu_s-\mu_k)g \quad (1)$$
$$f_k=\mu_k N$$

پ)

$$a(t)=\frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2(A\sin\omega t+B\cos\omega t)$$
$$=\omega^2(A\omega t+B-x(t)) \quad (2)$$

از معادلات (۱) و (۲):

$$\omega^2(A\omega t+B-x)=\frac{k}{m}(v_0t-x)+(\mu_s-\mu_k)g$$

در نتیجه

$$\omega^2=\frac{k}{m}, \quad A\omega^3=\frac{k}{m}v_0, \quad \omega^2B=(\mu_s-\mu_k)g$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad B=\frac{mg}{k}(\mu_s-\mu_k)$$

ت) طول فنر در لحظهٔ t:

$$l(t)=l_0+d-x+v_0t$$
$$=l_0+\frac{\mu_s mg}{k}-A(\omega t-\sin\omega t)-B(1-\cos\omega t)+v_0t$$

$$\ell(t) = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + A\left(\sin\omega t + \frac{B}{A}\cos\omega t\right)$$

اگر بنویسیم

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{g}{v_0}\,(\mu_s - \mu_k) = \tan\theta$$

$$\sin\omega t + \frac{B}{A}\cos\omega t = \sin\omega t + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\omega t$$

$$= \frac{\sin(\omega t+\theta)}{\cos\theta}$$

و با توجه به راهنمایی:

$$l = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + \frac{A}{\cos\theta}\sin(\omega t+\theta)$$

$$\sin(\omega t+\theta) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$ بیشترین طول فنر برای اولین بار

$$\sin(\omega t+\theta) = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$$ کمترین طول فنر برای اولین بار

ث) داریم

$$x(t) = A\omega t + B - \frac{A}{\cos\theta}\sin(\omega t+\theta)$$

$$v(t) = A\omega - \frac{A\omega}{\cos\theta}\cos(\omega t+\theta)$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t+\theta) = \cos\theta$$

$$\omega t+\theta = \theta,\ 2\pi-\theta,\ 2\pi+\theta,\ \ldots$$

در $t=0$ که سرعت جسم صفر است.

اولین زمان بعدی که سرعت صفر می‌شود $\omega t+\theta = 2\pi-\theta$ است و لذا

$$t_1 = \frac{2}{\omega}(\pi-\theta)$$

ج) طول فنر در لحظهٔ t_1 برابر است با

$$\ell(t_1) = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + \frac{A}{\cos\theta}(-\sin\theta)$$

و کشیدگی فنر در لحظهٔ t_1:

$$\ell(t_1) - l_0 = \frac{mg}{k}(2\mu_k - \mu_s) < d$$

و مدتی که طول می‌کشد طول فنر به d برسد، T، برابر است با

$$d - (\ell(t_1) - l_0) = v_0 T \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2mg}{kv_0}(\mu_s - \mu_k)$$

بخش اول :

$$y_1(t) = A\sin(\omega t+\phi)$$

$$y_1(0) = -A \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y_1(t) = -A\cos\omega t$$

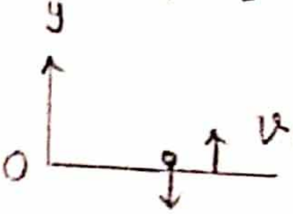
$$v_1(t) = A\omega\sin\omega t$$

۲)

$$h = \frac{1}{2}g t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

• $y_2 = h$



$v_1(\frac{T}{4}) = A\omega$

$v_2(\frac{T}{4}) = -\sqrt{2gh} \equiv -v_0$

ب) $\Rightarrow v_1(\frac{T}{4}) - v_2(\frac{T}{4}) = v_2'(\frac{T}{4}) - v_1(\frac{T}{4})$

اگر v_0 اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدن به $y=0$ باشد می‌خواهیم $v_2'(\frac{T}{4}) = 2v_0$.

یعنی:

$$A\omega - (-v_0) = 2v_0 - A\omega \Rightarrow A\omega = \frac{v_0}{2} \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega} = \frac{2h}{\pi}$$

پ) ✓ بعد از اولین برخورد؛ توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_1 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = 4h$ است.

دومین برخورد نیز در $y=0$ اتفاق می‌افتد، زیرا زمان رفت توپ به $y=h_1$ و برگشت آن به $y=0$ برابر $4t_0 = T$ و زمان دومین برخورد $t = T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4}$ است که $y_1(\frac{5T}{4}) = 0$، در این لحظه $v_1(\frac{5T}{4}) = A\omega$ است.

مجدداً برخورد در $y=0$ را بررسی می‌کنیم

$$A\omega - (-2v_0) = v_2'(\frac{5T}{4}) - A\omega \Rightarrow v_2'(\frac{5T}{4}) = 3v_0$$

✓ بعد از دومین برخورد؛ توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $3v_0$ پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_2 = \frac{(3v_0)^2}{2g} = 9h$ است.

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $6t_0+5t_0=11t_0=11\frac{T}{4}$ اتفاق می‌افتد.

در این لحظه $v_1(\frac{11T}{4})=-A\omega$ است.

برخورد در $y=0$:

$$-A\omega-(-3v_0)=v_2'(\frac{11T}{4})-(-A\omega) \Rightarrow v_2'(\frac{11T}{4})=2v_0$$

✓ بعد از سومین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_3=\frac{(2v_0)^2}{2g}=4h$ خواهد بود.

چهارمین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $4t_0+11t_0=15t_0=15\frac{T}{4}$ اتفاق می‌افتد. در این لحظه $v_1(\frac{15T}{4})=-A\omega$ است.

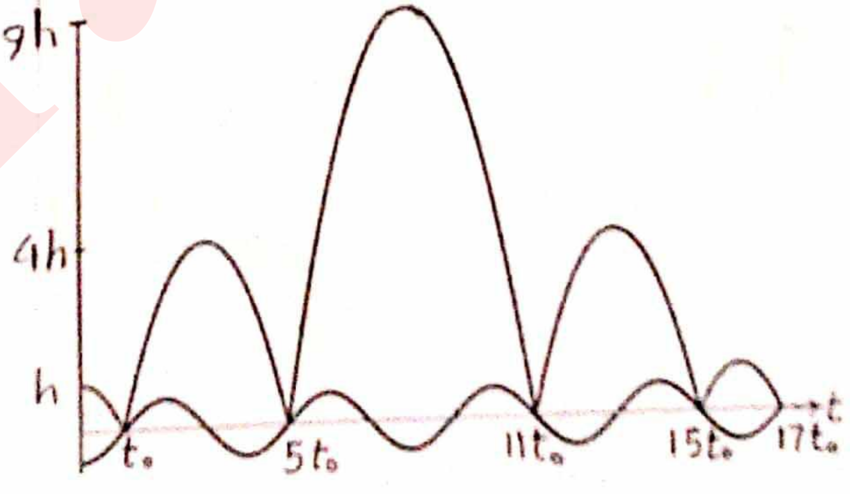
برخورد در $y=0$:

$$-A\omega-(-2v_0)=v_2'(\frac{15T}{4})-(-A\omega) \Rightarrow v_2'(\frac{15T}{4})=v_0$$

✓ بعد از چهارمین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت v_0 پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_4=\frac{v_0^2}{2g}=h$ خواهد بود

از این به بعد حرکت تکرار می‌شود.

ت)



در صورتی که شکل تکه تکه رسم شده باشد نیز قابل قبول خواهد بود

بخش دوم :

$y_1(t) = A\sin(\omega t+\phi)$

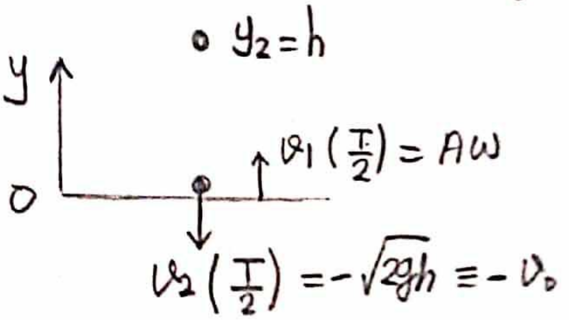
$y_1(0)=0$ و $v_1(0)<0 \Rightarrow \phi=\pi \Rightarrow y_1(t)=-A\sin\omega t$

$v_1(t)=-A\omega\cos\omega t$

الف) $h=\frac{1}{2}g t_0^2 \Rightarrow t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0=\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}$

$\omega=\pi\sqrt{\frac{g}{2h}}$

ب)



$\Rightarrow v_1(\frac{T}{2})-v_2(\frac{T}{2})=v_2'(\frac{T}{2})-v_1(\frac{T}{2})$

اگر v_2' اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدن به $y=0$ باشد، می‌خواهیم $v_2'(\frac{T}{2})=2v_0$.

یعنی: $A\omega-(-v_0)=2v_0-A\omega \Rightarrow A\omega=\frac{v_0}{2}\Rightarrow A=\frac{h}{\pi}$

ج) ✓ بعد از اولین برخورد؛ سرعت توپ به سمت بالا $2v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_1=\frac{(2v_0)^2}{2g}=4h$ است.

دومین برخورد در $y=0$ و در زمان $4t_0+t_0=5t_0=\frac{5T}{2}$ اتفاق می‌افتد. در این لحظه $v_1(\frac{5T}{2})=A\omega$ است.

$A\omega-(-2v_0)=v_2'(\frac{5T}{2})-A\omega \Rightarrow v_2'(\frac{5T}{2})=3v_0$

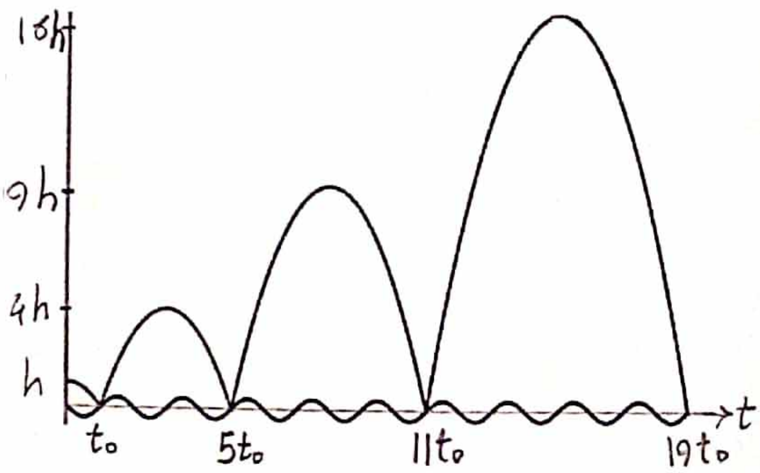
✓ بعد از دومین برخورد؛ سرعت توپ به سمت بالا $3v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_2=\frac{(3v_0)^2}{2g}=9h$ است.

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $6t_0+5t_0=11t_0=11\frac{T}{2}$ اتفاق می‌افتد. در این لحظه $v_1(\frac{11T}{2})=A\omega$ است.

$A\omega-(-3v_0)=v_2'(\frac{11T}{2})-A\omega \Rightarrow v_2'(\frac{11T}{2})=4v_0$

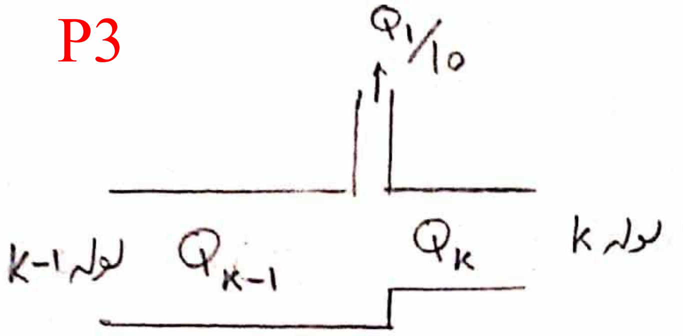
✓ بعد از سومین برخورد؛ سرعت توپ به سمت بالا $4v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_3=\frac{(4v_0)^2}{2g}=16h$ است.

د) وضعیت به ترتیب بالا ادامه می‌یابد به طوری که بعد از n امین برخورد، سرعت توپ به سمت بالا $(n+1)v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_n=(n+1)^2h$ خواهد بود.



در صورتی که که شکل
تکه تکه رسم شده
باشد نیز قابل
قبول خواهد بود

P3



آ) به دلیل تقارن آب درون لوله‌ها داریم

$$Q_K = Q_{K-1} - \frac{Q_1}{10}$$

$$Q_{K-1} = Q_{K-2} - \frac{Q_1}{10}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$Q_2 = Q_1 - \frac{Q_1}{10}$$

از جمع روابط فوق

$$Q_K = Q_1 - (K-1)\frac{Q_1}{10} = \left(\frac{11-k}{10}\right) Q_1$$

ب) اگر D_k قطر لوله k ام باشد و طبق فرض شده سرعت آب در همه لوله‌ها یکسان و برابر v باشد آهنگ شارش آب در لوله k ام برابر است با $Q_K = \pi\left(\frac{D_K}{2}\right)^2 v$. با استفاده از نتیجه قسمت آ:

$$\pi\left(\frac{D_K}{2}\right)^2 v = \frac{11-k}{10}\,\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 v \Rightarrow D_K = D_1\sqrt{\frac{11-k}{10}}$$

پ) به ازای $k=2$: $\frac{D_2}{D_1} = \sqrt{0.9} = 0.95$ ، $\frac{D_{10}}{D_1} = \sqrt{0.1} = 0.32$

و الی آخر

D_2/D_1	D_3/D_1	D_4/D_1	D_5/D_1	D_6/D_1	D_7/D_1	D_8/D_1	D_9/D_1	D_{10}/D_1
0.95	0.89	0.84	0.77	0.71	0.63	0.55	0.45	0.32

پاسخ‌های دارای اختلاف ± 0.01 با جدول فوق نیز پذیرفته می‌شوند.

ت) اگر ΔP اختلاف فشار آب بین ابتدا و انتهای لوله k و l طول لوله k ام باشد

$$\Delta P = -\frac{c l Q_K}{D_K^4} = \rho g \Delta h_K$$

$$\Delta h_K = -\frac{c l}{\rho g}\,\frac{Q_1}{D_1^4}\,\frac{10}{11-k} = -0.0012\left(\frac{10}{11-k}\right) m$$

ث)

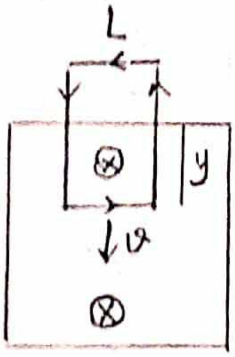
$\Delta h_1 = -0.12$ cm

$\Delta h_5 = -0.20$ cm

$\Delta h_{10}\ -1.2$ cm

پاسخ‌های با علامت + نیز قابل قبول است.

آ) مطابق قانون لنز جهت جریان القایی باید پادساعتگرد باشد،



$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLy) = -BL\frac{dy}{dt} = -BL\upsilon$$

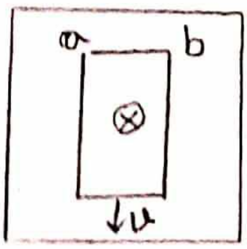
$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2L^2\upsilon^2}{R} = -\vec F\cdot\vec\upsilon \Rightarrow \vec F = -\frac{B^2L^2\vec\upsilon}{R}$$

بنابراین $k = \frac{B^2L^2}{R}$

ب)

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -NBL\upsilon$$

$$P = \frac{N^2B^2L^2\upsilon^2}{NR} \Rightarrow k = \frac{NB^2L^2}{R}$$



پ) به بار الکتریکی q که با سرعت $\vec\upsilon$ در میدان مغناطیسی $\vec B$ حرکت می‌کند نیروی $q\vec\upsilon\times\vec B$ وارد می‌شود. بنابراین الکترون‌ها به سمت a رانده می‌شوند و در b کمبود بار منفی وجود خواهد داشت. پس یک میدان الکتریکی مانند $\vec E$ از b به a به وجود می‌آید،

$$q\vec E = q\vec\upsilon\times\vec B \Rightarrow E = \upsilon b$$

اما $V_b - V_a = EL$ ، در نتیجه:

$$V_b - V_a = \upsilon bL$$

ت) در وضعیتی که بخشی از حلقه داخل ناحیه میدان مغناطیسی قرار دارد، شار گذرنده از آن با زمان تغییر می‌کند و یک نیروی رو به بالا به حلقه وارد می‌شود که در قسمت آ، $\vec F = -k\vec\upsilon$ ، به دست آمد.

$$\begin{cases} Mg - T - k\upsilon = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g - \frac{k\upsilon}{M+m}$$

در وضعیتی که کل حلقه خارج از ناحیه میدان است و یا کل حلقه داخل ناحیه میدان است، شار گذرنده از آن با زمان تغییر نمی‌کند و $\vec F = \vec 0$ ، یا $k = 0$.

$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g$$

ث)

$$v(t) = \alpha + (v_0 - \alpha) e^{-\beta t}$$

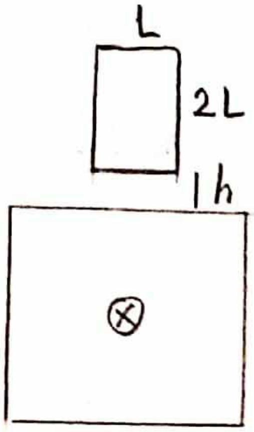
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 - \beta (v_0 - \alpha) e^{-\beta t} = -\beta (v - \alpha)$$

با قرار دادن در معادله به دست آمده در قسمت ت :

$$-\beta (v - \alpha) = \left(\frac{M-m}{M+m}\right) g - \frac{kv}{M+m}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \frac{k}{M+m} \quad , \quad \alpha = \frac{(M-m)g}{k}$$



ج) در لحظهٔ رسیدن لبهٔ پایینی حلقه به لبهٔ بالایی میدان سرعت سقوط حلقه $v_0 = \sqrt{2gh}$ است ، می خواهیم سرعت حلقه در لحظهٔ $t=0$ چنان باشد که $v(t)$ مستقل از زمان باشد ، یعنی $v_0 - \alpha = 0$

$$\sqrt{2gh} = \frac{(M-m)g}{k} \Rightarrow h = \frac{(M-m)^2 g}{2k^2}$$

چ) هنگامی که حلقه با سرعت حد حرکت می کند $a=0$ و از قسمت ت داریم

$$v_T = -\frac{1}{k} T + \frac{Mg}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{0.03}{0.04} \Rightarrow k = \frac{4}{3} \ , \ \frac{Mg}{k} = 0.1$$

و $g = 10\ m/s^2$ ، در نتیجه

$$M = \frac{4}{3}(0.01)\ kg \simeq 13 g$$

ح) از بخش T) $R = \frac{B^2 L^2}{k}$ ، از طرف دیگر $R = \rho \frac{6L}{A}$ ، A مساحت سطح مقطع سیم است ، همچنین چگالی سیم $D = \frac{M}{A(6L)}$ است ، در نتیجه

$$D = \frac{M}{6\left(\frac{6\rho k}{B^2}\right)} \Rightarrow D = \frac{MB^2}{36\rho k} = \frac{B^2}{36\rho g}(0.1) \Rightarrow D = \frac{(0.6T)^2 (0.1)}{36 \times 4 \times 10^{-8}\ \Omega.m \times 10\ \frac{m}{s^2}}$$

$$D = 2500\ kg/m^3$$

P5

(آ

$$n_i(t+\Delta t) = p\,n_{i-1}(t) + q\,n_{i+1}(t) + (1-p-q)\,n_i(t)$$

(ب $n_i(t+\Delta t) = n_i(t)$ درنتیجه

$$n_i(t) = \frac{p}{p+q}\,n_{i-1}(t) + \frac{q}{p+q}\,n_{i+1}(t)$$

اگر بنویسیم $\alpha = \frac{p}{p+q}$ و $\beta = \frac{q}{p+q}$ خواهیم داشت

$$n_i = \alpha\,n_{i-1} + \beta\,n_{i+1}$$

اگر جواب به صورت $n_i = x^i$ باشد

$$x^i = \alpha\,x^{i-1} + \beta\,x^{i+1} \Rightarrow \beta x^2 - x + \alpha = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\beta}}{2\beta} = \frac{(p+q) \pm (p-q)}{2q} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{p}{q} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$n_i = A_1\left(\frac{p}{q}\right)^i + A_2$$

(پ

$$\sum_{i=0}^{k} n_i = \sum_{i=0}^{k}\left(A_1\left(\frac{p}{q}\right)^i + A_2\right)$$

$$= A_1\,\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}}{1-\frac{p}{q}} + A_2\,(k+1)$$

(ت

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(n_i\,pQ - n_{i+1}\,qQ\right)$$

$$= \frac{Q}{\Delta t}\left(p\left(A_1\left(\frac{p}{q}\right)^i + A_2\right) - q\left(A_1\left(\frac{p}{q}\right)^{i+1} + A_2\right)\right)$$

$$I = \frac{Q}{\Delta t}\,A_2\,(p-q)$$

ث) $I=0 \Rightarrow A_2=0$ و

$$n_0 = A_1 \quad , \quad n_k = A_1\left(\frac{P}{q}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{P}{q}\right)^k = \frac{n_k}{n_0}$$

$$\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{P}{q} = \frac{\left(a - bQ\frac{V_0}{k}\right)\Delta t}{\left(a+bQ\frac{V_0}{k}\right)\Delta t} = \frac{1-\frac{bQ}{a}\frac{V_0}{k}}{1+\frac{bQ}{a}\frac{V_0}{k}}$$

با استفاده از راهنمایی !

$$\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} \simeq 1 - 2\,\frac{bQ}{a}\,\frac{V_0}{k}$$

$$V_0 \simeq \frac{ak}{2bQ}\left(1 - \left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

ج) $$I = \frac{QA_2}{\Delta t}(P-q) = \frac{QA_2}{\Delta t}\left(\left(a - bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t - \left(a+bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t\right)$$

$$I = -2bQ^2\frac{V}{k}A_2 \Rightarrow A_2 = -\frac{Ik}{2bQ^2V}$$

از طرفی داریم

$$n_0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2V}$$

$$n_k = A_1\left(\frac{P}{q}\right)^k + A_2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{P}{q}\right)^k = \frac{n_k - A_2}{A_1} = \frac{n_k + \frac{Ik}{2bQ^2V}}{n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2V}}$$

اکنون: $P = \left(a - bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t$ و $q = \left(a+bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t$ در نتیجه

$$\frac{P}{q} = \frac{a - bQ\frac{V}{k}}{a+bQ\frac{V}{k}}$$

با جایگذاری $\left(\frac{P}{q}\right)$ از قسمت قبل خواهیم داشت

$$\frac{a - bQ\frac{V}{k}}{a+bQ\frac{V}{k}} = \left(\frac{n_k + \frac{Ik}{2bQ^2V}}{n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2V}}\right)^{1/k}$$

$$\frac{1-\frac{b}{a}Q\frac{V}{k}}{1+\frac{b}{a}Q\frac{V}{k}} = \left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1+\frac{Ik}{2bQ^2Vn_k}}{1+\frac{Ik}{2bQ^2Vn_0}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

با استفاده از راهنمایی و نتیجه قسمت ث :

$$1-\frac{2bQ}{a}\frac{V}{k} \approx \left(1-\frac{2bQ}{a}\frac{V_0}{k}\right)\left(1+\frac{I}{2bQ^2Vn_k}-\frac{I}{2bQ^2Vn_0}\right)$$

$$2\frac{bQ}{a}\frac{V-V_0}{k} \approx \frac{I}{2bQ^2V}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

اما $V-V_0=RI$ و برای جریان های کوچک

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_0}\left(1-\frac{RI}{V_0}\right)^{-1} \approx \frac{1}{V_0}$$

بنابراین

$$\frac{2bQ}{ak}RI \approx \frac{I}{2bQ^2V_0}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

$$R \approx \frac{ak}{2bQV_0}\frac{1}{2bQ^2}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

از قسمت ب داشتیم $V_0 \approx \frac{ak}{2bQ}\left(1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ ، بنابراین

$$R \approx \frac{1}{2bQ^2}\frac{\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}}{1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{1/k}}$$

P6

(آ

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_v T = 0 + C_v T_0$$

(۱) $$v(t) = \sqrt{\frac{2C_v}{m}\left(T_0 - T(t)\right)}$$

(ب

$$\frac{d}{dt}\left(T V^{\gamma-1}\right) = 0 \quad \text{و} \quad V = AL$$

A مساحت پیستون است.

$\Downarrow$

(۲) $$\frac{dT}{dt}L^{\gamma-1} + T(\gamma-1)L^{\gamma-2}\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dL}{dt} = v(t)$$

(پ از روابط (۱) و (۲) و این که $TL^{\gamma-1} = T_0L_0^{\gamma-1}$ است:

(۳) $$\frac{T_0L_0^{\gamma-1}}{T}\frac{dT}{dt} + (\gamma-1)\left(\frac{T_0L_0^{\gamma-1}}{T}\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} T\sqrt{\frac{2C_v}{m}(T_0-T)} = 0$$

(ت

$$T = T_0 y \quad \text{و} \quad t = t_0 x \quad \Leftarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{mL_0^2}{2C_vT_0}}$$

با قرار دادن در معادله (۳)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + (\gamma-1)\,y^{\frac{1}{\gamma-1}}\sqrt{1-y} = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{dy}{dx} + (\gamma-1)\,y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{1-y} = 0$$

(ث به ازای $\gamma = \frac{5}{3}$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}\sqrt{1-y} = 0$$

$\Downarrow$

(۴) $$\frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{y^{5/2}\sqrt{1-y}}$$

$$x = a\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} + b\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{-1}{2}} + \frac{3b}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(5)\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^{5/2}\sqrt{1-y}}\left(\frac{3b}{2} + \left(\frac{a}{2}-\frac{3b}{2}\right)y\right)$$

از مقایسه (۴) و (۵) $b=1$ و $a=3$ و در نتیجه

$$x = 3\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

ج) $Z = \left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}}$ $\Leftarrow$ $z^3 + 3z - x = 0$

یعنی $a_1=0$ ، $a_2=3$ ، $a_3=-x$ و

$$Q=1,\quad R=\frac{1}{2}x,\quad D = 1+\frac{1}{4}x^2>0$$

در نتیجه

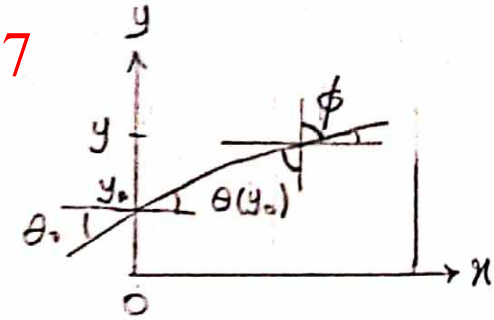
$$\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{2}+\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x}{2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

به توان ۲ می‌رسانیم

$$\frac{1}{y}-1 = \left(\frac{x}{2}+\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$y(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}+\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

P7



۳) هنگام ورود نور از هوا به محلول

$$1\sin\theta_0 = n(y_0)\sin\theta(y_0)$$

در حین عبور نور از لایه‌های مختلف محلول

$$n(y)\sin\phi(y) = C \quad \text{ثابت}$$

که ϕ متمم زاویه شیب منحنی مسیر نور با محور x است، یعنی

$$\cot\phi(y) = \frac{dy}{dx} = -A\alpha\sin\alpha(x-B)$$

بنابراین

$$n(y) = C\sqrt{1+\cot^2\phi}$$

$$= C\sqrt{1+A^2\alpha^2\sin^2\alpha(x-B)}$$

$$= C\sqrt{1+A^2\alpha^2-\alpha^2y^2}$$

در $y=0$ ، $n(y=0)=n_0$ و در نتیجه

$$C = \frac{n_0}{\sqrt{1+A^2\alpha^2}}$$

و

$$n(y) = n_0\sqrt{1-\frac{\alpha^2y^2}{1+A^2\alpha^2}}$$

ب)

$$\frac{1}{1+A^2\alpha^2} = (1+A^2\alpha^2)^{-1} \simeq 1-A^2\alpha^2$$

$$\frac{\alpha^2y^2}{1+A^2\alpha^2} \simeq \alpha^2y^2-(\alpha^2A^2)(\alpha^2y^2)+\cdots \approx \alpha^2y^2$$

$$n(y) \approx n_0\sqrt{1-\alpha^2y^2} = n_0(1-\alpha^2y^2)^{\frac{1}{2}} \approx n_0(1-\frac{1}{2}\alpha^2y^2)$$

$$n(y) \approx n_0(1-\frac{1}{2}\alpha^2y^2)$$

پ) $y(x=0)=y_0 \Rightarrow y_0 = A\cos\alpha B$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \cot\phi(y_0) = \tan\theta(y_0) \Rightarrow \tan\theta(y_0) = A\alpha\sin\alpha B$$

در قسمت آ داشتیم $\sin\theta_0 = n(y_0)\sin\theta(y_0)$. برای زوایای کوچک

$\sin\theta(y_0)\approx\tan\theta(y_0)$ و $\sin\theta_0\approx\theta_0$ در نتیجه

$$\theta_0 \approx n(y_0)A\alpha\sin\alpha B$$

بنابراین:

$$\begin{cases} y_0 = A\cos\alpha B \\ \dfrac{\theta_0}{n(y_0)} = A\alpha\sin\alpha B \end{cases}$$

با $\sin^2\alpha B+\cos^2\alpha B=1$ در نتیجه:

$$A=\sqrt{y_0^2+\frac{\theta_0^2}{\alpha^2}\frac{1}{n^2(y_0)}}$$

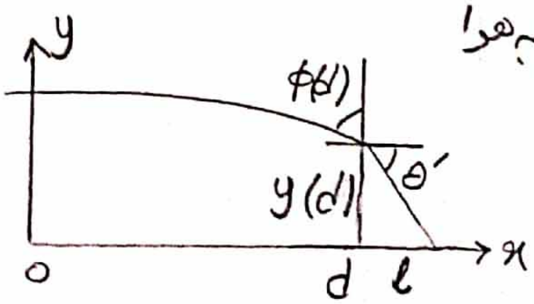
و از $\tan\alpha B=\frac{\theta_0}{\alpha}\frac{1}{y_0 n(y_0)}$ خواهیم داشت:

$$B=\frac{1}{\alpha}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\theta_0}{\alpha}\frac{1}{y_0 n(y_0)}\right)$$

ت) $\theta_0=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow A=y_0 \Rightarrow y=y_0\cos\alpha x$

$n(y)$ موقع خروج ولی داخل محلول برابر است با:

$$n(y=d)\approx n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2\cos^2\alpha d\right)$$



قانون اسنل در موقع خروج پرتو از محلول به هوا

$$1\,\sin\theta' = \cos\phi(d)\, n(y=d)$$

اما

$$-\cot\phi(d) = -y_0\alpha\sin\alpha d$$

و

$$\cos\phi(d) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi(d)}}$$

$$= \frac{|\cot\phi(d)|}{\sqrt{1+\cot^2\phi(d)}} = \frac{\alpha y_0 \sin\alpha d}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d}} = \left(1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d$$

و

$$\cos\phi(d) \approx \alpha y_0 \sin\alpha d$$

در نتیجه با جایگذاری $n(y=d)$

$$\sin\theta' \approx (\alpha y_0 \sin\alpha d)\, n_0 \left(1-\frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2 \cos^2\alpha d\right)$$

مطابق شکل $\tan\theta' = \frac{y_0}{f} = \frac{y(d)}{l}$ و با توجه به کوچک بودن θ'، $\tan\theta' \approx \sin\theta'$:

$$f = \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin\alpha d}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2 \cos^2\alpha d} \approx \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin\alpha d} \Rightarrow f \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin\alpha d}$$

ث)

$$l = f\,\frac{y(d)}{y_0} \Rightarrow l \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin\alpha d}\cos\alpha d = \frac{1}{\alpha n_0}\cot\alpha d$$

ج) از قسمت قبل:

$$l_1 - l_2 = \frac{\cot\alpha d}{\alpha}\left(\frac{1}{n_0(\lambda_1)} - \frac{1}{n_0(\lambda_2)}\right)$$

$$= \frac{\cot\alpha d}{\alpha}\,\frac{n_0(\lambda_2)-n_0(\lambda_1)}{n_0(\lambda_1)\, n_0(\lambda_2)}$$

پس از جایگذاری از $n_0(\lambda) = C + \frac{D}{\lambda^2}$ خواهیم داشت

$$l_1 - l_2 = \frac{\cot\alpha d}{\alpha}\,\frac{D(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(C\lambda_1+D)(C\lambda_2+D)}$$