فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی
شماره - - (بهار - - - -) صص. - - تا - -

آیا حساب متعیّن است؟*

مرتضی منیری

چکیده. آیا حساب متعین و قطعی است؟ به عبارت دیگر، آیا به ازای هر حکم حسابی مربوط به اعداد طبیعی، دلایلی بر درستی یا نادرستی آن حکم وجود دارد؟ برای مثال، آیا شواهدی برای درستی یا نادرستی حدس گولدباخ وجود دارد، حتی اگر ما از آنها مطلع نباشیم؟ در وهلهٔ اول به نظر می‌رسد که پاسخ به وضوح مثبت است. اما چگونه می‌توان مطمئن شد؟ قضیهٔ ناتمامیت گودل در این مورد چه می‌گوید؟ مستقل بودن برخی احکام نظریهٔ مجموعه مانند اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار چه ارتباطی با این موضوع دارد؟ در این مقاله به بررسی این پرسش‌ها می‌پردازیم. علاوه بر این، تاثیر وجود امکانات نامتعارفی از قبیل ماشین‌های محاسبی که قادر به انجام تعدادی نامتناهی دستورالعمل در زمانی متناهی هستند و همچنین دستگاه‌های اثباتی مجهز به قواعد نامتناهی بر پاسخ پرسش‌های فوق را بررسی خواهیم کرد.

۰.۱ بیان مسئله

آیا حساب متعین[۱] است؟ به عبارت دیگر، آیا به ازای هر حکم حسابی، آن حکم یا نقیض آن راست است؟ البته اگر به منطق کلاسیک معتقد باشیم، به نظر می رسد که پاسخ به وضوح مثبت خواهد بود. اما منظور ما از متعین بودن، متعین بودن به مفهوم علمی است. در صورت متعین بودن، می‌بایست متناظر با هر حکم حسابی، شواهد یا دلایلی مرتبط با جهان فیزیکی، وجود داشته باشند که درستی یا نادرستی آن حکم حسابی را معین کنند. بر این اساس، اگر شخصی ادعا کند که با نوعی ارتباط معنوی با عالم افلاطونی، از درستی یا نادرستی احکام حسابی مطلع می‌شود، این را

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00A30; 03A05.
عبارات و کلمات کلیدی. تعین، حساب، ابرماشین، دستگاه اثباتی نامتناهی.

[۱] determinate

نشانه‌ای بر متعین بودن حساب در نظر نمی‌گیریم.

یک راه نشان دادن راست بودن یک حکم حسابی، اثبات آن در یک دستگاه اثباتی اصل موضوعی موجه چون حساب مرتبهٔ اول پئانو[۱] است. اگر راستی اصول پئانو را بپذیریم، نتایج آنها نیز چنین خواهند بود. این فراتر از در نظر گرفتن حساب پئانو به عنوان دستگاهی نمادی و پذیرفتن قراردادی اصول آن است. وجود احکام حسابی مستقل از حساب پئانو، شاهدی بر نامتعین بودن حساب تلقی می‌شود. از طرف دیگر، می‌دانیم که بنابر قضیهٔ اول ناتمامیت گودل[۲] ، هر دستگاه اثباتی معقول برای حساب، ناتمام است. پس اگر برای مثال، حساب پئانو را به عنوان دستگاه معیار بپذیریم، نخواهیم توانست تکلیف راستی یا غلطی همهٔ احکام حسابی را به کمک آن تعیین کنیم و حساب متعین نخواهد بود.

البته قضیه‌های ناتمامیت گودل در مورد نظریه‌های اصل موضوعی مجموعه چون ZF نیز برقرارند، بنابراین می‌بایست نظریهٔ مجموعه را هم نامتعین بدانیم. اما نامتعین بودن حساب به نسبت نامتعین بودن نظریهٔ مجموعه، کمتر مورد تردید بوده است. یک دلیل این تفاوت آن است که احکامی که قضیهٔ ناتمامیت گودل، مستقل بودن آنها را بیان می‌کنند، مانند جملهٔ روسر[۳] ، احکامی مصنوعی محسوب می‌شوند و در مقابل، احکام طبیعی مستقل مشهوری مانند اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار در مورد مجموعه‌ها وجود دارند. البته احکام ریاضی‌واری نیز وجود دارند که از PA مستقل‌اند، مانند آنهایی قضیه‌های مشهور پریس[۴] –هرینگتون[۵] فراهم می‌کنند، بنابراین شاید تأکید بر این تفاوت، چندان موجه نباشد [۷].

در هر حال، با توجه به اینکه اعداد طبیعی اشیائی نزدیک‌تر به شهود ما هستند تا مجموعه‌های نامتناهی، شاید موضوع در مورد آنها حساس‌تر باشد. حال، اگر تمرکز را بر حساب بگذاریم، پرسش این خواهد بود که «آیا علی‌الاصول شواهد پذیرفتنی و قطعی برای تعیین تکلیف راستی یا غلطی هر حکم حسابی می‌تواند وجود داشته باشد؟» به وضوح این شواهد، در صورت وجود، یا می‌توانند از ذهن ما انسان‌ها ناشی شوند و یا از جهان خارج نشأت بگیرند. اما، به طور طبیعی، دو محدودیت شناختی و متافیزیکی، در این مورد وجود دارد [۱۱]. محدودیت‌های شناختی انسان، امکان استفاده از تجربه‌های متناهی ما و محدودیت‌های متافیزیکی امکان استفاده از اشیای انتزاعی مستقل از ما

---

[۱] first-order Peano arithmetic

[۲] Gödel

[۳] Rosser

[۴] Paris

[۵] Harington

انسان‌ها برای توضیح قطعی بودن احکام ریاضی را محدود می‌کنند.
پس پرسش این است که با در نظر گرفتن این محدودیت‌ها، آیا امکانی برای ارائهٔ توضیحی برای تعین حساب وجود دارد. ما این مسئله را «تعین علمی» می‌نامیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا حساب تعین علمی دارد یا نه. برای این منظور، در ادامه برخی امکانات فوق‌العاده را مدنظر قرار خواهیم داد. از جمله این امکانات، ابرماشین‌های محاسب و دستگاه‌های اثباتی نامتناهی هستند. امکان استفاده از این امکانات به ظاهر دست‌نایافتنی را در توجیه متعین بودن حساب بررسی خواهیم کرد.

۲. ابرماشین‌ها و تعین حساب

در این فصل، به ابرماشین‌های تورینگ[۱] می‌پردازیم. ماشین تورینگ یک ابزار محاسباتی ریاضی‌وار ساده است که اولین بار توسط الن تورینگ در سال ۱۹۳۶ میلادی معرفی شد. مهمترین جنبه ماشینهای تورینگ آن است که برای حل هر مسئله محاسباتی، زمانی متناهی صرف می‌کنند. این زمان می‌تواند بطور نجومی طولانی باشد، اما در هر حال، هر ماشین تورینگ برای حل یک مسئله الگوریتمی به زمانی متناهی نیاز خواهد داشت و در نهایت، پس از سپری شدن آن، متوقف خواهد شد. از طرف دیگر، ماشین‌های تورینگ نامتناهی که اخیراً معرفی شده‌اند، اجازه دارند که زمانی نامتناهی صرف حل یک مسئلهٔ الگوریتمی کنند [۴]. این ماشینها قادر خواهند بود بی‌نهایت (شمارا) عملیات محاسباتی را انجام دهند، البته برای این کار به زمانی نامتناهی و دست‌نایافتنی نیاز خواهند داشت.

در عین حال، اخیراً شواهدی بدست آمده است که فرض وجود ماشینی که به طور معمول توانایی کار در زمان نامتناهی داشته باشد، چندان غیرعلمی نیست. این به امکانی باز می‌گردد که نظریهٔ نسبیت عام فراهم می‌کند. ایدهٔ اصلی آن است که اگر با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت کنیم، گذر زمان کند و کندتر می‌شود، و در این صورت زمان کافی برای محاسبه‌های طولانی فراهم خواهد شد. این امکان استفاده از ابرماشین‌ها را فرضی معقول می‌سازد [۶]. منظور از ابرماشین تورینگ، ماشین تورینگ نامتناهی است که بی‌شمار عملیات محاسباتی را در زمانی متناهی انجام می‌دهد. برای مثال، برای بررسی یک حکم عمومی چون فرضیهٔ گولدباخ[۲] ، یک ابرماشین می‌تواند گام‌به‌گام جلو رود و بررسی کند که آیا هر نمونه از این حکم به ازای n، یعنی $G(n)$، به ازای هر n، راست است یا نه. با استقرای ساختاری روی فرمول‌ها، می‌توان نشان داد که در این‌جا حتی می‌توان G را

[۱] supertask Turing machines
[۲] Goldbach's conjecture

با هر فرمول حسابی که قابل بیان در زبان حساب پئانو باشد، تعویض نمود [۲].
البته در حال حاضر، امکان وجود چنین دستگاه‌های محاسباتی، محل بحث‌ها و اختلاف‌های بسیار است و نیاز به زمان است تا این موضوع کاملاً روشن شود. در ادامه، بحث ما مبتنی بر فرض پذیرش امکان وجود چنین ماشینهای محاسب فوق‌العاده‌ای خواهد بود. آیا استفاده از ابرماشین‌ها، در نهایت می‌تواند نشان دهد که حساب متعین است؟ برای مثال، آیا وجود یک ابرماشین که قادر به بررسی همهٔ موارد فرضیهٔ گولدباخ در زمان متناهی باشد، شاهدی تجربی بر درستی یا نادرستی آن خواهد بود. بناسراف[۱] و پاتنم[۲] معتقدند که چنین است:

«اگر ما این موضع را داشته باشیم که رویه‌های ”غیرساختنی“ – یعنی رویه‌هایی که ما را ملزم به انجام بی‌نهایت عملیات در زمان محدود می کند – قابل‌تصور است [پاورقی: به عنوان مثال، اگر کسی یک سری عملیات بی نهایت برای انجام، مثلاً $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، ... و یکی می تواند $S_۱$ را در ۱ دقیقه، $S_۲$ را در $\frac{۱}{۲}$ دقیقه، $S_۳$ را در $\frac{۱}{۴}$ دقیقه و غیره انجام دهد. سپس در عرض ۲ دقیقه، فرد کل سری نامتناهی را تکمیل خواهد کرد.]، اگرچه از نظر فیزیکی ممکن نیست (به دلیل وجود محدودیت در سرعتی که می توان عملیات فیزیکی را با آن انجام داد)، پس می‌توان گفت که «در اصل یک روش تأیید / رد برای نظریهٔ اعداد وجود دارد.»

اما وارن[۳] و وکسمن[۴] اخیراً استدلال کرده‌اند که چنین نیست [۱۰]. یعنی، حتی با وجود ابرماشین‌ها هم نمی‌توانیم ادعا کنیم که حساب متعین است. دلیل آنها این است که این ماشین‌ها شاهد جدیدی اضافه نمی‌کنند، زیرا آنها نمی‌توانند راستی یا غلطی یک حکم حسابی را ”توضیح“ دهند. اما منظور آنها از توضیح چیست؟ چگونه می‌توان راستی یک حکم حسابی را توضیح داد؟ مانند آنچه که در فصل ۱ دیدیم، این شواهد، از نظر وارن و وکسمن می‌بایست از دیدگاه علمی پذیرفتنی باشند. این شرطی است که به نظر آنها، هر توضیح معقولی باید داشته باشد.
همان‌گونه که دیدیم، یک راه برای توضیح راستی یک حکم حسابی، ارائهٔ برهانی برای آن در یک دستگاه اصل موضوعی موجه حسابی نظیر حساب مرتبهٔ اول پئانو است. اگر اصول حساب پئانو را موجه بدانیم، پذیرش نتایج منطقی آن طبیعی می‌نماید. البته، هر حکم حسابی تصمیم‌پذیر[۵] $A(n)$، اگر راست باشد، در حساب مرتبه اول پئانو اثبات‌پذیر خواهد بود [۳]. بنابراین، روند کاری در بالا،

[۱] Benacerraf
[۲] Putnam
[۳] Warren
[۴] Waxman
[۵] decidable

توصیف شده برای یک ابرماشین، با فرض وجود ابرماشین، توجیهی برای درستی حکم غیرصوری «$\forall nA(n)$» بدست می‌دهد. البته، حکم غیر صوری فوق فاصلهٔ زیادی تا اثباتی برای «$\forall xA(x)$» به عنوان فرمولی در زبان مرتبهٔ اول حساب دارد. برای اثبات جملهٔ اخیر، یا می‌بایست برهانی منطقی در حساب پئانو برای آن ارائه داد و یا (با استفاده از قضیهٔ تمامیت گودل) نشان داد که این جمله نه تنها در مدل استاندارد اعداد طبیعی معمولی درست است، بلکه در هر مدل نااستانداردی از حساب پئانو نیز چنین است. خانوادهٔ چنین مدل‌هایی، حتی اگر خود را به مدل‌های نایکریخت و شمارا محدود کنیم، به طور ناشمارا نامتناهی است.

از طرف دیگر، از آنجا که هر حکم حسابی تصمیم‌پذیر راست در حساب پئانو اثبات‌پذیر است، یک ابرماشین نمی‌تواند چیزی در این مورد به شواهد موجود اضافه کند. یعنی نمی تواند شواهدی فراتر از اثبات‌پذیری هر نمونه از حکم جهانی مورد بحث در خود حساب پئانو فراهم کند. نکتهٔ قابل توجه دیگر آنکه، محاسباتی که یک ابرماشین انجام می‌دهد، خود متکی بر خواص اعداد طبیعی است و این خواص، در صورت پذیرش مرجعیت حساب پئانو برای معتبر بودن، می‌بایست در حساب پئانو، اثبات‌پذیر باشند. به عبارت دیگر، محاسبات ابرماشین‌ها مشروعیت ذاتی ندارند. پس به این معنی هم، ابرماشین‌ها به تنهایی، شاهدی بر تعین حساب نیستند.

محاسبات یک ماشین محاسب معمولی چون یک ماشین تورینگ متناهی، را می‌توان به راحتی به یک برهان در حساب پئانو ترجمه کرد، اما چنین امکانی برای محاسبات یک ابرماشین در حالت کلی وجود ندارد. از طرف دیگر، نتیجهٔ ضعیف‌تر زیر را داریم. این حکم نشان می‌دهد که می‌توان برنامه‌ای برای ابرماشین نوشت تا تعیین کند آیا جملهٔ حسابی داده شده‌ای در حساب پئانو اثبات‌پذیر هست یا نه.

قضیه ۱.۲. ابرماشین قادر به تعیین اثبات‌پذیری یا اثبات‌ناپذیری احکام حسابی قابل بیان در حساب مرتبهٔ اول است.

اثبات. از کدگذاری گودلی استفاده کنیم و لیستی از کدهای همهٔ اثبات‌ها فراهم کنیم، و پس از آن چک کنیم که آیا کد اثبات حکم مورد نظر در میان آنها هست یا نه. توجه کنید که اثبات‌ها دنباله‌هایی متناهی هستند و بنابراین قابل کد شدن هستند. یک ابرماشین می‌تواند همهٔ این کدها را که دنباله‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهد، در زمانی متناهی بررسی کند و معین کند که آیا برهانی برای حکم مورد نظر وجود دارد یا خیر. □

با توجه به قضیهٔ فوق، می‌توان گفت که، با فرض در دسترس بودن ابرماشین‌ها، حساب پئانو تصمیم‌پذیر است. البته این حکم نشان نمی‌دهد که حساب متعین است. ممکن است که جمله‌ای حسابی درست باشد ولی در حساب پئانو اثبات‌پذیر نباشد.

۳. دستگاه‌های اثباتی نامتناهی و تعین حساب

در این فصل به دستگاه‌های اثباتی مجهز به قواعد نامتناهی می‌پردازیم. این قواعد مجموعه‌ای (شمارای) نامتناهی از مقدمات و یک نتیجه دارند. هدف آن است که ببینیم آیا وجود چنین دستگاه‌هایی که امروزه مقبول هستند را می‌توان شاهدی بر متعین بودن حساب در نظر گرفت یا خیر. یک ویژگی کلیدی دستگاه‌های اثباتی معمولی از قبیل دستگاه‌های اثباتی اصل موضوعی[۱] و حساب رشته‌ای[۲]، متناهی بودن اثبات‌ها در آنها است. قضیهٔ اساسی فشردگی در منطق مرتبهٔ اول، متکی بر این ویژگی است. در عین حال، می‌توان دستگاهی اثباتی داشت که در آن اثبات‌های با طول نامتناهی مجاز باشند. این دستگاه‌ها امروزه به وفور وجود دارند و توسط منطق‌دان‌ها مطالعه می‌شوند (برای نمونه، مرجع [۳] را ببینید).
مطالعهٔ دستگاه‌های اثباتی نامتناهی، با کار گنتسن[۳] در نظریهٔ برهان و تلاش او برای اثبات سازگاری حساب پئانو آغاز شد. البته این مطالعات فراتر از برنامهٔ هیلبرت در مبانی ریاضیات قرار می‌گیرند. یک راه طبیعی برای ساخت دستگاهی نامتناهی برای حساب، اضافه کردن قاعدهٔ ω به اصول مقدماتی حساب است [۸]. این قاعده بیان می‌کند که اگر $A(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n برقرار باشد، آنگاه حکم $\forall x A(x)$ برقرار خواهد بود. جالب است که این قاعده توسط خود هیلبرت بیان شده است. اما آن‌طور که ففرمن اشاره می‌کند، این قاعده به هیچ وجه در برنامهٔ اصلی هیلبرت در مبانی ریاضیات جای نمی‌گیرد [۵].
دستگاهی که از افزودن قاعدهٔ ω به اصول مقدماتی حساب حاصل می‌شود، دستگاهی تمام است، یعنی این دستگاه قادر به اثبات همهٔ جملات حسابی راست است. نکتهٔ دیگر آن که این دستگاه را می‌توان به گونه‌ای ساخت که در آن، اثبات‌ها بازگشتی[۴] باشند، به عبارت دیگر، شرط متناهی بودن را می‌توان با شرط ضعیف‌تر، بازگشتی بودن تعویض کرد [۳]. بازگشتی بود یک اثبات نامتناهی به معنی آن است که که می توان هر یک از اجزای آن را به صورت الگوریتمی مشخص کرد. همان‌طور

[۱] axiomatic
[۲] sequent calculus
[۳] Gentzen
[۴] recursive

که خود جیرارد می‌گوید، بدون این خاصیت، اثبات‌های دستگاه منطقی مجهز به این قاعده، تنها شکلی از همان نحوهٔ بیان راستی احکام حسابی در ساختار استاندارد اعداد طبیعی هستند. در حال حاضر، دستگاه‌های اثباتی نامتناهی جایگاه مستحکمی در قلب منطق، نظریهٔ برهان، دارند. به قول جیرارد[۱] [۳]:

«به دلایل ایدئولوژیک، گنتسن برهان‌های نامتناهی را رد کرد. در عین حال، ما اکنون می‌دانیم که، اگر احتیاط‌های لازم در نظر گرفته شوند، روش‌های نامتناهی بیش از متناهی‌ها شک‌برانگیز نیستند!»

اگر موجه بودن دستگاه‌های اثباتی نامتناهی را بپذیریم، آنگاه اثبات‌های نامتناهی این دستگاه‌ها برای احکام حسابی را می‌توان به عنوان شواهدی موجه بر راستی آنها تلقی کرد. به این ترتیب، می‌توان متعین بودن حساب را پذیرفت.

اما آیا باید این دستگاه‌های را موجه دانست؟ بسیاری از فلاسفه مخالف این قواعد هستند و توانایی انسان در کار با آنها را رد می‌کنند [۹].

به نظر می‌رسد که آن‌چه فلاسفه را به مخالفت دستگاههای اثباتی نامتناهی واداشته، عدم مشروعیت این قواعد نیست، بلکه آن است که تحقق مقدمات نامتناهی آنها را ناممکن می‌دانند. اما یک قاعدهٔ نامتناهی، با فرض اثبات مقدماتش، مشکلی ندارد. نکتهٔ دیگر آن است که ما عملا قواعد نامتناهی بسیاری را بکار می‌بریم. برای نمونه، وقتی که از یک شمای اصل موضوعی مانند استقرا استفاده می‌کنیم، عملا از یک قاعدهٔ فرازبانی نامتناهی استفاده کرده‌ایم، به ازای هر فرمول یک اصل. بنابراین، اثبات‌های نامتناهی، مانند محاسبات نامتناهی، تحت شرایطی خاص ممکن هستند. اما در مورد قاعدهٔ ω چه می‌توان گفت؟ در مورد امکان استفاده از دستگاه‌های اثباتی نامتناهی مجهز به این قاعده در ادامه سخن خواهیم گفت.

دستگاه حسابی مجهز به قاعدهٔ ω به عنوان کاتالیزوری در میانهٔ تجزیه و تحلیل قدرت اثباتی حساب مرتبهٔ پئانو سر برآورده است. به کمک این دستگاه می‌توان نشان داد که اگر اصل استقرای عادی، استقرا تا عدد ترتیبی ω، را به استقرا تا ε_0 گسترش دهیم، دستگاه حاصل قادر به اثبات سازگاری حساب پئانو خواهد بود. البته این اثبات نتوانسته مانع از آن شود که اثبات قضایای ناتمامیت توسط گودل، شکست برنامهٔ هیلبرت تلقی شود.

متناهی‌گرایی در قلب برنامهٔ هیلبرت در مستحکم کردن مبانی ریاضیات قرار داشته است. از طرف

[۱] Girard

دیگر، به نظر می‌رسد که حتی اگر مشروعیت قاعدهٔ ω را بپذیریم، اثبات همهٔ فرضیات این قاعده که مجموعه‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهند، در حالت کلی، در زمانی متناهی امکان پذیر نیست. اما وضعیت با استفاده از ابرماشین‌ها متفاوت خواهد شد. اگر امکاناتی که نظریهٔ نسبیت عام در اختیار می‌گذارد را در نظر بگیریم، آن‌چنان که در مورد محاسبات نامتناهی در بالا دیدیم، در سرعت‌های نزدیک به سرعت نور، زمان کافی برای اثبات همهٔ مقدمه‌ها، زمانی که حکم مورد نظر از نوع تعمیمی از یک حکم تصمیم‌پذیر است، وجود خواهد داشت و یک اثبات نامتناهی از آن، در زمانی متناهی انجام‌پذیر خواهد بود. همانطور که گفتیم، حساب پئانو به اضافهٔ قاعدهٔ ω، دستگاهی تمام است، یعنی هر حکم حسابی یا نقیضش در این دستگاه اثبات‌پذیر است. بنابراین، امکان وجود اثبات‌های نامتناهی در این دستگاه باعث می‌شود که تعین حساب پذیرفتنی باشد. به این ترتیب، وجود ابردستگاه‌های محاسباتی یکی از ابهامات اصلی در مورد ابراثبات‌ها را از میان برمی‌دارند. از طرف دیگر، می‌توان ابرماشین‌ها را به شکل سرراستری در ساخت اثبات‌های نامتناهی به کار برد. قضیهٔ زیر این نتیجه را تصریح می‌بخشد.

قضیه ۱.۳. با فرض ممکن بودن ابرماشین‌های محاسباتی، قضیه بودن یک جملهٔ داده شده یا نقیض آن، تصمیم‌پذیر است.

اثبات. برای این منظور، می‌بایست به نحو مناسبی فرمول‌ها و برهان‌ها را کد کرد. سپس، به ازای هر جملهٔ حسابی، می بایست همهٔ اعداد طبیعی را چک کرد و دید که آیا کد برهانی برای آن جمله یا نقیض آن جمله هستند یا نه. با توجه به تمام بودن دستگاه اثباتی مجهز به قاعدهٔ ω، این محاسبه جواب نهایی را فراهم خواهد کرد و نشان خواهد که جملهٔ مورد نظر راست (اثبات‌پذیر) است یا اینکه نقیض آن چنین است. □

توجه کنید که در برهان فوق، از بازگشتی بودن برهان‌ها، آن‌طور که قبلاً توضیح داده شد، به طور اساسی استفاده می‌شود. به هر برهان عددی نسبت داده می‌شود، که از آن کد تابعی بازگشتی را می‌توان بدست آورد که به ازای هر n، مرحلهٔ nام برهان را تعیین می‌کند. برای مثال، مشخص می‌کند که فرمول ظاهر شده در آخرین سطر برهان، کدام است، این جمله‌ای است که اثبات شده است. برای چک کردن همهٔ این کدها، به یک ابرماشین نیاز خواهد بود. در واقع، ابرماشین مانند تابعی جهانی عمل می‌کند به طوری که، به ازای هر عدد داده شده چون n، رفتار تابع بازگشتی با کد n را شبیه‌سازی می‌کند. اگر این n، کد یک برهان باشد، به این ترتیب تمام مشخصات برهان

آشکار خواهد شد. با توجه به نکات فوق، به نظر می‌رسد که با بکار بردن ابرماشین‌ها به هنگام کار با دستگاه‌های اثباتی نامتناهی، می‌توان به‌طور قطعی تعیین کرد که آیا یک حکم حسابی داده شده، راست است یا نه. به عبارت دیگر، با فرض وجود ابرماشین‌ها، حساب متعین خواهد بود.

مراجع

[1] Benacerraf, P. & Putnam, H., 'Introduction' in: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[2] French, P., Uehling, T., Wettstein, H. (eds.) & Cevik, A., *Philosophy of Mathematics: Classic and Contemporary Studies*, Chapman & Hall/CRC, 2021.

[3] Girard, J.-Y., *Proof theory and logical complexity* (Volume I), Bibliopolis, Naples, 1987.

[4] Hamkins, J. D. & Lewis, A., Infinite time Turing machines, *Journal of Symbolic Logic*, **65** (2), 567–604, 2000.

[5] Ignjatović, A., Hilbert's program and the omega-rule, *Journal of Symbolic Logic*, **59** (1), 322-343, 1994.

[6] Manchak, J. B. & Roberts, B. W., 'Supertasks' in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E. N. (ed.), 2016.

[7] Raatikainen, P., 'Gödel's Incompleteness Theorems' in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E. N. (ed.), 2022.

[8] Rathjen, M. & Sieg, W., 'Proof Theory' in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E. N. (ed.), 2020.

[9] Warren, J., Infinite Reasoning, *Philosophy and Phenomenological Research*, **103** (2), 385-407, 2021.

[10] Warren, J., & Waxman, D., Supertasks and arithmetical truth, *Philosophical Studies*, **177** (5), 1275-1282, 2020.

[11] Warren, J., & Waxman, D., A metasemantic challenge for mathematical determinacy, *Synthese*, **197** (2), 477-495, 2020.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: http://facultymembers.sbu.ac.ir/mortezamoniri/

رایانامه: m-moniri@sbu.ac.ir