حال سری فوریه را در نظر می‌گیریم

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \cdots + a_{-3}e^{-j3\omega_0 t} + a_{-2}e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 e^{j0t} + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + a_3 e^{j3\omega_0 t} + \cdots \qquad (\mathrm{II})$$

از مقایسه (I) و (II) می‌توانیم ω_0 را بدست آوریم:

$$j\omega_0 t = j0.25\pi t \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 0.25\pi}$$

$a_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $a_{-1} = \frac{4}{2} = 2$

$a_1 = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad$ $a_{-2} = \frac{1}{2}$

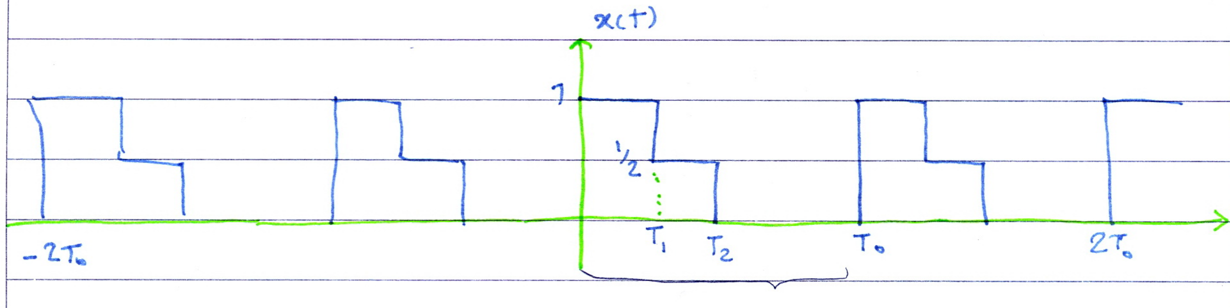
$a_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $a_{-4} = \frac{2}{2}$

$a_4 = \frac{2}{2}$ $\qquad$ $a_{-3} = 0$

$a_3 = 0$

بقیه a_k هایی هم که ننوشتیم ضرایبشان مثل a_3 صفر در نظر گرفته شوده

Example : برای $x(t)$ زیر ضرایب سری فوریه را بدست آورید.



$T_0 \angle 0$

منظور از بدست آوردن ضرایب سری فوریه a_k هایی باشد.

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^t x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = ? \end{cases}$$

دوره تناوب $x(t)$ شامل سه قسمت است.

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_1} 1\, e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{2} e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_2}^{T_0} 0\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\left\{\frac{-1}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}\right\}_0^{T_1} + \frac{1}{T_0}\times\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right\}_{T_1}^{T_2} + 0 =$$

$$a_k = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0}\left\{e^{-jk\omega_0 T_1} - 1\right\} - \frac{1}{j2k\omega_0 T_0}\left\{e^{-jk\omega_0 T_2} - e^{-jk\omega_0 T_1}\right\}$$

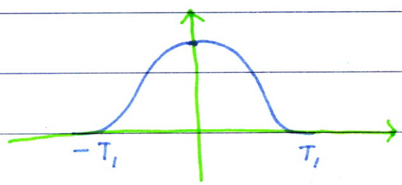
$$a_k = \frac{-1}{jk2\pi} e^{-jk\omega_0 T_1} + \frac{1}{jk2\pi} - \frac{1}{j2k2\pi} e^{-jk\omega_0 T_2} + \frac{1}{j2k2\pi} e^{-jk\omega_0 T_1}$$

$$a_k = \left\{\frac{-2}{jk4\pi} + \frac{1}{jk4\pi}\right\} e^{-jk\omega_0 T_1} - \frac{1}{jk2\pi} - \frac{1}{jk4\pi} e^{-jk\omega_0 T_2}$$

$$a_k = \frac{-1}{jk4\pi} e^{-jk\omega_0 T_1} - \frac{1}{jk4\pi} e^{-jk\omega_0 T_2} - \frac{1}{jk2\pi}$$

تبدیل فوریه :

تبدیل فوریه برای سیگنال های غیر پریودیک تعریف می شود. حال آن که سری فوریه برای سیگنال های پریودیک تعریف می شود. به عنوان مثال اگر $x(t)$ به صورت شکل زیر باشد



تبدیل فوریه $x(t)$ را که با $X(\omega)$ نشان می دهند برابر است با :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

همچنین گاهی تبدیل فوریه را با $X(f)$ هم نشان می‌دهند:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

عکس تبدیل فوریه: اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ باشد در اینصورت $x(t)$ را عکس تبدیل فوریه $X(\omega)$ نامند و می‌نویسند:

$$x(t)\ \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}\ X(\omega)$$

$$\begin{cases} X(\omega)=f\{x(t)\} \\ x(t)=f^{-1}\{X(\omega)\}\end{cases}$$

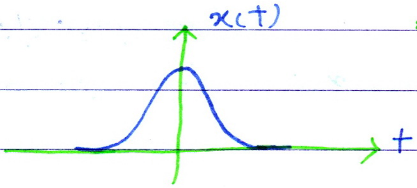
رابطه بین $x(t)$ و $X(\omega)$ به صورت زیر است:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df$$

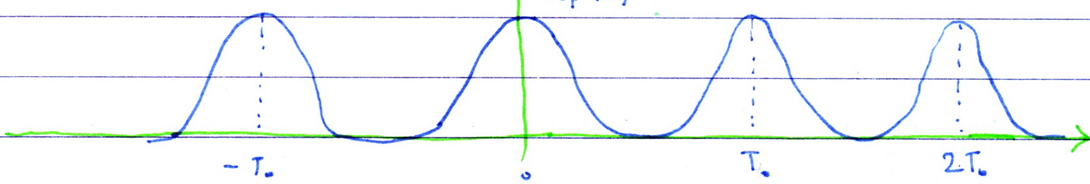
رابطه بین ضرایب سری فوریه a_k و تبدیل فوریه $X(\omega)$:

اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال غیرمتناوب $x(t)$ باشد یعنی:



$$x(t)\longleftrightarrow X(\omega)$$

و اگر $x_p(t)$ متناوب شده $x(t)$ با دوره تناوب T_0 باشد.



می توانیم بنویسیم: $x(t) = x_p(t) \qquad 0<t<T_0$

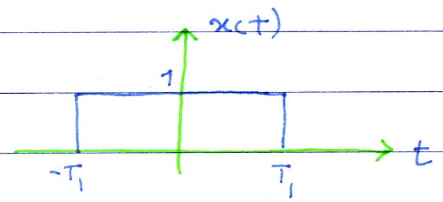
$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

از طرفی: $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

رابطه بین a_k و $X(\omega)$ به صورت زیر می‌گردد:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)}$$

Example: تبدیل فوریه سیگنال شکل زیر را بدست آورید.



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} 1\, e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega T_1} - e^{+j\omega T_1}\right]$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{j2} = \frac{2}{\omega}\sin(\omega T_1) = \frac{2}{\omega}\frac{T_1}{T_1}\sin(\omega T_1) = \quad (1)$$

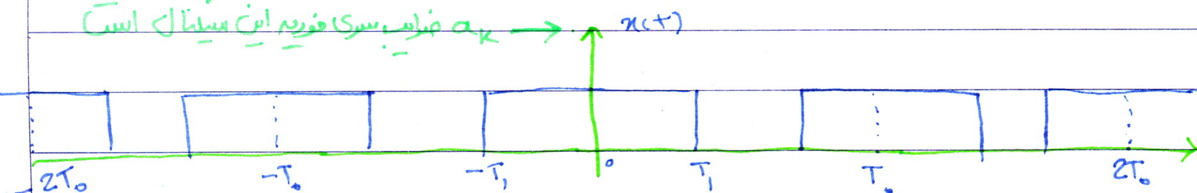
می‌دانیم: $\operatorname{sinc}\alpha = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}$

$$2T_1 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega T_1} \overset{(1)}{\Longrightarrow} X(\omega) = 2T_1 \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega T_1}{\pi}\right)}{\pi \frac{\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

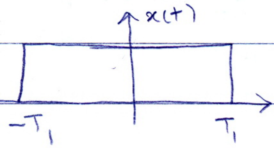
Example: با استفاده از تبدیل فوریه ضرایب سری فوریه سیگنال شکل زیر را بدست آورید.

a_k ضرایب سری فوریه این سیگنال است



حل: a_k را می‌خواهیم. با استفاده از $X(\omega)$ بدست آوریم یعنی $x_p(t)$ را در یک پریود در نظر گرفته و تبدیل

فوریه آن را بدست می آوریم. سپس با استفاده از رابطه $a_k=\frac{1}{T_0}X(k\omega_0)$ مقادیر a_k را محاسبه می کنیم



از طرفی مطابق مثال قبل $X(\omega)$ به صورت زیر بدست آمد:

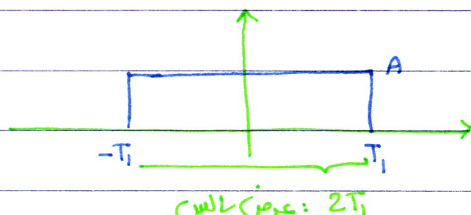
$$X(\omega)=2T_1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

ضرایب سری فوریه سیگنال $x_p(t)$

$$a_k=\frac{1}{T_0}X(k\omega_0)=\frac{2T_1}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$$

که در جلسه قبل با استفاده از روش مستقیم $a_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x_p(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ محاسبه شد و این روش دوم می باشد ↑.

فرمول کلی برای محاسبه‌ی تبدیل فوریه یک پالس متقارن با پهنای $2T_1$ و دامنه A:



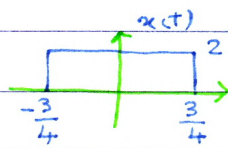
پهنای

$X(\omega)$ = مساحت پالس × $\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right.$. عرض پالس $\left.\right)$ ⟹

مساحت پالس $=2T_1\times A$

$$\Rightarrow X(\omega)=2T_1A\,.\,\sin\left(\frac{\omega}{2\pi}\times 2T_1\right)=2AT_1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

Example: تبدیل فوریه



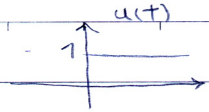
به صورت زیر است:

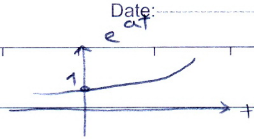
عرض پالس : $2\times\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$

مساحت پالس : $\frac{6}{4}\times 2=\frac{12}{4}=3$

$$X(\omega)=3\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\times\frac{6}{4}\right)=3\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3\omega}{4\pi}\right)$$

Example: تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید. حدود a که برای آن تبدیل فوریه وجود دارد را پیدا نمایید.





$$x(t) = e^{-at}\,u(t)$$

u(t) تنها برای مقادیر مثبت وجود دارد

حل:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{a+j\omega}\,e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{-a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)\infty} - 1\right] \Rightarrow \quad (1)$$

$$\left|e^{\pm j\,\text{هرعددی}}\right| = 1$$

$$e^{-(a+j\omega)\infty} = e^{-a\infty}\cdot e^{-j\omega\infty} \Rightarrow$$ فقط a تعیین کننده است

$$\begin{cases} a>0 & e^{-a\infty} = 0 \\ a<0 & e^{-a\infty} = \infty \end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{a>0} X(\omega) = \frac{-1}{a+j\omega}\left[0-1\right] = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$(1) \xrightarrow{a<0} X(\omega) = \pm\infty$$

نتیجه می‌گیریم که برای $a>0$ تبدیل فوریه $x(t)$ وجود دارد و برابر است با:

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

اما برای $a<0$ تبدیل فوریه $x(t)$ وجود ندارد.

Example: دامنه و فاز تبدیل فوریه $X(\omega)$ را در مثال قبل رسم کنید.

$$Z = a+jb = \underbrace{|Z|}_{\text{اندازه}}\;\angle\overbrace{Z}^{\text{فاز}} \qquad |Z| = \sqrt{a^2+b^2}\,,\quad \angle Z = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

پس برای

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = |X(\omega)|\;\angle X(\omega)$$

$$|X(\omega)| = \frac{|1|}{|a+j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\frac{\text{اندازه صورت}}{\text{اندازه مخرج}}$$

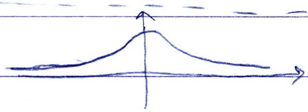
$$\angle X(\omega) = \angle \frac{\text{فاز صورت}}{\text{فاز مخرج}} = \angle \text{فاز صورت} - \angle \text{فاز مخرج}$$

$$\angle X(\omega) = 0 - tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

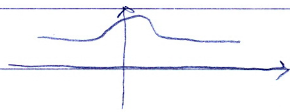
(فاز هر عدد حقیقی صفر است پس فاز صورت صفر می‌شود)

حل: باید $|X(\omega)|$ و $\angle X(\omega)$ را رسم کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

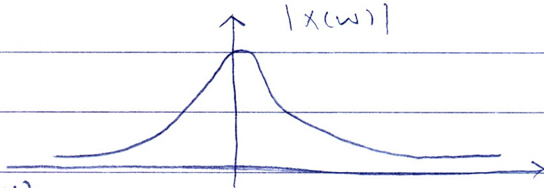


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

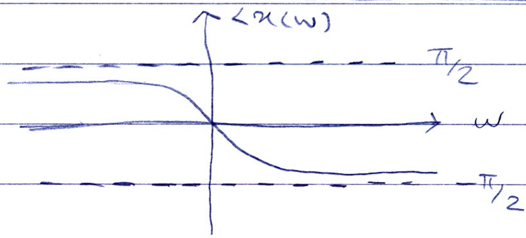


$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$$

$x \leftarrow$



$tg^{-1}(x)$



تمرین: مطلوب است تبدیل فوریه سیگنال زیر و دامنه ($|X(\omega)|$) را رسم نمایید. $x(t) = e^{-a|t|}$

Example: نشان دهید تبدیل فوریه پالس گوسی $x(t) = e^{-\pi t^2}$ به صورت زیر است:

$$X(\omega) = e^{-\pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2} = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

حل: $x(t)$ به صورت شکل مقابل است که شکل یک زنگ را داراست پس آن را پالس گوسی نامند و می‌خواهیم تبدیل فوریه آن را بدست آوریم.

تعریف تبدیل فوریه:

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\left(t+\frac{j\omega}{2\pi}\right)^2-\frac{\omega^2}{4\pi}}\,dt$$

حال اگر $\begin{cases} y=t+j\frac{\omega}{2\pi} \\ dy=dt+0 \end{cases}$ باشد:

$$X(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2}\,dt$$

روش حل این انتگرال (1)

$$1\begin{cases} I_y=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2}\,dt \\ I_x=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dt \end{cases}$$

فرض می‌کنیم

$$\Rightarrow I_xI_y=\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

رفتن از محورهای دکارتی به محورهای قطبی

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$I_xI_y=\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\pi r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}1\,d\theta\int_{r=0}^{\infty} re^{-\pi r^2}\,dr=2\pi\left[-\frac{1}{2\pi}e^{-\pi r^2}\right]_{r=0}^{\infty}=$$

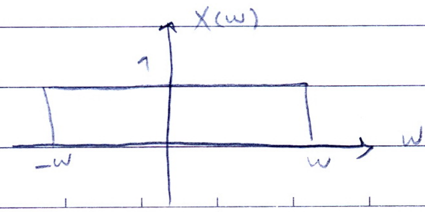
$$\begin{cases} I_xI_y=1 \\ I_x=I_y \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} I_x=1 \\ I_y=1 \end{cases}\Rightarrow X(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}\times 1\Rightarrow X(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

Example: اگر تبدیل فوریه سیگنالی مساوی با $X(\omega)=\begin{cases} 1 & |\omega|<w \\ 0 & |\omega|>w \end{cases}$ باشد، $x(t)$ را بیابید.

حل: در اینجا تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را داده است و عکس تبدیل فوریه را خواسته است.

فرمول عکس تبدیل فوریه

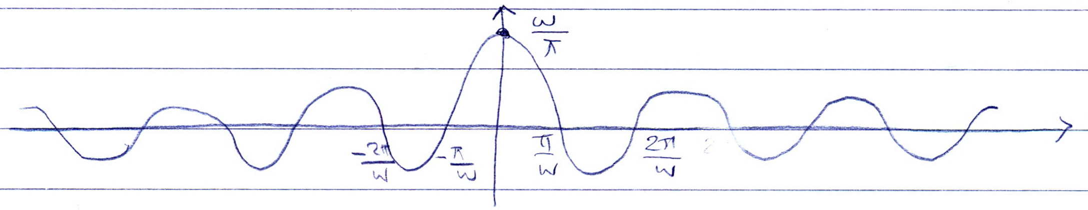
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,dt$$



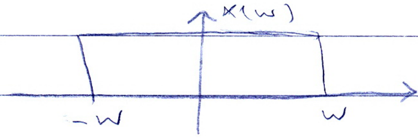
محور نمودار $\xrightarrow{-\infty}$ از $-\infty$ تا $-w$ مقدار صفر است

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} 1e^{jwt}\,dw=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jt}\,e^{jwt}\Big|_{-w}^{w}\Rightarrow$$

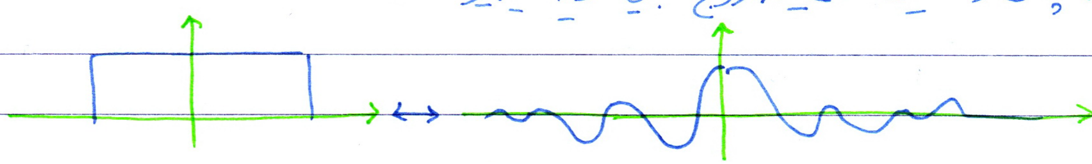
$$x(t)=\frac{1}{j2\pi t}\left[e^{jwt}-e^{-jwt}\right]=\frac{\sin wt}{\pi t}\Rightarrow x(t)=\frac{\sin wt}{\pi t}$$



$$\sin wt=0\Rightarrow wt=k\pi\Rightarrow t=\frac{k\pi}{w}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$



نکته: پالس و سینک همیشه زوج تبدیل فوریه یکدیگر هستند.



Example: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=\delta(t)$ را بدست آورید.

$$X(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,e^{-jwt}\,dt$$

حاصل ضرب $\delta(t)$ در هر تابع برابر با مقدار آن تابع است در نقطه صفر $\Rightarrow x(t)\,\delta(t)=x(0)\,\delta(t)$

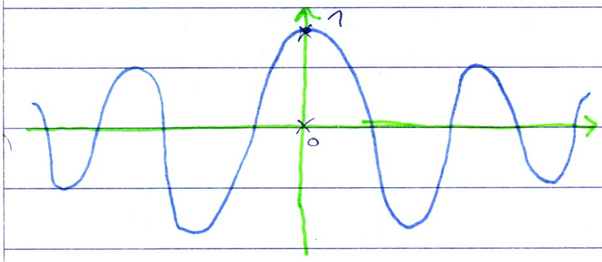
$$X(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cancel{e^{-jw(0)}}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$$

$$x(t)=\delta(t)\Rightarrow X(w)=1$$

تعریف تابع Sinc :

$$\mathrm{Sinc}\,\theta = \frac{\sin \theta\pi}{\theta\pi}$$

شکل تابع Sinc به صورت مقابل رسم می‌شود.



زمانی این تابع برابر صفر است که $\theta = k$ باشد.

حال می‌توان a_k در مثال قبل را به شکل زیر نوشت:

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\sin k\frac{2\pi}{T_0}\times T_1}{k\pi} = \underbrace{\frac{\sin k\pi \frac{2T_1}{T_0}}{k\pi \times \frac{2T_1}{T_0}}}_{\mathrm{sinc}} \times \frac{2T_1}{T_0}$$

$$\Longrightarrow a_k = \frac{2T_1}{T_0}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{k2T_1}{T_0}\right)$$

Example: برای $x(t)$ زیر ضرایب سری فوریه را بدست آورید.

$$x(t) = \frac{1}{2} + \cos(0.5\pi t) + 2\cos \pi t + 4\cos(0.25\pi t)$$

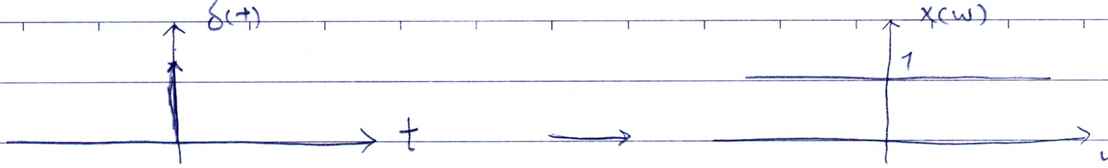
حل: برای پیدا کردن ضرایب سری فوریه سیگنال‌هایی که فقط از سینوس و کسینوس تشکیل شده است باید آنها را برحسب توابع نمایی نوشت سپس به ترتیب صعودی آنها را مرتب نمود و سپس از پیدا کردن ω_0 در آنها ضرایب سری فوریه را مشخص نمود.

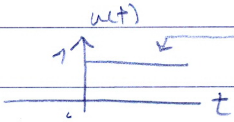
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{j0.5\pi t} + e^{-j0.5\pi t}}{2} + 2\,\frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2} + 4\,\frac{e^{j0.25\pi t} + e^{-j0.25\pi t}}{2}$$

حال آنها را از توان منفی به مثبت مرتب می‌کنیم.

$$x(t) = \frac{2}{2}e^{-j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j0.5\pi t} + \frac{4}{2}e^{-j0.25\pi t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_0}e^{j\pi t} + \underbrace{\frac{4}{2}}_{a_1}e^{j0.25\pi t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2}\overbrace{e^{j0.5\pi t}}^{2\omega_0}$$

$$+ \underbrace{\frac{2}{2}}_{a_3}\overbrace{e^{j\pi t}}^{4\omega_0} \qquad (I)$$





Example: مطلوب است تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-t}\cos\omega_0 t \cdot u(t)$

حل: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}\cos\omega_0 t \cdot e^{-j\omega t}dt =$

$$\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\}dt \Rightarrow$$

می توان این قسمت را حذف کرد

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega_0)t}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}\int e^{-(1+j\omega_0)t}dt \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{[-1+j\omega_0-j\omega]t}dt + \frac{1}{2}\int e^{[-1-j\omega_0-j\omega]t}dt \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\frac{e^{(-1+j\omega_0-j\omega)t}}{-1+j(\omega_0-\omega)}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{[-1-j\omega_0-j\omega]t}}{-1-j(\omega-\omega_0)}\right]\Bigg|_0^{\infty} \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-1+j(\omega_0-\omega)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-1-j(\omega_0-\omega)}\right]$$

Example: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را بدست آورید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(t-kT) \longrightarrow X(\omega) = ?$$

انتگرال و $\sum$ قابل جابجایی هستند

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum a_k\,\delta(t-kT)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\int\delta(t-kT)$$

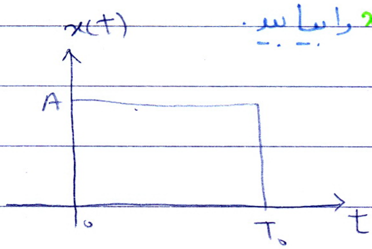
$$e^{-jk\omega T}dt \Rightarrow X(\omega) = \sum_k a_k e^{-j\omega kT}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)dt}_{1}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-j\omega T}$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\sum_k a_k \delta(t-kT) \longleftrightarrow \sum_k a_k e^{-j\omega kT}$$

Example: تبدیل فوریه $x(t)$ به صورت $x(t)=A[u(t)-u(t-T_0)]$ را بیابید.



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \int_0^{T_0} A e^{-j\omega t} dt = A \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^{T_0} = -\frac{A}{j\omega}\left[e^{-j\omega T_0} - 1\right] \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \frac{-A}{j\omega} e^{-j\frac{\omega T_0}{2}} \left[e^{-j\frac{\omega T_0}{2}} - e^{j\frac{\omega T_0}{2}}\right] = \frac{2A}{2\omega} e^{-j\frac{\omega T_0}{2}} \left[\frac{e^{j\frac{\omega T_0}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_0}{2}}}{j2}\right]$$

$$\frac{2A}{\omega} e^{-j\frac{\omega T_0}{2}} \sin\frac{\omega T_0}{2} \Rightarrow \boxed{X(\omega) = \frac{2A}{\omega} e^{-j\frac{\omega T_0}{2}} \sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)}$$

خواص تبدیل فوریه:

۱. خطی بودن: اگر $X_1(\omega)$ تبدیل فوریه $x_1(t)$ و $X_2(\omega)$ تبدیل فوریه $x_2(t)$ و $X_k(\omega)$ تبدیل فوریه $x_k(t)$ باشد در این صورت تبدیل فوریه:

$$\mathcal{F}\left\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_k x_k(t)\right\} = a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) + \dots + a_k X_k(\omega)$$

۲. تقارن: اگر $x(t)$ حقیقی باشد. $X^*(\omega) = X(-\omega)$

اثبات: طبق تعریف: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

حال از دو طرف مزدوج می‌گیریم: $X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\omega) e^{j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt}_{X(-\omega)}$

چون x حقیقی است

$\Longrightarrow X^*(\omega) = X(-\omega)$

۳. خاصیت دوگانی: از تبدیل فوریه

$g(t) \xleftrightarrow{f} f(\omega)$

$f(t) \xleftrightarrow{f} 2\pi g(-\omega)$

Example: مطلوب است تبدیل فوریه $x(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$

از روش معمولی حل این مسئله مشکل است.

حل این انتگرال مشخص است. $\longleftarrow$ $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2}{1+t^2} e^{-j\omega t} dt$

اما با روش دوگانی داریم:

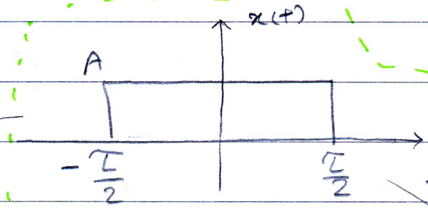
قبلاً داشتیم: $\boxed{e^{-|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2}{\omega^2+1}}$ باید بدانیم

$\dfrac{2}{t^2+1} \longleftrightarrow 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$

Example: اگر $x(t) = A\tau \operatorname{sinc}(\frac{t}{2\pi}\tau)$ (عدد ثابت τ) مطلوب است $X(\omega)$.

حل: محاسبه‌ی $X(\omega)$ از روش مستقیم بسیار مشکل است پس از روش دوگانی حل می‌کنیم.

باید بدانیم:

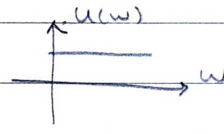


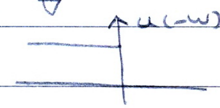
$$x(t) \longleftrightarrow A\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\tau\right)$$

$t \to -\omega$, $\tau \leftarrow \omega$

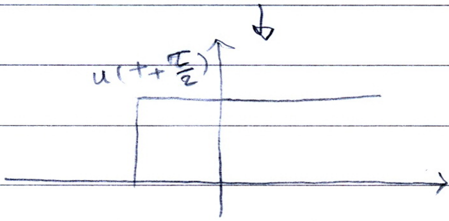
$$A\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\tau\right) \to 2\pi A\left\{u\left(-\omega+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(-\omega-\frac{\tau}{2}\right)\right\}$$

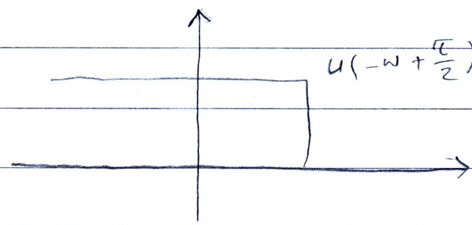
$$x(t) = A\left\{u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\}$$



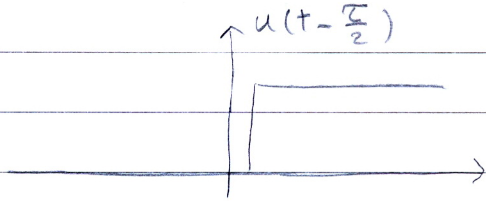


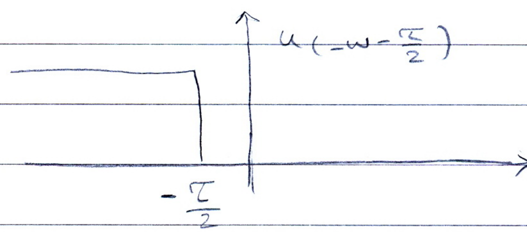
1



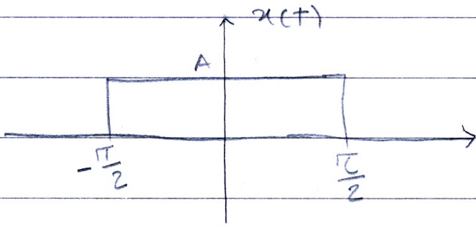


2

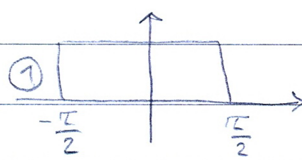




3

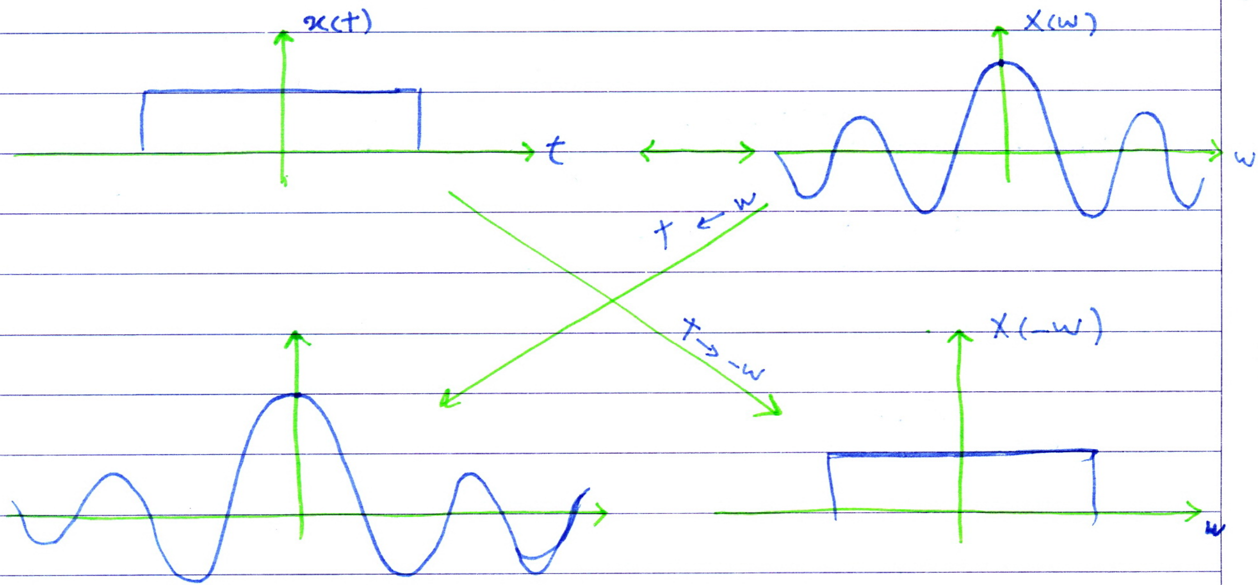


$2 - 3 \longrightarrow$ 1



1 $\Rightarrow A\tau\,\mathrm{sinc}\,\frac{t}{2\pi}A \longleftrightarrow 2\pi A\left[u\left(\omega+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(\omega-\frac{\tau}{2}\right)\right]$

* خاصیت دوگانی برای سیگنال پالس به صورت شکلی :



۴) قضیه پارسوال :

فرم اول :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(w)|^2 dw$$

فرم دوم : برای سیگنال های متناوب :

$$\underbrace{\int}_{\text{روی یک دوره تناوب } T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

a_k در واقع ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ است .

۵) انتقال در حوزه زمان :

$$x(t) \longleftrightarrow X(w)$$

در اینصورت :

$$\underbrace{x(t-t_0)}_{y(w)} \longleftrightarrow e^{-jwt_0} X(w)$$

اثبات:

اگر $t - t_0 = \lambda$ باشد،

$$\Downarrow$$

$$t = \lambda + t_0$$

$$dt = d\lambda$$

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt \Rightarrow$$

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j\omega(\lambda+t_0)}\, d\lambda \Rightarrow$$

$$y(\omega) = e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda}_{X(\omega)} \Rightarrow$$

$$y(\omega) = e^{-j\omega_0 t}\, X(\omega)$$

Example: تبدیل فوریه پالس گوسی انتقال یافته در زمان زیر را بدست آورید.

$$x(t) = e^{-\pi(t-t_0)^2}$$

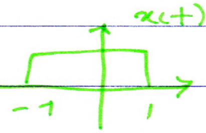
میدانیم:

$$e^{-\pi t^2} \longleftrightarrow e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$e^{-\pi(t-t_0)^2} \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

تمرین: با استفاده از خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.

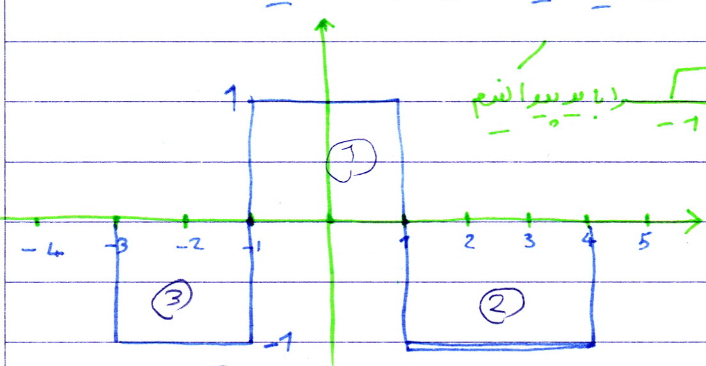
راهنمایی: یعنی ابتدا تبدیل فوریه



را بدست بیاوریم

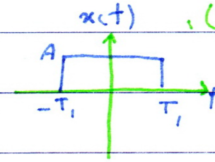
سپس از خاصیت انتقال در حوزه‌ی زمان

و خاصیت خطی تبدیل فوریه $x(t)$ را می‌نویسیم



3 رابطه برای ①، ②، ③

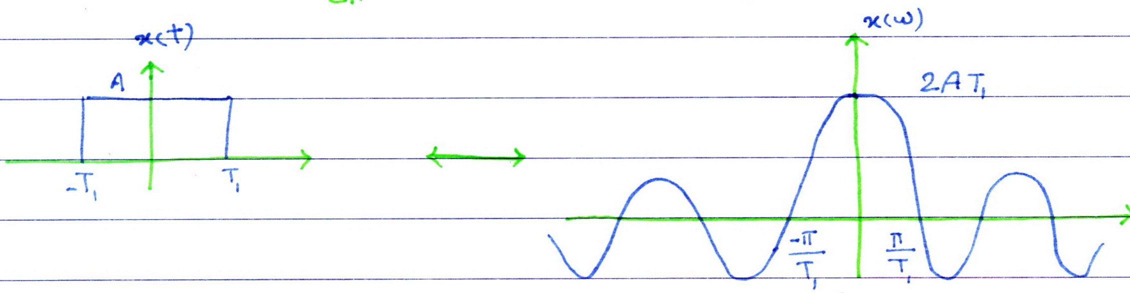
یادآوری ۱: اگر



باشد، دیدیم تبدیل فوریه آن برابر است با: $X(\omega) =$ سطح زیر پالس Sinc

چون
$$\begin{cases} \text{سطح زیر پالس} = A(2T_1) = 2AT_1 \\ \text{عرض پالس} = 2T_1 \end{cases}$$

در نتیجه
$$X(\omega) = 2AT_1 \,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} \times 2T_1\right) = 2AT_1 \,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} T_1\right)$$



یادآوری ۲:
$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$
$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

یادآوری 3:
$$x(t) = e^{-\pi t^2} \longleftrightarrow e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

یادآوری 4: تبدیل فوریه $x(t) = e^{-\pi(t-t_0)^2}$ به صورت زیر می‌باشد:

با استفاده از یادآوری 2 _ 3 می‌توان نوشت:
$$X(\omega) = e^{-j\omega t_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

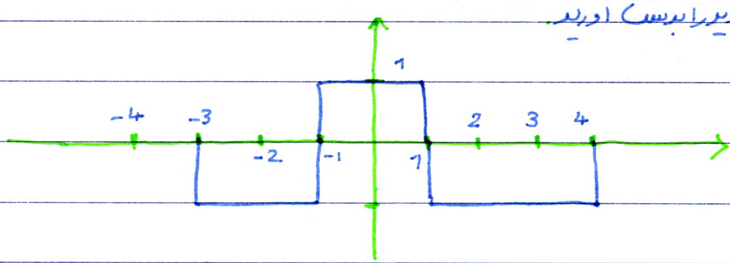
روش حل: ابتدا تبدیل فوریه $x(t)$ را بدون t_0 بدست می‌آوریم
$$y(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{F} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

حال با انتقال زمانی $y(t)$ به اندازه t_0 داریم :

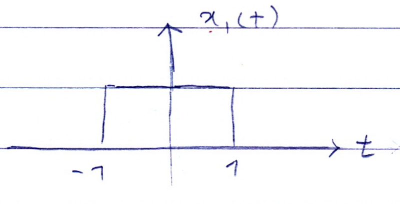
$$y(t-t_0) = e^{-\pi(t-t_0)^2} \longrightarrow e^{-j\omega t_0} .$$

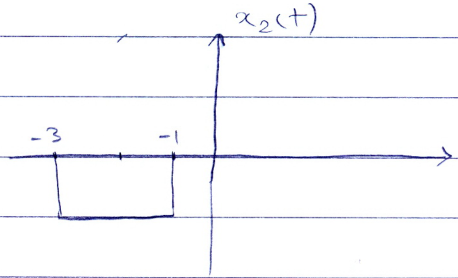
Example : تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.

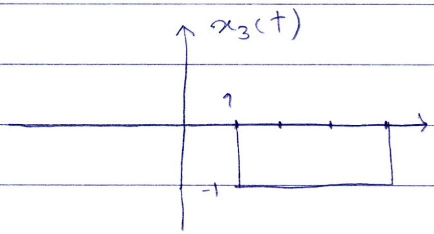
(با استفاده از خواص)



حل : $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$







تبدیل فوریه $x(t)$ برابر است با مجموع تبدیل فوریه های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و $x_3(t)$

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$$

محاسبه تبدیل فوریه $x_1(t)$

$$X_1(\omega) = \underbrace{(2\times 1)}_{\text{سطح زیر پالس}} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\times 2\right)$$

$$X_1(\omega) = 2\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{\pi}$$

محاسبه تبدیل فوریه : $x_2(t)$

$$x_2(t) = -x_1(t+2)$$

$$X_2(\omega) = e^{j\omega t_0} X_1(\omega)$$

$$X_2(\omega) = e^{j\omega t_0}\left(2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right)$$

$$X_2(\omega) = 2e^{j\omega t_0}\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{\pi}$$

$$x_3(t) = -x_1\left(\frac{2}{3}t_1 - 2\right)$$

$$x(t) \longrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(at) \longrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\begin{cases} at = \tau \rightarrow a\,dt = d\tau \\ t = \dfrac{\tau}{a} \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\left(\frac{\tau}{a}\right)\omega}\, \frac{d\tau}{a}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}$$

Example: مطلوبست محاسبه تبدیل فوریه $x(t)$ مثال قبل با استفاده از تعریف:

حل:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-3}^{-1} (-1) e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^{1} (1) e^{-j\omega t} dt + \int_{1}^{4} (-1) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = -\left(-\frac{1}{j\omega}\right) e^{-j\omega t}\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{-1}{j\omega}\right) e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{1}{-j\omega}\right) e^{-j\omega t}\Big|_{1}^{4}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{j2\omega}\right) - \frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) + \frac{1}{j\omega}\left(e^{-j4\omega} - e^{-j\omega}\right)$$

مشتق در حوزه زمان:

اگر تبدیل فوریه $x(t)$ برابر $X(\omega)$ باشد

$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$$

تبدیل فوریه مشتق آن (مرتبه nام) یعنی $x^{(n)}(t)$ برابر است با:

$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t) \xrightarrow{F} (j\omega)^n X(\omega)$$

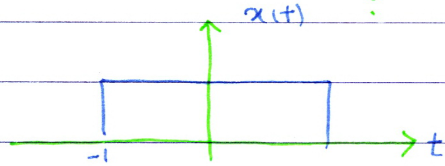
$$x'(t) \longrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$x''(t) \longrightarrow (j\omega)^2 X(\omega) = -\omega^2 X(\omega)$$

$$x^{(3)}(t) \longrightarrow (j\omega)^3 X(\omega) = -j\omega^3 X(\omega)$$

$$\vdots$$

Example: تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



حل: روش مستقیم:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right)$$

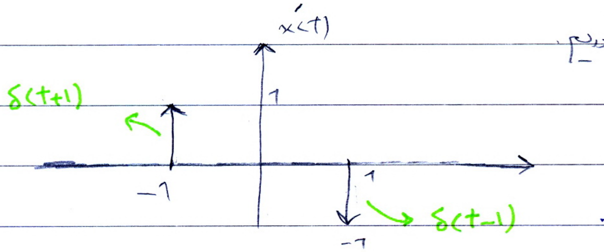
$$X(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} = \frac{2}{\omega} \sin\omega =$$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{\pi\omega} \sin\frac{\pi}{\pi}\omega = \frac{2}{\omega} \sin\pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{2}{\omega} \frac{\sin\pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)}{\pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)} \times \frac{\omega}{\pi}\pi = \frac{2}{\omega} \cdot \omega \operatorname{sinc}\frac{\omega}{\pi} = 2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$x(t) \longrightarrow X(\omega) = 2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

با استفاده از خاصیت مشتق: ابتدا مشتق $x(t)$ را بدست می آوریم



$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

$$F\left[\frac{dx}{dt}\right] = F\left[\delta(t+1) - \delta(t-1)\right]$$

نکته

$$\delta(t) \xrightarrow{F} 1$$

$$\delta(t+1) \xrightarrow{F} e^{j\omega}$$

$$\delta(t+1) \xrightarrow{F} e^{-j\omega}$$

$$F\left[\frac{dx}{dt}\right] = j\omega X(\omega)$$

$$F\left[\delta(t+1) - \delta(t-1)\right] = e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

$$\xrightarrow{\div j\omega} X(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j2}$$

$$X(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\omega$$

انتگرال گیری در حوزه زمان:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$$ سطح زیر منحنی $x(t)$

Example: مطلوبست محاسبه تبدیل فوریه $u(t)$.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

حل 8

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau\right\}$$

$x(t) = \delta(t)$ است

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi(1)\,\delta(\omega)$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$$

مقیاس بندی زمانی:

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

انتقال در حوزه فرکانس:

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \longrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

مشتق گیری در حوزه فرکانس:

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$-jt\,x(t) \longrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad 1$$

Example: تبدیل معکوس فوریه $X(\omega) = \dfrac{1}{(j\omega+a)^2}$ را بدست آورید.

حل : توجه کنید که اگر $Y(\omega) = \dfrac{j}{j\omega+a}$ را فرض کنیم در این صورت :

$$\frac{dY}{d\omega} = \frac{-j(j)}{(j\omega+a)^2} = \frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

پس باید تبدیل فوریه معکوس $\dfrac{j}{j\omega+a}$ را بدست آوریم و با استفاده از رابطه 1 می توان از رابطه $-jt\,x(t)$ تبدیل معکوس فوریه $\dfrac{1}{(j\omega+a)}$ را بدست آورد.

در حالت کلی :

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{j\omega+a}$$

با ضرب طرفین در عدد ثابت j :

$$\mathcal{F}\{\underbrace{je^{-at}u(t)}_{x(t)}\} = \frac{j}{j\omega+a}$$

$$-jt\{je^{-at}u(t)\} \xrightarrow{F} \frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

$$te^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

پس تبدیل معکوس فوریه $X(\omega)$ برابر $te^{-at}u(t)$ می باشد.

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب.

اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب باشد می توانیم سری فوریه آنرا بصورت زیر بنویسیم :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

حال اگر بخواهیم تبدیل فوریه $x(t)$ را حساب کنیم :

قبلاً دیدیم :

$$1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

حال با استفاده از خواص تبدیل فوریه ،

$$e^{jk\omega_0 t}\ \underset{x(t)}{\times 1} \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

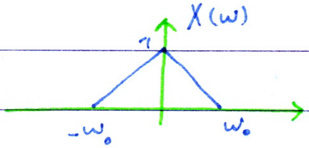
$$X(\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

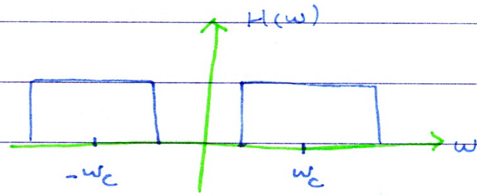
مدولاسیون :

$$r(t) = s(t).p(t) \longleftrightarrow R(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * P(\omega)$$

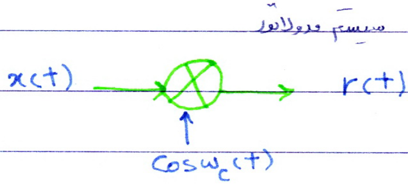
یعنی تبدیل فوریه حاصلضرب دو سیگنال برابر است با کانولوشن تبدیل فوریه‌های دو سیگنال تقسیم بر 2π .

Example : سیگنال پایین گذر $x(t)$ با طیف زیر داده شده است.
می‌خواهیم این سیگنال را از کانالی با طیف زیر عبور دهیم.





در این صورت از شکل زیر استفاده می‌گردد :



$r(t)$ را از کانال فوق عبور می‌دهیم. طیف $r(t)$ را بدست آورید.

حل : باید $R(\omega)$ را بدست آوریم

$$r(t) = x(t)\cos\omega_c(t)$$

طبق خاصیت مدولاسیون

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos\omega_c(t)\} \quad ,*$$

$$\mathcal{F}\{\cos w_c(t)\} = \pi\delta(w-w_c) + \pi\delta(w+w_c) \;*$$

$$\cos w_c t = \frac{e^{jw_ct} + e^{-jw_ct}}{2} = \frac{1}{2}e^{jw_ct} + \frac{1}{2}e^{-jw_ct}$$

یادآوری:

$$1 \longrightarrow 2\pi\delta(w) \qquad\qquad x(t) \longleftrightarrow x(w)$$

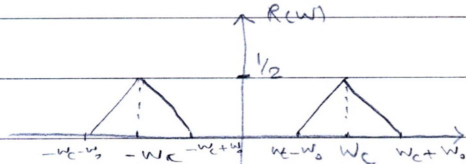
$$1e^{jw_ct} \longrightarrow 2\pi\delta(w-w_c) \qquad\qquad x(t)e^{jw_ct} \longrightarrow X(w-w_c)$$

$$\frac{1}{2}e^{jw_ct} \longleftrightarrow \pi\delta(w-w_c)$$

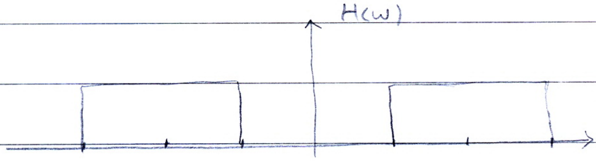
$$R(w) = \frac{1}{2\cancel{\pi}} X(w) * \{\cancel{\pi}\delta(w-w_c) + \pi\delta(w+w_c)\}$$

$$R(w) = \frac{1}{2}\{X(w) * \delta(w-w_c) + X(w) * \delta(w+w_c)\} = \frac{1}{2}\{X(w-w_c) + X(w-w$$

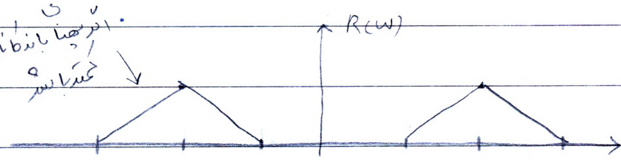
بنابراین طیف $r(t)$ برابر است با: $R(w) = \frac{1}{2}\{X(w-w_c) + X(w+w_c)\}$ که شکل آن به صورت زیر است:



خروجی کانال به صورت شکل زیر است:

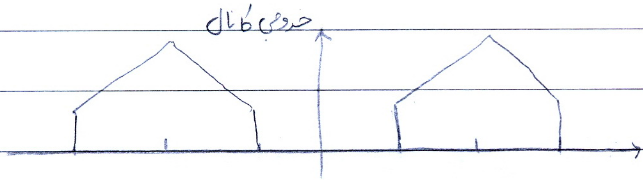


اگر پهنای باند کانال از پهنای باند سیگنال کمتر باشد



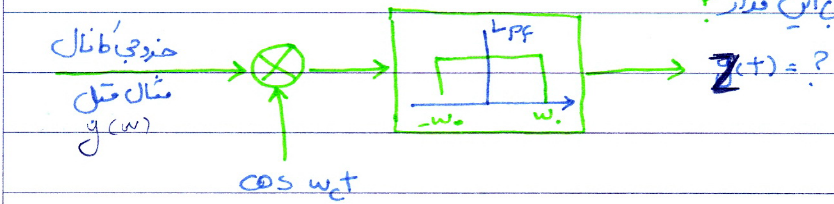
خروجی کانال به پهنای باند آن کانال بستگی دارد.

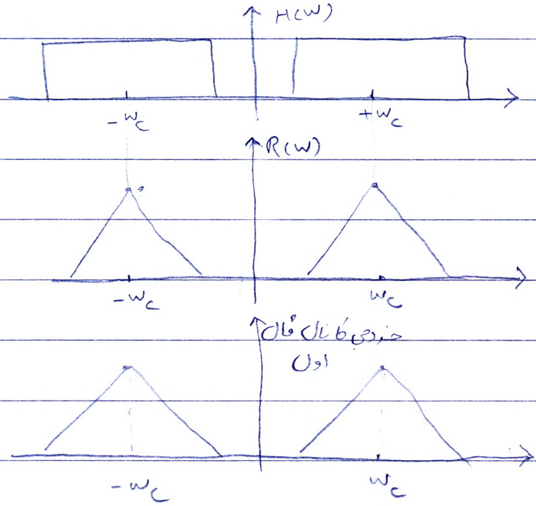
خروجی کانال



۱۵

Example : اگر پهنای باند کانال به اندازه کافی پهن باشد که کل طیف $r(t)$ از آن عبور نماید و اگر از مدار شکل زیر استفاده نماییم ، مطلوبست خروجی این مدار ؟



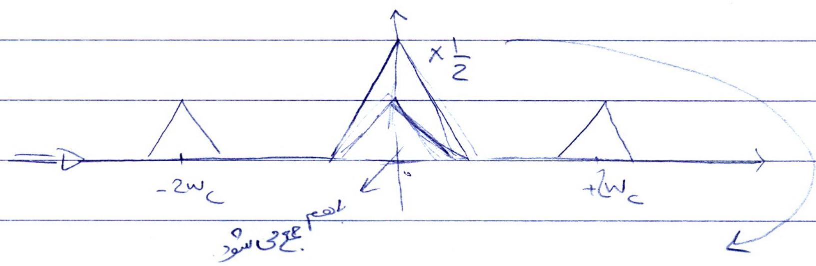


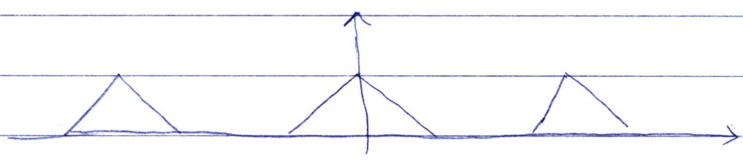
$$p(t) = y(t) \cdot \cos w_c t$$

$$\Rightarrow P(w) = \frac{1}{2\pi} \left\{ y(w) * \mathcal{F}\{\cos w_c t\} \right\}$$

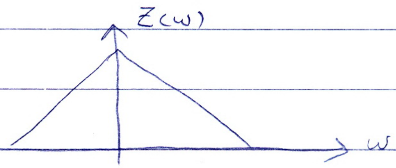
$$P(w) = \frac{1}{2\pi} \left\{ y(w) * \left(\pi \delta(w - w_c) + \pi \delta(w + w_c)\right) \right\}$$

$$P(w) = \frac{1}{2} \left\{ y(w - w_c) + y(w + w_c) \right\}$$





پس از عبور $P(w)$ از کانال Lpf چون فقط تکه میانی $P(w)$ از آن کانال عبور می کند پس $Z(w)$ به صورت زیر می گردد .



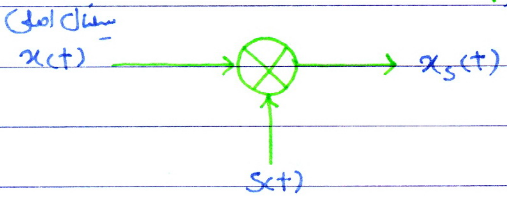
در حقیقت $Z(w) = X(w)$ است .

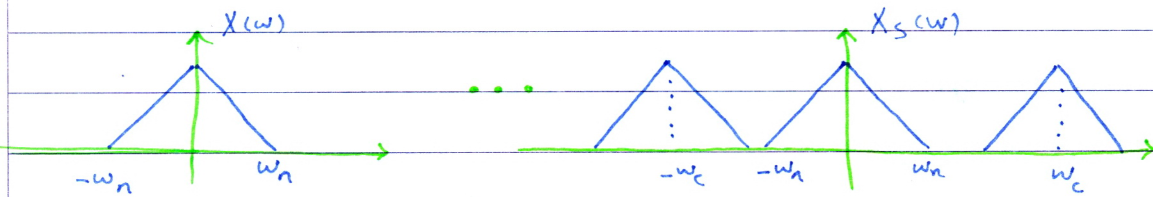
نمونه برداری :

منظور از نمونه برداری کردن از یک سیگنال، ضرب آن سیگنال در یک قطار پالس $\delta(t)$ به صورت زیر است :

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)$$

سیگنال نمونه برداری شده $x_s(t)$ به صورت زیر بدست می آید:





در حقیقت می توان نوشت:

$$x_s(t)=x(t)\cdot s(t)\Rightarrow X_s(w)=\frac{1}{2\pi}\left\{X(w)*S(w)\right\}$$

تبدیل فوریه قطار پالس

$$S(w)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-kw_s)\quad,\quad w_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

$$X_s(w)=\frac{1}{2\pi}\left\{X(w)*\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-kw_s)\right\}$$

$$X_s(w)=\frac{1}{T_s}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(w)*\delta(w-kw_s)\right\}$$

$$X_s(w)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(w-kw_s)$$

خاصیت کانولوشن: پاسخ ضربه سیستم $h(t)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

توسط تبدیل فوریه عملیات کانولوشن در حوزه زمان به حاصلضرب در حوزه فرکانس تبدیل می‌شود.

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Example: سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را داریم

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

پاسخ سیستم را به ورودی $x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$ را بیابید.

حل:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-3}^{3} 2\pi a_k \delta(\omega - k2\pi)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) = \left[\sum_{k=-3}^{3} 2\pi a_k \delta(\omega - k2\pi)\right] \frac{1}{j\omega + 1}$$

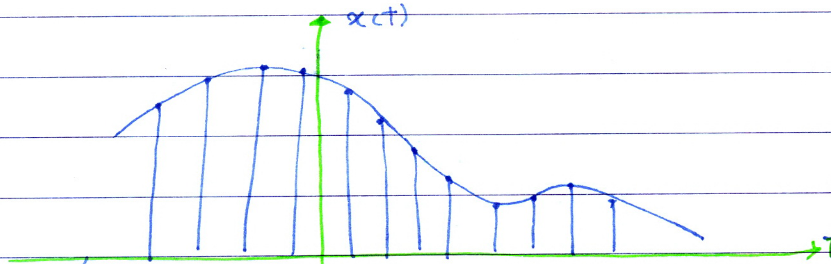
$$Y(\omega) = \sum_{k=-3}^{3} 2\pi a_k \frac{1}{j\omega+1} \cdot \delta(\omega - k2\pi)$$

$$Y(\omega) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{2\pi a_k}{jk2\pi+1} \delta(\omega - k2\pi)$$

که تبدیل معکوس $Y(\omega)$ عبارت است از:

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{a_k}{jk2\pi+1} e^{jk2\pi t}$$

$$e^{jk2\pi t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - k2\pi)$$

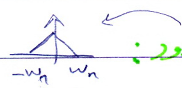


نظریه نمونه برداری:

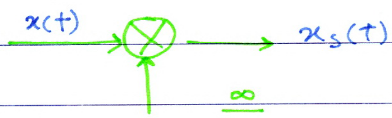
در حالت کلی نمی‌توان از روی نمونه‌های یک سیگنال، آن سیگنال را به طور کامل ایجاد نمود (ساخت).

اما اگر فاصله‌ی نمونه‌های گرفته شده از سیگنال از تغییرات خود سیگنال به اندازه کافی بزرگتر باشد می‌توان از روی نمونه‌های گرفته شده به طور کامل سیگنال اولیه را باز سازی کرد.

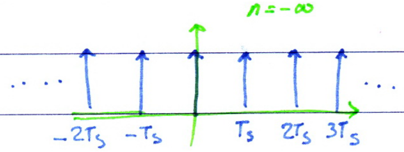
نمونه برداری با قطار پالس از سیگنال‌های باند محدود:



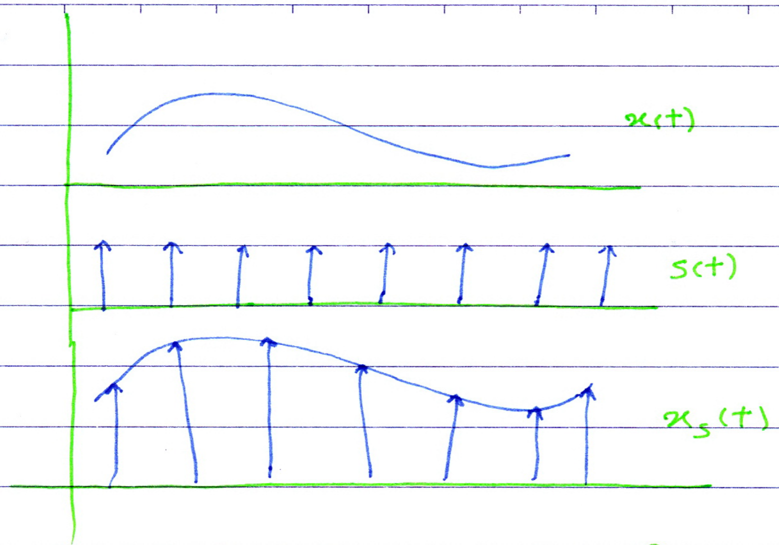
اگر فاصله‌ی نمونه برداری قطار پالس‌ها برابر T_s باشد، یعنی فرکانس نمونه برداری $f_s = \frac{1}{T_s}$ باشد و سیستم نمونه برداری زیر را به کار ببریم:



$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



در این صورت



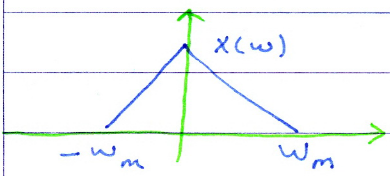
$$x_s(t) = x(t).s(t) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * S(\omega)$$ از خاصیت کانولوشن

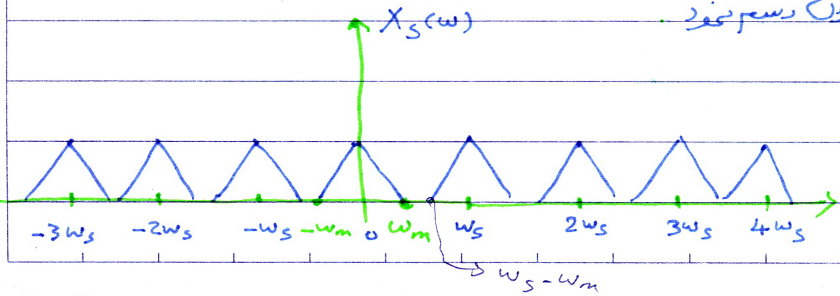
$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

چون فرض کردیم سیگنال $x(t)$ محدود است پس طیف آن به صورت زیر می باشد.



ω_m : حداکثر فرکانس سیگنال

حال $X_s(\omega)$ را به صورت زیر می توان رسم نمود.



Subject: Date:

برای آن که مش ها یکدیگر را قطع نکنند باید: $w_s - w_m > w_m$ باشد.

$$w_s > 2w_m$$

حداقل فرکانس سیگنال اصلی ← فرکانس نمونه برداری

با نرخ $w_s > 2w_m$ ←

در اینصورت با نمونه برداری می توان سیگنال اصلی $x(t)$ را از روی نمونه ها بازسازی نمود.

$$\frac{2\pi}{T_s} > 2w_m \Rightarrow \frac{T_s}{2\pi} < \frac{1}{2w_m} \Rightarrow T_s < \frac{\pi}{w_m} \Rightarrow f_s > \frac{w_m}{\pi}$$

f_s را نرخ نایکوییست گویند براساس آن نرخ نمونه برداری با موفقیت انجام شده و سیگنال قابل بازسازی می باشد.