



۱. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۶) نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در  $(0, 0)$  پیوسته نیست. بنابراین نمودار تابع در این نقطه هموار نیست. با وجود این نشان دهید  $f_1(x, y)$  و  $f_2(x, y)$  هر دو وجود دارند. پس وجود مشتقات جزئی تابعی چند متغیره، مستلزم پیوستگی آن نیست. این امر با حالت تک متغیره تفاوت دارد.  
حل:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

باید دو مسیر دلخواه و متفاوت ارائه دهیم که مقادیر حد برای این دو مسیر متفاوت باشد.  
مسیر اول را  $x = 0$  وقتی  $y \rightarrow 0$  در نظر می‌گیریم، داریم

$$l_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

مسیر دوم را  $x = y$  در نظر می‌گیریم، داریم

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1.$$

$l_1 \neq l_2$  بنابراین تابع در  $(0, 0)$  حد ندارد، در نتیجه پیوسته نیست.

برای محاسبه  $f_1(x, y)$  در  $(x, y) \neq (0, 0)$  از ضابطه تابع نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم و برای نقطه  $(x, y) = (0, 0)$  از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f_1(x, y)|_{(x,y) \neq (0,0)} = \frac{2y(x^2+y^2) - 2x(2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx^2 + 2y^3 - 4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_1(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

در نتیجه

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

به همین صورت  $f_2(x, y)$  را بدست می‌آوریم.

$$f_2(x, y)|_{(x,y) \neq (0,0)} = \frac{2x(x^2+y^2) - 2y(2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2 + 2x^3 - 4y^2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3 - 2y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$



نیمسال دوم ۹۹-۹۸  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
پاسخ تمرینات سری سوم

$$f_x(\circ, \circ) = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(\circ, \circ + h) - f(\circ, \circ)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\circ - \circ}{h} = \circ$$

در نتیجه

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2y^2x}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

پس وجود مشتقات جزئی، پیوستگی تابع را نتیجه نمی‌دهد.



۲. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۷) اگر

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^r + y) \sin \frac{1}{x^r + y^r} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مطلوبست تعیین  $f_1(0, 0)$  و  $f_2(0, 0)$  در صورت وجود.

حل:

$$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_2(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

حال برای نقطه  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  داریم

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^r + 0) \sin(\frac{1}{h^r}) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^r \sin(\frac{1}{h^r})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^r \sin(\frac{1}{h^r}) = 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f_2(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(\frac{1}{h^r})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{h^r}) \end{aligned}$$

حد بالا وجود ندارد. (دنباله‌های  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$  و  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}}$  در نظر بگیرید. روی دنباله  $a_n$  تابع به صفر و روی دنباله  $b_n$  به یک میل می‌کند)



۳. نشان دهید که تابع با ضابطه  $f(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$  در  $(0, 0)$  پیوسته است و مشتقات جزئی در این نقطه

وجود دارند اما تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. درباره  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  چه می توان گفت؟  
حل:

برای اثبات پیوستگی: با توجه به ضابطه تابع داریم  $|f(x, y)| = |x|$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$$

بنا بر قضیه  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$  و چون مقدار حد تابع در  $(0, 0)$  برابر با مقدار تابع در این نقطه است، پس تابع در  $(0, 0)$  پیوسته است. حال مشتقات جزئی را محاسبه می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

می دانیم تابع  $f(x, y)$  در  $(0, 0)$  مشتق پذیر است اگر و تنها اگر

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

حال حد بالا را برای تابع مورد نظر محاسبه می کنیم

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - 0 - h(-1) - k(0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) + h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

مسیر اول را  $h = 0$  وقتی  $k \rightarrow 0$  در نظر می گیریم

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) + 0}{\sqrt{k^2}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{|k|} = 0$$

مسیر دوم را  $h = k$  در نظر می گیریم

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h, h) + h}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{\sqrt{2}h} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

روی دو مسیر مختلف مقدار حد ها با هم برابر نبودند پس حد بالا موجود نیست و در نتیجه تابع در  $(0, 0)$  مشتق پذیر نیست.

برای بدست آوردن  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  باید تابع  $\frac{\partial f}{\partial y}$  و  $\frac{\partial f}{\partial x}$  را بدست آوریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| < |y| \\ -1 & |x| > |y| \text{ or } x = y = 0 \end{cases}$$



برای حالت  $x = y \neq 0$  را فرض کنید که  $a > 0$ ، (در حالت  $a < 0$  استدلال مشابه وجود دارد.) مشتق جزئی نسبت به  $x$  وجود ندارد زیرا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, a) - f(a, a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h, a) - f(a, a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-a - h - a}{h} = \infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h, a) - f(a, a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a + h - a}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 0 & |x| \leq |y| \\ 0 & |x| > |y| \end{cases}$$

بنابراین داریم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (-1)}{h} = \infty$$



۴. (آدامز بخش ۳-۱۲ سوال ۲۱) معادله صفحه مماس و خط قائم بر نمودار تابع  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  را در نقطه  $(1, -1)$  بیابید.

حل:

معادله نمودار تابع برابر است با  $z = \arctan(\frac{y}{x})$ ، پس در نقطه  $(1, -1)$ ،  $z = -\frac{\pi}{4}$  است. پس نقطه‌ی مورد نظر  $p = (1, -1, -\frac{\pi}{4})$  است. برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی مماس، بردار نرمال صفحه را لازم داریم، که می‌توانیم از بردار گرادیان رویه  $F(x, y, z) = z - \arctan(\frac{y}{x})$  در نقطه  $p$  استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}\nabla F(1, -1, -\frac{\pi}{4}) &= \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{(1, -1, -\frac{\pi}{4})} \\ &= \left( -\frac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}, -\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}, 1 \right) \Big|_{(1, -1, -\frac{\pi}{4})} \\ &= \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)\end{aligned}$$

بنابراین معادله صفحه مماس برابر است با

$$-\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y+1) + (z + \frac{\pi}{4}) = 0,$$

همچنین بردار گرادیان، بردار هادی خط قائم در نقطه‌ی  $p$  است. بنابراین معادله خط قائم برابر است با

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y+1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z + \frac{\pi}{4}}{1}.$$

یادآوری:

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$



۵. (آدامز بخش ۳-۱۲ سوال ۲۳) مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله  $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$  را بیابید که در آنها این رویه دارای صفحه مماس افقی هست.

حل:

باید نقاطی را بیابیم که مولفه اول و دوم بردار گرادیان در آن نقطه‌ها برابر با صفر باشد زیرا در این صورت معادله صفحه مماس به صورت  $z = c$  است که  $c$  عددی ثابت است.

بردار گرادیان رویه  $F(x, y, z) = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2 - z$  برابر است با

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y, z) &= \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (4x^3 - 4y^3, -12xy^2 + 12y, -1) \\ &= (4(x-y)(x^2 + xy + y^2), 12y(1-xy), -1)\end{aligned}$$

صفحه مماس در نقاطی که  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  صفر هستند افقی است. پس باید معادله های زیر را حل کنیم:

$$4(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0, \quad 12y(1-xy) = 0$$

از صفر بودن معادله دوم داریم  $y = 0$  یا  $1 - xy = 0$

۱. اگر  $y = 0$  باشد، از معادله اول نتیجه می‌شود  $x = 0$  است بنابراین نقطه  $(0, 0)$  را داریم.

۲. اگر  $xy = 1$  باشد از معادله اول داریم  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = 0$ ، در صورتی که این عبارت همواره ناصفر است. بنابراین

باید  $x - \frac{1}{x} = 0$  باشد. در نتیجه  $x^2 = 1$  یعنی  $x = \pm 1$  پس نقاط  $(1, 1)$  و  $(-1, -1)$  را داریم.

بنابراین صفحه مماس در نقاط  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  و  $(-1, -1)$  افقی است.



۶. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۲۶، ۲۹) نشان دهید هر یک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل جزئی داده شده صدق می کند.

$$z = \frac{x+y}{x-y}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}; \quad x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = -2w.$$

حل:

ابتدا تابع  $z = \frac{x+y}{x-y}$  را در نظر می گیریم. حال، با توجه به قواعد مشتق گیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x-y)(1) - (x+y)(1)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x-y)(1) - (x+y)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

بنابراین نتیجه می شود:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{-2y}{(x-y)^2} + y \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{-2xy}{(x-y)^2} + \frac{2xy}{(x-y)^2} = 0.$$

اکنون تابع  $w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$  را در نظر می گیریم. برای این تابع داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

در نتیجه داریم:

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = x \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + y \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + z \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2y^2 - 2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2 \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2w.$$





۷. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۰) اگر  $z = f(x^2 + y^2)$  که در آن  $f$  یک تابع یک متغیره مشتق پذیر دلخواه است، نشان دهید در معادله دیفرانسیل جزئی داده شده زیر صدق می کند.

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

حل:

با توجه به رابطه  $z = f(x^2 + y^2)$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x f'(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y f'(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

در نتیجه با توجه روابط بالا، داریم:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy f'(x^2 + y^2) - 2xy f'(x^2 + y^2) = 0$$



۸. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۴) فاصله نقطه  $(1, 1, 0)$  از سهمی وار دایره ای به معادله  $z = x^2 + y^2$  را بیابید.  
حل:

فرض کنیم نقطه‌ی  $Q = (u, v, w)$ ، نقطه‌ای روی سهمی وار  $z = x^2 + y^2$  باشد که نسبت به نقاط دیگر، کم‌ترین فاصله را از این سهمی وار تا نقطه‌ی  $P = (1, 1, 0)$  دارد. (یعنی کم‌ترین فاصله‌ی  $P$  تا سهمی وار، در نقطه‌ی  $Q$  ایجاد می‌شود.) در این صورت، بردار  $\vec{PQ} = (u-1)\vec{i} + (v-1)\vec{j} + w\vec{k}$  باید در نقطه  $Q$  بر سهمی وار مذکور عمود باشد. به عبارتی دیگر، بردار  $\vec{PQ}$  باید با بردار نرمال سهمی وار  $z = x^2 + y^2$  در نقطه‌ی  $Q$ ، یعنی بردار  $\vec{n} = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} - \vec{k}$  موازی باشد. در این صورت، به ازای عدد حقیقی  $\lambda$  داریم:

$$\vec{PQ} = \lambda \vec{n}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$u - 1 = 2\lambda u, \quad v - 1 = 2\lambda v, \quad w = -\lambda.$$

در نتیجه بدیهی است که  $u = v = \frac{1}{1-2\lambda}$ . از طرفی دیگر، چون نقطه  $Q$  روی سهمی وار  $z = x^2 + y^2$  قرار دارد، پس  $w = u^2 + v^2$ . حال از رابطه‌ای که برای  $u$  و  $v$  بدست آمد داریم  $w = \frac{2}{(1-2\lambda)^2}$ . از طرفی داشتیم  $w = -\lambda$  پس نتیجه می‌شود:

$$-\lambda = \frac{2}{(1-2\lambda)^2}$$

از رابطه‌ی بالا داریم:

$$-\lambda(1-2\lambda)^2 = 2 \implies 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \implies (\lambda + \frac{1}{4})(4\lambda^2 - 6\lambda + 4) = 0$$

از آن جا که برای معادله‌ی  $4\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$  داریم  $\Delta < 0$ ، تنها جواب ممکن برای معادله‌ی بالا عبارت است از  $\lambda = -\frac{1}{4}$  و بنابراین  $u = v = w = \frac{1}{4}$ . در نتیجه، فاصله‌ی نقطه‌ی  $P = (1, 1, 0)$  تا سهمی وار  $z = x^2 + y^2$ ، برابر است با فاصله‌ی این نقطه تا نقطه‌ی  $Q = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ، که این فاصله نیز برابر است با

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(1-\frac{1}{4})^2 + (1-\frac{1}{4})^2 + (-\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



۹. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۴) فرض کنیم

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

آیا  $f_1, f_2, f_3$  در  $(0, 0, 0)$  پیوسته هستند؟  
حل:

برای محاسبه  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  در نقطه  $(0, 0, 0)$ ، از رابطه‌ی حدی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم:

$$f_1(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_2(0, 0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k, 0) - f(0, 0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

$$f_3(0, 0, 0) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(0, 0, l) - f(0, 0, 0)}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{l^2} - 0}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{0}{l^3} = 0$$

برای بررسی پیوستگی  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  در نقطه  $(0, 0, 0)$ ، ابتدا ضابطه‌ی آن‌ها را بدست می‌آوریم. برای  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  داریم:

$$f_1(x, y, z) = \frac{(y^2z)(x^2+y^2+z^2) - (xyz)(2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{(y^2z)(x^2+y^2+z^2) - (y^2z)(2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{(y^2z)(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$f_2(x, y, z) = \frac{(2xyz)(x^2+y^2+z^2) - (xyz)(2y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{(2xyz)(x^2+y^2+z^2) - (2xyz)(y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{(2xyz)(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$f_3(x, y, z) = \frac{(xy^2)(x^2+y^2+z^2) - (xyz)(2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{(xy^2)(x^2+y^2+z^2) - (xy^2)(2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{(xy^2)(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

می‌دانیم به ازای  $i = 1, 2, 3$ ، تابع  $f_i$  در  $(0, 0, 0)$  پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f_i(x, y, z) = f_i(0, 0, 0).$$

برای محاسبه‌ی حد  $f_i$  در  $(0, 0, 0)$ ، در گام اول، باید مقدار  $f_i$  را به ازای  $i = 1, 2, 3$  در  $(0, 0, 0)$  محاسبه کنیم. داریم:

$$f_1(0, 0, 0) = \frac{0}{0},$$

$$f_2(0, 0, 0) = \frac{0}{0},$$

$$f_3(0, 0, 0) = \frac{0}{0}.$$

با توجه به ضابطه‌ی بدست آمده برای  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$ ، در هر سه حالت به صورت مبهم  $\frac{0}{0}$  می‌رسیم. در گام دوم، برای هر یک حدهای خواسته شده، مسیر  $x = y = z$  را به عنوان مثال نقض وجود حد در نظر می‌گیریم. برای  $f_1$  داریم:

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2x)(-3x^2+x^2+x^2)}{(x^2+x^2+x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^5}{9x^6} = \text{حد وجود ندارد},$$



برای  $f_2$  داریم:

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^3)((x^4 - x^4 + x^4))}{(x^4 + x^4 + x^4)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^7}{9x^8} = \text{حد وجود ندارد},$$

برای  $f_3$  داریم:

$$I_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3)(x^4 + x^4 - 3x^4)}{(x^4 + x^4 + x^4)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^7}{9x^8} = \text{حد وجود ندارد}.$$

همان‌طور که دیده می‌شود، در این مسیر، هیچ‌کدام از حدها وجود ندارند. در نتیجه  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  در  $(0, 0, 0)$  پیوسته نیستند.



۱۰. (آدامز بخش ۵ - ۱۲ سوال ۱۵) فرض کنید  $f$  دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد.

الف) اگر  $y = 3s - 2t, x = 2s + 3t, z = f(x, y)$  مطلوبست است محاسبه  $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ .

ب) اگر  $y = t \cos s, x = t \sin s$  مطلوبست است محاسبه  $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x, y)$ .

حل (الف):

با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (3f_1(x, y) - 2f_2(x, y)) = 3 \frac{\partial f_1}{\partial s} - 2 \frac{\partial f_2}{\partial s} \\ &= 3 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) - 2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= 3(2f_{11} + 3f_{12}) - 2(2f_{21} + 3f_{22}) = 6f_{11} + 5f_{12} - 6f_{21} - 6f_{22} \end{aligned}$$

حل قسمت (ب):

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (\sin s f_1(x, y) + \cos s f_2(x, y)) \\ &= \cos s f_1(x, y) + \sin s \frac{\partial f_1}{\partial s} - \sin s f_2(x, y) + \cos s \frac{\partial f_2}{\partial s} \\ &= \cos s f_1(x, y) + \sin s \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \sin s f_2(x, y) + \cos s \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= \cos s f_1 + \sin s (t \cos s f_{11} - t \sin s f_{12}) - \sin s f_2 + \cos s (t \cos s f_{21} - t \sin s f_{22}) \\ &= \cos s f_1 + t \sin s \cos s f_{11} - t \sin^2 s f_{12} - \sin s f_2 + t \cos^2 s f_{21} - t \cos s \sin s f_{22} \\ &= \cos s f_1 - \sin s f_2 + t \sin s \cos s (f_{11} - f_{22}) + t (\cos^2 s - \sin^2 s) f_{12} \end{aligned}$$



۱۱. (آدامز بخش ۵ - ۱۲ سوال ۲۳) اگر  $x = e^s \cos t, y = e^s \sin t$  و  $z = u(x, y) = v(s, t)$  نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

حل:  $x = e^s \cos t$  و  $y = e^s \sin t$  توابعی بر حسب  $s$  و  $t$  هستند. در نتیجه:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = e^s \cos t, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -e^s \sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = e^s \sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = e^s \cos t$$

از  $z$  نسبت  $s$  مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y}$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر بر حسب  $s$  مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \cos t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) + e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y} + e^s \sin t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y} + e^s \cos t \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial s} \right) + e^s \sin t \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ &= e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y} + e^s \cos t \left( e^s \cos t \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^s \sin t \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + e^s \sin t \left( e^s \sin t \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e^s \cos t \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

از  $z$  نسبت  $t$  مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial y}$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر بر حسب  $t$  مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= -e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} - e^s \sin t \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) - e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y} + e^s \cos t \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= -e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} - e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y} - e^s \sin t \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + e^s \cos t \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ &= -e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} - e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y} - e^s \sin t \left( -e^s \sin t \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^s \cos t \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + e^s \cos t \left( e^s \cos t \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - e^s \sin t \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = e^{2s} (\sin^2 t + \cos^2 t) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$



۱۲. (آدامز بخش ۵ - ۱۲ سوال ۲۵) اگر  $u(x, y) = r^2 \ln r$  و  $r^2 = x^2 + y^2$  ، نشان دهید

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

حل:

طبق فرض مسئله  $r^2 = x^2 + y^2$  و  $u(x, y) = r^2 \ln r$  ، با مشتق گیری از طرفین رابطه‌ی  $r^2 = x^2 + y^2$  نسبت به  $x$  و  $y$  داریم:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

حال از  $u$  نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = (2r \ln r + r) \frac{x}{r} = x(1 + 2 \ln r)$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب  $x$  مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x(1 + 2 \ln r)) \\ &= (1 + 2 \ln r) + x \frac{\partial}{\partial x} (1 + 2 \ln r) \\ &= (1 + 2 \ln r) + 2x \left( \frac{\partial \ln r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= 1 + 2 \ln r + \frac{2x^2}{r^2} \end{aligned}$$

حال از  $u$  نسبت به  $y$  مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = (2r \ln r + r) \frac{y}{r} = y(1 + 2 \ln r)$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب  $y$  مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y(1 + 2 \ln r)) \\ &= (1 + 2 \ln r) + y \frac{\partial}{\partial y} (1 + 2 \ln r) \\ &= (1 + 2 \ln r) + 2y \left( \frac{\partial \ln r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ &= 1 + 2 \ln r + \frac{2y^2}{r^2} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + 2 \ln r + 2 \left( \frac{x^2 + y^2}{r^2} \right) = 2 + 2 \ln r = 2 + 2 \ln(x^2 + y^2)$$



برای سادگی محاسبات قرار دهید:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 + 2 \ln(x^2 + y^2)$$

در نتیجه:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \left( \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 4 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \left( \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 4 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

در نتیجه با توجه به خواسته‌ی مسئله داریم:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (f(x, y)) = f_{xx} + f_{yy} = 4 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + 4 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$





۱۳. (آدامز بخش ۷ - ۱۲ سوال ۱۹) اگر برای تابع دیفرانسیل پذیر  $f(x, y)$  داشته باشیم:

$$D_{(i+j)/\sqrt{2}}f(a, b) = 3\sqrt{2},$$

$$D_{(3i-4j)/5}f(a, b) = 5,$$

مطلوبست محاسبه  $\nabla f(a, b)$ .

حل:

چون تابع مورد نظر دیفرانسیل پذیر است لذا:

$$D_u f(a, b) = u \cdot \nabla f(a, b) \quad (*)$$

فرض کنید  $\nabla f(a, b) = (s, t)$ .

ابتدا با توجه به فرض اول بردار جهت را  $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  در نظر می‌گیریم. لذا با توجه به (\*) داریم:

$$D_{(i+j)/\sqrt{2}}f(a, b) = 3\sqrt{2} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (s, t) = \frac{s+t}{\sqrt{2}} \rightarrow s+t=6$$

حال با توجه به فرض دوم بردار جهت را  $u = (\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$  در نظر می‌گیریم. لذا با توجه به (\*) داریم:

$$D_{(3i-4j)/5}f(a, b) = 5 = (\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}) \cdot (s, t) = \frac{3s-4t}{5} \rightarrow 3s-4t=25$$

با حل دستگاه داریم  $s=7$  و  $t=-1$  در نتیجه  $\nabla f(a, b) = 7i - j$ .



۱۴. (آدامز بخش ۷ - ۱۲ سوال ۲۶) بردار مماس بر خم مشترک بین دو استوانه  $x^2 + y^2 = 2$  و  $y^2 + z^2 = 2$  را در نقطه  $(1, -1, 1)$  بیابید.

حل: ابتدا باید بردار قائم هر دو منحنی را پیدا کنیم.

بردار قائم سطح استوانه‌ای  $x^2 + y^2 = 2$  برابر است با:

$$n_1 = \nabla(x^2 + y^2 - 2) = (2x, 2y, 0) \quad \xrightarrow{(x,y,z)=(1,-1,1)} \quad n_1 = (2, -2, 0)$$

و بردار قائم سطح استوانه‌ای  $y^2 + z^2 = 2$  برابر است با:

$$n_2 = \nabla(y^2 + z^2 - 2) = (0, 2y, 2z) \quad \xrightarrow{(x,y,z)=(1,-1,1)} \quad n_2 = (0, -2, 2)$$

بردار مماس بر خم مشترک هر دو منحنی، بر هر دو بردار قائم فوق عمود است. در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = i + j + k$$

لذا بردار  $i + j + k$  یا هر مضرب اسکالر دیگری از آن در نقطه‌ی داده شده بر منحنی‌ها مماس است.



۱۵. (آدامز بخش ۷ - ۱۲ سوال ۳۶) فرض کنیم

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف) مطلوبست محاسبه  $\nabla f(0, 0)$ .

ب) با استفاده از تعریف مشتق سویی،  $D_u f(0, 0)$  را که در آن  $u = (i + j) / \sqrt{2}$  را محاسبه کنید.

ج) آیا  $f(x, y)$  در  $(0, 0)$  دیفرانسیل پذیر است؟

حل:

الف) برای محاسبه  $\nabla f(0, 0)$  باید مشتقات جزئی را از تعریف مشتق محاسبه کنیم:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

لذا

$$\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) = (0, 0).$$

ب) می‌خواهیم مشتق سویی را با استفاده از تعریف در جهت بردار  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  در نقطه  $(0, 0)$  بیابیم.

با توجه به تعریف مشتق سویی که به صورت  $D_u f(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}$  تعریف می‌شود داریم:

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 0 + \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\frac{h^2}{2})}{h\sqrt{\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\frac{h^2}{2})}{h^2} = \frac{1}{2}$$

ج) خیر. زیرا

$$\frac{1}{2} = D_u f(0, 0) \neq u \cdot \nabla f(0, 0) = 0$$

نکته: اگر تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه  $D_u f(a, b) = u \cdot \nabla f(a, b)$ . اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.



۱۶. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{|y|} \sqrt{x^2 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

(آ) نشان دهید برای هر بردار یکه  $u = (u_1, u_2)$  در صفحه،  $D_u f(0, 0)$  وجود دارد.

(ب) آیا تابع  $f$  در  $(0, 0)$  مشتق پذیر است؟

حل: الف) اگر  $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$  دو حالت در نظر می گیریم:  
اگر  $u_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} D_u f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{tu_2}{|tu_2|} \sqrt{(tu_1)^2 + (tu_2)^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tu_2}{|tu_2|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u_2}{|u_2|} = \pm 1 \end{aligned}$$

اگر  $u_2 = 0$

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{0}{t} = 0$$

(ب) خیر، اگر  $f(x, y)$  در  $(0, 0)$  دیفرانسیل پذیر باشد در آن صورت  $D_u f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot u$  اما همان طور که در زیر مشاهده می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k}{|k|} |k|}{k} = 1$$

$$\nabla f(0, 0) \cdot u = (0, 1) \cdot (u_1, u_2) = u_2$$

اما از آنجا که  $u = (u_1, u_2)$  بردار یکه است داریم  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ . بنابراین بردار  $u$  می تواند هر یک از نقاط روی دایره واحد به مرکز مبدا و شعاع یک باشد. پس با توجه به قسمت الف لزوماً  $u_2$  صفر یا  $\pm 1$  نیست پس لزوماً  $D_u f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot u$  برقرار نیست.



۱۷. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۱۰) در هر یک از حالت های زیر، با توجه به معادلات مفروض، مشتق خواسته شده را محاسبه کنید. کدام شرط بر متغیرها وجود جوابی را تضمین می کند که دارای مشتق مشخص شده است؟  
الف)  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, x + 2y + 3z + 4w = 2$ ,  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ .  
حل: الف)

$$\begin{cases} x = x(y, z) \\ w = w(y, z) \end{cases}$$

با مشتق گرفتن از معادله نسبت به  $y$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2x \frac{\partial x}{\partial y} + 2y + 2w \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial y} + 2 + 4 \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

در نتیجه با ضرب معادله اول در ۲ و ضرب معادله دوم در  $w$  خواهیم داشت:

$$(4x - w) \frac{\partial x}{\partial y} + 4y - 2w = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2w - 4y}{4x - w}$$

اگر  $w \neq 4x$  باشد معادله جواب دارد.

ب)  $xyuv = 1, x + y + u + v = 0$ ,  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$ .  
حل: ب)

$$\begin{cases} y = y(x, u) \\ v = v(x, u) \end{cases}$$

با مشتق گرفتن از معادله نسبت به  $x$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} yuv + xuv \frac{\partial y}{\partial x} + xyu \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 1 + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

در نتیجه با ضرب معادله دوم در  $xyu$  خواهیم داشت:

$$yuv - xyu + (xuv - xyu) \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u = \frac{y(x - v)}{x(v - y)}$$

اگر  $u \neq 0, v \neq y, x \neq 0$  باشد معادله جواب دارد.



۱۸. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۱۷) نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xy^x + zu + v^x = 3 \\ x^x z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه  $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$  نسبت به مجهولات  $x, y, z$  به عنوان توابعی از  $u, v$  حل کرد و سپس  $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$  را به ازای  $(u, v) = (1, 1)$  بیابید.  
حل:

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = xy^x + zu + v^x - 3 \\ G(x, y, z, u, v) = x^x z + 2y - uv - 2 \\ H(x, y, z, u, v) = xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^x & 2xy & u \\ 3x^x z & 2 & x^x \\ u - yz & v - xz & -xy \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

بنابر قضیه تابع ضمنی می توان  $x, y, z$  را به صورت توابعی از  $u, v$  نوشت.  
برای محاسبه  $\frac{\partial y}{\partial u}$  می توان از دو روش استفاده کرد.  
روش اول: از معادلات دستگاه داده شده نسبت به  $u$  مشتق می گیریم:

$$\begin{cases} y^x \frac{\partial x}{\partial u} + 2xy \frac{\partial y}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial u} + z = 0 \\ 3x^x z \frac{\partial x}{\partial u} + x^x \frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial y}{\partial u} - v = 0 \\ u \frac{\partial x}{\partial u} + x + v \frac{\partial y}{\partial u} - yz \frac{\partial x}{\partial u} - xz \frac{\partial y}{\partial u} - xy \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

با جایگذاری نقطه  $p$  داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} + 2 \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} + 1 = 0 \\ 3 \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial y}{\partial u} - 1 = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} + 1 + \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا ،  $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{3}{4}$  ،  
روش دوم: ( استفاده از فرمول:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, u, z)} / \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = -\frac{3}{4}$$



نیمسال دوم ۹۹-۹۸  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
پاسخ تمرینات سری سوم

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, u, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 & z & u \\ 3x^2z & -v & x^2 \\ u - yz & x & -xy \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$



۱۹. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۱۸) نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = 2 \\ u \cos y + x^2 y - yz^2 = 1 \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه  $(x, y, z, u, v) = (2, 0, 1, 1, 0)$  نسبت به مجهولات  $u, v$  به عنوان توابعی از  $x, y, z$  حل کرد و سپس  $(\frac{\partial u}{\partial z})_{x,y}$  را به ازای  $(x, y, z) = (2, 0, 1)$  بیابید.  
حل: قرار می دهیم:

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = xe^y + uz - \cos v - 2 \\ G(x, y, z, u, v) = u \cos y + x^2 v - yz^2 - 1 \end{cases}$$

از طرفی در نقطه  $p_0 = (2, 0, 1, 1, 0)$  داریم:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{vmatrix}_{p_0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

از آنجا که  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0$  بنابراین قضیه تابع ضمنی می توان  $u, v$  را به صورت توابعی از  $x, y, z$  نوشت. با استفاده از فرمول داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial(F, G) / \partial(z, v)}{\partial(F, G) / \partial(u, v)} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} u & \sin v \\ -2yz & x^2 \end{vmatrix}_{p_0} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$





۲۰. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۲۲) اگر رابطه  $F(x, y, z) = 0$  متغیر  $z$  را به عنوان تابعی از  $x, y$  به دست دهد، مطلوبست

محاسبه  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  بر حسب مشتق های جزئی  $F$ .

حل: از آنجا که اگر رابطه  $F(x, y, z) = 0$  متغیر  $z$  را به عنوان تابعی از  $x, y$  بدست می دهد به عبارتی  $z = z(x, y)$  ، بنابراین

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$F_{xx} + F_{xz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{zy} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{zz} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + F_z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{F_z} [F_{xx} + F_{xz} \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) + F_{zz} \left(-\frac{F_x}{F_z}\right)^2] \\ &= -\frac{1}{F_z^3} [F_{xx} F_z^2 - F_{xz} F_x F_z + F_{zz} F_x^2] \end{aligned}$$

به صورت متشابه داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{F_z^3} [F_{yy} F_z^2 - F_{yz} F_y F_z + F_{zz} F_y^2]$$

همچنین

$$F_{yz} + F_{zy} \frac{\partial z}{\partial y} + (F_{zz} + F_{zz} \frac{\partial z}{\partial y}) \frac{\partial z}{\partial x} + F_{zz} \left(\frac{\partial z}{\partial y \partial x}\right)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -\frac{1}{F_z} [F_{yz} + F_{zy} \left(-\frac{F_y}{F_z}\right) + F_{zz} \left(-\frac{F_y}{F_z}\right) + F_{zz} \left(-\frac{F_y F_x}{F_z^2}\right)] \\ &= -\frac{1}{F_z^3} [F_{yz} F_z^2 - F_{zy} F_y F_z - F_{zz} F_y F_x + F_{zz} F_y F_x] \end{aligned}$$



۲۱. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۲۵) اگر  $F(x, y, z) = 0$  نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

فرمول‌های مشابهی برای  $F(x, y, z, u) = 0$  و  $F(x, y, z, u, v) = 0$  بدست آورید. حالت کلی چیست؟  
پاسخ. با مشتق گرفتن از رابطه  $F(x, y, z) = 0$  نسبت به  $x$  و  $y$  و  $z$  داریم:

$$\begin{cases} F_x \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + F_y = 0 \\ F_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + F_z = 0 \\ F_z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + F_x = 0 \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{-F_y}{F_x}$$

و

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{-F_z}{F_y}$$

و

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{-F_x}{F_z}$$

پس داریم:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{-F_y}{F_x}\right) \left(\frac{-F_z}{F_y}\right) \left(\frac{-F_x}{F_z}\right) = (-1)^3 = -1.$$

حال فرض کنید  $F(x, y, z, u) = 0$ . مشابه قسمت قبل، با مشتق‌گیری از  $F$  نسبت به  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $u$ ، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,u} = \frac{-F_y}{F_x}$$

و

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{u,z} = \frac{-F_z}{F_y}$$

و

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{x,y} = \frac{-F_u}{F_z}$$



و

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{-F_x}{F_u}$$

لذا

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,u} \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{u,x} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{x,y} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z} = (-1)^4 = 1.$$

حال مشابهاً، اگر داشته باشیم  $F(x_1, \dots, x_n) = 0$  داریم:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3, \dots, x_n} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)_{x_4, \dots, x_n, x_1} \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)_{x_2, \dots, x_{n-1}} = (-1)^n.$$



۲۲. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u^4 v^4 + (u+x)^3 + y + 3w - 4 = 0, \\ \sin(uv) + e^{v+y^{x-1}} + v - 1 = 0, \\ x^2 - 4y^2 + 4w = v - u, \end{cases}$$

(آ) نشان دهید در یک همسایگی نقطه  $p_0 = (u, v, w, x, y) = (0, 0, 1, 0, 1)$  می توان این دستگاه را نسبت به مجهولات

$u, v$  و  $w$  به عنوان تابعی از  $x$  و  $y$  حل کرد.

(ب) مقادیر  $\frac{\partial w}{\partial y}$  و  $\frac{\partial v}{\partial y}$  را در نقطه  $(x, y) = (0, 1)$  بیابید.

(ج) اگر  $f(x, y) = e^{uv}$  باشد مقدار  $\frac{\partial f}{\partial y}$  را در نقطه  $(x, y) = (0, 1)$  بیابید.

پاسخ. الف) قرار دهید:

$$\begin{cases} F = u^4 v^4 + (u+x)^3 + y + 3w - 4, \\ G = \sin(uv) + e^{v+y^{x-1}} + v - 1, \\ H = x^2 - 4y^2 + 4w + u - v. \end{cases}$$

حال به راحتی می توان بررسی کرد که  $F(p_0) = G(p_0) = H(p_0) = 0$ . همچنین،  $F$  و  $G$  و  $H$  در یک همسایگی از  $p_0$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. حال داریم:

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 4u^3 v^4 + 3(u+x)^2 & 4u^4 v^3 & 3 \\ v \cos(uv) & u \cos(uv) + e^{v+y^{x-1}} + 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

پس داریم:

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{p_0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

لذا طبق قضیه تابع ضمنی، میتوان  $u$  و  $v$  و  $w$  را حول  $p_0$  نسبت به  $x$  و  $y$  حل نمود.

(ب) داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, y, w)}}{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}}$$



از طرفی

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, y, w)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2ye^{v+y^2-1} & 0 \\ 1 & -8y & 4 \end{vmatrix}$$

لذا

$$\left. \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, y, w)} \right|_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_p = \frac{-6}{6} = -1$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, y)}}{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}}$$

اما

$$\left. \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, y)} \right|_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -8 \end{vmatrix} = -2$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_p = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

(ج) داریم:  $f(x, y) = e^{vw}$ . لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= f_v v_y + f_w w_y \\ &= we^{vw} v_y + ve^{vw} w_y \end{aligned}$$

حال طبق قسمت ب، خواهیم داشت:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p = -1$$



۲۳. (آدامز بخش ۱ - ۱۳ سوالات ۱۸، ۹) نقاط بحرانی توابع مفروض زیر را بیابید و نوع آنها را مشخص کنید.

$$(a) f(x, y) = x^y e^{-(x^2+y^2)}$$

$$(b) f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$$

پاسخ. الف) داریم  $f(x, y) = x^y e^{-(x^2+y^2)}$  لذا خواهیم داشت

$$\nabla f = (2xy(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)}, x^2(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}).$$

قرار می‌دهیم  $\nabla f = (0, 0)$ . خواهیم داشت:

$$\begin{cases} xy(1-x^2) = 0 \\ \text{و} \\ x^2(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

لذا نقاط  $(\pm 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$  و  $(\pm 1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  و  $(0, y)$  که  $y \in \mathbb{R}$  نقاط بحرانی تابع است. حال داریم  $f(0, y) = 0$ . همچنین برای هر  $x \neq 0$  داریم:

$$(I) \text{ اگر } y > 0, \text{ آنگاه } f(x, y) > 0.$$

$$(II) \text{ اگر } y < 0, \text{ آنگاه } f(x, y) < 0.$$

لذا نقطه  $(0, 0)$  نقطه زینی  $f$  است و برای هر  $y \in \mathbb{R}$ ، اگر  $y > 0$ ، نقطه  $(0, y)$  نقطه مینیمم نسبی و اگر  $y < 0$ ، نقطه  $(0, y)$  ماکسیمم نسبی برای  $f$  است. حال قرار می‌دهیم:

$$A = f_{11}(x, y) = 2y(1-5x^2+2x^4)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$B = f_{12}(x, y) = 2x(1-x^2)(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$C = f_{22}(x, y) = 2x^2y(2y^2-3)e^{-(x^2+y^2)}.$$

حال برای  $(\pm 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$  داریم:

$$A = C = -2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{و} \quad B = 0.$$

حال چون  $B^2 < AC$  و  $A < 0$ ، طبق آزمون مشتق دوم  $f$  در این نقاط ماکسیمم نسبی دارد.

همچنین برای  $(\pm 1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  داریم:

$$A = C = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}}, \quad B = 0.$$



لذا چون  $AC > B^2$  و  $A > 0$ ، طبق آزمون مشتق دوم  $f$  در این نقاط مینیمم نسبی دارد.  
(ب) راه حل اول:

لذا  $f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$  داریم  $\nabla f = (4yz - 4x^3, 4xz - 4y^3, 4xy - 4z^3)$ .

$$\nabla f = (0, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} 4yz - 4x^3 = 0 \\ 4xz - 4y^3 = 0 \\ 4xy - 4z^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} yz - x^3 = 0 \\ xz - y^3 = 0 \\ xy - z^3 = 0 \end{cases}$$

حال داریم  $x = 0 \iff y = 0 \iff z = 0$ . از طرفی  $(0, 0, 0)$  یک نقطه بحرانی  $f$  است. حال فرض می‌کنیم  $x \neq 0$  و  $y \neq 0$  و  $z \neq 0$  خواهیم داشت:

$$x^3 y^3 z^3 = x^3 y^3 z^3$$

حال چون  $xyz \neq 0$  است داریم  $1 = xyz$ . حال  $yz = x^3$  نتیجه می‌دهد  $x^4 = 1$  پس  $x = 1$  یا  $x = -1$ .  
حال اگر  $x = 1$  باشد داریم  $z = y^3$  و  $y = z^3$ . لذا داریم  $z = z^9$  پس  $z = \pm 1$ . اگر  $z = 1$  باشد، داریم  $y = 1$  و اگر  $z = -1$  داریم  $y = -1$ . پس  $(1, 1, 1)$  و  $(1, -1, -1)$  نقاط بحرانی  $f$  هستند.  
حال اگر  $x = -1$  باشد، داریم  $z = y^3$  و  $-y = z^3$  پس  $z = -1$  یا  $z = 1$ . اگر  $z = 1$  باشد داریم  $y = -1$  و اگر  $z = -1$  باشد داریم  $y = 1$ . لذا نقاط  $(-1, -1, 1)$  و  $(-1, 1, -1)$  نیز نقاط بحرانی  $f$  هستند.  
حال با تشکیل ماتریس هسین  $H$  وابسته به تابع  $f$  داریم:

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4z & 4y \\ 4z & -12y^2 & 4x \\ 4y & 4x & -12z^2 \end{pmatrix}.$$

قرار می‌دهیم  $P_1 = (0, 0, 0)$  و  $P_2 = (1, -1, -1)$  و  $P_3 = (1, 1, 1)$  و  $P_4 = (-1, -1, 1)$  و  $P_5 = (-1, 1, -1)$ . حال به دلیل تقارنی که تابع  $f$  دارد، نوع نقاط بحرانی  $P_2, P_3, P_4, P_5$  یکی هستند. لذا کافی است تنها نوع نقاط بحرانی  $P_1$  و  $P_3$  و  $P_5$  را مشخص کنیم. داریم

$$H(P_3) = \begin{pmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

به سادگی می‌توان دید  $H(P_3)$  معین منفی است. پس طبق آزمون مشتق دوم،  $P_3$  در  $f$  ماکسیمم نسبی دارد. همچنین داریم

$$H(P_5) = \begin{pmatrix} -12 & -4 & -4 \\ -4 & -12 & 4 \\ -4 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$



باز هم به سادگی می‌توان دید  $H(P_1)$  نیز معین منفی است. پس طبق آزمون مشتق دوم،  $f$  در  $P_1$  نیز ماکسیمم نسبی دارد. پس  $f$  در  $P_5$  و  $P_6$  هم ماکسیمم نسبی دارد.

حال فرض کنید  $N_\epsilon(P_1)$ ، یک همسایگی حول  $P_1$  به شعاع دلخواه  $\epsilon$  باشد. حال به وضوح نقطه ای مثل  $t = (x, y, z)$  در این همسایگی وجود دارد به طوری که  $x, y, z < 0$ . لذا طبق ضابطه تابع  $f$  خواهیم داشت  $f(t) < 0$ . از طرفی، طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی،  $t' \in \mathbb{N}$  وجود خواهد داشت به طوری که  $t' = (1/t', 1/t', 1/t') \in N_\epsilon(P_1)$ . حال به راحتی میتوان بررسی کرد که  $f(t') > 0$ . لذا  $P_1$  یک نقطه زینی برای  $f$  خواهد بود. توجه کنید که چون

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

آزمون مشتق دوم در مورد نوع نقطه بحرانی  $P_1$  اطلاعاتی نمی‌دهد.  
راه حل دوم:

$$\nabla f(x, y, z) = (4yz - 4x^3, 4xz - 4y^3, 4xy - 4z^3)$$

$$\nabla f = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} yz = x^3 (I) \\ xz = y^3 (II) \\ xy = z^3 (III) \end{cases}$$

اگر  $x = 0$ ، آنگاه از معادلات  $II, III$  نتیجه می‌شود  $y = z = 0$ . بطور مشابه اگر  $y = 0$ ، آنگاه از معادلات  $I, III$  نتیجه می‌شود  $x = z = 0$ . بعلاوه اگر  $z = 0$ ، آنگاه از معادلات  $I, II$  نتیجه می‌شود  $x = y = 0$ . پس یک نقطه بحرانی بدست می‌آید: یعنی  $P_1 = (0, 0, 0)$ .

بنابر استدلال بالا فرض کنید هیچ کدام از  $x, y, z$  صفر نیستند. اگر  $I, II, III$  را در هم ضرب کنیم نتیجه می‌شود:  $x^3 y^3 z^3 = x^3 y^3 z^3$ . حال چون  $xyz \neq 0$  با تقسیم بر طرفین رابطه داریم:  $xyz = 1$ . جای  $yz$  با توجه به  $I$  قرار دهید  $x^3$ ، آنگاه می‌رسیم به  $x = x \cdot x^3 = x^4$ . بطور مشابه اگر بجای  $xz$  از  $II$  قرار دهیم  $y^3$  می‌رسیم به  $y^4 = 1$ . بطور مشابه خواهیم داشت  $z^4 = 1$ . بنابراین به جواب‌های  $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$  می‌رسیم.

اگر  $x = 1$ ، آنگاه با توجه به  $I$  حالت  $y = 1, z = -1$  قابل قبول نیست و فقط دو حالت  $y = 1, z = 1$  و  $y = -1, z = -1$  قابل قبول است. پس به دو نقطه بحرانی دیگر می‌رسیم  $P_5 = (1, 1, 1)$  و  $P_6 = (1, -1, -1)$ .

با توجه به تقارن مسئله نسبت به  $x, y, z$ ، دو نقطه بحرانی دیگر خواهیم داشت  $P_4 = (-1, -1, 1)$  و  $P_5 = (-1, 1, -1)$ . حال با توجه به آزمون مشتق دوم باید تکلیف این ۵ نقطه را تعیین کنیم.

نقطه  $P_4$ :

$$H(p_4) = \begin{bmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$





$$\Delta_1 = -12 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 128 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{vmatrix} = -1024 < 0,$$

بنابراین  $H(p_2)$  معین منفی است و  $p_2$  نقطه ماکزیمم نسبی است.  
نقطه  $P_2$ :

$$H(p_2) = \begin{bmatrix} -12 & -4 & -4 \\ -4 & -12 & 4 \\ -4 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -12 < 0, \Delta_2 = 128 > 0, \Delta_3 = \det(H(p_2)) = -1024 < 0.$$

بنابراین  $H(p_2)$  نیز معین منفی است و  $p_2$  نیز نقطه ماکزیمم نسبی است.  
نقاط  $P_4, P_5$  نیز وضعیت مشابه با نقاط  $P_1, P_2$  دارند. بنابراین نقاط ماکزیمم نسبی هستند.  
نقطه  $P_1$ :

آزمون ساکت است و اطلاعاتی در اختیار ما نمی گذارد.

ادعا می کنیم  $P_1$  نقطه مینیمم نسبی  $f$  نیست. برای این منظور باید نشان دهیم هیچ همسایگی مانند  $B_\varepsilon(P_1) = \{x \in R^3 \mid \|x - P_1\| < \varepsilon\}$  وجود ندارد بطوریکه  $f$  روی این گوی باز (همسایگی باز) حول  $P_1$  مینیمم مطلق باشد. توجه داریم که  $f(P_1) = f(0, 0, 0) = 0$ . پس باید نشان دهیم برای هر  $\varepsilon > 0$  حداقل یک نقطه مانند  $Q = (x_0, y_0, z_0) \in B_\varepsilon(P_1)$  وجود دارد بطوریکه  $f(Q) < f(P_1) = 0$ .  
بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی وجود دارد  $n_0 \in \mathbb{N}$  بطوریکه  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . حال قرار دهید  $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}, \frac{1}{\sqrt{3}n_0}, \frac{-1}{\sqrt{3}n_0}\right)$  در اینصورت داریم:

$$\|Q - P_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow Q \in B_\varepsilon(P_1)$$

بعلاوه

$$f(Q) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{1}{n_0^3} - 3 \frac{1}{n_0^4} < 0.$$

بنابراین نقطه  $P_1$  نقطه مینیمم نسبی  $f$  نیست.

حال ادعا می کنیم نقطه  $P_1$  نقطه ماکزیمم نسبی  $f$  نیست. برای این منظور باید نشان دهیم هیچ همسایگی مانند  $B_\varepsilon(P_1)$  وجود ندارد بطوریکه  $f$  روی آن ماکزیمم مطلق باشد. مجدداً چون  $f(P_1) = 0$  باید نشان دهیم به ازای هر  $\varepsilon > 0$  حداقل یک نقطه مانند  $S = (x_1, y_1, z_1) \in B_\varepsilon(P_1)$  وجود دارد بطوریکه  $f(S) < f(P_1)$ . برای اثبات وجود چنین نقطه ای، روی خط  $\alpha(t) = (t, t, t)$  شروع به نزدیک شدن به مبدا یعنی نقطه  $P_1$  می کنیم.

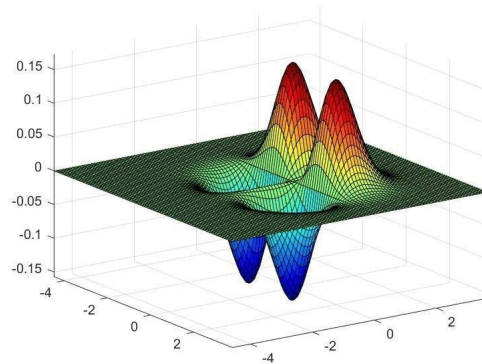
$$\forall t \geq 0 \quad f(\alpha(t)) = 4t^3 - 3t^4 = t^3(4 - 3t),$$



پس اگر  $0 < t < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$  یا بطور معادل  $0 < t < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$  آنگاه  $f$  در نقطه  $(t, t, t)$  مقدار مثبت اختیار می کند. اما الزاما این نقطه در  $B_\epsilon(P)$  قرار ندارد. توجه داریم که

$$\|\alpha(t) - P\| = \sqrt{t^2 + t^2 + t^2} = \sqrt{3}t$$

بنابراین باید شرط  $\sqrt{3}t < \epsilon$  نیز روی  $t$  گذاشته شود. بنابراین اگر  $0 < t < \min\left\{\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\right\}$  آنگاه نقطه  $S = (t, t, t)$  در شرط های  $S \in B_\epsilon(P)$  و  $0 < f(S)$  صدق می کند. پس نقطه  $P_1$  نقطه ماکزیمم نسبی  $f$  نیز نمی باشد. بنابراین



نقطه  $P_1$  یک نقطه زینی  $f$  است. نمودار تابع در شکل زیر نشان داده شده است.



۲۴. (آدامز بخش ۲ - ۱۳ سوالات ۶، ۳)

- (الف) ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y) = xy - y^2$  را بر قرص  $x^2 + y^2 \leq 1$  بیابید.  
 (ب) ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y) = xy(1 - x - y)$  را بر مثلثی که راس هایش عبارت اند از  $(0, 1)$ ،  $(1, 0)$  و  $(0, 0)$  بیابید.  
 پاسخ. الف)  $f(x, y) = xy - y^2$ ;  $x^2 + y^2 \leq 1$  داریم:

$$\nabla f = (y, x - 2y)$$

$$\rightarrow \nabla f = (0, 0) \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{و} \\ x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

لذا  $(0, 0)$  نقطه بحرانی  $f$  است. همچنین داریم  $f(0, 0) = 0$ . حال قرار می‌دهیم  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . به بررسی نقاطی روی مرز  $D$  می‌پردازیم که تابع  $f$  را اکسترمم نمایند.  
 روش اول:

با استفاده از قضیه ضرایب لاگرانژ این کار را انجام می‌دهیم. قرار می‌دهیم  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . به دنبال یافتن نقاطی مثل  $(x, y)$  هستیم به طوریکه تابع  $f$  را اکسترمم نمایند با این شرط که  $g(x, y) = 0$ . قرار می‌دهیم

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

داریم

$$\nabla L = (L_x, L_y, L_\lambda) = (y + 2\lambda x, x - 2y + 2\lambda x, x^2 + y^2 - 1).$$

لذا

$$\nabla f = (0, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x - 2y + 2\lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

از معادله اول داریم  $y = -2\lambda x$ . لذا با جایگذاری در دو معادله دیگر داریم:

$$\begin{cases} x + 4\lambda x - 4\lambda^2 x = 0 \\ x^2(1 + 4\lambda^2) = 1 \end{cases}$$

حال از معادله دوم نتیجه میشود  $x \neq 0$ . لذا داریم:

$$1 + 4\lambda - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}.$$



حال اگر  $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  باشد، از  $x^2(1+4\lambda^2) = 1$  نتیجه میشود

$$x = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

حال اگر داشته باشیم  $x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ، از  $y = -2\lambda x$  خواهیم داشت:

$$y = -\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

اگر داشته باشیم  $x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ، باز هم از  $y = -2\lambda x$  خواهیم داشت:

$$y = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

لذا نقاط

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

و

$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

را خواهیم داشت.

حال اگر  $\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$  باشد، با محاسباتی مشابه آنچه انجام شد، نقاط

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

و

$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

را به دست خواهیم آورد.

حال داریم

$$f\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

و

$$f\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$f\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$



و

$$f\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}.$$

لذا  $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$  و  $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$  به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع  $f$  روی ناحیه  $D$  خواهند بود.

روش دوم:

به وضوح هر نقطه  $(x, y)$  روی مرز ناحیه  $D$  به شکل  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ ، به ازای یک  $0 \leq t \leq 2\pi$  خواهد بود. لذا روی مرز  $D$  خواهیم داشت:

$$f(x, y) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t - \sin^2 t = g(t).$$

لذا داریم:

$$g'(t) = \cos 2t - \sin 2t$$

حال  $g'(t) = 0$  نتیجه می دهد  $2t = \frac{\pi}{4}$  یا  $2t = \frac{5\pi}{4}$ . لذا خواهیم داشت  $t = \frac{\pi}{8}$  یا  $t = \frac{5\pi}{8}$ . داریم:

$$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} > 0.$$

و

$$g\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} < 0.$$

لذا  $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$  بیشترین و  $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$  کمترین مقدار  $f$  روی  $D$  خواهد بود.  
(ب) داریم:

$$f(x, y) = xy(1-x-y)$$

لذا خواهیم داشت:

$$\nabla f = (y - 2xy - y^2, x - x^2 - 2xy)$$

حال  $\nabla f = (0, 0)$  نتیجه می دهد  $y - y^2 = x - x^2$ . لذا خواهیم داشت:

$$y^2 - x^2 + x - y = 0$$

$$\rightarrow (y-x)(y+x) - (y-x) = 0 \rightarrow (y-x)(y+x-1) = 0$$

پس نقاط به شکل  $(x, y)$  که  $\left\{ \begin{array}{l} y = x \\ y + x = 1 \end{array} \right.$  یا ، نقاط بحرانی تابع  $f$  خواهند بود.

حال اگر  $x = y$  باشد داریم:

$$f(x, y) = f(x, x) = x^2(1-2x) = x^2 - 2x^3$$



لذا داریم  $f'(x) = 2x - 6x^2$ . حال از  $f'(x) = 0$  نتیجه می‌گیریم  $x = \frac{1}{3}$ . به وضوح نقطه  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  در ناحیه مورد نظر قرار دارد و  $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$ . از طرفی اگر  $x + y = 1$ ، داریم  $f(x, y) = 0$ . همچنین به ازای تمام نقاط روی مرز ناحیه، به راحتی داریم  $f(x, y) = 0$  لذا روی ناحیه مورد نظر، بیشترین مقدار تابع  $\frac{1}{27}$  و کمترین مقدار آن صفر خواهد بود.



۲۵. (آدامز بخش ۲-۱۳ سوال ۱۱) ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2$  را بر گوی  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  بیابید.  
پاسخ. داریم  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ;  $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2$ ;  
داریم:

$$\nabla f = (y^2, 2xy + z^2, 2yz)$$

حال اگر  $\nabla f = (0, 0, 0)$  خواهیم داشت به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $(x, 0, 0)$  یک نقطه بحرانی برای  $f$  است. همچنین برای این نقاط داریم  $f(x, 0, 0) = 0$ . حال قرار دهید  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ . حال برای پیدا کردن نقاط اکسترمم تابع  $f$ ، کافی است مرز ناحیه  $D$  را بررسی کنیم. حال برای هر نقطه  $(x, y, z)$  روی مرز  $D$  داریم  $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ . لذا روی مرز ناحیه  $D$  خواهیم داشت:

$$f(x, y, z) = xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) = xy^2 + y - yx^2 - y^3 = g(x, y).$$

از طرفی تصویر کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  روی صفحه  $xy$ ، ناحیه  $x^2 + y^2 \leq 1$  می باشد. لذا برای پیدا کردن نقاط اکسترمم  $g$ ، کافی است نقاط بحرانی  $g$  و همین طور نقاط روی مرز  $D'$  را بررسی کنیم. داریم:

$$\nabla g = (y^2 - 2yx, 2xy + 1 - x^2 - 3y^2)$$

$$\rightarrow \nabla g = (0, 0) \rightarrow \begin{cases} y^2 - 2yx = 0 \\ \text{و} \\ 2xy + 1 - x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

حال از  $y^2 - 2yx = 0$  داریم  $y = 0$  یا  $y = 2x$ . اگر  $y = 0$  باشد، خواهیم داشت  $g = 0$ . پس  $f = 0$ .  
اگر  $y = 2x$  باشد، داریم  $0 = 2x(2x) + 1 - x^2 - 3(2x)^2 = 4x^2 + 1 - x^2 - 12x^2 = -9x^2 + 1$ . لذا داریم  $x = \pm \frac{1}{3}$ . پس

اگر  $x = \frac{1}{3}$  باشد داریم  $y = \frac{2}{3}$  و  $z = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$ . پس نقاط  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3})$  برای  $g$  بحرانی هستند. همچنین داریم  $f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3}) = g(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$ .

اگر  $x = -\frac{1}{3}$  باشد، داریم  $y = -\frac{2}{3}$  و  $z = \pm \frac{2}{3}$ . لذا نقاط  $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3})$  برای  $g$  بحرانی خواهند بود و داریم:

$$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{9}$$

حال روی مرز  $D'$  داریم  $x^2 + y^2 = 1$ . پس

$$g(x, y) = xy^2 = x(1 - x^2) = x - x^3 = h(x)$$



حال اگر  $h'(x) = 1 - 3x^2 = 0$  داریم  $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$  پس  $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$  حال

$$h\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{9} > \frac{-4}{9},$$

و

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} < \frac{4}{9}$$

همچنین تصویر دایره  $x^2 + y^2 = 1$  روی محور  $x$ ها، نقاط  $1 \leq x \leq -1$  است و داریم  $h(-1) = h(1) = 0$ . لذا بیشترین و کمترین مقدار  $f$  روی کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  برابر  $\frac{4}{9}$  و  $-\frac{4}{9}$  است. پس بیشترین و کمترین مقدار  $f$  روی  $D$ ،  $\frac{4}{9}$  و  $-\frac{4}{9}$  خواهد بود.





۲۶. (آدامز بخش ۳ - ۱۳ سوال ۱۲) کوتاهترین فاصله مبدا از خم حاصل از فصل مشترک رویه های  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  و  $x - 2z = 3$  را بیابید.

حل. تابع فاصله از مبدأ مختصات عبارتست از  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

همچنین می دانیم به دلیل صعودی بودن تابع رادیکال با فرجه زوج، می توانیم رادیکال را در نظر نگرفته و تنها عبارت زیر رادیکال را مینیمم یا ماکزیمم کنیم.

$$\begin{array}{ll} \min \text{ or } \max & f = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} g_1 = 0 : & x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ g_2 = 0 : & x - 2z = 3 \end{cases} \end{array}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, -2z)$$

$$\nabla g_2 = (1, 0, -2)$$

پس

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 2y = 2\lambda y & (2) \\ 2z = -2\lambda z - 2\mu & (3) \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 & (4) \\ x - 2z = 3 & (5) \end{cases}$$

از معادله (۲) داریم  $y = 0$  یا  $\lambda = 1$ .

اگر  $y = 0$  از معادله (۴) نتیجه می شود  $x = \pm z$  و با توجه به معادله (۵) نقاط بحرانی زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} x = z \Rightarrow z = -3 \Rightarrow p_1 = (-3, 0, -3) \\ x = -z \Rightarrow z = -1 \Rightarrow p_2 = (1, 0, -1) \end{cases}$$



نیمسال دوم ۹۹-۹۸  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
پاسخ تمرینات سری سوم

$$f(p_1) = 18, \quad f(p_2) = 2$$

اگر  $\lambda = 1$ ، از معادله (۱) بدست می آید  $\mu = 0$ . پس از معادله (۳) داریم  $z = 0$  و از معادله (۴) بدست می آید  $x = y = 0$  و این در تناقض با  $x = 3$  است که از معادله (۵) بدست می آید. پس این حالت اتفاق نمی افتد. لذا نقطه  $p_2$  کمترین فاصله را از مبدأ دارد.



۲۷. (آدامز بخش ۳-۱۳ سوال ۱۴) ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y, z) = x + y^2z$  را مقید به قیدهای  $z = x$  و  $y^2 + z^2 = 2$  بیابید. حل.

$$\begin{array}{l} \min \text{ or } \max \\ \text{s.t.} \end{array} \quad \begin{array}{l} f = x + y^2z \\ \left\{ \begin{array}{l} g_1 = 0 : y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ g_2 = 0 : x - z = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{array} \right.$$

داریم:

$$\begin{aligned} \nabla f &= (1, 2yz, y^2) \\ \nabla g_1 &= (0, 2y, 2z) \\ \nabla g_2 &= (1, 0, -1) \end{aligned}$$

پس

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \mu \quad (1) \\ 2yz = 2\lambda y \quad (2) \\ y^2 = 2\lambda z - \mu \quad (3) \\ y^2 + z^2 - 2 = 0 \quad (4) \\ x - z = 0 \quad (5) \end{array} \right.$$

از معادله دوم دو حالت پیش می آید  $y = 0$  یا  $z = \lambda$ .  
اگر  $y = 0$  از معادله (۴) بدست می آید  $z = \pm\sqrt{2}$ . با توجه به معادله (۵) نقاط بحرانی زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), & f(p_1) &= \sqrt{2} \\ p_2 &= (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), & f(p_2) &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

اگر  $z = \lambda$  از معادله (۳) داریم  $y^2 - 2z^2 + 1 = 0$ ، پس از معادله (۴) بدست می آید:

$$2 - z^2 = 2z^2 - 1 \Rightarrow z = \pm 1.$$



نیمسال دوم ۹۹-۹۸  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
پاسخ تمرینات سری سوم

پس نقاط بحرانی زیر را داریم:

$$p_{۳,۴} = (۱, \pm ۱, ۱), \quad f(p_{۳}) = f(p_{۴}) = ۲$$
$$p_{۵,۶} = (-۱, \pm ۱, -۱), \quad f(p_{۵}) = f(p_{۶}) = -۲$$

لذا ماکزیمم و مینیمم به ترتیب در نقاط  $p_{۳}$  و  $p_{۵}$  خواهد بود.



۲۸. مخروط  $z^2 = x^2 + y^2$  بوسیله صفحه  $1 + x + y = z$  در طول منحنی  $C$  قطع شده است. بر  $C$  نزدیکترین نقطه به مبدا را تعیین کنید.

حل. تابع فاصله از مبدا مختصات عبارتست از  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

همچنین می دانیم به دلیل صعودی بودن تابع رادیکال با فرجه زوج، می توانیم رادیکال را در نظر نگرفته و تنها عبارت زیر رادیکال را مینیمم یا ماکزیمم کنیم.

$$\begin{aligned} \min \text{ or } \max \quad & f = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} g_1 = 0: & x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ g_2 = 0: & 1 + x + y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, -2z)$$

$$\nabla g_2 = (1, 1, -1)$$

پس

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 2y = 2\lambda y + \mu & (2) \\ 2z = -2\lambda z - \mu & (3) \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 & (4) \\ 1 + x + y - z = 0 & (5) \end{cases}$$

از معادله اول و دوم می توان نتیجه گرفت

$$x - y = \lambda(x - y) \Rightarrow \lambda = 1 \text{ or } x = y.$$



با فرض  $\lambda = 1$  نتیجه می شود  $\mu = 0$ . از معادله سوم داریم  $z = 0$  و از معادله چهارم داریم  $x = y = 0$ . در این حالت با جایگذاری در معادله پنجم به تناقض  $1 = 0$  می رسیم.  
با فرض  $x = y$  از معادله پنجم بدست می آید:

$$z = 2y + 1$$

حال با جایگذاری در معادله چهارم، متغیر  $y$  را محاسبه می کنیم.

$$2y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

پس متغیرهای  $z$  و  $x$  بدست می آید. در نهایت حاصل دو نقطه زیر خواهد بود:

$$y = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, z = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$$p_1 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right) \Rightarrow f(p_1) = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$p_2 = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}\right) \Rightarrow f(p_2) = 6 + 4\sqrt{2}$$

که مقادیر مینیمم و ماکزیمم را دارند.



۲۹. هر صفحه مماس بر سطح  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{\pi}$  محورهای مختصات را در نقاط  $A, B, C$  و قطع میکند. ثابت کنید

$$\|o\vec{A}\| + \|o\vec{B}\| + \|o\vec{C}\| = \pi$$

حل. فرض کنید  $f(x, y, z) = 0$  معادله رویه مورد نظر باشد.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{\pi}$$

داریم:

$$\nabla f = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}} \right).$$

معادله صفحه مماس بر رویه  $f$  در یک نقطه دلخواه مانند  $(x_0, y_0, z_0)$  به صورت زیر است.

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}z = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x_0 + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}y_0 + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}z_0,$$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z \right) = \frac{1}{2}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}),$$

حال چون  $(x_0, y_0, z_0)$  نقطه ای از رویه مورد نظر است، داریم:

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{\pi}.$$

نقاط  $A, B, C$  که محل برخورد صفحه مماس با محورهای مختصات می باشند در معادله صفحه صدق می کنند. لذا داریم:

$$A = (a, 0, 0) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{x_0}} + 0 + 0 = \sqrt{\pi} \Rightarrow a = \sqrt{x_0} \sqrt{\pi}$$

$$B = (0, b, 0) \Rightarrow 0 + \frac{b}{\sqrt{y_0}} + 0 = \sqrt{\pi} \Rightarrow b = \sqrt{y_0} \sqrt{\pi}$$

$$C = (0, 0, c) \Rightarrow 0 + 0 + \frac{c}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{\pi} \Rightarrow c = \sqrt{z_0} \sqrt{\pi}$$

$$\|oA\| + \|oB\| + \|oC\| = a + b + c = \sqrt{\pi}(\underbrace{\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}}_{\sqrt{\pi}}) = \pi.$$



۳۰. اگر  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  توابعی مشتق پذیر و  $f(x, y) = h(g(x, y))$  باشد، دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

حل. فرض کنید  $u = g(x, y)$  در این صورت  $f(x, y) = h(u)$  که در آن  $u = g(x, y)$  در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h'(u) \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = h'(u) \frac{\partial g}{\partial y}$$

لذا

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h'(u) \frac{\partial g}{\partial x} & h'(u) \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = h'(u) \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - h'(u) \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$