فصل ششم

جایگشت درس دوم

ابوالفضل علیپورثانی

@alipoursani

درس دوم : جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم میشوند. برای اتصال درست دو دستگاه ، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به درگاه وجود دارد؟بین تمام حالتها فقط یکی منجر به کار کردن درست دستگاه میشود . آیا می دانید برای راحت پیداکردن حالت درست ، شرکت های تولیدی چگونه عمل میکنند؟

فرض کنید فیش ها را a , b , c بنامیم. حالتهای مختلف قراردادن آنها را در مربع های زیر بنویسید

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

آیا در سه مربع به هم چسبیده ، حرفی می تواند تکرار شود؟ خیر

با توجه به اصل ضرب چگونه می توان تعداد این چینش ها را بدست آورد؟

$$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

مثال۱- به چند طریق می توان ۵ کتاب فیزیک ، حسابان، شیمی ، آمار و هندسه را در یک قفسه کنار هم مرتب کرد؟

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

مثال ۲– ۹ دانش آموز به چند طریق می توانند در یک صف بایستند؟

$$۹ \times ۸ \times ۷ \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

جایگشت: اگر چند شئی متمایز داشته باشیم ، به هر یک از حالات چیدن آنها در کنار هم ، یک جایگشت از آن اشیاء گوییم.

معرفی یک نماد

اگر nیک عدد طبیعی باشد حاصلضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می دهیم.

به طور مثال $۱!=۱$ و $۲!=۱\times۲$ و $۳!=۳\times۲\times۱$ و الی آخر

قرارداد $۰!=۱$

نکته : تعداد جایگشتهای n شئی متمایز برابر است با n!

مثال – تعداد جایگشتهای ۷ شئی متمایز چند است؟ $۷!$

مثال – مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید

$$۶!=۶\times\overbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}^{۵!}=۶\times۵!$$

$$۸!=۸\times\overbrace{۷\times۶\times\ldots\times۲\times۱}^{۷!}=۸\times۷!$$

$$۹!=۹\times\overbrace{۸\times۷\times\ldots\times۲\times۱}^{۸!}=۹\times۸!$$

$$۱۰!=۱۰\times۹!$$

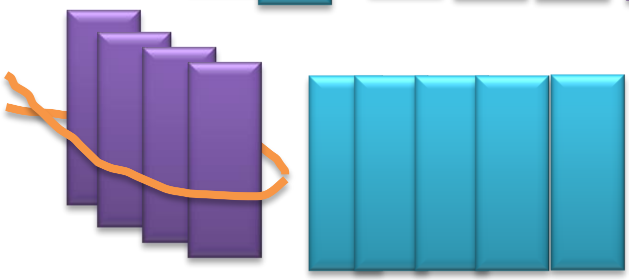
$$۱۵!=۱۵\times۱۴!$$

$$n!=n\times\overbrace{(n-۱)\times(n-۲)\times\ldots\times۲\times۱}^{(n-۱)!}=n\times(n-۱)!$$

مثال – به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف فیزیک و ۴ کتاب مختلف حساب را در یک قفسه کنار هم چید بطوریکه :

الف) هیچ محدودیتی نباشد $۹!$

ب) کتابهای فیزیک کنار هم باشند $۵!\times ۵!$



پ) کتابهای حساب کنار هم باشند $۴!\times ۶!$

ت) کتابها یکی در میان فیزیک و حساب باشند

$۴!\times ۵!$

ف	ح	ف	ح	ف	ح	ف	ح	ف

ث) ابتدا و آخر کتابها، کتاب حساب قرار داشته باشد

$۴\times ۳\times ۷!$

ح								ح
۴								۳

$(۲+۵)$

مثال - حاصل هر یک از عبارتهای زیر را محاسبه کنید

$$\frac{۵!}{۴!} = \frac{۵ \times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}} = ۵$$

$$\frac{۱۰!}{۹!} = \frac{۱۰ \times \cancel{۹!}}{\cancel{۹!}} = ۱۰$$

$$\frac{۸!}{۶!} = \frac{۸ \times ۷ \times \cancel{۶!}}{\cancel{۶!}} = ۵۶$$

$$\frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!}} = ۸ \times ۷ \times ۶$$

$$\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n \times \cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}} = n$$

حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشتهای مختلف کنار هم قرار می دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار میگیرند؟ (سراسری ۸۴تجربی)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

*دو تا **A** را باهم میگیریم و همینطور دو تا **G** را نیز باهم می گیریم اکنون ۶ شئی داریم که تعداد جایگشت هاشون برابر !۶ است*

$$۶! = ۶ \times ۵ \times ... \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$$

تست سراسری ۸۲: ارقام ۱ و۲و۳و۴و۵ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند . تعداد پنج رقمی های حاصل کدام است؟ ۱)۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴)۴۸

$$۳! \times ۳! = ۳۶$$

چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد ، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

سراسری ۹۰

۱) ۷۲
۲) ۸۴
۳) ۹۶
۴) ۱۰۸

۲ حالت	۳ حالت	۴ حالت	۴ حالت

۱
۳
۵
۷
۹

$$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیر صفر است؟

سراسری ۸۸

۱) ۲۵۶
۲) ۵۱۲
۳) ۶۲۵
۴) ۱۰۲۴

۴ حالت	۴ حالت	۴ حالت	۴ حالت	۴ حالت

۲
۴
۶
۸

$$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۱۰۲۴$$

تعداد جایگشتهای r تایی از n شئی متمایز یا به عبارتی تعداد انتخابهای r شئی ازبین n شئی متمایزرا که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد ، با $p(n,r)$ نمایش می دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می شود.

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال۱- به چند طریق می توان از بین ۳۰ دانش آموز یک کلاس یک مبصر و یک مسئول ماژیک انتخاب کرد؟

$$p(۳۰,۲)=\frac{۳۰!}{(۳۰-۲)!}=\frac{۳۰\times ۲۹\times \cancel{۲۸!}}{\cancel{۲۸!}}=۸۷۰$$

مثال۲- با ۹ نقطه روی محیط یک دایره چند بردار (پاره خط جهت دار) می توان رسم کرد؟

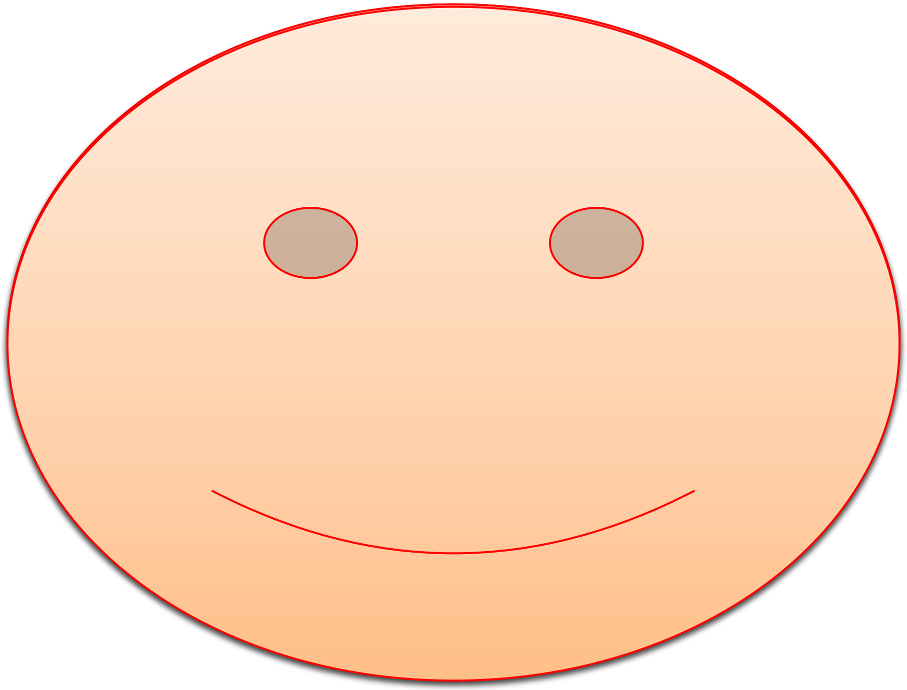
$$p(۹,۲)=\frac{۹!}{(۹-۲)!}=\frac{۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}=۷۲$$

مثال –با ارقام ۱ تا ۹ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی می توان ساخت؟

$$p(۹,۴)=\frac{۹!}{(۹-۴)!}=\frac{۹!}{۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}}=۳۰۲۴$$

مثال – برای انتخابات شورای شهر یک شهر کوچک تعداد ۲۳ نفر ثبت نام کرده و صلاحیت آنها تایید شده است. بعد از پایان انتخابات و اعلام نتایج به چند طریق ممکن است سه نفر اول انتخاب شده باشند؟

$$p(۲۳,۳)=\frac{۲۳!}{(۲۳-۳)!}=\frac{۲۳!}{۲۰!}=\frac{۲۳\times۲۲\times۲۱\times\cancel{۲۰!}}{\cancel{۲۰!}}=۱۰۶۲۶$$



پایان درس دوم

خسته نباشید