۷

محاسبات شبکه

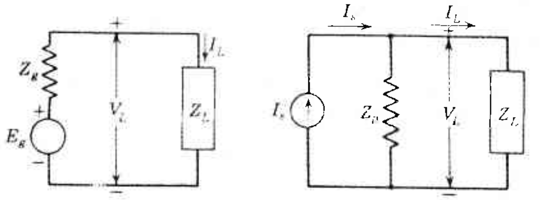
پیشرفت مداوم کامپیوترهای رقمی بزرگ و پرسرعت، اهمیت نسبی تکنیکهای مختلف حل شبکه‌های بزرگ را تغییر داده است. راه حلهای کامپیوتری به‌معادله‌های شبکه وابسته‌اند. بنابراین مهم است که مهندس سیستم قدرت، معادله‌هایی را که برنامه‌کامپیوتری، برای حل آنها نوشته می‌شود درک کند.

منظور از این فصل مرور جامع معادله‌های شبکه نیست، بلکه تنها به‌مرور و بسط آن روشهای بررسی خواهد پرداخت که برنامه‌های کامپیوتری حل مسائل سیستم قدرت به‌آنها بسیار وابسته است.

دراین فصل، معرفی ماتریسهای ادمیتانس و امپدانس شینه که در بررسیهای آینده اهمیت بسیار زیادشان روشن خواهد شد ازاهمیت ویژه برخوردار است.

۷ـ۱ منبعهای معادل

یکی ازروشهای مفید در بعضی مسائل بررسی شبکه، گذاردن منبع جریان‌ـثابتی، موازی با یك امپدانس به‌جای منبع ولتاژـثابتی متوالـی بایك امپدانس است. دوبخش شکل ۷ـ۱، این امـر را به‌نمایش می‌گذارد. هردومنبع، همراه امپدانسهای خود به‌شبکه‌ای دوقطبی با امپدانس ورودی Z_L متصل شده‌اند. فعلا می‌توان بار را شبکه‌ای نافعال درنظر گرفت؛ به‌این معنی‌که، همهٔ منبع ولتاژهای داخلی شبکهٔ بار، اتصال‌کوتاه و مدار همهٔ منبع جریانها باز فرض می‌شود.



شکل ۷-۱ مدارهای نشان دهندهٔ منبعهای معادل.

درمدار دارای emf ثابت E_g وامپدانس متوالی Z_g ولتاژ دوسر بار عبارت است از

$$V_L = E_g - I_L Z_g \qquad (۷-۱)$$

که در آن I_L، جریان بار است. درمدار دارای منبع جریان ثابت I_s و امپدانس موازی Z_p ولتاژ دوسر بار عبارت است از

$$V_L = (I_s - I_L) Z_p = I_s Z_p - I_L Z_p \qquad (۷-۲)$$

هرگاه ولتاژ V_L دو مدار برابر باشد، دو مجموعه منبع و امپدانس، بـا هم معادل خواهند بود. البته، مقادیرمساوی V_L بهمفهوم مقادیرمساوی جریانهای بار I_L بهازای بارهای یکسان است.

مقایسهٔ معادلههـای (۷-۱) و (۷-۲) نشان میدهدکـه هنگامی V_L دومدار برابـر خواهد بود ودرنتیجه منبع ولتاژ وامپدانسمتوالیش را میتوان بامنبع جریان و امپدانس موازیش تعویض کرد، که داشته باشیم

$$E_g = I_s Z_p \qquad (۷-۳)$$

و

$$Z_g = Z_p \qquad (۷-۴)$$

این روابط نشان میدهدکه وقتی میتوان بهجای یك منبع جریان-ثابت وامپدانس موازی، یك emf ثابت و امپدانس متوالی گذاشت که emf بـرابـر حاصل ضرب جریان ثابت و امپدانس مـوازی باشد و امپدانس متوالی مساوی امپدانس موازی باشد. برعکس، وقتی میتوان بهجای یك emf ثابت وامپدانسمتوالی،یك منبع جریان-ثابت وامپدانس موازی گذاشت که امپدانس موازی برابر امپدانس متوالی باشد وجریان ثابت برابر نسبت مقدار emf برامپدانس متوالی باشد.

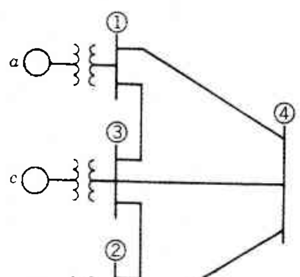
اکنون که شرایط معادل بودن منبعهای متصل بهشبکههـای نافعال را دیدیم میتوانیم بادر نظر گرفتن اصل جمع آثار نشان دهیم که اگرخروجی شبکهای فعال باشد یعنی اگرشبکهٔ

خروجی شامـل منبع ولتاژ و منبع جریان باشد نیزهمان شرایط برقرار است. برای تعیین میزان تأثیر منبع تغذیه درحالتی‌که شبکهٔ خروجی فعال است، بـا توجه به‌اصل جمع آثار می‌باید درشبکهٔ خروجی، emf ها را اتصال‌کوتاه ومدار منبع جریانها را بازکردبی‌آنکه امپدانسها دست بخورد. بنابـراین تا آنجا کـه به مؤلفهٔ جریان ناشی از منبعهای بـه‌هم تعویض‌شونده مربوط می‌شود خروجی، شبکه‌ای نافعال است. برای تعیین مؤلفه‌های جریان ناشی‌ازمنبعهای‌شبکهٔ بار، دریك‌حالت، emf منبع تغذیه اتصال‌کوتاه، ودرحالت‌دیگر مدار منبع جریان باز می‌شود. بنابراین، صرف‌نظر از نوع منبع تغذیه برای تعیین اثر منبعهای شبکهٔ بار، فقط Z_g یـا Z_p معادلش بـه‌دوسر ورودی بار متصل می‌شود. به‌این ترتیب، در اعمال اصل جمع‌آثار، مؤلفه‌های ناشی از منبعهای شبکهٔ بار درصورتی به‌نوع منبع تغذیه بستگی ندارد‌که امپدانس متوالی emf با امپدانس موازی منبع جریان-ثابت برابر باشد. درنتیجه، شرایط معادل بودن منبعها، چه شبکهٔ بارفعال باشد وچه نافعال، یکسان است.

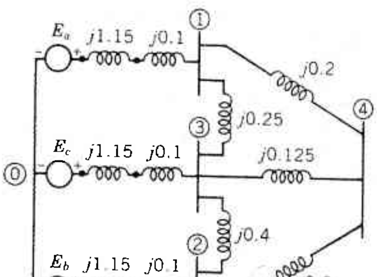
۷ـ۲ معادله‌های گرهی

هرنقطهٔ اتصال سرهای دو یا چند عنصرمدار (R، L، یا C، یا منبع ایدئال ولتاژ یا جریان) به‌یکدیگر گره نام دارد. بیان نظم‌دار معادله‌هایی‌که ازگرههای یك مدار بـا اعمال قانون جریان‌کیرشهف به‌دست می‌آید. مبنای یك رشته راه حلهای کامپیوتری جالب برای مسائل سیستم قدرت است. معمولاً کافی است تنها گرههایی را که به‌آنها بیش از دو عنصر وصل می‌شود درنظر بگیریم، واین نقاط اتصال را گرههای اصلی بنامیم.

برای بررسی بعضی ویژگیهای معادله‌های گرهی، کار را بـا نمودار تك خطی ساده شکل ۷ـ۲ آغاز می‌کنیم. ژنراتورها از طریق ترانسفورماتورهایی به شینه‌های فشار قوی ۱ و ۳ متصل شده‌اند و بار کـه موتوری سنکرون است از شینهٔ ۲ تغذیه می‌شود. به‌منظور بررسی، همهٔ ماشینهای هرشینه را به‌صورت ماشین یگانه‌ای درنظرمی گیریم و بایك emf ویك رئکتانس متوالی نشان می‌دهیم. نمودار رئکتانسها را شکل ۷ـ۳ به‌صورت در-یکی



شکل ۷ـ۲ نمودار تك‌خطی یك سیستم ساده.



شکل ۷ ـ ۳ نمودار رئکتانسهای سیستم شکل ۷ـ۲. مقدار رئکتانسها برحسب در-یك است.

نشان می‌دهد. گرهها با نقطه نمایش داده شده‌اند، اما تنها گرههای اصلی شماره دارند. اگر مدار، در حالی که به جای هر emf و امپدانس متوالی بین آن emf و یک گره اصلی، یک منبع جریان معادل و یک ادمیتانس موازی می‌گذاریم دوباره رسم شود، مدار شکل ۷-۴ نتیجه خواهد شد. به‌جای مقدار امپدانسها، مقدار ادمیتانسها برحسب در-یک نشان داده شده‌است.

برای مشخص کردن ولتاژ هر شینه نسبت به خنثی، که همان گره مرجع ۰ اختیار می‌شود، نمادگذاری تک زیرنوشتی به‌کار می‌بریم. از اعمال قانون جریان کیرشهف به گرهٔ ۱، با مساوی قرار دادن جریان ورودی به‌گره از منبع با جریان خروجی از گره، به‌دست می‌آید

$$I_1 = V_1Y_a + (V_1 - V_3)Y_f + (V_1 - V_4)Y_d \qquad (۵-۷)$$

و برای گره ۴

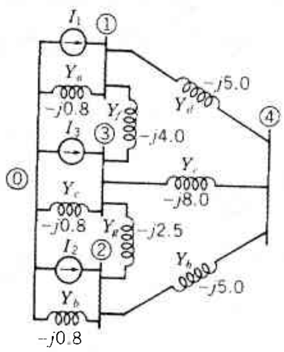
$$0 = (V_4 - V_1)Y_d + (V_4 - V_2)Y_h + (V_4 - V_3)Y_e \qquad (۶-۷)$$

از نظم دادن به‌این معادله‌ها نتیجه می‌شود

$$I_1 = V_1(Y_a + Y_f + Y_d) - V_3Y_f - V_4Y_d \qquad (۷-۷)$$

$$0 = -V_1Y_d - V_2Y_h - V_3Y_e + V_4(Y_d + Y_e + Y_h) \qquad (۸-۷)$$

می‌توان معادله‌های مشابهی برای گرههای ۲ و ۳ تشکیل داد و دستگاه چهار معادله را برای ولتاژهای V_1، V_2، V_3 و V_4 حل کرد. پس از تعیین این ولتاژها، جریان همهٔ شاخه‌ها را می‌توان به‌دست آورد. بدین‌سان، تعداد معادله‌های گرهی لازم، یکی کمتر از تعداد گرههای شبکه است. معادلهٔ گره مرجع هیچ اطلاع اضافی به دست نمی‌دهد. به‌عبارت دیگر، تعداد معادله‌های گرهی مستقل، یکی کمتر از تعداد گرههاست.



شکل ۷-۴ مدار شکل ۷-۳ درحالی که به‌جای منبع ولتاژها منبع جریانهای معادل را گذاشته‌ایم. مقادیر نشان داده شده ادمیتانسهای در-یکی‌اند.

دو معادلهٔ دیگر را ننوشته‌ایم اما اکنون می‌توانیم چگونگی نوشتن معادله‌های گرهی را با نمادگذاری استاندارد بیان کنیم. در هردو معادلهٔ (۷-۷) و (۷-۸) دیده می‌شود که جریان داخل شونده به‌شبکه ازمنبع جریانهای متصل به‌هر گره برابر مجموع چند حاصل ضرب است. درهر گره، یکی از حاصل ضربها عبارت است از ولتاژ همان گره ضرب در مجموع همهٔ ادمیتانسهایی که به‌آن گره ختم می‌شوند. این حاصل‌ضرب بیانگر جریانی است که اگر ولتاژ همهٔ گرههای‌دیگر صفر باشد از آن گره خارج می‌شود. هرحاصل‌ضرب دیگر برابراست با منفی ولتاژ یکی از گرههای دیگر ضرب در ادمیتانسی که مستقیماً بین آن گره دیگر و گرهی که معادلهٔ آن نوشته می‌شود قرار دارد. برای مثال، درگره ۱، یك‌حاصل ضرب عبارت است از $-V_3Y_f$، که بیانگرجریان خروجی از گره ۱ است اگر همهٔ ولتاژها غیر ازولتاژگره ۳ صفر باشند.

شکل استاندارد چهارمعادلهٔ مستقل به‌صورت ماتریسی عبارت است از

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \tag{۷-۹}$$

تقارن این معادله‌ها به‌یاد سپردن آنها را آسان می‌کند و چگونگی بسط آنها به هر تعداد گره، روشن است. ترتیب زیرنوشتهای Y از معلول به‌علت است، به‌این معنی که، زیرنوشت اول شمارهٔ گرهی است که جریان آن بیان می‌شود و زیرنوشت دوم مربوط به‌ولتاژ پدید آورندهٔ این مؤلفه از جریان است. ماتریس Y را به‌صورت $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ نشان می‌دهند و آن را ماتریس ادمیتانس* شینه می‌نامند. این ماتریس نسبت به‌قطر اصلیش متقارن است. ادمیتانسهای Y_{11}، Y_{22}، Y_{33} و Y_{44}، خود ادمیتانس گرهها نامیده می‌شوند، و هر کدام برابر مجموع همهٔ ادمیتانسهای منتهی به‌گرهی است که با زیرنوشتهای مکرر شناسایی می‌شود. ادمیتانسهای دیگر ادمیتانسهای متقابل گرهها هستند، وهرکدام برابر منفی مجموع همهٔ ادمیتانسهایی است که مستقیماً بین‌دو گرهی قرار دارند که با زیرنوشتهای دوگانه‌مشخص می‌شوند. درشبکهٔ شکل ۷-۴، ادمیتانس‌متقابل Y_{12} برابر $-Y_f$ است. بعضی نویسندگان، خود ادمیتانسها و ادمیتانسهای‌متقابل گرهها را ادمیتانسهای نقطهٔ رانش‌وادمیتانسهای انتقالی می‌نامند.

عبارت عمومی برای جریان منبع به‌طرف گره k ازشبکه‌ای با N گره مستقل، یعنی با N شینه به‌غیراز شینهٔ خنثی، عبارت است از

$$I_k = \sum_{n=1}^{N} Y_{kn}V_n \tag{۷-۱۰}$$

---

* برای مشخص کردن ماتریسها حروف سیاه به‌کار می‌رود.

یك چنین معادله‌ای باید برای هر یك از N شینه‌ای که ولتاژ شبکه در آنها نامعلوم است نوشته شود. اگر ولتاژ گره معلوم باشد معادله برای آن گره نوشته نخواهد شد. برای مثال، اگر اندازه ونیز زاویهٔ ولتاژ دوتا ازشینه‌های فشارقوی مثال بالا معلوم باشد، تنها به دو معادله نیاز است. معادله‌های گرهی برای دوشینهٔ دیگر، یعنی تنها آنهایی که ولتاژشان نامعلوم است، نوشته می‌شود. به‌جای هرمنبع ولتاژ و امپدانس متوالی معلومی که به گره مرجع متصل باشد لزومی ندارد منبع جریان معادل بگذاریم، زیرا در این صورت گرهی که emf وامپدانس متوالی را ازهم جدا می‌کندگرهی است که ولتاژش معلوم است.

مثال ۷-۱ معادله‌های گرهی لازم برای تعیین ولتاژ شینه‌های شماره دار شکل ۷-۴ را به‌صورت ماتریسی بنویسید. شبکهٔ معادل را شکل ۷-۳ نشان می‌دهد که emf های آن بر حسب در-یك عبارت‌اند از

$$E_a = 1.5\angle 0^\circ ،\quad E_b = 1.5\angle -36.87^\circ ،\quad \text{و}\quad E_c = 1.5\angle 0^\circ$$

حل: منبع جریانها چنین‌اند

$$I_1 = I_3 = \frac{1.5\angle 0^\circ}{j1.25} = 1.2\angle -90^\circ = 0 - j1.20 \quad \text{در-یك}$$

$$I_2 = \frac{1.5\angle -36.87^\circ}{j1.25} = 1.2\angle -126.87^\circ = -0.72 - j0.96 \quad \text{در-یك}$$

خود ادمیتانسها برحسب در-یك عبارت‌اند از

$$Y_{11} = -j5.0 - j4.0 - j0.8 = -j9.8$$

$$Y_{22} = -j5.0 - j2.5 - j0.8 = -j8.3$$

$$Y_{33} = -j4.0 - j2.5 - j8.0 - j0.8 = -j15.3$$

$$Y_{44} = -j5.0 - j5.0 - j8.0 = -j18.0$$

و ادمیتانسهای متقابل برحسب در-یك عبارت‌اند از

$$Y_{12} = Y_{21} = 0 \qquad Y_{23} = Y_{32} = +j2.5$$

$$Y_{13} = Y_{31} = +j4.0 \qquad Y_{24} = Y_{42} = +j5.0$$

$$Y_{14} = Y_{41} = +j5.0 \qquad Y_{34} = Y_{43} = +j8.0$$

معادله‌های گرهی به‌شکل ماتریسی عبارت‌انداز

$$
\begin{bmatrix} 0 - j1.20 \\ -0.72 - j0.96 \\ 0 - j1.20 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-j9.8 & j0.0 & j4.0 & j5.0 \\
j0.0 & -j8.3 & j2.5 & j5.0 \\
j4.0 & j2.5 & -j15.3 & j8.0 \\
j5.0 & j5.0 & j8.0 & -j18.0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
$$

ماتریس مربعی بالا همان ماتریس ادمیتانس شینه‌ها $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ است. □

مثال ۷-۲ معادله‌های گرهی مثال قبل را با وارون‌کردن ماتریس ادمیتانس شینه‌ها حل کنید و ولتاژهای شینه‌ها را به‌دست آورید.

حل: پیش ضرب کـردن دو طرف معادلـهٔ ماتریسی مثال ۷-۱ در وارون ماتریس ادمیتانس شینه‌ها (که‌کامپیوتر رقمی به‌کمك برنامه‌ای استاندارد تعیین می‌کند) نتیجه می‌دهد

$$
\begin{bmatrix}
j0.4774 & j0.3706 & j0.4020 & j0.4142 \\
j0.3706 & j0.4872 & j0.3922 & j0.4126 \\
j0.4020 & j0.3922 & j0.4558 & j0.4232 \\
j0.4142 & j0.4126 & j0.4232 & j0.4733
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 - j1.20 \\ -0.72 - j0.96 \\ 0 - j1.20 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
$$

ماتریس مربعی بالا که از وارون‌کـردن ماتریس ادمیتانس به‌دست آمـده است ماتریس امپدانس شینه‌ها $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ نامیده می‌شود. با انجام عمل ضرب ماتریسها نتیجه می‌گیریم

$$
\begin{bmatrix} 1.4111 - j0.2668 \\ 1.3830 - j0.3508 \\ 1.4059 - j0.2824 \\ 1.4009 - j0.2971 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
$$

و بنابراین ولتاژ گرهها عبارت اند از

$$V_{۱} = ۱٫۴۱۱۱ - j۰٫۲۶۶۸ = ۱٫۴۳۶ \angle -۱۰٫۷۱^{\circ} \text{ در-یک}$$

$$V_{۲} = ۱٫۳۸۳۰ - j۰٫۳۵۰۸ = ۱٫۴۲۷ \angle -۱۴٫۲۴^{\circ} \text{ در-یک}$$

$$V_{۳} = ۱٫۴۰۵۹ - j۰٫۲۸۲۴ = ۱٫۴۳۴ \angle -۱۱٫۳۶^{\circ} \text{ در-یک}$$

$$V_{۴} = ۱٫۴۰۰۹ - j۰٫۲۹۷۱ = ۱٫۴۳۲ \angle -۱۱٫۹۷^{\circ} \text{ در-یک} \qquad \square$$

۳-۷ پارش ماتریس

یکی از روشهای مفید درعملیات ماتریسی، که پارش نامیده می‌شود، عبارت از شناسایی بخشهای مختلف ماتریس به‌عنوان زیرماتریسهایی است که درانجام عملیات ضرب و جمع به‌صورت عناصر منفرد در نظرگرفته می‌شوند. برای مثال، ماتریس ۳ × ۳ زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ \hdashline a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{array}\right] \qquad (۷-۱۱)$$

این ماتریس راکه با خط‌چینهای عمودی و افقی به‌چهار زیرماتریس تقسیم شده است می‌توان چنین نشان داد

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \qquad (۷-۱۲)$$

که درآن زیرماتریسها عبارت‌اند از

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_{۱۳} \\ a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = [a_{۳۱} \quad a_{۳۲}] \qquad \mathbf{G} = a_{۳۳}$$

برای نشان دادن مراحل ضرب ماتریسی برحسب زیرماتریسها فرض می‌کنیم که بخواهیم ماتریس دیگر

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \hdashline b_{۳۱} \end{array}\right] \qquad (۷-۱۳)$$

را در $\mathbf{A}$ پس ضرب کنیم و ماتریس حاصل ضرب، $\mathbf{C}$، باشد با پارش نشان داده شده

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}\\ \mathbf{J}\end{bmatrix} \tag{۱۴-۷}$$

که در آن زیرماتریسها عبارت‌انداز

$$\mathbf{J}=b_{31} \quad \text{و} \quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{bmatrix}$$

ماتریس حاصل‌ضرب عبارت است‌از

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{D} & \mathbf{E}\\ \mathbf{F} & \mathbf{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{H}\\ \mathbf{J}\end{bmatrix} \tag{۱۵-۷}$$

با به‌حساب آوردن زیرماتریسها به‌صورت عناصر منفرد نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{DH}+\mathbf{EJ}\\ \mathbf{FH}+\mathbf{GJ}\end{bmatrix} \tag{۱۶-۷}$$

حاصل‌ضرب در نهایت باانجام ضرب وجمعهای نشان داده شدهٔ زیرماتریسها به‌دست می‌آید.
اگر $\mathbf{C}$ از دو زیرماتریس $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ تشکیل شود به‌طوری‌که

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}\\ \mathbf{N}\end{bmatrix} \tag{۱۷-۷}$$

مقایسه با معادلهٔ (۷-۱۶) نشان می‌دهد که

$$\mathbf{M}=\mathbf{DH}+\mathbf{EJ} \tag{۱۸-۷}$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{FH}+\mathbf{GJ} \tag{۱۹-۷}$$

اگر تنها بخواهیم زیرماتریس $\mathbf{N}$ را به‌دست آوریم، پارش ماتریس نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}\mathbf{N}&=[a_{31} \quad a_{32}]\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{bmatrix}+a_{33}b_{31}\\ &=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}\end{aligned} \tag{۲۰-۷}$$

ماتریسهایی که قرار است درهم ضرب شوند باید از اول باهم‌سازگار باشند. هرخط پارش عمودی بین ستونهای r و $r+1$ ازعامل اول باید با خط پارش‌افقی بین سطرهای

r و $1+r$ ازعامل دوم همراه باشد تا زیرماتریسها بتوانند درهم ضرب شوند. خطهای پارش افقی را می‌توان بین هردو سطرعامل اول، وخطهای عمودی را بین هردوستون‌عامل دوم رسم کرد، یا آنکه آنها را در هر یك یاهر دو ماتریس رسم نکرد. مثالی برای پارش ماتریسی در پایان بخش بعدی خواهد آمد.

۴-۷ حذف گره به‌کمك جبر ماتریسی

با عملیات ماتریسی در معادله‌های گرهی استاندارد می‌توان گرهها را حذف کرد. لیکن تنها گرههایی‌را می‌توان حذف کرد که به‌شبکه جریان نمی‌دهند وازشبکه جریان نمی‌گیرند.

معادله‌های گرهی استاندارد به‌شکل ماتریسی چنین بیان می‌شوند

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{\text{bus}} \mathbf{V} \tag{۲۱-۷}$$

که در آن $\mathbf{I}$ و $\mathbf{V}$ ماتریسهای ستونی و $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ ماتریسی مربعی و متقارن است. ماتریسهای ستونی را باید چنان مرتب کرد که عناصر مربوط به‌گرههایی‌که بناست حذف شوند در سطرهای پایینی ماتریسها قرار گیرند. عناصر ماتریس مربعی ادمیتانسها نیز به‌همین ترتیب چیده می‌شوند. ماتریسهای ستونی را چنان پاره می‌کنیم‌که عناصر وابسته به‌گرههای حذف شدنی ازعناصر دیگر جدا شوند. ماتریس ادمیتانس‌را هم طوری پاره می‌کنیم‌که عناصری که تنها باگرههای حذف شدنی مشخص می‌شوند به‌کمك خطوط افقی و عمودی از عناصر دیگر جدا شوند. با انجام پارش براساس این قواعد، معادلهٔ (۷-۲۱) می‌شود

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_X \end{bmatrix} \tag{۲۲-۷}$$

که درآن $\mathbf{I}_X$ زیرماتریس متشکل‌ازجریانهای ورودی به‌گرههایی‌است‌که باید حذف شوند و $\mathbf{V}_X$ زیرماتریس متشکل از ولتاژ این گرههاست.**البته همهٔ عناصر $\mathbf{I}_X$ صفرند وگرنه این** گرهها قابل‌حذف کردن نبودند. خود ادمیتانسها وادمیتانسهای متقابل تشکیل دهندهٔ $\mathbf{K}$ تنها به‌گرههای باقی ماندنی وابسته‌اند. $\mathbf{M}$ از خود ادمیتانسها و ادمیتانسهای متقابلی تشکیل می‌شود که تنها به‌گرههای حذف شدنی وابسته‌اند و ماتریسی مربعی است که مرتبه‌اش برابر تعدادگرههای حذف‌کردنی است. $\mathbf{L}$ وماتریس ترانهادهٔ‌آن $\mathbf{L}^T$ تنها ازادمیتانسهای متقابل بین نقاط ماندنی وحذف شدنی تشکیل می‌شود.

انجام عمل ضرب نشان داده شده درمعادلهٔ (۷-۲۲) نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{K}\mathbf{V}_A + \mathbf{L}\mathbf{V}_X \tag{۲۳-۷}$$

و

$$\mathbf{I}_X = \mathbf{L}^T\mathbf{V}_A + \mathbf{M}\mathbf{V}_X \tag{۲۴-۷}$$

چون همهٔ عناصر $\mathbf{I}_X$ صفرند، کم‌کردن $\mathbf{L}^T\mathbf{V}_A$ از دوطرف معادلهٔ (۷–۲۴) و ضرب‌کردن هردو طرف در وارون $\mathbf{M}$ (که به‌صورت $\mathbf{M}^{-1}$ نشان داده می‌شود) نتیجه می‌دهد

$$-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{V}_A=\mathbf{V}_X \qquad (۲۵\text{–}۷)$$

باگذاردن این عبارت به‌جای $\mathbf{V}_X$ درمعادلهٔ (۷–۲۳) حاصل می‌شود

$$\mathbf{I}_A=\mathbf{K}\mathbf{V}_A-\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{V}_A \qquad (۲۶\text{–}۷)$$

که معادلهٔ گرهی است با ماتریس ادمیتانس

$$\mathbf{Y}_{bus}=\mathbf{K}-\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}^T \qquad (۲۷\text{–}۷)$$

چنانکه، درمثال زیرخواهیم دید، این ماتریس ادمیتانس، امکان می‌دهد مدار را با حذف گرههای ناخواسته بازسازی کنیم.

مثال ۷–۳ اگر ژنراتور و ترانسفورماتور متصل به‌شینهٔ ۳ از مدار شکل ۷–۳ برداشته شوند، گرههای ۳ و ۴ را با عملیات جبر ماتریسی توضیح داده شده حذف کنید. مدار معادل را پس‌از حذف این گرهها به‌دست آورید، وتوان مختلط منتقل شده به داخل یا خارج از شبکه را درمحل گره ۱ و ۲ بیابید. همچنین ولتاژ گره ۱ را تعیین کنید.

حل: ماتریس ادمیتانس شینه‌های مدارکه برای حذف کردن گرههای ۳ و ۴ پاره شده عبارت است از

$$\mathbf{Y}_{bus}=\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{L}\\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}-j9.8 & 0.0 & j4.0 & j5.0\\ 0.0 & -j8.3 & j2.5 & j5.0\\ \hline j4.0 & j2.5 & -j14.5 & j8.0\\ j5.0 & j5.0 & j8.0 & -j18.0\end{array}\right]$$

وارون زیرماتریس سمت راست، پایین عبارت است از

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{-197}\begin{bmatrix}-j18.0 & -j8.0\\ -j8.0 & -j14.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j0.0914 & j0.0406\\ j0.0406 & j0.0736\end{bmatrix}$$

به‌این ترتیب

$$\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}^T=\begin{bmatrix}j4.0 & j5.0\\ j2.5 & j5.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j0.0914 & j0.0406\\ j0.0406 & j0.0736\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j4.0 & j2.5\\ j5.0 & j5.0\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}j4.9264 & j4.0736\\ j4.0736 & j3.4264\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}}=\mathbf{K}-\mathbf{LM}^{-۱}\mathbf{L}^{T}=\begin{bmatrix}-j۹٫۸ & ۰٫۰\\ ۰٫۰ & -j۸٫۳\end{bmatrix}-\mathbf{LM}^{-۱}\mathbf{L}^{T}$$

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}}=\begin{bmatrix}-j۴٫۸۷۳۶ & j۴٫۰۷۳۶\\ j۴٫۰۷۳۶ & -j۴٫۸۷۳۶\end{bmatrix}$$

بررسی این ماتریس نشان می‌دهد که ادمیتانس بین دوشینهٔ باقیمانده ۱ و ۲ عبارت‌است‌از $-j۴٫۰۷۳۶$ — که عکس آن، امپدانس در-یکی بین این دوشینه است. ادمیتانس بین هر یك ازاین شینه‌ها وشینهٔ مرجع عبارت است‌از

$$-j۴٫۸۷۳۶-(+j۴٫۰۷۳۶)=-j۰٫۸۰۰ \quad \text{در-یك}$$

مدار حاصل را شکل ۷ــ۵ (الف) نشان می‌دهد. زمانی‌که منبع جریانها به‌منبع ولتاژهای معادلشان‌تبدیل‌شوند مدارشکل ۷ــ۵(ب)، با امپدانسهای برحسب در-یکی به‌دست می‌آید. دراین حال جریان عبارت است‌از

$$I=\frac{۱٫۵\angle ۰^\circ-۱٫۵\angle -۳۶٫۸۷^\circ}{j(۱٫۲۵+۱٫۲۵+۰٫۲۴۵۵)}=\frac{۱٫۵-۱٫۲+j۰٫۹}{j(۲٫۷۴۵۵)}$$

$$=۰٫۳۲۷۸-j۰٫۱۰۹۳=۰٫۳۴۵۵\angle -۱۸٫۴۴^\circ \quad \text{در-یك}$$

توان خروجی ازمنبع a عبارت است‌از

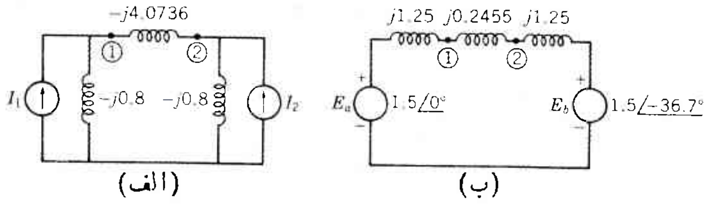
$$۱٫۵\angle ۰^\circ\times ۰٫۳۴۵۵\angle ۱۸٫۴۴^\circ=۰٫۴۹۲+j۰٫۱۶۴ \quad \text{در-یك}$$

و توان ورودی به منبع b عبارت است‌از

$$۱٫۵\angle -۳۶٫۷۸^\circ\times ۰٫۳۴۵۵\angle ۱۸٫۴۴^\circ=۰٫۴۹۲-j۰٫۱۶۴ \quad \text{در-یك}$$

توجه‌کنید‌که ولت آمپرهای واکنشی مدار باهم برابرند.

$$(۰٫۳۴۵۵)^{۲}\times ۲٫۷۴۵۵=۰٫۳۲۸=۰٫۱۶۴+۰٫۱۶۴$$



(الف) (ب)

شکل ۷ــ۵ مدار شکل ۷ــ۳ بدون منبع در گره ۳ (الف) با منبع جریانهای معادل و (ب) با منبع ولتاژهای ابتدایی درگرههای ۱ و ۲.

ولتاژ گره ۱ عبارت است از

$$1.50 - j1.25(0.3278 - j0.1093) = 1.363 - j0.410$$ در-یك □

درمدار سادهٔ این مثال، حذف گره به‌وسیلهٔ تبدیلهای ستاره-مثلثی و ترکیب امپدانسهای متوالی وموازی نیزممکن است. روش پارش ماتریس، روشی عمومی است و برای راه‌حلهای کامپیوتری مناسبتراست. لیکن، برای حذف تعداد زیادی گره، ماتریس **M** که وارونش باید به‌دست آید، بسیار بزرگ خواهد شد.

می‌توان با حذف کردن یك به‌یك گرهها از وارون کردن ماتریس اجتناب کرد و روش‌کار بسیار ساده است. گره حذف کردنی باید گره با بالاترین شماره باشد، و پس از حذف، شماره‌گذاری مجدد گرهها ممکن است لازم باشد. ماتریس **M**، یك عنصرمی‌شود و $\mathbf{M}^{-1}$، عکس آن عنصر است. ماتریس ادمیتانس ابتدایی که به‌این ترتیب به‌زیرماتریسهای **K**، **L**، $\mathbf{L}^T$ و **M** پاره شده عبارت است از

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}} = \left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{Y_{11} \cdots Y_{1j} \cdots}}^{\mathbf{K}}} & \\ Y_{11} \cdots & Y_{1j} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} \cdots & Y_{kj} & \cdots & Y_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline Y_{n1} \cdots & Y_{nj} & \cdots & \underbrace{Y_{nn}}_{\mathbf{M}} \\ \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\hphantom{Y_{n1} \cdots Y_{nj} \cdots}}_{\mathbf{L}^T}} & \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \mathbf{L} \\ \\ \end{array} \qquad (۲۸-۷)$$

ماتریس کوچك شدهٔ $(n-1)\times(n-1)$، طبق معادلهٔ (۷-۲۷)، عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kj} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} - \frac{1}{Y_{nn}} \begin{bmatrix} Y_{1n} \\ \\ Y_{kn} \\ \vdots \end{bmatrix} [Y_{n1} \cdots Y_{nj} \cdots] \qquad (۲۹-۷)$$

وهنگامی که عملیات بالا انجام شود، عنصرسطر k وستون j ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ حاصل عبارت خواهد بود از

$$Y_{kj(\text{new})} = Y_{kj(\text{o})} - \frac{Y_{kn}Y_{nj}}{Y_{nn}} \qquad (۳۰-۷)$$

همهٔ عناصرماتریس پیشین، **K** می‌بایست تغییرداده شوند. ازمقایسهٔ معادلهٔ (۷-۲۸) با معادلهٔ (۷-۳۰) روش کار به‌دست می‌آید. دو عنصر آخرسطر و ستون متناظر با عنصر تغییریابنده را در هم ضرب می‌کنیم. سپس حاصل را بر Y_{nn} تقسیم و نتیجه را از عنصر

تغییر یابنده کم می‌کنیم. مثال زیر این روش ساده را به‌نمایش می‌گذارد.

مثال ۷ــ۴ عملیات حذف گره مثال ۷ــ۳ را ابتدا با حذف گره ۴ و سپس گره ۳ انجام دهید.

حل: مانند مثال ۷ــ۳، ماتریس ابتدایی که اکنون برای حذف یك گره پاره شده عبارت است از

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}}=\left[\begin{array}{ccc|c} -j۹٫۸ & ۰٫۰ & j۴٫۰ & j۵٫۰ \\ ۰٫۰ & -j۸٫۳ & j۲٫۵ & j۵٫۰ \\ j۴٫۰ & j۲٫۵ & -j۱۴٫۵ & \boxed{j۸٫۰} \\ \hline j۵٫۰ & \boxed{j۵٫۰} & j۸٫۰ & -j۱۸٫۰ \end{array}\right]$$

برای تغییردادن عنصر $j۲٫۵$ در سطر ۳ و ستون ۲، حاصل‌ضرب عناصر محصور درمستطیل را برعنصر گوشه سمت راست، پایین تقسیم و حاصل را از عنصرتغییردادنی کم می‌کنیم. عنصر تغییر یافته چنین به‌دست می‌آید

$$Y_{۳۲}=j۲٫۵-\frac{j۸٫۰\times j۵٫۰}{-j۱۸٫۰}=j۴٫۷۲۲۲$$

به‌همین ترتیب عنصرجدید درسطر ۱، ستون ۱ عبارت است از

$$Y_{۱۱}=-j۹٫۸-\frac{j۵٫۰\times j۵٫۰}{-j۱۸٫۰}=-j۸٫۴۱۱۱$$

با به‌دست آوردن بقیهٔ عناصر به‌همین ترتیب نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}}=\begin{bmatrix} -j۸٫۴۱۱۱ & j۱٫۳۸۸۹ & j۶٫۲۲۲۲ \\ j۱٫۳۸۸۹ & -j۶٫۹۱۱۱ & j۴٫۷۲۲۲ \\ j۶٫۲۲۲۲ & j۴٫۷۲۲۲ & -j۱۰٫۹۴۴۴ \end{bmatrix}$$

کوچك‌کردن ماتریس بالا با حذف‌گره ۳ نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}}=\begin{bmatrix} -j۴٫۸۷۳۶ & j۴٫۰۷۳۶ \\ j۴٫۰۷۳۶ & -j۴٫۸۷۳۶ \end{bmatrix}$$

که همان ماتریس به‌دست آمده از روش پارش ماتریس است که در آن دوگره را به‌طور همزمان حذف کردیم. □

۷-۵ ماتریسهای ادمیتانس وامپدانس شینه‌ها

در مثال ۷-۲، ماتریس ادمیتانس شینه‌ها، $\mathbf{Y}_{bus}$ را وارون کردیم و ماتریس حاصل را ماتریس امپدانس شینه‌ها، $\mathbf{Z}_{bus}$ نامیدیم. بنا به‌تعریف

$$\mathbf{Z}_{bus} = \mathbf{Y}_{bus}^{-۱} \qquad (۳۱-۷)$$

و برای شبکه‌ای با سه گره مستقل

$$\mathbf{Z}_{bus} = \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} & Z_{۱۳} \\ Z_{۲۱} & Z_{۲۲} & Z_{۲۳} \\ Z_{۳۱} & Z_{۳۲} & Z_{۳۳} \end{bmatrix} \qquad (۳۲-۷)$$

چون $\mathbf{Y}_{bus}$ نسبت به‌قطر اصلیش متقارن است، $\mathbf{Z}_{bus}$ نیز باید به‌همان ترتیب متقارن باشد.

عناصر قطر اصلی امپدانس $\mathbf{Z}_{bus}$ را امپدانسهای نقطهٔ رانش گرهها، و عناصر خارج از قطر اصلی را امپدانسهای انتقالی گرهها می‌نامند.

برای داشتن $\mathbf{Z}_{bus}$ لازم نیست $\mathbf{Y}_{bus}$ ابتدا تعیین شود، و در بخش دیگری از این فصل خواهیم دید که چگونه می‌توان $\mathbf{Z}_{bus}$ را مستقیماً به‌دست آورد.

چنانکه بعداً خواهیم دید، ماتریس امپدانس شینه‌ها در انجام محاسبات اتصال کوتاه مهم و بسیار مفید است. برای درك اهمیت فیزیکی امپدانسهای مختلف این ماتریس، آنها را با ادمیتانسهای گرهها مقایسه می‌کنیم. این کار با نگاه کردن به‌معادله‌های هر گره خاص به‌سادگی میسر است. برای مثال، با معادله‌های گرهیی که به‌صورت زیر بیان می‌شوند آغاز می‌کنیم.

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{bus}\mathbf{V} \qquad (۳۳-۷)$$

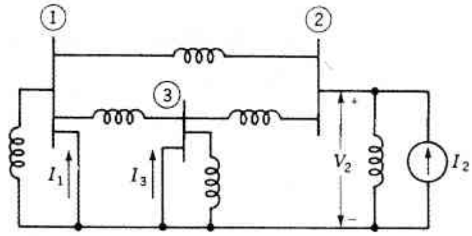
در گرهٔ ۲ از سه گره مستقل مدار داریم

$$I_۲ = Y_{۲۱}V_۱ + Y_{۲۲}V_۲ + Y_{۲۳}V_۳ \qquad (۳۴-۷)$$

اگر $V_۱$ و $V_۳$ با اتصال کوتاه کردن گرههای ۱ و ۳ به گره مرجع، به‌صفر رسانده شوند و جریان $I_۲$ به‌گره ۲ تزریق شود، خود ادمیتانس گره ۲ عبارت است از

$$Y_{۲۲} = \left.\frac{I_۲}{V_۲}\right|_{V_۱ = V_۳ = ۰} \qquad (۳۵-۷)$$

بنابراین، خود ادمیتانس هر گره خاص را می‌توان با اتصال کوتاه کردن همهٔ گرههای دیگر به‌گره مرجع و سپس به‌دست آوردن نسبت جریان تزریق شده به‌آن گره به‌ولتاژ حاصل آن گره، اندازه گرفت. شکل ۷-۶، این روش را برای شبکه‌ای واکنشی با سه گره به‌نمایش می‌گذارد. واضح است که نتیجه این کار معادل است با جمع کردن همهٔ ادمیتانسهای مستقیماً



شکل ۷ـ۶ مدار لازم برای اندازه‌گیری Y_{22}، Y_{12}، و Y_{32}.

متصل به‌آن گره، که همان روشی است که تاکنون انجام می‌دادیم.

شکل ۷ـ۶ ادمیتانس متقابل را نیز به‌نمایش می‌گذارد. در گره ۱، معادلهٔ به‌دست آمده از بسط معادلهٔ (۷ـ۳۳) عبارت است از

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 \qquad (۷ـ۳۶)$$

که از آن حاصل می‌شود

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\bigg|_{V_1=V_3=0} \qquad (۷ـ۳۷)$$

بنابراین ادمیتانس متقابل با اتصال کوتاه‌کردن همهٔ گرهها به غیر از گره ۲ به‌گره مرجع و تزریق جریان I_2 به گره ۲، مطابق شکل ۷ـ۶، اندازه‌گیری می‌شود. پس، Y_{12} عبارت است از نسبت منفی جریان خروجی از شبکه در گره ۱ در اتصال کوتاه، به ولتاژ V_2. از منفی جریان خروجی گره ۱ استفاده شده است زیرا I_1 به‌صورت جریان ورودی به‌شبکه تعریف می‌شود. چنانکه انتظار می‌رفت، ادمیتانس حاصل، منفی ادمیتانس مستقیماً متصل بین گرههای ۱ و ۲ است.

بررسی ادمیتانسهای گرهها را با این تفصیل به‌این منظور انجام دادیم که به‌وضوح بین آنها وامپدانسهای ماتریس امپدانس شینه‌ها فرق بگذاریم.

با پیش ضرب کردن دوطرف معادلهٔ (۷ـ۳۳) در $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1} = \mathbf{Z}_{\text{bus}}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{\text{bus}}\mathbf{I} \qquad (۷ـ۳۸)$$

و باید زمانی که با $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ سروکار داریم به‌خاطرداشته باشیم که $\mathbf{V}$ و $\mathbf{I}$ به‌ترتیب ماتریسهای ستونی و ولتاژهای گرهی وجریانهای ورودی به‌گرهها ازمنبع جریانها هستند. بسط معادلهٔ (۷ـ۳۸) برای شبکه‌ای باسه گره مستقل نتیجه می‌دهد.

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 \qquad (۷ـ۳۹)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 \qquad (۷ـ۴۰)$$

$$V_{۳}=Z_{۳۱}I_{۱}+Z_{۳۲}I_{۲}+Z_{۳۳}I_{۳} \qquad (۴۱-۷)$$

از معادلهٔ (۷ــ۴۰) در می‌یابیم که امپدانس نقطهٔ رانش $Z_{۲۲}$ ازمدار بازکردن منبع جریانهای گرههای ۱ و ۳ وتزریق جریان $I_{۲}$ به گره ۲ تعیین می‌شود. پس

$$Z_{۲۲}=\frac{V_{۲}}{I_{۲}}\bigg|_{I_{۱}=I_{۳}=۰} \qquad (۴۲-۷)$$

شکل ۷ــ۷ مدار تشریح شده را نشان می‌دهد. از آنجایی کــه $Z_{۲۲}$ با بازکردن مدار منبع جریانهای متصل به‌گرههای دیگر تعریف می‌شود در حالی‌که $Y_{۲۲}$ بــا اتصال‌کوتاه‌کردن گرههای دیگر به دست آمد، نباید انتظار داشته باشیم کــه این دوکمیت عکس یکدیگر باشند.

شکل ۷ــ۷ همچنین امکان می‌دهدکــه بعضی امپدانسهای انتقالی را اندازه بگیریم، زیرا ازمعادلهٔ (۷ــ۳۹) می‌بینیم که با بازشدن مدارمنبع جریانهای $I_{۱}$ و $I_{۳}$

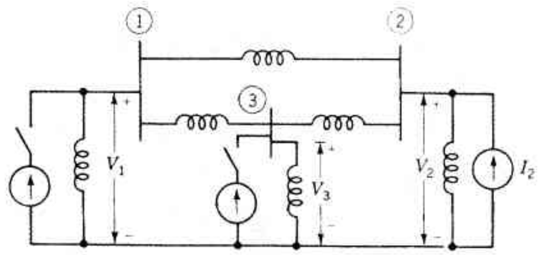
$$Z_{۱۲}=\frac{V_{۱}}{I_{۲}}\bigg|_{I_{۱}=I_{۳}=۰}$$

و از معادلهٔ (۷ــ۴۱)

$$Z_{۳۲}=\frac{V_{۳}}{I_{۲}}\bigg|_{I_{۱}=I_{۳}=۰}$$

بنا براین می‌توانیم امپدانسهای انتقالی $Z_{۱۲}$ و $Z_{۳۲}$ را با تزریق جریان به‌گره ۲ و به‌دست آوردن نسبتهای $V_{۱}$ و $V_{۳}$ به $I_{۲}$ درحالی‌که مدار منبعهای همهٔ گرهها به‌غیرازگره ۲ راباز کرده‌ایم اندازه بگیریم. مشاهده می‌کنیم کــه ادمیتانس متقابل بــا اتصال‌کوتاه‌کردن همهٔ گرهها جز یکی و امپدانس انتقالی بــا بازکردن مدار همهٔ منبعها به جز یکی اندازه‌گیری می‌شود.

معادلهٔ (۷ــ۳۹) بهما می‌گویدکه اگر درحالی‌که مدار منبع جریانهای ۲ و ۳ بــاز است به‌گره ۱ جریان تزریق‌کنیم، تنهــا امپدانسی‌که جریان از آن می گذرد $Z_{۱۱}$ است.



شکل ۷ــ۷ مدار لازم برای اندازه‌گیری $Z_{۲۲}$، $Z_{۱۲}$ و $Z_{۳۲}$.

درهمین شرایط، معادله‌های (۷-۴۰) و (۷-۴۱) نشان می‌دهند که I_1 باعث پدیدآمدن ولتاژهایی درشینه‌های ۲ و ۳ به‌صورت زیر می‌شود

$$V_2=I_1Z_{21} \qquad \text{و} \qquad V_3=I_1Z_{31} \qquad (۷-۴۳)$$

ما نمی‌توانیم مدار نافعالی قابل درک از نظر فیزیکی با این امپدانسهای ترویج کننده تشکیل دهیم، اما درك مفهوم ضمنی مباحث فوق بسیار مهم است زیرا، چنانکه بعداً خواهیم دید، $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ گاهی در بررسیهای پخش بار به‌کار می‌رود و در انجام محاسبات اتصال‌کوتاه نیز بی‌اندازه ارزشمند است.

مثال ۷-۵ خازنی با رئکتانس ۵ر۰ pu به‌گره ۴ مدار مثالهای ۷-۱ و ۷-۲ متصل شده است. محرکه‌های الکتریکی E_a، E_b و E_c در همان مقادیر آن مثالها باقی می‌مانند. جریانی را که خازن جذب می‌کند به‌دست آورید.

حل: emf معادل تونن مدار درپس‌گره ۴ عبارت است از

$$E_{th}=۱٫۴۳۲ \angle -۱۱٫۹۷^\circ$$

که ولتاژ گره ۴ پیش از اتصال خازن وهمان ولتاژ V_4 به‌دست آمده درمثال ۷-۲ است.

برای به‌دست آوردن امپدانس تونن باید emf ها را اتصال‌کوتاه و یا مدار منبع جریانها را باز کرد وامپدانس بین گره ۴ و گره مرجع را تعیین کرد. بنا بر معادلهٔ $\mathbf{V}=\mathbf{Z}_{\text{bus}}\mathbf{I}$ در گره ۴ داریم

$$V_4=Z_{41}I_1+Z_{42}I_2+Z_{43}I_3+Z_{44}I_4$$

هنگامی که mmf ها اتصال‌کوتاه‌شوند (یاهنگامی که به‌جای emf ها وامپدانسهای‌متوالیشان، منبع جریانهای معادل و ادمیتانسهای موازی بگذاریم و مدار منبع جریانها را بازکنیم) هیچ جریانی ازمنبعهای گرههای ۱ و ۲ و ۳ به‌مدار وارد نمی‌شود. نسبت ولتاژ اعمال شده به‌گره ۴ به‌جریانی که این ولتاژ درشبکه جاری می‌کند Z_{44} است، و این امپدانس معلوم است، زیرا $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ را درمثال ۷-۲ محاسبه کرده‌ایم با رجوع به‌آن مثال دیده می‌شود که

$$Z_{th}=Z_{44}=j۰٫۴۷۳۳$$

جریانی که خازن جذب می‌کند عبارت است از

$$I_C=\frac{۱٫۴۳۲ \angle -۱۱٫۹۷^\circ}{j۰٫۴۷۳۳-j۰٫۵}=۰٫۳۱۶ \angle ۷۸٫۰۳^\circ \text{ در یك} \qquad \square$$

مثال ۷-۶ اگر جریان $۰٫۳۱۶ \angle ۷۸٫۰۳^\circ$ - بر واحد درگره ۴ مثالهای ۷-۱، ۷-۲ و ۷-۵ به‌شبکه تزریق شود، ولتاژهای حاصل درگرههای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را به‌دست آورید.

حل: درحالی که محرکه‌های الکتریکی اولیه اتصال کوتاه شده است، با بهره‌گیری ازشبکه امپدانس شینه‌ها که درمثال ۷ــ۲ به‌دست آمد، مؤلفه‌ای از ولتاژگرهها که ناشی از جریـان تزریق شده است محاسبه خواهد شد. امپدانسهای مورد نیاز در ستون ۴ ماتریس $\mathbf{Z}_{bus}$ قرار دارند. بنا برمعادلهٔ $\mathbf{V}=\mathbf{Z}_{bus}\mathbf{I}$، ولتاژها اگرهمهٔ emf هـا اتصال کوتاه شوند عبارت‌اند از

$$V_{۱}=I_{۴}Z_{۱۴}=-۰٫۳۱۶\angle ۷۸٫۰۳^{\circ}\times ۰٫۴۱۴۲\angle ۹۰^{\circ}=۰٫۱۳۰۹\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}$$

$$V_{۲}=I_{۴}Z_{۲۴}=-۰٫۳۱۶\angle ۷۸٫۰۳^{\circ}\times ۰٫۴۱۲۶\angle ۹۰^{\circ}=۰٫۱۳۰۴\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}$$

$$V_{۳}=I_{۴}Z_{۳۴}=-۰٫۳۱۶\angle ۷۸٫۰۳^{\circ}\times ۰٫۴۲۳۲\angle ۹۰^{\circ}=۰٫۱۳۳۷\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}$$

$$V_{۴}=I_{۴}Z_{۴۴}=-۰٫۳۱۶\angle ۷۸٫۰۳^{\circ}\times ۰٫۴۷۳۳\angle ۹۰^{\circ}=۰٫۱۴۹۶\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}$$

با استفاده ازاصل جمع آثـار، ولتاژهای برآیند از جمع کردن ولتاژهای ناشی از جریان تزریق شده (وقتی emf هـا اتصال کوتاه شده‌اند) یـا ولتاژهای گره به‌دست آمده در مثال ۷ــ۲ تعیین می‌شوند. ولتاژهای گرهی جدید چنین‌اند

$$V_{۱}=۱٫۴۳۶\angle -۱۰٫۷۱^{\circ}+۰٫۱۳۰۹\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}=۱٫۵۶۷\angle -۱۰٫۸۱^{\circ}\ \text{در.یك}$$

$$V_{۲}=۱٫۴۲۷\angle -۱۴٫۲^{\circ}+۰٫۱۳۰۴\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}=۱٫۵۵۷\angle -۱۴٫۰۴^{\circ}\ \text{در.یك}$$

$$V_{۳}=۱٫۴۳۴\angle -۱۱٫۴^{\circ}+۰٫۱۳۳۷\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}=۱٫۵۶۸\angle -۱۱٫۴۱^{\circ}\ \text{در.یك}$$

$$V_{۴}=۱٫۴۳۲\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}+۰٫۱۴۹۶\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}=۱٫۵۸۲\angle -۱۱٫۹۷^{\circ}\ \text{در.یك}$$

چون تغییر ولتاژهای ناشی ازجریان تزریق شده همه زاویهٔ یکسانی دارند واین زاویه تفاوت اندکی با زاویه ولتاژهای اولیه دارد، تقریب‌زنی، پاسخهای رضایت‌بخشی به‌دست خواهد داد. تغییر اندازهٔ ولتاژ در هرشینه تقریباً برابراست با حاصل ضرب اندازهٔ جریان در.یکی واندازهٔ امپدانس مربوطش. مجموع این مقادیر بااندازه ولتاژهای اولیه مقداری بسیار نزدیك به‌اندازه ولتاژهای جدید به‌دست می‌دهد. ایـن تقریب‌زنی نتیجه‌بخش است زیرا شبکه، واکنشی خالص است اما درجایی که رئکتانس بسیار بزرگتر ازمقاومت باشد که عموماً چنین است، نیز می‌تواند تخمین خوبی به‌دست دهد.

دومثال اخیر اهمیت ماتریس امپدانس شینه‌ها را به‌نمایش می‌گذارند و درکنارآن نشان می‌دهند که چگونه افزودن خازن به‌یك شینه باعث افزایش ولتاژ شینه‌ها می‌شود. در حالی که عملکرد یك سیستم قدرت را درنظر می‌گیریم، این فرض که زاویه‌های منبع ولتاژها ومنبع جریانها پس ازاتصال خازن به‌یك شینه ثابت باقـی می‌ماندکاملا درست نیست. در فصل ۸ مجدداً به بررسی خازنها می‌پردازیم، و مثالی را با استفاده ازیك برنامه پخش بار کامپیوتری برای محاسبهٔ اثر خازنها خواهیم دید.

۷ـ۶ تغییر ماتریس امپدانس شینه‌های موجود

ازآنجاکه $\mathbf{Z}_{bus}$ چنین ابزارمهمی دربررسی سیستم قدرت است، اکنون به بررسی این می‌پردازیم که هنگام افزودن شینه‌های جدید یاوصل‌کردن خطوط جدید به‌شینه‌های‌موجود، $\mathbf{Z}_{bus}$ چگونه تغییر می‌کند. البته می‌توانیم $\mathbf{Y}_{bus}$ جدیدی تشکیل دهیم و وارونش‌کنیم، اما روشهای مستقیمی برای تغییر دادن $\mathbf{Z}_{bus}$ وجود دارد که بسیار ساده‌تر از وارون کردن ماتریس حتی برای تعدادکمی شینه است. همچنین زمانی که بدانیم چگونه $\mathbf{Z}_{bus}$ را تغییر دهیم درمی‌یابیم که چگونه مستقیماً آن را تشکیل دهیم.*

افزودن شاخه‌ای با امپدانس Z_b به‌شبکه‌ای که $\mathbf{Z}_{bus}$ ابتداییش معلوم است و به‌صورت $\mathbf{Z}_o$ که ماتریسی $n\times n$ است نشان داده می‌شود به‌شکلهای گوناگون میسر است.

در این بررسی، شینه‌های موجود به‌کمك اعداد یا به‌کمك حروف h، i، j و k مشخص‌می‌شوند. حرف p، معرف‌شینهٔ جدیدی‌است که باید به شبکه افزودتا $\mathbf{Z}_o$ را به ماتریسی $(n+1)\times(n+1)$ تبدیل‌کند چهار حالت درنظر خواهیم گرفت.

حالت ۱: افزودن Z_b بین شینهٔ جدید p و شینهٔ مرجع. افزودن شینهٔ جدید p که از طریق Z_b به‌شینهٔ مرجع متصل می‌شود بی‌آنکه به هیچ‌یك از شینه‌های مدار ابتدایی متصل باشد، زمانی‌که جریان I_p به‌شینهٔ جدید تزریق می‌شود نمی‌تواند ولتاژهای ابتدایی شینه‌ها را تغییردهد. ولتاژ V_p شینهٔ جدید برابراست با I_pZ_b. پس

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ V_p \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{Z}_o & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 \;\cdots & 0 & Z_b \end{array}\right]}_{\mathbf{Z}_{bus(new)}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ I_p \end{bmatrix} \qquad (۷\text{–}۴۴)$$

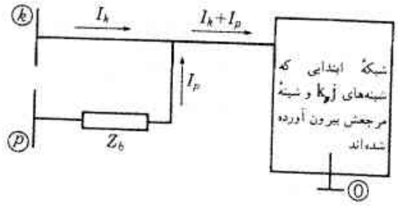
دیده می‌شود که ماتریس ستونی جریانها ضرب در $\mathbf{Z}_{bus}$ جدید، ولتاژهای شبکهٔ ابتدایی را تغییرنمی‌دهد و ولتاژ درستی را درشینهٔ جدید p نتیجه می‌دهد.

حالت ۲: افزودن Z_b بین شینهٔ جدید p و شینهٔ موجود k. افزودن شینهٔ جدید p که از طریق Z_b به‌شینهٔ موجود k متصل می‌شود در حالی‌که جریان I_p به‌شینهٔ جدید تزریق می‌شود باعث می‌شودکه مطابق شکل۷ـ۸، جریان ورودی به‌شبکهٔ ابتدایی‌درشینهٔ k تبدیل شود به‌مجموع I_k که درشینهٔ k تزریق می‌شود وجریان I_p که ازطریق Z_b می‌آید.

---

* نگاه کنید به:

H. E. Brown, *Solutions of Large Networks by Matrix Methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.



شکل ۷-۸ افزودن شینهٔ جدید p که ازطریق امپدانس Z_b به‌شینهٔ موجود k وصل شده است.

جریان I_p که به‌شینهٔ k جاری می‌شود V_k ابتدایی را به‌اندازهٔ I_pZ_{kk} افزایش می‌دهد؛ یعنی

$$V_{k(\text{new})}=V_{k(0)}+I_pZ_{kk} \qquad (۷-۴۵)$$

و V_p از V_k جدید به‌اندازهٔ I_pZ_b بزرگتر خواهد بود. بنابراین

$$V_p=V_{k(0)}+I_pZ_{kk}+I_pZ_b \qquad (۷-۴۶)$$

و

$$V_p=\underbrace{I_1Z_{k1}+I_2Z_{k2}+\cdots+I_nZ_{kn}}_{V_{k(0)}}+I_p(Z_{kk}+Z_b) \qquad (۷-۴۷)$$

اکنون دیده می‌شود که سطرجدیدی که باید به $\mathbf{Z}_0$ افزود تا V_p به‌دست‌آید عبارت است از

$$Z_{k1}\ \ Z_{k2}\ \cdots\ Z_{kn}\ (Z_{kk}+Z_b)$$

چون $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ باید ماتریسی مربعی نسبت به‌قطر اصلیش باشد می‌بایست ستون جدیدی که ترانهادهٔ سطرجدید است اضافه‌کنیم. ستون جدید، افزایش همهٔ ولتاژهای شینه‌ها براثر I_p را به‌حساب می‌آورد.معادلهٔ ماتریسی عبارت است از

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ V_p \end{bmatrix}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} & & & Z_{1k} \\ & \mathbf{Z}_0 & & Z_{2k} \\ & & & \vdots \\ & & & Z_{nk} \\ \hdashline Z_{k1} & Z_{k2} \ \cdots & Z_{kn} & Z_{kk}+Z_b \end{array}\right]}_{\mathbf{Z}_{\text{bus(new)}}}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ I_p \end{bmatrix} \qquad (۷-۴۸)$$

توجه کنید که n عنصر اول سطر جدید، عناصر سطر k از $\mathbf{Z}_0$ هستند و n عنصر اول ستون جدید، عناصر ستون k از $\mathbf{Z}_0$ هستند.

حالت ۳: افزودن Z_b بین شینهٔ موجود k و شینهٔ مرجع. برای اینکه ببینیم $\mathbf{Z}_0$ با

وصل کردن امپدانس Z_b بین شینهٔ موجود k و شینهٔ مرجع چگونه تغییر می‌کند شینهٔ جدید p را که از طریق Z_b به‌شینهٔ k متصل است به‌شبکه اضافه می‌کنیم. سپس با مساوی صفر قراردادن V_p، شینهٔ p را به‌شینهٔ مرجع اتصال کوتاه می‌کنیم تا اینکه همان معادلهٔ ماتریسی (۷ـ۴۸) نتیجه شود به‌جز اینکه V_p دراینجا صفراست. پس برای انجام تغییر، سطرجدید وستون جدیدی عیناً مانند حالت ۲ پدید می‌آوریم اماپس سطر$(n+1)$ وستون $(n+1)$ را حذف می‌کنیم، که این کار به‌علت وجود صفر در ماتریس ستونی ولتاژ میسراست. ما روش شکل گرفته در معادله‌های (۷ـ۲۸) تا (۷ـ۳۰) را برای به‌دست آوردن هرعنصر Z_{hi} ماتریس جدید به‌کار می‌بریم و به‌این ترتیب

$$Z_{hi(\text{new})}=Z_{hi(\text{o})}-\frac{Z_{h(n+1)}Z_{(n+1)i}}{Z_{kk}+Z_b} \qquad (۷\text{ـ}۴۹)$$

حالت ۴: افزودن Z_b بین دو شینهٔ موجود j و k. برای افزودن امپدانس شاخهٔ Z_b بین دو شینهٔ موجود j و k به‌بررسی شکل ۷ـ۹ می‌پردازیم که این دو شینه راکه ازشبکهٔ ابتدایی بیرون آورده شده‌اند نشان می‌دهد. دیده می‌شود که جریان I_b از شینهٔ k به‌شینهٔ j ازطریق Z_b می‌گذرد. اکنون بعضی ازمعادله‌های ولتاژهای گرهی را می‌نویسیم

$$V_1=Z_{11}I_1+\cdots+Z_{1j}(I_j+I_b)+Z_{1k}(I_k-I_b)+\cdots \qquad (۷\text{ـ}۵۰)$$

و پس ازنظم دادن

$$V_1=Z_{11}I_1+\cdots+Z_{1j}I_j+Z_{1k}I_k+\cdots+I_b(Z_{1j}-Z_{1k}) \qquad (۷\text{ـ}۵۱)$$

به‌همین ترتیب

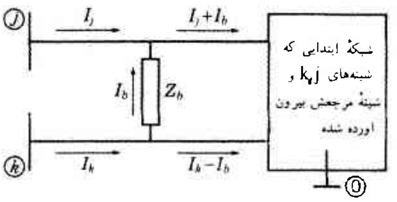
$$V_j=Z_{j1}I_1+\cdots+Z_{jj}I_j+Z_{jk}I_k+\cdots+I_b(Z_{jj}-Z_{jk}) \qquad (۷\text{ـ}۵۲)$$

$$V_k=Z_{k1}I_1+\cdots+Z_{kj}I_j+Z_{kk}I_k+\cdots+I_b(Z_{kj}-Z_{kk}) \qquad (۷\text{ـ}۵۳)$$

چون I_b نامعلوم است به‌یك معادلهٔ دیگر نیازداریم بنا براین می‌نویسیم

$$V_k-V_j=I_bZ_b \qquad (۷\text{ـ}۵۴)$$

$$0=I_bZ_b+V_j-V_k \qquad (۷\text{ـ}۵۵)$$



شکل ۷ـ۹ افزودن امپدانس Z_b بین شینه‌های موجود j و k.

و با گذاردن مقدار V_j و V_k از معادله‌های (۷-۵۲) و (۷-۵۳) درمعادلهٔ (۷-۵۵) نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} 0 = I_b Z_b + (Z_{j1} - Z_{k1}) I_1 + \cdots + (Z_{jj} - Z_{kj}) I_j + \cdots \\ + (Z_{jk} - Z_{kk}) I_k + \cdots + (Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk}) I_b \end{aligned} \tag{۷-۵۶}$$

از جمع کردن ضرایب I_b و نامیدن مجموع آنها Z_{bb} نتیجه می‌شود

$$Z_{bb} = Z_b + Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk} \tag{۷-۵۷}$$

با بررسی معادله‌های (۷-۵۱) تا (۷-۵۳) و (۷-۵۶) می‌توانیم معادلهٔ ماتریسی زیررا بنویسیم

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_j \\ V_k \\ \vdots \\ V_n \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & Z_{1j} - Z_{1k} \\ & & & \vdots \\ & & & Z_{jj} - Z_{jk} \\ & \mathbf{Z}_0 & & Z_{kj} - Z_{kk} \\ & & & \vdots \\ & & & Z_{nj} - Z_{nk} \\ \hline (Z_{j1} - Z_{k1}) & \cdots & (Z_{kj} - Z_{kk}) \quad \cdots & Z_{bb} \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_j \\ I_k \\ \vdots \\ I_n \\ \hline I_b \end{bmatrix} \tag{۷-۵۸}$$

ستون جدید، ستون j منهـای ستون k از $\mathbf{Z}_0$ است و عنصر سطر $(n+1)$ آن Z_{bb} است. سطرجدید ترانهادهٔ ستون جدید است.

هرگاه سطر $(n+1)$ و ستون $(n+1)$ ماتریس مربعی معادلهٔ (۷-۵۸) را به‌همان روش پیشین حذف کنیم خواهیم دیدکه هرعنصر Z_{hi} درماتریس جدید چنین است

$$Z_{hi(\text{new})} = Z_{hi(0)} - \frac{Z_{h(n+1)} Z_{(n+1)i}}{Z_b + Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk}} \tag{۷-۵۹}$$

لازم نیست حالتی را درنظر بگیریم کـه درآن دوشینهٔ جدید متصل به‌هم از طریق Z_bوارد شبکه می‌شوند. می‌توانیم ابتدا یکی‌ازاین شینه‌های جدید را ازطریق یك امپدانس به‌یکی ازشینه‌های موجود یا به شینهٔ مرجع متصل‌کنیم وسپس شینهٔ جدید دوم را بیفزاییم.

مثال ۷-۷ ماتریس امپدانس شینه‌های مثال ۷-۲ را طوری تغییر دهیدکـه اتصال یك خازن با رئکتانس ۵٫۰ p u را بین شینهٔ ۴ وشینهٔ مرجع مدار شکل ۷-۴ به‌حساب آورد. سپس V_4 را به‌کمك امپدانسهای ماتریس جدید و منابع جریان مثال ۷-۲ به‌دست آورید. این مقدار V_4 را با مقدار به‌دست آمده درمثال ۷-۶ مقایسه کنید.

حل : با توجه به‌اینکه $\mathbf{Z}_0$ ماتریس ۴×۴ مثال ۷-۲، است زیرنوشت $k=4$، و $Z_b = -j5.0$ p u ازمعادلهٔ (۷-۴۸) به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \\ V_۳ \\ V_۴ \\ \hline ۰ \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & j۰٫۴۱۴۲ \\ & \mathbf{Z}_۰ & & & j۰٫۴۱۲۶ \\ & & & & j۰٫۴۲۳۲ \\ & & & & j۰٫۴۷۳۳ \\ \hline j۰٫۴۱۴۲ & j۰٫۴۱۲۶ & j۰٫۴۲۳۲ & j۰٫۴۷۳۳ & -j۴٫۵۲۶۷ \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \\ I_۴ \\ \hline I_b \end{bmatrix}$$

جمله‌های سطر و ستون پنجم از تکرار سطر و ستون چهارم $\mathbf{Z}_۰$ به‌دست آمده است، و با دانستن این که

$$Z_{۵۵} = Z_{۴۴} + Z_b = j۰٫۴۷۳۳ - j۵٫۰ = -j۴٫۵۲۶۷$$

سپس با حذف سطر و ستون پنجم، عناصر n و $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ را از معادلهٔ (۷-۴۹) به‌دست می‌آوریم

$$Z_{۱۱} = j۰٫۴۷۷۴ - \frac{j۰٫۴۱۴۲ \times j۰٫۴۱۴۲}{-j۴٫۵۲۶۷} = j۰٫۵۱۵۳$$

$$Z_{۲۴} = j۰٫۴۱۲۶ - \frac{j۰٫۴۷۳۳ \times j۰٫۴۱۲۶}{-j۴٫۵۲۶۷} = j۰٫۴۵۵۷$$

و با به‌دست آوردن عناصر دیگر، به‌ترتیبی مشابه نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{Z}_{\text{bus(new)}} = \begin{bmatrix} j۰٫۵۱۵۳ & j۰٫۴۰۸۴ & j۰٫۴۴۰۷ & j۰٫۴۵۷۵ \\ j۰٫۴۰۸۴ & j۰٫۵۲۴۸ & j۰٫۴۳۰۸ & j۰٫۴۵۵۷ \\ j۰٫۴۴۰۷ & j۰٫۴۳۰۸ & j۰٫۴۹۵۴ & j۰٫۴۶۷۴ \\ j۰٫۴۵۷۵ & j۰٫۴۵۵۷ & j۰٫۴۶۷۴ & j۰٫۵۲۲۸ \end{bmatrix}$$

ماتریس ستونی جریانهایی که $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ در آن ضرب می‌شود تا ولتاژهای جدید شینه‌ها به‌دست آید همان ماتریس مثال ۷-۲ است. بنابراین

$$\begin{aligned} V_۴ &= j۰٫۴۵۷۵(-j۱٫۲۰) + j۰٫۴۵۵۷(-۰٫۷۲ - j۰٫۹۶) \\ &\quad + j۰٫۴۶۷۴(-j۱٫۲۰) \\ &= ۱٫۵۴۷۴ - j۰٫۳۲۸۱ = ۱٫۵۸۲ \angle -۱۱٫۹۷^\circ \ \text{در-یك} \end{aligned}$$

همان‌طور که در مثال ۷-۶ به‌دست آمد. □

۷-۷ تعیین ماتریس امپدانس شینه‌ها به‌روش مستقیم

دیدیم که چگونه $\mathbf{Z}_{bus}$ را ابتدا با به‌دست آوردن $\mathbf{Y}_{bus}$ و سپس وارون‌کردن آن تعیین می‌کنند. لیکن، بیان مستقیم $\mathbf{Z}_{bus}$، با بهره‌گیری از کامپیوتر فرایندی ساده ودرمورد شبکه‌های بزرگ از وارون‌کردن $\mathbf{Y}_{bus}$ آسان‌تر است.

برای شروع کار صورتی از امپدانسها در اختیار داریم که مشخص است به‌کدام شینه‌ها متصل‌اند. کار را با نوشتن معادلهٔ یك شینه که از طریق امپدانس Z_a به‌شینهٔ مرجع متصل است آغاز می‌کنیم.

$$V_1 = I_1 Z_a$$

و این را می‌توان معادله‌ای ماتریسی به‌حساب آورد که هریك ازسه ماتریس آن تنها یك سطر و یك ستون دارد. اکنون می‌توانیم شینهٔ جدیدی که به‌شینهٔ اول یا به‌شینهٔ مرجع متصل باشد بیفزاییم. برای مثال، اگر شینهٔ دوم از طریق Z_b به‌شینهٔ مرجع متصل باشد معادلهٔ ماتریسی زیررا خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 \\ 0 & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{۷-۶۰}$$

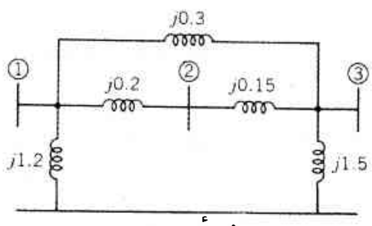
و این ماتریس را با افزودن شینه‌های دیگر، مطابق روش تشریح شده در بخش ۷-۶ تغییر می‌دهیم. معمولا شینه‌های شبکه باید مجدداً شماره‌گذاری شوند تا با ترتیب افزودنشان به $\mathbf{Z}_{bus}$ برای ساختن این ماتریس مطابقت داشته باشند.

مثال ۷-۸ $\mathbf{Z}_{bus}$ را برای شبکهٔ شکل ۷-۱۰ که در آن امپدانسها برحسب در-یك داده شده‌اند با حفظ هرسه گره تعیین کنید.

حل : کار را با برپایی شینهٔ ۱ و امپدانس اتصالش به‌شینهٔ مرجع شروع می‌کنیم و می‌نویسیم

$$V_1 = j1.2 I_1$$

اکنون ماتریس امپدانس شینه‌ای ۱ × ۱ دراختیار داریم



شکل ۷-۱۰ شبکهٔ مثال ۷-۸.

$$\mathbf{Z}_{\text{bus}} = j۱/۲$$

برای برپایی شینهٔ۲ و امپدانس اتصالش به‌شینهٔ۱ با دنبال‌کردن معادلهٔ (۷−۴۸) می‌نویسیم

$$\mathbf{Z}_{\text{bus(new)}} = \begin{bmatrix} j۱/۲ & j۱/۲ \\ j۱/۲ & j۱/۴ \end{bmatrix}$$

جملهٔ $j۱/۴$ دراین ماتریس، حاصل جمع $j۱/۲$ و $j۰/۲$ است. عناصر $j۱/۲$ در سطر و ستون جدید، تکرارعناصرسطر۱ وستون ۱ ماتریس در دست تغییرند.

شینهٔ ۳ و امپدانس اتصال به‌شینهٔ ۱، با نوشتن ماتریس زیر برپا می‌شود

$$\begin{bmatrix} j۱/۲ & j۱/۲ & j۱/۲ \\ j۱/۲ & j۱/۴ & j۱/۲ \\ j۱/۲ & j۱/۲ & j۱/۵ \end{bmatrix}$$

چون گره ۱ گرهی است که گره جدید ۳ به آن متصل می‌شود، جملهٔ $j۱/۵$ در ماتریس بالا حاصل‌جمع $Z_{۱۱}$ ماتریس در دست تغییر وامپدانس Z_b شاخه‌ای است که ازشینهٔ ۳ به‌شینهٔ ۱ متصل می‌شود. عناصر دیگر سطر وستون جدید تکرار سطر۱ وستون ۱ ماتریس در دست تغییرند زیرا گره جدید به گره ۱ متصل می‌شود.

اگر اکنون بخواهیم امپدانس $Z_b = j۱/۵$ بین گره ۳ و شینهٔ مرجع را بیفزاییم با دنبال‌کردن معادلهٔ (۷−۴۸)، شینهٔ جدید ۴ را ازطریق Z_b وصل می‌کنیم و ماتریس امپدانسهای زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} j۱/۲ & j۱/۲ & j۱/۲ & j۱/۲ \\ j۱/۲ & j۱/۴ & j۱/۲ & j۱/۲ \\ j۱/۲ & j۱/۲ & j۱/۵ & j۱/۵ \\ \hline j۱/۲ & j۱/۲ & j۱/۵ & j۳/۰ \end{array}\right]$$

که درآن $j۳/۰$، حاصل جمع $Z_{۳۳} + Z_b$ است. عناصر دیگر در سطر و ستون جدید، تکرار سطر ۳ و ستون ۳ ماتریس در دست تغییرند. زیرا شینهٔ ۳ است که ازطریق Z_b به‌شینهٔ مرجع متصل می‌شود.

اکنون سطر ۴ وستون ۴ را حذف می‌کنیم. بعضی از عناصر ماتریس جدید با استفاده از معادلهٔ (۷−۴۹) چنین‌اند

$$Z_{۱۱} = j۱/۲ - \frac{j۱/۲ \times j۱/۲}{j۳/۰} = j۰/۷۲$$

$$Z_{۲۲} = j۱٫۴ - \frac{j۱٫۲ \times j۱٫۲}{j۳٫۰} = j۰٫۹۲$$

$$Z_{۲۳} = Z_{۳۲} = j۱٫۲ - \frac{j۱٫۲ \times j۱٫۵}{j۳٫۰} = j۰٫۶۰$$

زمانی‌که همهٔ عناصر تعیین شوند خواهیم داشت

$$\mathbf{Z}_{\text{bus (new)}} = \begin{bmatrix} j۰٫۷۲ & j۰٫۷۲ & j۰٫۶۰ \\ j۰٫۷۲ & j۰٫۹۲ & j۰٫۶۰ \\ j۰٫۶۰ & j۰٫۶۰ & j۰٫۷۵ \end{bmatrix}$$

سرانجام امپدانس $Z_b = j۰٫۱۵$ را بین شینه‌های ۲ و ۳ می‌افزاییم. اگـر j و k را در معادلهٔ (۷ـ۵۸) به‌ترتیب ۲ و ۳ قرار دهیم، عناصر سطر ۴ وستون ۴ را بـه‌دست می‌آوریم

$$Z_{۱۴} = Z_{۱۲} - Z_{۱۳} = j۰٫۷۲ - j۰٫۶۰ = j۰٫۱۲$$

$$Z_{۲۴} = Z_{۲۲} - Z_{۲۳} = j۰٫۹۲ - j۰٫۶۰ = j۰٫۳۲$$

$$Z_{۳۴} = Z_{۳۲} - Z_{۳۳} = j۰٫۶۰ - j۰٫۷۵ = -j۰٫۱۵$$

و از معادلهٔ (۷ـ۵۷)

$$\begin{aligned} Z_{۴۴} &= Z_b + Z_{۲۲} + Z_{۳۳} - ۲Z_{۲۳} \\ &= j۰٫۱۵ + j۰٫۹۲ + j۰٫۷۵ - ۲(j۰٫۶۰) = j۰٫۶۲ \end{aligned}$$

بنابراین می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} j۰٫۷۲ & j۰٫۷۲ & j۰٫۶۰ & j۰٫۱۲ \\ j۰٫۷۲ & j۰٫۹۲ & j۰٫۶۰ & j۰٫۳۲ \\ j۰٫۶۰ & j۰٫۶۰ & j۰٫۷۵ & -j۰٫۱۵ \\ j۰٫۱۲ & j۰٫۳۲ & -j۰٫۱۵ & j۰٫۶۲ \end{bmatrix}$$

و از معادلهٔ (۷ـ۵۹) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{Z}_{\text{bus (new)}} = \begin{bmatrix} j۰٫۶۹۶۸ & j۰٫۶۵۸۱ & j۰٫۶۲۹۰ \\ j۰٫۶۵۸۱ & j۰٫۷۵۴۸ & j۰٫۶۷۷۴ \\ j۰٫۶۲۹۰ & j۰٫۶۷۷۴ & j۰٫۷۱۳۷ \end{bmatrix}$$

که ماتریس امپدانس شینه‌هایی است که می‌بایست تعیین می‌شد.

این روش کار برای کامپیوتر که ابتدا باید نوع تغییرات لازم در هنگام افزودن هر امپدانس را تعیین کند بسیار ساده است. لیکن، عملیات باید به‌ترتیبی دنبال شود که از وصل کردن امپدانسی بین دو شینهٔ جدید پرهیز شود.

می‌توان درصورت تمایل، درستی مقدار امپدانسهای $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ را بااستفاده ازمحاسبات شبکهٔ بخش ۷ــ۵ امتحان کرد. □

مثال ۷ــ۹ مقدار $Z_{۱۱}$ مدار مثال ۷ــ۸ را با تعیین امپدانس اندازه‌گیری شده بین گره ۱ و شینهٔ مرجع زمانی که جریانهای تزریق شده به گرههای ۲ و ۳ صفرند به‌دست آورید.

حل: رابطهٔ متناظر بامعادلهٔ (۷ــ۴۲) عبارت است از

$$Z_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱}\bigg|_{I_۲ = I_۳ = ۰}$$

امپدانس برآیند دو مسیر موازی بین گرههای ۱ و ۳ مدار شکل ۷ــ۱۰ عبارت است از

$$\frac{j۰٫۳ \times j۰٫۳۵}{j۰٫۳ + j۰٫۳۵} = j۰٫۱۶۱۵$$

ترکیب متوالی این امپدانس و $j۱٫۵$ موازی است با امپدانس $j۱٫۲$ و برآیند آنها

$$Z_{۱۱} = \frac{j۱٫۲(j۱٫۵ + j۰٫۱۶۱۵)}{j(۱٫۲ + ۱٫۵ + ۰٫۱۶۱۵)} = j۰٫۶۹۶۸$$

که همان مقدار به‌دست آمده در مثال ۷ــ۸ است.

اگرچه روش ساده کردن شبکه درمثال ۷ــ۹ ممکن است درمقایسه با روشهای دیگر تشکیل $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ ساده‌تر به‌نظر آید، دراصل این‌طور نیست زیرا برای تعیین هرعنصر ماتریس می‌بایست از روش ساده کردن متفاوتی بهره گرفت. برای مثال، درمثال ۷ــ۹ ساده کردن شبکه برای تعیین $Z_{۲۲}$ دشوارتر است تا در تعیین $Z_{۱۱}$. اما کامپیوتر که ساده کردن شبکه را به‌روش حذف گره انجام می‌دهد یك فرایند معین را برای همهٔ گرهها تکرار می‌کند. □

۷ــ۸ خلاصه

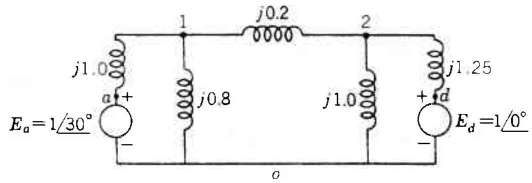
در این فصل، منبعهای معادل هم و معادله‌های گرهی به‌اجمال بررسی شده‌اند، تا زمینهٔ لازم برای درك ماتریس ادمیتانس شینه‌ها که مبنای اکثر بررسیهای پخش بار است به‌دست آید. پارش ماتریس نیز به‌علت کاربردش در روشهای حذف گره بررسی شده است.

بعضی مهندسان، ماتریس امپدانس شینه‌ها را برای انجام بررسیهای پخش بار ترجیح می‌دهند اما این ماتریس بیشترین ارزش خود را در محاسبات اتصال کوتاه که بعداً از آن بحث خواهد شد پیدا می‌کند.

دربارهٔ تغییر دادن $\mathbf{Z}_{bus}$ بحث شد تا سادگی به‌حساب آوردن افزودن یا حذف یك خط انتقال بی‌آنکه هر بار به وارون کـردن $\mathbf{Y}_{bus}$ نیاز باشد نشان داده شود. بیان مستقیم $\mathbf{Z}_{bus}$ فرایندی است که به‌سادگی می‌تواند برای کامپیوتر برنامه‌ریزی شود.

مسائل

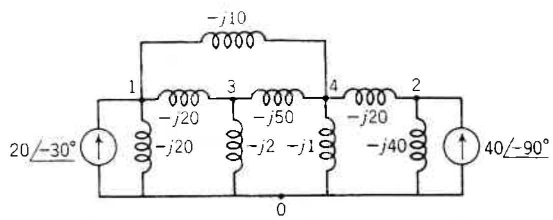
۷-۱ دومعادلهٔ گرهی لازم برای به‌دست آوردن ولتاژ گرههای ۱ و ۲ مدار شکل ۷-۱۱ را بر طبق معادله‌های (۷-۵) و (۷-۶) بنویسید، بی‌آنکه منبع ولتاژها را به‌منبع جریان تبدیل کنید. سپس معادله‌هـا را پس از تبدیل منبع ولتاژها به منبع جریان به‌صورت استاندارد بنویسید.



شکل ۷-۱۱ مدار مسائل ۷-۱ و ۷-۲. مقادیر نشان داده شده، مقدار ولتاژها وامپدانسهای در-یکی است.

۷-۲ باحل معادله‌های به‌دست‌آمده درمسئلهٔ ۷-۱، ولتاژ گرههای ۱ و ۲ مدارشکل ۷-۱۱ را به‌دست آورید.

۷-۳ به‌کمك روش پارش به‌کار رفته در مثال ۷-۳، گرههای ۳ و ۴ شبکهٔ شکـل ۷-۱۲ را به‌طور همزمان حذف‌کنید تا ماتریس ادمیتانس ۲ × ۲ $\mathbf{Y}_{bus}$ به‌دست آید. مدار مربوط



شکل ۷-۱۲ شکل۷-۱۲ مدار مسائل ۷-۳ و ۷-۴. مقادیر نشان داده شده، مقدار جریانها و ادمیتانسهای در-یکی است.

به ماتریس حاصل را رسم کنید و مقدار پارامترها را بر روی مدار بیاورید. به کمک وارونگی ماتریس، V_1 و V_2 را بیابید.

۷-۴ گرههای ۳ و ۴ شبکهٔ شکل ۷-۱۲ را برای به‌دست آوردن ماتریس ادمیتانس ۲ × ۲ حاصل، ابتدا با حذف گره ۴ و سپس گره ۳ مانند مثال ۷-۴، حذف کنید.

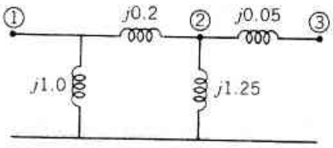
۷-۵ $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ داده شده درمثال ۷-۲ برای مدار شکل۷-۴ را با افزودن گره جدیدی متصل به‌شینهٔ ۴ ازطریق یک امپدانس j۱٫۲ p u تغییر دهید.

۷-۶ $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ داده شده در مثال ۷-۲ را با افزودن شاخهٔ جدیدی با امپدانس j۱٫۲ p u بین گره ۴ وشینهٔ مرجع مدار شکل ۷-۴ تغییر دهید.

۷-۷ امپدانسهای سطر اول $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ مدار شکل ۷-۴ را ازطرق تغییر دادن $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ به‌دست آمده درمثال ۷-۲، با برداشتن امپدانس متصل بین شینهٔ ۳ و شینهٔ مرجع، تعیین کنید. سپس در حالی که منبع جریانها تنها به‌شینه‌های ۱ و ۲ متصل‌اند ولتاژ شینهٔ ۱ را به‌دست آورید واین مقدار را با آنچه درمثال ۷-۳ به‌دست آمد مقایسه کنید.

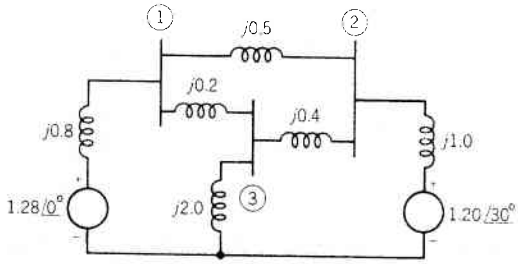
۷-۸ $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ داده شده درمثال ۷-۲ را با برداشتن امپدانس متصل بین گرههای ۲ و ۳ شبکهٔ شکل ۷-۴ تغییر دهید.

۷-۹ $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ شبکهٔ شکل ۷-۱۳ را به‌روش مستقیم تشریح شده در بخش ۷-۷ به‌دست آورید.



شکل ۷-۱۳ مدار مسئلهٔ ۷-۹. مقادیر نشان داده شده، مقدار رئکتانسهای در-یکی‌اند.

۷-۱۰ درشبکهٔ رئکتانسی شکل ۷-۱۴ اندازه و زاویهٔ همهٔ ولتاژهای تولید شده ثابت



شکل۷-۱۴ مدار مسئلهٔ ۷-۱۰. ولتاژها وامپدانسها برحسب در-یکی‌اند.

فرض می‌شود مطلوب است تعیین (الف) Z_{bus}، به‌روش بیان مستقیم یـا از طریق وارون کردن Y_{bus}، (ب) ولتاژ هرشینه، (ج) جریانی که خازنی با رئکتانس ۵٫۰ p u متصل بین شینهٔ ۳ وخنثی می‌کشد، (د) تغییر ولتاژ هرشینه زمانی که خازن به شینهٔ ۳ وصل شود، و (ه) ولتاژ هرشینه پس از وصل‌کردن خازن.