به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱ — مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه

امتحان میان ترم اول — اسفند ۱۳۹۴

۱- شمای کلی نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$i)\quad f(x)=[x^{۲}+۲x]$

$ii)\quad g(x)=u_{۱}(x)e^{-|x|}$

۲- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$i)\quad \lim_{x\to ۱}\frac{x^{n+۱}-(n+۱)x+n}{(x-۱)^{۲}}$$

$$ii)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{۲x+۱}{۴x+۱}\right)^{x}$$

$$iii)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۲-۲\cos x}-\frac{۱}{x^{۲}}$$

۳- فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ باشد و $\alpha<x_{۱},\cdots,x_n<\beta$. ثابت کنید نقطه‌ی c در بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=\dfrac{f(x_{۱})+\cdots+f(x_n)}{n}$.

۴- ثابت کنید که معادله‌ی $x-\frac{۱}{۲}\cos x=۰$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ **ریشه‌ی یکتا دارد**. سپس دو تکرار از روش تنصیف را برای محاسبه‌ی این ریشه اجرا کنید.

۵- ثابت کنید که اگر f در بازه‌ی $(۰,۱)$ پیوسته، مشتق پذیر و ناصفر باشد و داشته باشیم $f(۰)=۱$ و $f(۱)=۲$، آنگاه معادله‌ی $f^{۲}(x)-۲f'(x)=۰$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ ریشه دارد.

موفق باشید

و سال نو پیشاپیش مبارک

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱

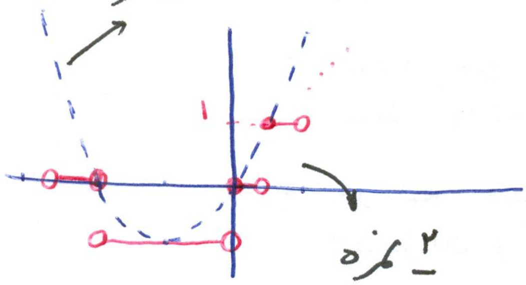
پاسخ سوالات امتحان میان ترم اول

i) $f(x) = [x^2+2x] = [(x+1)^2-1] = [(x+1)^2]-1$

-1

نقاط ناپیوستگی

۲ نمره



۲ نمره

۳ نمره

$(x+1)^2-1 \in \mathbb{Z}$

$(x+1)^2 = k \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\sqrt{|k|}-1 \quad k\in\mathbb{Z}$

$x \neq -1 \quad (k \neq 0)$

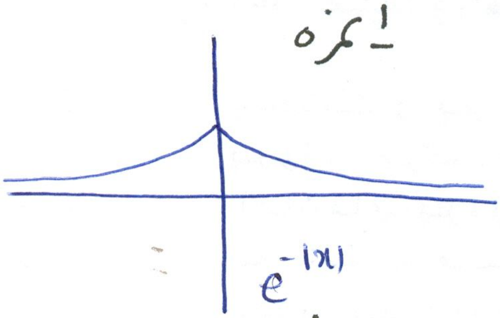
ii) $g(x) = u_1(x)\, e^{-|x|}$

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$$

۲ نمره

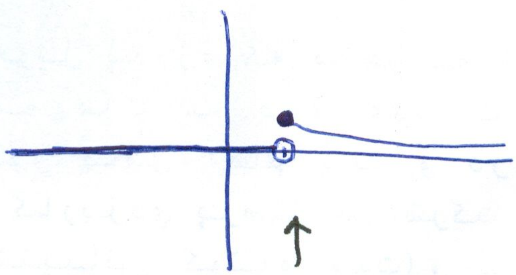
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ e^{-|x|} & x\geq 1 \end{cases}$$

۱ نمره



$e^{-|x|}$

۱ نمره



۱ نمره

۲ -

$\frac{0}{0} \rightarrow$ ۱ نمره

i) راه ۱: $\text{HOP} \lim_{x\to 1} \frac{(n+1)x^n-(n+1)}{2(x-1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to 1} \frac{(n+1)n\,x^{n-1}}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$

۱ نمره ۱ نمره ۱ نمره

راه ۲: $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} = \lim \frac{(x-1)(\,?\,)}{(x-1)^2}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{n+1}-(n+1)x+n & x-1 \\
\underline{x^{n+1}-x^n} & x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-n \\
x^n-(n+1)x+n & \\
\underline{x^n-x^{n-1}} & \\
x^{n-1}-(n+1)x+n & \\
\underline{x^{n-1}-x^{n-2}} & \\
\vdots & \\
x^2-(n+1)x+n & \\
\underline{x^2-x} & \\
-nx+n & \\
\underline{-} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$x^{n+1}-(n+1)x+n = (x-1)\left[x^n-1+x^{n-1}-1+\cdots+x^2-1+x-1\right]$$

$$= (x-1)^2\left[\begin{array}{l} x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 \\ +x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+1 \\ +\cdots \\ +x+1 \\ +1 \end{array}\right]$$

۲ نمره

$$\rightarrow = \lim_{x\to 1}\left[\begin{array}{l} x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1 \\ +x^{n-2}+\cdots+1 \\ +\cdots \\ +x+1 \\ +1 \end{array}\right] = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲ نمره

ii) $x\rightarrow+\infty \quad = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$ ۱٫۵ نمره

$x\rightarrow-\infty \quad = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty$ ۱٫۵ نمره

iii) راه ۱ $\quad 1-\cos x \underset{x\to 0}{\equiv} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ۳ نمره

$$=\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2-\frac{x^4}{12}}-\frac{1}{x^2}=\lim \frac{x^4/12}{x^4-\frac{1}{12}x^6}=\frac{1}{12}$$

۱ نمره ۱ نمره

راه ۲ $\quad 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ ۱ نمره

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 \longrightarrow$$ ۲ نمره

$$=\lim \frac{1}{4\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{9\times 64}x^6}{x^4+\cdots}=\frac{1}{12}$$

۱ نمره ۱ نمره

راه ۳ $\quad =\infty-\infty \longrightarrow$ HOP

$$=\frac{x^2+2\cos x-2}{(2-2\cos x)x^2}\overset{HOP}{=}\frac{2x-2\sin x}{2\sin x\, x^2+(2-2\cos x)\,2x}$$

۱ نمره ۲ نمره

$$=\frac{2(x-\sin x)}{}=\frac{x^3/3}{2x^3+2x^3}=\frac{1}{12}$$

۲ نمره

۳ -

$$f(x_i) = \max_{k=1,\dots,n} f(x_k) \longrightarrow f(x_j) \leq f(x_1) \leq f(x_i)$$

$$\vdots$$

۲ نمره

$$f(x_j) = \min f(x_k) \qquad " \leq f(x_n) \leq "$$

۲ نمره

$$\downarrow$$

$$f(x_j) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f(x_i)$$

۱ نمره

قضیه مقدار میانی ۲ نمره

$$\exists\ c \in (x_i, x_j)\ ;\ f(c) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

۳ نمره } ۵ نمره

$$\alpha \leq x_i, x_j \leq \beta \longrightarrow \alpha \leq c \leq \beta$$

۲ نمره

٤ -

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x$$

$$f(0) = 0 - \frac{1}{2} < 0$$

$$\longrightarrow \exists\ 0 < c < 1\ ;\ f(c) = 0$$

۳ نمره

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2}\cos 1 > 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x > 0 \longrightarrow$$ صعودی $\longrightarrow$ ریشه یکتاست ۳ نمره

یا فرض خلف

$$c_1, c_2\ ;\ f(c_1) = f(c_2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\exists\ c_1 < \gamma < c_2\ ;\ f'(\gamma) = 1 + \frac{1}{2}\sin\gamma = 0 \longrightarrow \sin\gamma = -2 \quad \times$$

$$x_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \qquad f(x_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} = \sin^2\frac{1}{4} > 0$$

۱ نمره

$$f(0) < 0$$

~~۲~~۱ نمره

$$0 < c < x_1$$ ۳ نمره

$$0 < c < \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$x_2 = \frac{0 + 1/2}{2} = 1/4$$ ۱ نمره

۵ -

$f^2(x) - 2f'(x) = 0$

$1 - 2\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = 0 \rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = +\dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{2}$ ۴ نمره

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[\text{۴ نمره}]{\text{قضیهٔ مقدار میانگین}} \exists\ 0 < c < 1 ;\ g'(c) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{1} = -\dfrac{1}{2}$

۲ نمره

موفق باشید

باقرلو