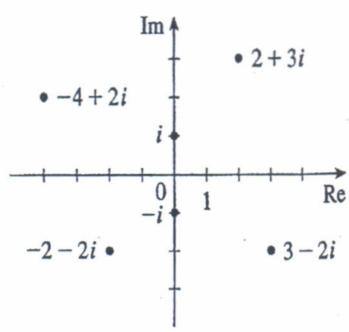
ز عددهای مختلط

عدد مختلط را می‌توان با عبارتی به‌صورت $a+bi$ نمایش داد، که در اینجا a و b عددهایی حقیقی‌اند و i نمادی با این ویژگی است که $i^۲ = -۱$. عدد مختلط $a+bi$ را با زوج مرتب (a,b) نیز می‌توان نمایش داد و مانند شکل ۱ به‌عنوان نقطه‌ای در یک صفحه (به‌نام صفحهٔ آرگان) رسم کرد. بنابراین عدد مختلط $i = ۰ + ۱ \times i$ با نقطهٔ $(۰,۱)$ مشخص می‌شود.



شکل ۱

عددهایی مختلط به‌عنوان نقطه‌هایی در صفحهٔ آرگان

قسمت حقیقی عدد مختلط $a+bi$ عدد حقیقی a و **قسمت موهومی** آن عدد حقیقی b است. بنابراین قسمت حقیقی $۴-۳i$، ۴ است و قسمت موهومی‌اش ۳−. دو عدد مختلط $a+bi$ و $c+di$ وقتی **برابرند** که $a=c$ و $b=d$؛ یعنی، قسمتهای حقیقی‌شان با هم برابرند و قسمتهای موهومی‌شان نیز با هم برابرند. در صفحهٔ آرگان محور افقی را محور حقیقی و محور قائم را محور موهومی می‌نامند.

مجموع و تفاضل دو عدد مختلط با جمع‌کردن یا کم‌کردن قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی‌شان تعریف می‌شوند:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

مثلاً،

$$(۱-i)+(۴+۷i)=(۱+۴)+(-۱+۷)i=۵+۶i$$

ضرب عددهای مختلط طوری تعریف شده است که قاعده‌های تعویض‌پذیری و پخش‌پذیری معمولی درست باقی بمانند:

$$(a+bi)(c+di)=a(c+di)+(bi)(c+di)$$

$$=ac+adi+bci+bdi^۲$$

چون $i^۲ = -۱$، این تساوی می‌شود

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

مثال ۱ می‌توان نوشت

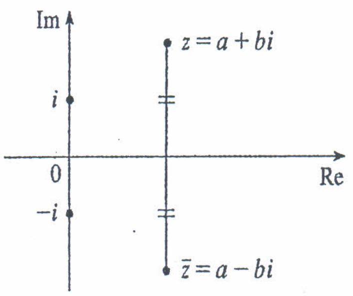
$$(-۱+۳i)(۲-۵i) = (-۱)(۲-۵i) + ۳i(۲-۵i)$$
$$= -۲ + ۵i + ۶i - ۱۵(-۱) = ۱۳ + ۱۱i$$ □

تقسیم‌کردن عددهای مختلط خیلی شبیه گویاکردن مخرج عبارتهای گویاست. برای عدد مختلط $z = a + bi$ **مزدوج مختلط**اش را با $\overline{z} = a - bi$ تعریف می‌کنیم. برای پیدا کردن خارج‌قسمت دو عدد مختلط صورت و مخرج را در مزدوج مختلط مخرج ضرب می‌کنیم.

مثال ۲ عدد $\dfrac{-۱+۳i}{۲+۵i}$ را به‌شکل $a + bi$ بنویسید.

راه‌حل صورت و مخرج را در مزدوج مختلط $۲ + ۵i$، یعنی $۲ - ۵i$، ضرب می‌کنیم، و از نتیجهٔ مثال ۱ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{-۱+۳i}{۲+۵i} = \frac{-۱+۳i}{۲+۵i} \times \frac{۲-۵i}{۲-۵i} = \frac{۱۳+۱۱i}{۲^۲+۵^۲} = \frac{۱۳}{۲۹} + \frac{۱۱}{۲۹}i$$ □



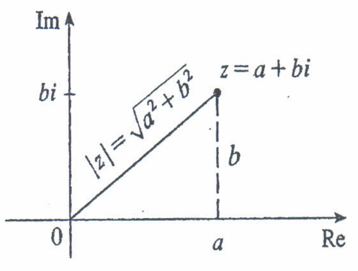
شکل ۲

تعبیر هندسی مزدوج مختلط را در شکل ۲ نشان داده‌ایم: $\overline{z}$ قرینهٔ z نسبت به محور حقیقی است. برخی ویژگیهای مزدوج مختلط را در مستطیل زیر فهرست کرده‌ایم. اثباتها از تعریف نتیجه می‌شوند و آنها را در تمرین ۱۸ خواسته‌ایم.

> **ویژگیهای مزدوج**
>
> $$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

قدرمطلق عدد مختلط $z = a + bi$، $|z|$، فاصله‌اش تا مبدأ است. از روی شکل ۳ معلوم می‌شود که اگر $z = a + bi$، آن‌وقت

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}}$$



شکل ۳

توجه کنید که

$$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^۲ + abi - abi - b^۲i^۲ = a^۲ + b^۲$$

و درنتیجه

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^۲}$$

این موضوع نشان می‌دهد که چرا فرآیند تقسیم‌کردن در مثال ۲ در حالت کلی درست است:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{a\overline{w}}{|w|^۲}$$

چون $i^۲ = -۱$، می‌توانیم i را ریشهٔ دوم -۱ بدانیم. البته توجه کنید که همچنین $(-i)^۲ = -۱$ و درنتیجه $-i$ نیز ریشهٔ دوم -۱ است. می‌گوییم که i **ریشهٔ دوم اصلی** -۱ است و می‌نویسیم $\sqrt{-۱} = i$. در حالت کلی، اگر c عددی مثبت باشد، می‌نویسیم

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\,i$$

با این قرارداد، دستور به‌دست‌آوردن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ حتی وقتی که $b^۲ - ۴ac < ۰$ درست است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

مثال ۳ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + x + ۱ = ۰$ را پیدا کنید.

راه‌حل با استفاده از دستور معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست می‌آوریم

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱^۲ - ۴ \times ۱}}{۲} = \frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۳}i}{۲} \qquad \square$$

متوجه می‌شویم که جوابهای معادلهٔ مثال ۳ مزدوجهای مختلط یکدیگرند. در حالت کلی، جوابهای هر معادلهٔ درجهٔ دوم مانند $ax^۲ + bx + c = ۰$ با ضریبهای حقیقی a، b و c همواره مزدوجهای مختلط‌اند. (اگر z حقیقی باشد، $\overline{z} = z$، بنابراین z مزدوج خودش است.)

دیدیم که اگر عددهای مختلط را هم به‌عنوان جواب قبول کنیم، هر معادلهٔ درجهٔ دوم جواب دارد. به‌طور کلیتر، هر معادلهٔ چندجمله‌ای مانند

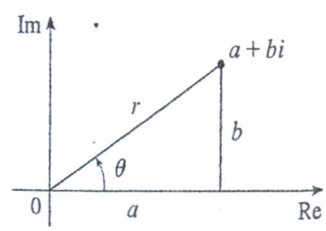
$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰ = ۰$$

از درجهٔ دست‌کم یک در میان عددهای مختلط جواب دارد. این نتیجه به قضیهٔ اساسی جبر معروف است و گاوس آن را ثابت کرده است.

صورت قطبی

می‌دانیم که هر عدد مختلط مانند $z = a + bi$ را می‌توان به‌عنوان نقطهٔ (a, b) در نظر گرفت و هر چنین نقطه‌ای را می‌توان با مختصات قطبی (r, θ)، که $r \geq ۰$، نمایش داد. درحقیقت، مطابق شکل ۴،

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta$$



شکل ۴

بنابراین

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i$$

بنابراین می‌توانیم هر عدد مختلط مانند z را به‌صورت

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

بنویسیم، که در اینجا

$$r = |z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}, \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

زاویهٔ θ را **شناسهٔ** z می‌نامند و می‌نویسیم $\theta = \arg(z)$. توجه کنید که $\arg(z)$ یکتا نیست؛ اختلاف هر دو شناسهٔ z مضربی صحیح از ۲π است.

مثال ۴ عددهای زیر را به‌صورت قطبی بنویسید.

الف) $z = ۱ + i$ ب) $w = \sqrt{۳} - i$

راه‌حل

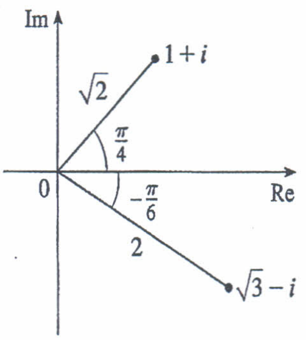
الف) می‌توان نوشت $r = |z| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$ و $\tan\theta = ۱$، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $\theta = \frac{\pi}{۴}$. به این ترتیب صورت قطبی موردنظر

$$z = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

است.

ب) در اینجا $r = |w| = \sqrt{۳ + ۱} = ۲$ و $\tan\theta = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$. چون w در ربع چهارم قرار دارد، فرض می‌کنیم $\theta = -\frac{\pi}{۶}$ و

$$w = ۲\left(\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\right)$$



شکل ۵

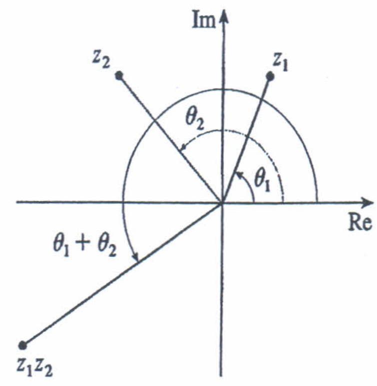
عددهای z و w را در شکل ۵ نشان داده‌ایم. □

صورت قطبی عددهای مختلط موجب شناخت بهتر ضرب و تقسیم می‌شود. فرض کنید

$$z_۱ = r_۱(\cos\theta_۱ + i\sin\theta_۱), \qquad z_۲ = r_۲(\cos\theta_۲ + i\sin\theta_۲)$$

دو عدد مختلط باشند که به‌صورت قطبی نوشته شده‌اند. در این صورت

$$\begin{aligned} z_۱z_۲ &= r_۱r_۲(\cos\theta_۱ + i\sin\theta_۱)(\cos\theta_۲ + i\sin\theta_۲) \\ &= r_۱r_۲((\cos\theta_۱\cos\theta_۲ - \sin\theta_۱\sin\theta_۲) + i(\sin\theta_۱\cos\theta_۲ + \cos\theta_۱\sin\theta_۲)) \end{aligned}$$



شکل ۶

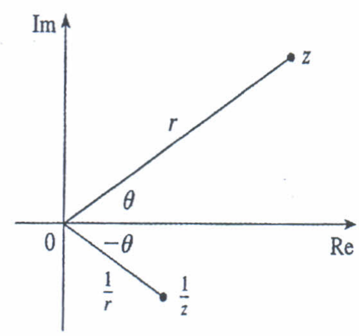
بنابراین، با استفاده از دستورهای جمع برای کسینوس و سینوس، به‌دست می‌آوریم

$$\boxed{z_۱z_۲ = r_۱r_۲(\cos(\theta_۱+\theta_۲)+i\sin(\theta_۱+\theta_۲))} \quad \boxed{۱}$$

این دستور یعنی اینکه برای ضرب دو عدد مختلط قدرمطلقهای آنها را در هم ضرب می‌کنیم و شناسه‌ها را با هم جمع می‌کنیم. (شکل ۶ را ببینید.)

از استدلالی مشابه با استفاده از دستورهای تفاضل سینوس و کسینوس معلوم می‌شود که برای تقسیم‌کردن دو عدد مختلط قدرمطلقها را بر هم تقسیم می‌کنیم و شناسه‌ها را کم می‌کنیم.

$$\boxed{\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{r_۱}{r_۲}(\cos(\theta_۱-\theta_۲)+i\sin(\theta_۱-\theta_۲)), \qquad z_۲ \neq ۰}$$



شکل ۷

به‌ویژه، اگر فرض کنیم $z_۱ = ۱$ و $z_۲ = z$ (و بنابراین $\theta_۱ = ۰$ و $\theta_۲ = \theta$)، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم، که آن را در شکل ۷ روشن کرده‌ایم.

$$\boxed{\text{اگر} \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{آن‌وقت} \quad \frac{۱}{z} = \frac{۱}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

مثال ۵ حاصل‌ضرب عددهای مختلط $۱+i$ و $\sqrt{۳}-i$ را به‌صورت قطبی پیدا کنید.

راه‌حل بنابر مثال ۴،

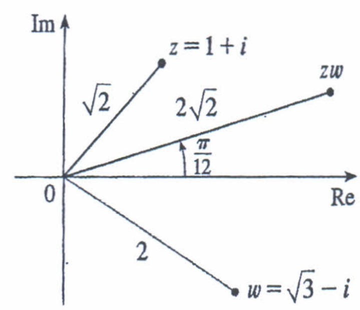
$$۱+i = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

و

$$\sqrt{۳}-i = ۲\left(\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\right)$$

درنتیجه، بنابر تساوی ۱،

$$\begin{aligned}(۱+i)(\sqrt{۳}-i) &= ۲\sqrt{۲}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}\right)\right)\\ &= ۲\sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۱۲} + i\sin\frac{\pi}{۱۲}\right)\end{aligned}$$



شکل ۸

این موضوع را در شکل ۸ روشن کرده‌ایم. □

استفادهٔ پی‌درپی از دستور ۱ نشان می‌دهد که چگونه توانهای عددهای مختلط را پیدا کنیم. اگر

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

آن‌وقت

$$z^۲ = r^۲(\cos ۲\theta + i\sin ۲\theta)$$

و

$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

در حالت کلی، نتیجهٔ زیر راکه به‌افتخار آبرائام دوموآور، ریاضیدان فرانسوی (۱۶۶۷-۱۷۵۴)، نامگذاری شده است به‌دست می‌آوریم.

۲ قضیهٔ دوموآور اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و n عددی طبیعی باشد، آن‌وقت $$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

یعنی اینکه برای اینکه عددی مختلط را به توان n برسانیم قدرمطلقش را به توان n می‌رسانیم و شناسه‌اش را در n ضرب می‌کنیم.

مثال ۶ $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$ را پیدا کنید.

راه‌حل چون $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+i)$، از مثال ۴ (الف) نتیجه می‌شود که صورت قطبی $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$،

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

است. درنتیجه بنابر قضیهٔ دوموآور،

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$ □

می‌توان از قضیهٔ دوموآور برای پیدا کردن ریشه‌های nام عددهای مختلط هم استفاده کرد. ریشهٔ nام عدد مختلط z عددی مختلط مانند w است که

$$w^n = z$$

اگر این دو عدد را به‌صورت مثلثاتی به‌شکل

$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi), \qquad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

بنویسیم و از قضیهٔ دوموآور استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$s^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تساوی این دو عدد مختلط نشان می‌دهد که

$$s^n = r \qquad \text{یا} \qquad s = r^{1/n}$$

و

$$\cos n\phi = \cos\theta, \qquad \sin n\phi = \sin\theta$$

از اینکه دورهٔ تناوب سینوس و کسینوس ۲π است نتیجه می‌شود که

$$\phi = \frac{\theta + ۲k\pi}{n} \qquad \text{یا} \qquad n\phi = \theta + ۲k\pi$$

بنابراین

$$w = r^{۱/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+۲k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+۲k\pi}{n}\right)\right)$$

چون مقدارهای این عبارت به‌ازای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱$ متفاوت است، پس نتیجهٔ زیر را به‌دست آورده‌ایم.

$\boxed{۳}$ **ریشهٔ عدد مختلط** فرض کنید $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و n عددی طبیعی باشد. در این صورت z، n ریشهٔ nام متمایز دارد:

$$w_k = r^{۱/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+۲k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+۲k\pi}{n}\right)\right)$$

که در اینجا $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱$.

توجه کنید که قدرمطلق هر یک از ریشه‌های nام z برابر است با $|w_k| = r^{۱/n}$. بنابراین همهٔ ریشه‌های nام z روی دایره‌ای به شعاع $r^{۱/n}$ در صفحهٔ مختلط قرار دارند. همچنین، چون شناسهٔ ریشهٔ nام بعدی از شناسهٔ ریشهٔ قبلی $\frac{۲\pi}{n}$ بیشتر است، پس ریشه‌های nام z روی این دایره با فاصله‌های یکسان توزیع شده‌اند.

مثال ۷ شش ریشهٔ ششم $z = -۸$ را پیدا کنید و این ریشه‌ها را در صفحهٔ مختلط رسم کنید.

راه‌حل به‌صورت مثلثاتی، $z = ۸(\cos\pi + i\sin\pi)$. اگر از تساوی ۳ وقتی که $n = ۶$ استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$w_k = ۸^{۱/۶}\left(\cos\frac{\pi+۲k\pi}{۶} + i\sin\frac{\pi+۲k\pi}{۶}\right)$$

شش ریشهٔ ششم -۸ را با قراردادن $k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ در این دستور به‌دست می‌آوریم:

$$w_۰ = ۸^{۱/۶}\left(\cos\frac{\pi}{۶} + i\sin\frac{\pi}{۶}\right) = \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}i\right)$$

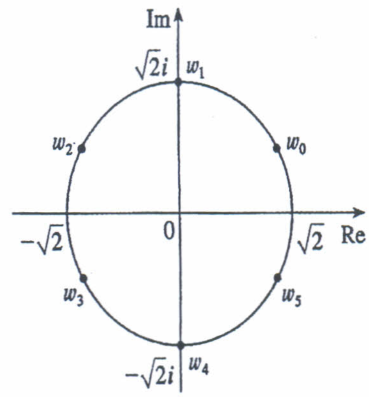
$$w_۱ = ۸^{۱/۶}\left(\cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲}\right) = \sqrt{۲}i$$

$$w_۲ = ۸^{۱/۶}\left(\cos\frac{۵\pi}{۶} + i\sin\frac{۵\pi}{۶}\right) = \sqrt{۲}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}i\right)$$

$$w_۳ = ۸^{۱/۶}\left(\cos\frac{۷\pi}{۶} + i\sin\frac{۷\pi}{۶}\right) = \sqrt{۲}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}i\right)$$

$$w_۴ = ۸^{۱/۶}\left(\cos\frac{۳\pi}{۲} + i\sin\frac{۳\pi}{۲}\right) = -\sqrt{۲}i$$

$$w_۵ = ۸^{۱/۶}\left(\cos\frac{۱۱\pi}{۶} + i\sin\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}i\right)$$



شکل ۹

شش ریشهٔ ششم $z = -۸$

همهٔ این نقطه‌ها روی دایرهٔ به شعاع $\sqrt{۲}$، همان‌طورکه در شکل ۹ نشان داده‌ایم، قرار دارند. □

نمای مختلط

همچنین لازم است که معنی عبارت e^z را وقتی که $z = x + iy$ عددی مختلط است معلوم کنیم. نظریهٔ سریهای نامتناهی را که در فصل ۱۲ دیدیم می‌توان به حالتی که جمله‌ها عددهایی مختلط‌اند تعمیم داد. با استفاده از سری تیلور e^x (۱۱.۱۰.۱۲) به‌عنوان راهنما، تعریف می‌کنیم

$$e^z = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = ۱ + z + \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۳}{۳!} + \cdots \qquad \boxed{۴}$$

و معلوم می‌شود که این تابع نمایی مختلط همان ویژگیهای تابع نمایی حقیقی را دارد. به‌ویژه،

$$e^{z_۱ + z_۲} = e^{z_۱}e^{z_۲} \qquad \boxed{۵}$$

اگر در تساوی ۴ قرار دهیم $z = iy$، که در اینجا y عددی حقیقی است، و از اینکه

$$i^۲ = -۱, \quad i^۳ = i^۲ i = -i, \quad i^۴ = ۱, \quad i^۵ = i, \quad \ldots$$

استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} e^{iy} &= ۱ + iy + \frac{(iy)^۲}{۲!} + \frac{(iy)^۳}{۳!} + \frac{(iy)^۴}{۴!} + \frac{(iy)^۵}{۵!} + \cdots \\ &= ۱ + iy - \frac{y^۲}{۲!} - i\frac{y^۳}{۳!} + \frac{y^۴}{۴!} + i\frac{y^۵}{۵!} + \cdots \\ &= \left(۱ - \frac{y^۲}{۲!} + \frac{y^۴}{۴!} - \frac{y^۶}{۶!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^۳}{۳!} + \frac{y^۵}{۵!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

در اینجا از سریهای تیلور $\cos y$ و $\sin y$ (تساویهای ۱۶.۱۰.۱۲ و ۱۵.۱۰.۱۲) استفاده کرده‌ایم. نتیجه دستوری مشهور به‌نام **دستور اویلر** است:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad \boxed{۶}$$

اگر دستور اویلر را با تساوی ۵ ترکیب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\boxed{7} \qquad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

مثال ۸ حساب کنید: الف) $e^{i\pi}$ ب) $e^{-1+i\pi/2}$

راه‌حل

الف) بنابر دستور اویلر (۶) می‌توان نوشت

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i(0) = -1$$

ب) با استفاده از تساوی ۷ به‌دست می‌آوریم

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}(0 + i(1)) = \frac{i}{e} \qquad \square$$

آخر سر، توجه می‌کنیم که به‌کمک تساوی اویلر می‌توانیم قضیهٔ دوموآور را به‌روشی ساده‌تر ثابت کنیم:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ز تمرین

۱-۱۴ عبارت موردنظر را حساب کنید و پاسخ را به‌صورت $a+ib$ بنویسید.

۱. $(5-6i)+(3+2i)$ ۲. $\left(4-\frac{1}{2}i\right)-\left(9+\frac{5}{2}i\right)$

۳. $(2+5i)(4-i)$ ۴. $(1-2i)(8-3i)$

۵. $\overline{12+7i}$ ۶. $\overline{2i\left(\frac{1}{2}-i\right)}$

۷. $\dfrac{1+4i}{3+2i}$ ۸. $\dfrac{3+2i}{1-4i}$

۹. $\dfrac{1}{1+i}$ ۱۰. $\dfrac{3}{4-3i}$

۱۱. i^3 ۱۲. i^{100}

۱۳. $\sqrt{-25}$ ۱۴. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

۱۵-۱۷ مزدوج مختلط و قدرمطلق عدد موردنظر را پیدا کنید.

۱۵. $12-5i$

۱۶. $-1+2\sqrt{2}i$

۱۷. $-4i$

---

۱۸. ویژگیهای زیر از عددهای مختلط را ثابت کنید.

الف) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$

ب) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

ج) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$، که در اینجا n عددی طبیعی است. (راهنمایی: بنویسید $z=a+bi$ و $w=c+di$.)

۱۹-۲۴ همهٔ جوابهای معادلهٔ موردنظر را پیدا کنید.

۱۹. $4x^2+9=0$ ۲۰. $x^4=1$

۲۱. $x^2+2x+5=0$ ۲۲. $2x^2-2x+1=0$

۲۳. $z^2+z+2=0$ ۲۴. $z^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}=0$

۲۵-۲۸ عدد موردنظر را به‌صورت قطبی با شناسه‌ای بین ۰ و 2π بنویسید.

۲۵. $-3+3i$

۲۶. $1-\sqrt{3}i$

۲۷. $3+4i$

۲۸. $8i$

۲۹-۳۲ صورتهای قطبی zw، $\frac{z}{w}$ و $\frac{1}{z}$ را پیدا کنید، ابتدا z و w را به‌صورت قطبی بنویسید.

۲۹. $z=\sqrt{3}+i$، $w=1+\sqrt{3}i$

۳۰. $z=4\sqrt{3}-4i$، $w=8i$

۳۱. $z=2\sqrt{3}-2i$، $w=-1+i$

۳۲. $z=4(\sqrt{3}+i)$، $w=-3-3i$

۳۳-۳۶ توان مشخص‌شده را با استفاده از قضیهٔ دوموآور پیدا کنید.

۳۳. $(1+i)^{20}$ ۳۴. $(1-\sqrt{3}i)^5$

۳۵. $(2\sqrt{3}+2i)^5$ ۳۶. $(1-i)^8$

۳۷-۴۰ ریشهٔ مشخص‌شده را پیدا کنید. ریشه‌ها را در صفحهٔ مختلط رسم کنید.

۳۷. ریشه‌های هشتم ۱ ۳۸. ریشه‌های پنجم ۳۲

۳۹. ریشه‌های سوم i ۴۰. ریشه‌های سوم $1+i$

۴۱-۴۶ عدد موردنظر را به‌صورت $a+bi$ بنویسید.

۴۱. $e^{i\pi/2}$ ۴۲. $e^{2\pi i}$

۴۳. $e^{i\pi/3}$ ۴۴. $e^{-i\pi}$

۴۵. $e^{2+i\pi}$ ۴۶. $e^{\pi+i}$

---

۴۷. با استفاده از قضیهٔ دوموآور وقتی که $n=3$، $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بنویسید.

۴۸. با استفاده از دستور اویلر دستورهای زیر برای $\cos x$ و $\sin x$ را ثابت کنید:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

۴۹. اگر $u(x)=f(x)+ig(x)$ تابعی مختلط ـ مقدار از متغیر حقیقی x باشد و قسمتهای حقیقی و موهومی، $f(x)$ و $g(x)$، تابعهایی مشتق‌پذیر از x باشند، آن‌وقت مشتق u به‌شکل $u'(x)=f'(x)+ig'(x)$ تعریف می‌شود. با استفاده از این مطلب و تساوی ۷ ثابت کنید که اگر $F(x)=e^{rx}$، آن‌وقت $F'(x)=re^{rx}$، که در اینجا $r=a+bi$ عددی مختلط است.

۵۰. الف) اگر u تابعی مختلط ـ مقدار از متغیری حقیقی باشد، انتگرال نامعینش، $\int u(x)\,dx$، پادمشتقی از u است. $\int e^{(1+i)x}\,dx$ را پیدا کنید.

ب) با در نظر گرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی انتگرال قسمت (الف)، انتگرالهای حقیقی

$$\int e^x\cos x\,dx,\qquad \int e^x\sin x\,dx$$

را پیدا کنید.

ج) این را با روشی که در مثال ۴ بخش ۱.۸ استفاده کردیم مقایسه کنید.