ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه دهم

استاد : دکتر قصوری

رشته : کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه دهم

فضاهای برداری :

گروه آبلی :

به مجموعه عناصر S و عملگر $\oplus$ توجه.

$$1)\quad x , y \in S \rightarrow x \oplus y \in S$$

$$2)\quad \varphi \oplus x = x$$

$$3)\quad x' \oplus x = \varphi \qquad \leftarrow \exists\, x' \in S$$

$$4)\quad x \oplus y = y \oplus x$$

اگر مجموعه این چهار شرط بالا برقرار باشد این گروه را گروه آبلی گوییم.
در صورتیکه شرط سوم وجود نداشته باشد آن گروه را نیم گروه آبلی می‌نامیم.

مثال ۱) اگر S مجموعه اعداد طبیعی و عملگر آن هم $\oplus$ باشد آیا S جزو گروه آبلی است؟

$$S = N \; , \; \oplus$$

- جزء گروه آبلی نمی‌باشد چون عضو خنثی در عمل جمع صفر می‌باشد و عدد صفر در مجموعه اعداد طبیعی نیست.

مثال ۲) اگر S مجموعه اعداد صحیح مثبت و عملگر آن هم $\oplus$ باشد آیا S جزو گروه آبلی است؟

- جزء گروه نیم آبلی می‌باشد چون عضو وارون برای اعداد صحیح مثبت در مجموعه Z وجود ندارد.

مثال ۳) اگر S مجموعه اعداد صحیح و عملگر آن هم $\oplus$ باشد آیا S جزو گروه آبلی است؟

- جزو گروه آبلی می‌باشد زیرا هر چهار شرط فوق را صدق می‌کند.

$x , y \in M \Rightarrow x + y \in M$

$0 + x = x + 0 = 0$ عضو خنثی در عمل جمع

$x' + x = 0 \Rightarrow x' = -x$ عضو مجموعه اعداد صحیح

$x + y = y + x$ خاصیت جابجایی در عمل جمع

در این صورت فضای برداری بر روی اعداد حقیقی $(\alpha \in IR)$ ایجاد می‌گردد.

فضای برداری فضایی است که علاوه بر اینکه خاصیت گروه آبلی را دارا است برقرار است عملگر $\odot$ آن به صورت تعریف شود به گونه‌ای که

$\alpha \odot x \in S \qquad \alpha \in IR$

مثال ۴) آیا فضای اقلیدسی سه بعدی یک فضای برداری می باشد؟

(a_1 , a_2 , a_3)

$x \in E^2$ فضای سه بعدی

(1) $\left.\begin{array}{l} x = (a_1 , a_2 , a_3) \\ y = (b_1 , b_2 , b_3) \end{array}\right\} \Rightarrow x \oplus y = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 + a_3 + b_3) \in S$

(2) $\emptyset = (0, 0, 0)$ $\quad \emptyset \oplus x = (0, 0, 0) \oplus (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) = x$

(3) $x' = -x$ $\quad x' \oplus x = \emptyset \Rightarrow (-a_1, -a_2, -a_3) \oplus (a_1, a_2, a_3)$

$= (0, 0, 0) = \emptyset$

(4) $x \oplus y = (a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3)$

$= (b_1, b_2, b_3) \oplus (a_1, a_2, a_3) = y \oplus x$

$\alpha \odot x = \alpha \odot (a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \in S$

فضای متریک :

درصورتی فضای برداری به فضای متریک تبدیل می شود که شرایط زیر برقرار باشد.

شرایط فضای متریک :

فضای متریک یک فضای برداری است که علاوه بر آن باید شرایط زیر برقرار باشد.

1) $d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \Rightarrow y = x$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

مثال ۵)

در صورتیکه d(x,y) = Ix-YI / 1+ Ix-yI **تعریف شده باشد آیا فضای فوق یک فضای متریک می باشد؟**

$S \in \mathbb{R}$

شرط اول $d(x,y) \geq 0$ ؟

$$\Rightarrow 0 < \frac{|x-y|}{1+|x-y|} < 1 \Rightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \geq 0$$

شرط دوم $d(x,y) = 0$

$$\Rightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y$$

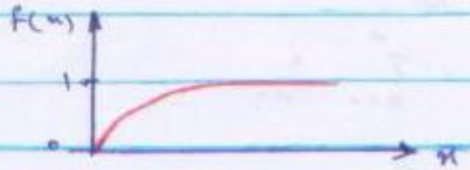
شرط سوم $\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \qquad 0 \leq x \leq \infty \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 = |x-y| \\ x_2 = |x-z| + |z-y| \end{cases}$$



$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow |x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z| + |z-y|}{1+|x-z| + |z-y|}$$

$$= \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \leq$$

$$\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

پس شرط سوم برقرار است

در نتیجه این تعریف یک فضای متریک را تشکیل خواهد داد

فضای متریک را زمانی کامل می‌گوییم که علاوه بر اینکه x_n وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند متعلق به فضای برداری باشد.

فضای متریک کامل :

شرایط فضای متریک کامل :

علاوه بر اینکه x_n متعلق به فضای برداری باشد،

حد x_n نیز متعلق به فضای برداری باشد.

در غیر این صورت یک فضای متریک غیر کامل خواهد بود.

مجموعه اعداد گویا :

$\frac{p}{q}$

$\sqrt{2}, \pi, e$ اعداد گنگ

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

مثال ۶) آیا محیط اضلاع یک n ضلعی منتظم فضای متریک را ایجاد می کند؟

محیط n چند ضلعی منتظم یک فضای متریک غیر کامل را تعریف می‌کند. (در حوزه اعداد گویا) تعریف می‌کند مجموع اعداد گویا یک عدد گویا می‌باشد. بنابراین محیط یک چند ضلعی منتظم برابر n برابر یک ضلع می‌باشد. در صورتیکه n به سمت ∞ میل کند در آن صورت محیط برابر با $2\pi R$ می‌باشد و چون π عضو مجموعه اعداد گویا نمی‌باشد در نتیجه فضا یک فضای متریک غیر کامل خواهد بود.

$$\lim_{n \to \infty} = 2\pi r$$

اعداد گویا، مجموعه اعداد قابل شمارش هستند.

اعداد گنگ، مجموعه اعداد غیر قابل شمارش هستند.

مثال ۷)

آیا xn =1/n **یک فضای متریک کامل را برای** s={0<x<1 , nϵ n , x_n =1/n} **نشان می دهد؟**

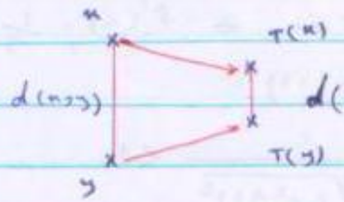
چون همین صفر وجود هست ولی صفر جزو آن نیست در جواب حد صفر برابر صفر شده است.
پس یک فضای متریک غیر کامل را به ما می‌دهد.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

عملگر انقباضی (T)

$x, y \in S$

$T(x), T(y) \in S$



$d(T(x), T(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$

$0 < \alpha \leq 1$

فضای باناخ :

در یک فضای برداری که فضای متریک x را به فضای متریک y و اتصال می‌دهد تحت عملگری به نام (T).

$x \in X$

$y \in Y \qquad T(x) = y$

به شرطی که فضا را فضای باناخ بنامیم که تحت عملگر T فضای B به B منتقل شود

$T: B \to B$

قضیه باناخ :

قضیه باناخ:

هرگاه عملگر T فضای B را به B ببرد $T: B \to B$ تعریف شده و انقباضی باشد
در این صورت یک نقطه مانند β برابر β است $T(\beta) = \beta$

قضیه مقدار میانگین :

$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \qquad x < c < y$

مثال ۸)

ثابت کنید معادله درجه سوم $X^3-X^2-1=0$ دارای یک ریشه حقیقی باشد و آن ریشه را با تقریب ۰٫۰۰۱ بدست آورید.

$$x^3-x^2-1=0$$

$$x^3=x^2+1 \longrightarrow x=\sqrt[3]{x^2+1}$$

$$x \longrightarrow T(x)$$

طبق قضیه مقدار میانگین:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(2x)(x^2+1)^{-2/3}=\frac{2}{3}\,\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

$$\hookrightarrow (x^2+1)^{1/3}$$

$$f'(c)=\frac{2}{3}\,\frac{c}{\sqrt[3]{(c^2+1)^2}}<1$$

در صورتی که $f'(c)$ کوچکتر از یک است.

شرط انقباض بودن نگاشت ثابت شد:

$$\left|\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|<|x-y|$$

چون نگاشت انقباضی است $T(\beta)=\beta$ بنابراین:

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n^2+1}$$

$x_0=1$

$x_2=1.26$

$x_3=\sqrt[3]{1.587+1}=1.373$

$x_4=\sqrt[3]{(1.373)^2+1}=1.423$

$x_5=1.446$

$x_6=1.457$

$x_7=1.462$

$x_8=1.464$

$x_9=1.465$

$\boxed{x_n=1.465}$

چون در x_{10} ریشه تکراری شد پس جواب هم همان $x_{10}=1.465$ می‌باشد.

تمرین ۱) ثابت کنید معادله درجه سوم $X^7-X^2-1=0$ دارای یک ریشه حقیقی می باشد و آن ریشه را با تقریب 10^{-3} بدست آورید.

ی علم ساختار مرتفعات جنوب و تغییر انقباضی حرکت می‌کند

حمل رسوب ... و ... می‌شود.

مثال ۹) معادله دیفرانسیل $Y'' + 1XY' + 4Y = X$ با شرایط اولیه $Y'(0)=0$, $Y(0)=1$ دارای جواب است این جواب را به صورت تقریبی محاسبه کنید.

$y(0)=1$

$y'(0)=0$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \varphi(x) \Rightarrow \int_0^x \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \int_0^x \varphi(t)\, dt$$

$$\Rightarrow y'(x) - \cancel{y'(0)} = \int_0^x \varphi(t)\, dt \Rightarrow y'(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt$$

انتگرال بگیر $\int_0^x (y'(x) - y'(0)) = \int_0^x \left(\int_0^x \varphi(t)\, dt\right) = \int_0^x y'(x) = \int_0^x \left(\int_0^x \varphi(t)\, dt\right)$

$$\Rightarrow y(x) - 1 = \int_0^x \Big(\underbrace{\int_0^t \varphi(u)\, du}_{u}\Big) \underbrace{dt}_{dv} \quad \left\{\int u\,dv = uv - \int v\,du\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) - 1 = t\int_0^t \varphi(u)\, du\Big|_0^x - \int_0^x t\, \varphi(t)\, dt$$

$$= x\int_0^x \varphi(u)\, du - \int_0^x t\, \varphi(t)\, dt \Rightarrow \int_0^x (x-t)\, \varphi(t)\, dt$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x (x-t)\, \varphi(t)\, dt + 1$$

به جای مقادیر y و y' و y'' بر حسب $\varphi(x)$ خواهیم داشت

$$y'' + 2xy' + 4y = x$$

$$\varphi(x) + 2x\int_0^x \varphi(t)\,dt + 4\left(\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + 1\right) = x$$

$$\varphi(x) = x - 4 - 6\int_0^x x\varphi(t)\,dt + 4\int_0^x t\,\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = x - 4 + \int_0^x (4t - 6x)\,\varphi(t)\,dt$$

در صورتی که عبارت بالا به صورت یک عملگر انتقالی تعریف شود. $x \to T(x)$

$$\varphi(x) \longrightarrow x - 4 + \int_0^x (4t - 6x)\,\varphi(t)\,dt$$

باید ثابت کنیم: $d(Ty - Tx) \leqslant \alpha\, d(y - x)$.

$$\left|y - \cancel{4} + \int_0^y (4t - 6y)\,\varphi(t)\,dt - \left(x - \cancel{4} + \int_0^x (4t - 6x)\,\varphi(t)\,dt\right)\right| <$$

$$< \alpha\left|\varphi(y) - \varphi(x)\right|$$

$$\Rightarrow \left|y - x + \int_x^y 4t\,\varphi(t)\,dt - 6\left(y\int_0^y \varphi(t)\,dt + x\int_x^0 \varphi(t)\,dt\right)\right|$$