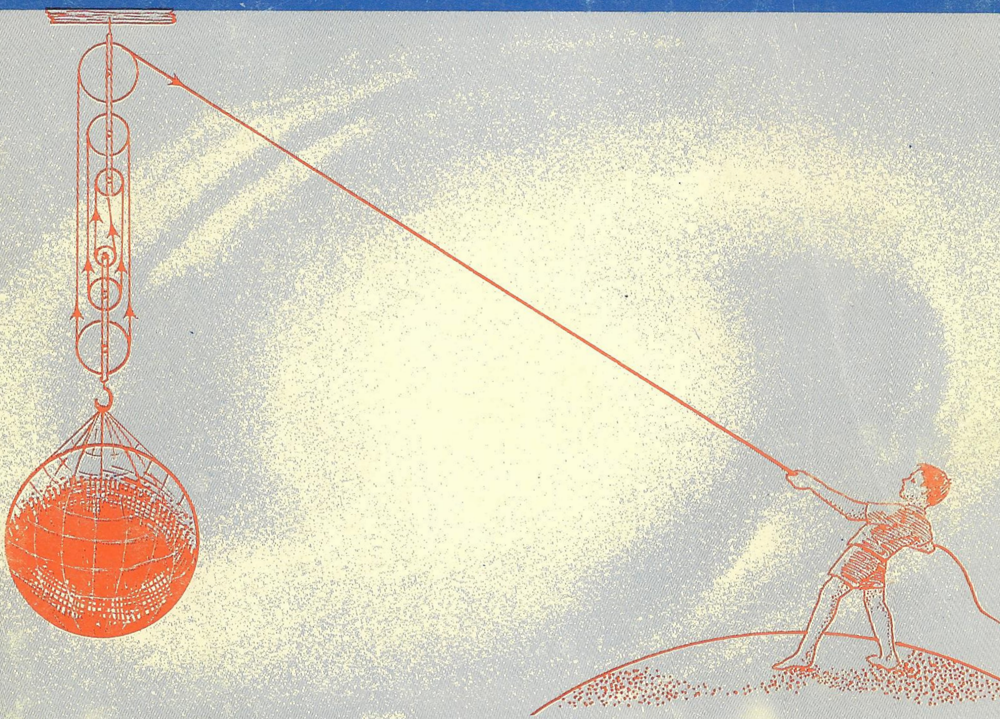
در قلمرو مکانیک

کتاب دوم/ استاتیک

تألیف هامفری و توپینگ / ترجمهٔ هوشنگ شریف‌زاده



در قلمرو مکانیک

کتاب دوم/ استاتیک

تألیف هامفری و توپینگ

ترجمهٔ هوشنگ شریف زاده

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

چاپ اول شهریورماه ۱۳۶۶

انتشارات فاطمی

درقلمرومکانیک کتاب دوّم / استاتیک

A SHORTER INTERMEDIATE MECHANIC

مؤلف: هامفری وتوپنیگ **Humphry & Topping**

مترجم: هوشنگ شریف زاده

چاپ سوّم: خردادماه ۱۳۶۹

تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه

چاپ وصحافی: چاپخانهٔ صنوبر

نشانی تهران، خیابان دکترفاطمی، شمارهٔ ۱۵۹

تلفن: ۶۵۱۴۲۲

فهرست مطالب

۱۰

استاتیك نقطهٔ مادی

۱.۱۰. اکنون بخشی ازمکانیك را درنظرمی‌گیریم که استاتیك نامیده‌می‌شود وبه‌جامداتی مربوط است‌که تحت اثر نیرو به حال سکون هستند. بازهم در شروع این بخش فرض خواهیم کردکه ابعادجسم جامدناچیز است. نیز، مانندگذشته، چنین جسمی را نقطهٔ مادی می‌نامیم وآن را به‌صورت یك نقطه نمایش می‌دهیم.

۲.۱۰. نیرو

در بخش ۳، نیرو[1] را چنین تعریف کردیم: هر علتی که حالت سکون یا حالت حرکت یکنواخت مستقیم‌الخط جسم را تغییر بدهد یا مایل به تغییر دادن آن باشد، نیروست. نیرو، جسم را به شتاب وامی‌دارد، وفقط اگر بر جسم برایند نیرویی اثر نکند، جسم به سکون خود نسبت به یك دستگاه مقایسه‌ای، یا به حرکت خود با تندی یکنواخت ادامه می‌دهد. دراستاتیك به بررسی رابطه‌هایی می‌پردازیم که هنگامی که برایند نیرو برابر صفر است باید میان نیروها برقرارباشد.

۳.۱۰. برای‌آنکه، نیرویی راکه بریك نقطهٔ مادی وارد می‌شود، به طورکامل مشخص کنیم، به این اطلاعات نیازمندیم: (۱) بزرگی نیرو، (۲) جهت نیرو درفضا.

درمورد یك جسم صلب، نقطهٔ اثر نیرو نیزباید مشخص شود.

بزرگی نیرورا می‌توان به‌کمك اثرآن اندازه‌گیری کرد. اندازه‌گیری‌آن دردینامیك معمولا از روی حرکتی‌که دریك جسم معین درمدتی معین ایجاد می‌کند، یا به طوردقیقتر ازروی شتابی‌که درهرلحظه در جسم تولید می‌کند انجام می‌گیرد، چنانکه نیوتون (N)، واحدنیرو، به عنوان نیرویی تعریف می‌شودکه درجرم یك‌کیلوگرم شتابی برابر $1\ m/s^2$ تولید می‌کند.

۱ـ درقلمرو مکانیك. جلداول: دینامیك.

نیز می‌توانیم نیرو را به‌وسیلهٔ وزنی که تحمل می کند اندازه بگیریم. دراین‌صورت اندازهٔآن بستگی به نیروی جاذبه درمحلی داردکه‌آن نیرو درآنجا اندازه‌گیری‌شده‌است.

چنین واحدی درنقاط مختلف زمین‌دارای‌اندازه‌های مختلف است، زیرا نیروی گرانشی‌زمین درنقاط مختلف تفاوت می کند.

باوجوداین، دراستاتیك، عموماً فقط با اندازه‌های نسبی نیروها دریك نقطه سر و کار داریم. بنابراین می‌توانیم ازهر واحد نیرویی‌که استفاده ازآن مناسبتر باشد استفاده‌کنیم، زیرا نسبتهای نیروهاکه همه برحسب هرواحد انتخاب شده‌ای بیان شده باشند ازیك‌جابه‌جای دیگر تغییر نخواهندکرد.

۴.۱۰. بردارها

یك نیروی معین را می‌توانیم به طور کامل با یك خط راست AB نمایش دهیم. زیرا یك سر آن، A ، می‌تواند نقطهٔ اثر نیرو را نشان دهد. جهت خط در فضا، می‌تواند جهت نیرورا نمایش دهد، و طول خط می‌تواند بزرگی نیرو را دریك مقیاس مناسب نشان دهد.

هر کمیتی‌که مانند نیرو، شامل بزرگی وجهت باشد، بردار نامیده می‌شود.

مثالهای‌دیگری ازبردارکه در دینامیك باآنها سروکار داشتیم عبارت‌بودند ازتندی، مقدارحرکت، وشتاب، وهمهٔآنها را می‌توان به‌طورکامل با خطوط راست نمایش داد.

هنگامی‌که نیرویی را با خط AB نمایش می‌دهیم، برای آنکه‌کاملاً روشن شودکه نیرو از A به‌سوی B وارد شده است، می‌توانیم پیکانی برروی‌حروف بگذاریم وبنویسیم $\overrightarrow{AB}$. اما دربسیاری ازحالتها، کاملا روشن است‌که جهت نیرو برحسب ترتیب الفبایی و ازچپ به‌راست است؛ مثلا AB نمایش نیرویی است‌که از A به سوی B وارد شده است و BA نیرویی است‌که از B به سوی A وارد شده است.

قانون اساسی‌که دربارهٔ همهٔ بردارها صدق می کند قانون جمع بردارهاست. برطبق این قانون، مجموع هردو کمیت برداری همنوع که به وسیلهٔ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ نمایش داده شده‌اند برداری است‌که به‌وسیلهٔ $\overrightarrow{AC}$ نمایش داده می‌شود.

اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ معلوم باشند، $\overrightarrow{AC}$ را می‌توان با رسم مثلث ABC پیدا کرد.

۵.۱۰. مبانی استاتیك

علم مکانیك را باچند قانون یافرض مسلم‌که مبتنی یا متکی بر تجربه و مشاهده است آغاز می کنیم.

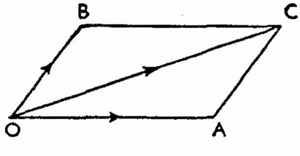
اما استاتیك درواقع حالتی خاص ازدینامیك است که درآن اجسام نسبت به دستگاه مقایسه‌ای معینی ساکن هستند. اگرحالتی کلی‌تر، یعنی حالتی که اجسام درحال حرکت‌هستند، را درنظربگیریم و قوانینی را انتخاب کنیم که مربوط به اثرنیروها بر این اجسام است (دینامیك)، این قوانین درحالت خاص که اجسام به‌حال سکون‌هستند نیزصدق می‌کند (استاتیك).

البته ممکن است استاتیك را بر مبنای قوانینی پایه گذاری کرد که مستقل از تصور حرکت باشند. درواقع، ازنظر تاریخی، علم استاتیك پیش ازعلم دینامیك بسط و گسترش یافته است. برای دینامیك، مجبوربودیم که تاقرن هفدهم صبر کنیم. دراین قرن مبانی دینامیك به وسیلهٔ گالیله‌ونیوتون گذاشته شد، وحال‌آنکه مبانی استاتیك را حداقل‌یونانیان باستان می‌دانستند و پایه گذاری‌آن به‌قبل از دوهزارسال پیش برمی‌گردد. گرچه ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ق.م) سهمی درمکانیك دارد، اماکسی که اصل اهرم را بسط داد وسهم‌مؤثری درعلم استاتیك (بند۱۱-۱۷ را ببینید) دارد ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق.م) است.

اکنون می‌توانیم به عنوان نقطهٔ شروع استاتیك، قضیه‌ای اساسی را ، که به متوازی الاضلاع نیروها موسوم است، درنظر بگیریم. این قضیه، فقط بیان می‌کندکه قانون جمع بردارها دربارهٔ نیروها درست است، اما می‌توان‌آن را ازقوانین اساسی دینامیك، که به قوانین نیوتون در بارهٔ حرکت موسوم است نتیجه گرفت. این قوانین دربخش ۳ توضیح داده شده‌اند[1]. بنابراین‌دینامیك واستاتیك محتوی یك علم هستندکه‌مبتنی برمجموعه‌ای از فرضهای مسلم اساسی است.

۶.۱۰. متوازی‌الاضلاع نیروها

اگر دو نیرو، در نقطهٔ O بر یك نقطهٔ مادی وارد شوند، و از نظر بزرگی و جهت با دو خط راست OA و OB که ازنقطهٔ O رسم می‌شوند نمایش‌داده شوند، برابر نیرویی تنها خواهند بود که از نظر بزرگی و جهت با قطر OC متوازی‌الاضلاع OACB نمایش داده می‌شود.



شکل ۱۰-۱

این قضیهٔ اساسی استاتیك است ومی‌توان‌آن را باآزمایش تحقیق کرد واین‌درست مانند هرقانون علمی دیگر، تحقیق مقدماتی آن است. $\overrightarrow{OC}$ مجموع بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و

۱ــ در قلمرو مکانیك. جلد اول: دینامیك (بند ۳ــ۱۲).

$\overrightarrow{OB}$ است، بنابراین، این قضیه به‌طورساده بیان می‌کندکه‌نیروها مانند بردارها، باهم‌جمع شده‌اند (یاترکیب شده‌اند).

این نیرویی‌که با OC نمایش داده می‌شود به برایند دو نیرویی‌که با OA و OB نمایش داده شده‌اند موسوم است . بر عکس، نیروهایی کـه با OA و OB نمایش داده شده‌اند **مؤلفه‌های** نیرویی هستندکه با OC نمایش داده شده‌است.

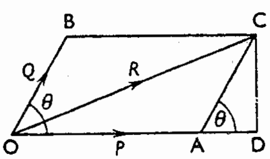
درحالت ساده، هنگامی‌که نیروها همجهت هستند، برایندآنها، به‌طور بدیهی برابـر مجموع‌آنهاست ووقتی‌که نیروها درجهتهای مختلف اثرمی‌کنند، برایندآنها بـرابر تفاوت آنهاست ودرجهت نیروی بزرگتر واردمی‌شود.

برایند فقط هنگامی صفراست‌که بزرگیهای دو نیرو برابر وجهتهای دونیرو مخالف یکدیگرباشند.

بزرگی و جهت برایند هر دو نیرویی راکه بر O وارد شونـد، می‌تـوان بـا رسم متوازی‌الاضلاع OACB ،که با مقیاس مناسبی رسم می‌شود، یا با محاسبه‌ای‌که اکنون بیان می‌شود، پیدا کرد.

۷.۱۰. فرض می‌کنیم دو نیروی P و Q که بر O وارد می‌شوند با OA و OB (شکل ۲.۱۰) نمایش داده شونـد. بـرایند آنها، R ، بـه وسیلهٔ قطـر OC ، متوازی‌الاضلاع OACB نمایش داده می‌شود.

فرض‌می‌کنیم θ زاویهٔ میان جهتهای P و Q بـاشد، یعنی $\angle AOB=\theta$. خط CD را عمودبر OA رسم می‌کنیم و اگر لازم باشد OA را امتداد می‌دهیم.



شکل ۱۰—۲

دراین‌صورت

$$OC^2 = OD^2 + DC^2$$
$$= (OA + AD)^2 + DC^2$$
$$= (OA + AC\cos\theta)^2 + (AC\sin\theta)^2$$
$$\therefore \quad R^2 = (P + Q\cos\theta)^2 + (Q\sin\theta)^2$$
$$= P^2 + Q^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2PQ\cos\theta$$

$$=P^۲+Q^۲+۲PQ\cos\theta$$

بنابراین
$$R=+\sqrt{P^۲+Q^۲+۲PQ\cos\theta}$$

برای پیداکردن جهت OC می‌توان نوشت:

$$tg\mathrm{COD}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{AC}\sin\theta}{\mathrm{OA}+\mathrm{AC}\cos\theta}=\frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}$$

اگر نیروها عمود بریکدیگر باشند، $\theta=۹۰^\circ$ است و بنابراین

$$tg\mathrm{COD}=\frac{Q}{P} \text{ و } R=\sqrt{P^۲+Q^۲}$$

اگر نیروها برابر یکدیگر باشند، مثلا هردو برابر P باشند، دراین‌صورت

$$R=\sqrt{P^۲(۱+۱+۲\cos\theta)}=P\sqrt{۲(۱+\cos\theta)}$$

$$=P\sqrt{۴\cos^۲\frac{\theta}{۲}}=۲P\cos\frac{\theta}{۲}$$

نیز
$$tg\mathrm{COA}=\frac{P\sin\theta}{P+P\cos\theta}=\frac{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}}$$

$$=tg\,\frac{\theta}{۲}$$

پس در این حالت، برایند، زاویهٔ میان دونیرو را نصف می‌کند. این را می‌توان از این واقعیت نیز نتیجه گرفت که وقتی که دو نیرو باهم برابرند، متوازی‌الاضلاع نیروها به یك لوزی تبدیل می‌شود.

۸.۱۰. مثال۱: اگـر برایند نیروهای $۳P$ و $۵P$ برابر $۷P$ باشد، زاویهٔ میان نیروها را تعیین کنید.

حل : اگرزاویهٔ میان نیروهای $۳P$ و $۵P$ برابر θ باشد وبرایند دونیرو برابر R باشد،

$$R^۲=۹P^۲+۲۵P^۲+۳۰P^۲\cos\theta$$

چون $R=۷P$ است،
$$۳۴P^۲+۳۰P^۲\cos\theta=۴۹P^۲$$

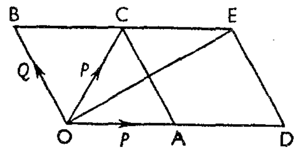
$$\therefore \quad ۳۰P^۲\cos\theta=۱۵P^۲$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{۱}{۲}$$

$$\therefore \quad \theta=۶۰^\circ$$

مثال۲: اگر زاویهٔ میان دونیروی P و Q به‌اندازه‌ای باشدکه $R=P$ باشد، نشان دهید که اگر P دوبرابرشود، براینددجدید بر Q عمود خواهد بود.

حل: فرض‌می‌کنیم OA و OB (شکل۱۰-۳) نمایش‌دهندهٔ P و Qباشند. دراین‌صورت قطر OC متوازی‌الاضلاع OACB، که نمایش‌دهندهٔ R است، برابر OA است.



شکل۱۰-۳

OA را تا D امتداد می‌دهیم به‌طوری که $AD=OA$ شود. دراین صورت OD نمایش دهندهٔ $2P$ است و برایند Q و $2P$ به‌وسیلهٔ قطر OEمتوازی‌الاضلاع ODEB نمایش داده می‌شود.

اما $$BC=OA=P$$

و $$CE=AD=P$$

$$\therefore \quad CB=CE=CO$$

بنابراین BE قطر دایره‌ای خواهد بود که مرکز آن C است و از O عبور می‌کند،

$$\therefore \quad \angle BOE= \text{زاویهٔ قائمه}$$

یاچون $CE=CO$ است، $$\angle CEO=\angle COE$$

وچون $CB=CO$ است، $$\angle CBO=\angle COB$$

$$\therefore \quad \angle CEO+\angle CBO=\angle BOE$$

$$\therefore \quad \angle BOE= \text{زاویهٔ قائمه}$$

۹.۱۰. اجسام صیقلی

هیچ جسمی بـه طـور کامل صیقلـی نیست . عملا وقتی کـه جسمی از روی جسم دیگر می‌گذرد ، همیشه در امتداد سطح مشترك آنها نیرویی وجود داردکه مایل است ازلغزش جسم روی جسم دیگرجلوگیری کند. این نیرو را **اصطکاك** می‌نامند.

وقتی که سطحهای تماس دوجسم فوق‌العاده صیقلی شده باشد، چنین نیرویی بسیار کوچك خواهد بود ودربسیاری ازمسائل، این اجسام را به‌طورکامل صیقلی فرض‌می‌کنند. درچنین حالتهایی، تنها نیروی میان اجسام عمود برسطح مشترك آنهاست. این نیرو را عکس‌العمل قائم می‌نامند.

جهت عکس‌العمل قائم که بریك جسم صیقلی، که با جسم یا سطح دیگری در تماس است، وارد می‌شود، همیشه عمود برجهتی است که جسم درآن جهت قادر به‌حرکت‌است.

وقتی که میله‌ای دریك صفحهٔ صیقلی قرار دارد، عکس‌العمل، عمود برصفحه است.

وقتی که میله‌ای به وسیلهٔ یك میخ صیقلی نگاهداری‌شده است، عکس‌العمل، عمود برمیله است.

وقتی که انتهای یك‌میله برسطح منحنی یك‌کرهٔ صیقلی یا بر یك قوس مدور صیقلی قراردارد، عکس‌العمل، عمود برکره یا دایره است وبنابراین ازمرکزآن می‌گذرد.

به این حالتهاکه غالباً پیش می‌آید باید مخصوصاً توجه شود.

۱۰.۱۰. کشش نخ

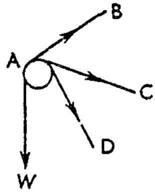
وقتی که از نخ برای آویزان کردن یك وزنه یا حرکت دادن یك وزنه استفاده می‌شود، نخ در حالت‌کشش است.

اگرنخی را درنظر بگیریم‌که وزن آن ناچیزباشد وجسمی به‌وزن W به‌طور قائم به‌آن آویزان شود، کشش نخ تقریباً درسراسرطول نخ یکسان خواهد بود ومی‌توان‌آن را برابر W دانست. اما اگرنخ، سنگین باشد، کشش نخ از یك نقطه به‌نقطهٔ دیگر تفاوت می‌کند. اگرنخ ساکن باشد، کشش در هرنقطهٔ A برابر وزن W به‌علاوهٔ وزن قسمتی از نخ خواهد بودکه درزیرA است. اگر وزن نخ قابل صرف‌نظرکردن باشد به‌آن، نخ سبك اطلاق می‌کنیم.

اگرنخی که به‌آن وزنه‌ای آویزان است از حول قرقرهٔ‌کوچك صیقلیی مانند A بگذرد (شکل ۱۰ــ۴)، نیروی لازم برای نگاهداری وزنه تغییرنمی‌کند، وچه نخ به‌وضع AB، AC یا AD باشد تفاوتی نمی‌کند. البته اگر قرقره ناصاف باشد، این مطلب درست نیست.

باید به‌یاد داشته باشیم که کشش نخ‌سبك که ازحول میخ یا قرقره‌ای‌صاف‌می‌گذرد درسراسرطول‌آن یکسان است.

غالباً فرض می‌کنیم که نخ، انعطاف‌ناپذیر است، اما چند مسئله را که در آن نخ، کشسان است و قانون هوك دربارهٔ آن صدق می‌کند نیز مورد توجه قرارخواهیم

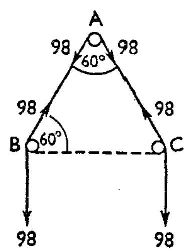


شکل ۱۰-۴

داد. درحالت اخیر، کشش نخ با افزایش طول نخ تغییرمی‌کند[1].

۱۱.۱۰. مثال: دو وزنهٔ متساوی، هر یك به‌جرم ۱۰ kg به دو انتهای نخ نازکی بسته شده‌اند و نخ ازدورسه میخ صیقلی می‌گذرد. این سه‌میخ در دیواربه‌شکل یك مثلث متساوی‌الاضلاع کوبیده شده‌اندکه یکی ازاضلاع آن افقی است. نیرویی که برهرمیخ فشار می‌آورد چقدراست؟

حل : فرض می‌کنیم A، B وC جای میخها باشند (شکل ۱۰-۵).



شکل ۱۰-۵

چون‌میخها صیقلی‌هستند، کشش درسرتاسر نخ‌یکسان وبرابر $10\,g\,N = ۹۸\,N$ است.

نیرویی که برA فشار می‌آورد براینده دوکشش است که هر یك برابر ۹۸ N

۱ــ درقلمرو مکانیك. جلد اول: دینامیك. (بند ۴ــ۱۹ را ببینید).

است و با هم زاویهٔ °۶۰ می‌سازند. اگربزرگی این برایند برابرR نیوتون باشد،

$$R^۲=۹۸^۲+۹۸^۲+۲\times ۹۸^۲ cos ۶۰^\circ=۳\times ۹۸^۲$$

$$\therefore \qquad R=۹۸\sqrt{۳}=۱۷۰$$

نیرویی کـه برB یا C فشار می‌آورد برایند دوکشش ۹۸ N است که با هم زاویهٔ °۱۵۰ می‌سازند. اگـر بزرگی این برایند برابر S نیوتون باشد،

$$S^۲=۹۸^۲+۹۸^۲+۲\times ۹۸^۲ cos ۱۵۰^\circ$$

$$=۹۸^۲(۲-\sqrt{۳})$$

$$=۹۸^۲\times ۰/۲۶۸$$

$$\therefore \qquad S=۹۸\times ۰/۵۱۸$$

$$=۵۰/۸$$

چون مؤلفه‌های نیروها در هر حالت بـرابرند، جهتهای نیروهای فشاری، نیمساز زاویه‌های میان دو قطعه نخ در طرفین هر میخ است.

۱۲.۱۰. تجزیه یك نیرو

یك نیرو را ممکن‌است به‌راههای بسیاربه‌دو مؤلفه تجزیه کرد، زیرا با یك خطمی‌توان، بسیاری متوازی‌الاضلاع ساخت که‌آن خط قطرآن متوازی‌الاضلاع باشد.

درعمل، جهتهای مؤلفه‌ها معلومند و مهمترین حالت هنگامی است کـه این جهتها بریکدیگرعمودند.

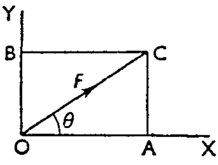
فرض می‌کنیم OC (شکل ۱۰-۶) نمایش‌دهندهٔ نیروی F باشد، وفرض می‌کنیم که می‌خواهیم آن را به‌دومؤلفه، یکی درامتداد OX ودیگری در امتداد عمـود برآن یعنی OY، تجزیه کنیم.

CA را عمود بر OX و CB را عمود بر OY رسم می‌کنیم.

دراین‌صورتOAوOB به‌ترتیب مؤلفه‌هایFدرامتدادهایOXوOYهستند.

اگرزاویهٔ COX برابر θ باشد، خواهیم داشت:

$$OA=F cos\theta \quad و \quad OB=F sin\theta$$



شکل ۱۰-۶

پس نیروی F برابر مجموع دو نیروی $F\cos\theta$ و $F\sin\theta$ است که اولی درامتداد خطی وارد می‌شود که با جهت F زاویهٔ θ می‌سازد و دیگری عمود بر جهت مؤلفهٔ نخست وارد می‌شود.

وقتی که نیرویی با این شیوه به‌دو نیروی عمود برهم تجزیه می‌شود، آن دو نیرو را گاهی اجزای تفکیکی نیروی اصلی در این دوجهت می‌نامند.

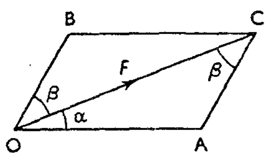
جزء تفکیکی نیروی F درجهتی که باآن زاویهٔ θ می‌سازد $F\cos\theta$ است.

اصطلاح «مؤلفهٔ افقی» نیرو که گاهی به‌کار برده می‌شود، می‌بایستی به‌معنی جزء تفکیکی نیرو درجهت افقی به‌کار گرفته شود. درنتیجه چنین درك می‌شود که مؤلفهٔ دیگر، مؤلفهٔ قائم است.

عموماً هنگامی که اصطلاح مؤلفه (نه اصطلاح جزء تفکیکی) را به‌کارمی‌بریم، منظور ما ــ جز درموردی که خلاف آن را بیان کرده باشیم ــ دو نیروی (یا دوبردار) عمود برهم است.

۱۳.۱۰. اگر بخواهیم مؤلفه‌های F با آن زاویه‌های α و β بسازند، آنها را می‌توان به‌طریق زیر تعیین کرد:

فرض می‌کنیم OC (شکل ۱۰-۷) نشان‌دهندهٔ F باشد. OA و OB را طوری رسم می‌کنیم که با OC زاویه‌های α و β بسازند، وازC خطهایی موازی با آنها رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع OACB کامل شود.



شکل ۱۰-۷

دراین صورت OA و OB، یا OA و AC نمایش‌دهندهٔ مؤلفه‌های مطلوب هستند.

ازمثلث OAC:

$$\frac{OA}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{OC}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad OA=\frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

و به‌همین ترتیب،

$$OB=\frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

تمرین ۱۰۱۰

۱ـ درحالتهای زیر P و Q معرف دونیرو و θ زاویهٔ میان آنها و R برایند آنهاست.

الف) اگر $P = 9$ ، $Q = 12$ ، $\theta = 90^\circ$ باشد، R را پیدا کنید.

ب) اگر $R = 13$ ، $Q = 5$ ، $\theta = 90^\circ$ باشد، P را پیدا کنید.

پ) اگر $P = 7$ ، $Q = 8$ ، $\theta = 60^\circ$ باشد، R را پیدا کنید.

ت) اگر $P = 10$ ، $Q = 10$ ، $\theta = 120^\circ$ باشد، R را پیدا کنید.

ث) اگر $P = 12$ ، $Q = 5$ ، $R = 11$ باشد، θ را پیدا کنید.

ج) اگر $P = 3$ ، $Q = 5$ ، $\theta = Arcsin\frac{3}{5}$ باشد، R را پیدا کنید.

۲ـ ثابت کنید که برایند دونیرو که هریك مساوی P است وبا هم زاویهٔ 120° می‌سازند برابر P است.

۳ـ زاویهٔ میان دونیرو را که هریك برابر P است درحالتهای زیر پیدا کنید:

الف) برایند آنها برابر با P است؛

ب) برایند آنها برابر با $P\sqrt{3}$ است.

۴ـ بزرگی برایند دونیروی P و Q برابراست با P ونیزبزرگی برایند دونیروی $2P$ و Q (که درهمان جهتهای قبلی اثرمی‌کند) برابر است با P. بزرگی Q را پیدا کنید و ثابت کنید که Q با P زاویهٔ 150° می‌سازد.

۵ـ مجموع بزرگی‌دونیروبرابر N ۲۴ است وبرایندآنها، که بر نیروی کوچکترعموداست، برابراست با N ۱۲. بزرگی دونیرو و زاویهٔ میان‌آنها را به‌دست آورید.

۶ـ دو وزنه که جرم هریك kg ۱۰ است به‌دوسرنخ سبکی متصل هستند. این نخ ازروی سه میخ که به‌دیوارکوبیده شده‌اند می‌گذرد. میخها طوری به‌دیوارکوبیده شده‌اندکه شکل مثلث متساوی‌الساقینی را متجسم می‌کنندکه قاعدهٔ آن افقی و زاویهٔ روبه‌رو به‌قاعدهٔ آن 120° است. تعیین کنید که برمیخها چه نیرویی فشار می‌آورد.

۷ـ دومیخ صاف به‌دیواری‌کوبیده شده‌اند. یکی ازمیخها بالاتر ودیگری پایینتر است، به طوری که خطی که جای آنها را به هم وصل می‌کند با امتداد افقی زاویهٔ 30° می‌سازد. نخی سبك ازروی‌آنها عبورکرده است وبه‌هریك ازدوسرنخ وزنه‌ای kg ۵ آویزان است. نیروهایی راکه برهرمیخ فشار وارد می‌آورد تعیین کنید.

۸ـ زاویهٔ‌میان دونیروی N ۵ و N ۱۲ چقدرباشدتا برایندآنهانیرویی برابر N ۱۵ باشد؟

۹ـ A و B دونقطهٔ ثابت ازمحیط دایرهٔ ABC هستند. P نقطه‌ای است که برقوس ACB حرکت می‌کند. نیروهایی با بزرگی ثابت درامتدادهای PA و PB وارد می‌شوند.

ثابت کنید که امتداد براینـد آنها از نقطه‌ای ثابت می گذرد.

۱۰ــ براینـد دونیروی P و $2P$ که بریك نقطه اثرمی کنند برابراست با P. زاویهٔ میان P و $2P$ را پیدا کنید.

۱۱ــ براینـد نیروهای N ۳ و N ۵ برنیروی کوچکتر عمود است. بزرگی براینـد وزاویهٔ میان نیروها را تعیین کنید.

۱۲ــ زاویهٔ میان نیروهـای N ۴ و N ۶ برابر°۶۰ است. براینـد این دونیرو را از راه رسم به‌دست آورید و درستی پاسخ به‌دست آمده را ازراه محاسبه تحقیق کنید.

۱۳ــ به‌طریقهٔ ترسیم، براینـد نیروهای N ۵ و N ۶ راکه با هـم زاویهٔ °۴۰ می‌سازند، تعیین کنید.

۱۴ــ براینـد دونیرو، برابرN ۸ است وجهتش با جهت یکی ازدونیروکه بزرگی‌آن N ۴ است، زاویهٔ °۶۰ می‌سازد. به‌طریقهٔ ترسیم، بزرگی وجهت نیروی دیگر را تعیین کنید.

۱۵ــ وقتی کـه دونیرو، کـه بزرگی آنها با هـم برابراست، با هـم زاویـهٔ 2α بسازند، برایندشان دوبرابربزرگترازهنگامی است که زاویهٔ میان‌آن دونیرو برابر 2β باشد. ثابت کنید که

$$\cos\alpha = 2\cos\beta$$

۱۶ــ نیرویی برابرN ۲۵ باافق‌زاویهٔ $\theta°$ می‌سازد. اگر مؤلفهٔ قائم‌آن برابرN ۱۵ باشد، مؤلفهٔ افقی آن ومقدار θ را تعیین کنید.

۱۷ــ نیروی N ۱۰ را به‌دومؤلفهٔ عمود برهم، طوری‌تجزیه کنید که (الف) مؤلفه‌ها با هم برابرباشند، (ب) یکی ازمؤلفه‌ها سه برابردیگری باشد.

۱۸ــ نیروی P نیوتون به‌دومؤلفه طوری تجزیه شده است که بزرگی هریك $2P$ نیوتون است. جهتهای این دومؤلفه را تعیین کنید.

۱۹ــ یکی ازمؤلفه‌های نیروی N ۱۲ برابرN ۴ است وباآن زاویهٔ°۳۰ می‌سازد. بزرگی وجهت نیروی دیگررا تعیین کنید.

۲۰ــ برای کشاندن یك ماشین چمن‌زنی، به‌جرم kg ۶۰ درامتداد افقی، شخصی نیرویی برابرN ۵۰۰ طوری‌اعمال می کندکه با امتداد زمین‌زاویهٔ °۴۵می‌سازد. پیدا کنید: (الف) نیرویی که برماشین‌چمن‌زنی درامتدادحرکت وارد می‌شود؛ (ب)عکس‌العمل قائم میان ماشین چمن‌زنی وسبزه‌ها را.

۲۱ــ جسمی به‌جرم kg ۲۵ به‌وسیلهٔ دونخ نگاهداری شده است. یکی از نخها با امتداد قائم‌زاویهٔ °۶۰ و دیگـری با امتداد قائم‌زاویهٔ °۲۰ می‌سازد. کشش را در هـرنخ تعیین کنید و درستی نتیجه‌های خود را به کمك ترسیم هندسی تحقیق کنید.

۱۴.۱۰. نقطهٔ مادی که تحت اثر نیرو است

در دینامیك، نشان دادیم که اگر نقطه‌ای مادی تحت اثر یك نیروی F قرار گیرد، در جهت نیروی F با شتاب a، که از رابطهٔ $F=ma$ به‌دست می‌آید، حرکت خواهدکرد. در این رابطه m جرم نقطهٔ مادی است. همچنین اگر نقطهٔ مادی تحت اثر دو نیروی P و Q قرار گیرد، درجهت برایند P و Q حرکت خواهد کرد. برایند فقط هنگامی صفراست که P و Q از نظربزرگی با هم برابر و از نظر جهت، مخالف یکدیگرباشند. در این حالت، نقطهٔ مادی به‌حال سکون می‌ماند (یا اگر درحال حرکت باشد، به‌حرکت خود با تندی یکنواخت ادامه می‌دهد). مثلاً اگر وزنهٔ W از یك نقطهٔ ثابت به‌وسیلهٔ نخی آویزان باشد، تحت‌اثر دو نیرو به‌حال سکون باقی می‌ماند؛ یکی از آن دونیرو، وزن W درامتداد قائم وبه‌طرف پایین است ودیگری نیروی T درامتداد قائم وبه‌طرف بالاست‌که به‌سبب وجود نخ تولید شده است و برابرکشش نخ است. دراین حالت $T=W$.

۱۵.۱۰. سه نیرو که بر یك نقطهٔ مادی وارد می‌شوند

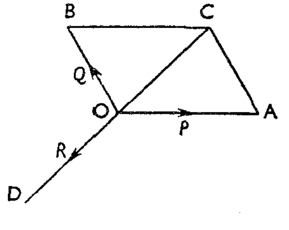
فرض می‌کنیم که P، Q، R (شکل ۱۰-۸) سه نیرو باشند که در O بر یك نقطهٔ مادی وارد می‌شوند.

اگر ازمیان آنها دونیرو، مثلاً P و Q، به‌وسیلهٔ خطهای OA و OB نمایش داده شوند، برایند آنها به‌وسیلهٔ قطر OC متوازی‌الاضلاع OACB نمایش‌داده می‌شود.

پس اگر R بتواند ازنظربزرگی‌وامتدادبه‌وسیلهٔ CO نمایش داده‌شود، دراین صورت با برایند P و Q متعادل خواهد شد وسه‌نیروی P، Q و R به‌حال تعادل درخواهند آمد.

پس اگر سه نیروی P، Q و R بتوانند از نظرجهت وبزرگی به وسیلهٔ OA، AC و CO نمایش داده شوند، درحال تعادل خواهند بود.

(باید به‌یاد داشت که AC از نظر بزرگی و جهت نمایش‌دهندهٔ Q خواهد بود ولی نه‌از نظرخط اثر).



شکل ۱۰-۸

این نتیجه به مثلث نیروها موسوم است که ممکن است به‌صورت زیربیان شود:

اگر سه نیروکه بریك نقطه اثر می‌کنند بتوانند از نظر بزرگی وجهت به‌ترتیب به‌وسیلهٔ اضلاع یك مثلث نمایش داده شوند، نیروها به حال تعادل خواهند بود.

عکس این مطلب نیز درست است.

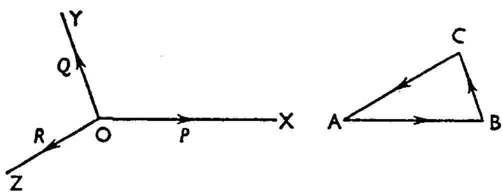
اگر سه نیروکه بریك نقطه اثر می‌کنند به‌حال تعادل باشند، آنها را می‌توان از نظر بزرگی و جهت به ترتیب به وسیلهٔ سه ضلع یك مثلث نمایش داد.

این را می‌توان به‌طور تجربی تحقیق کرد.

۱۶۰۱۰ روش ترسیمی

عکس مثلث نیروها به ما امکان می‌دهد که راه حلهای ترسیمی ساده‌ای برای‌مسائل تعادل سه نیرو به‌دست بیاوریم.

فرض می کنیم که می‌دانیم سه‌نیروی P ، Q و R، که بر نقطهٔ O درجهتهای معلوم OX، OY و OZ (شکل ۱۰-۹) وارد می‌شوند، درحال تعادلند. دراین صورت، اگر بزرگی یکی از این سه‌نیرو، مثلا P، را بدانیم، می‌توانیم بزرگی و جهت هریك از دو نیروی دیگررا از راه زیربه‌دست آوریم.



شکل ۱۰-۹

چون نیروها درحال تعادلند، می‌توانیم آنها را ازنظر بزرگی وجهت به‌ترتیب به‌وسیلهٔ اضلاع یك مثلث نمایش دهیم.

AB را به‌موازات OX رسم می‌کنیم وطول آن را طوری انتخاب می‌کنیم که در مقیاس مناسبی معرف بزرگی P باشد.

از A خط AC را به موازات OZ و از B خط BC را به موازات OY رسم می‌کنیم. چون AB نشان دهندهٔ P است، دو ضلع دیگر مثلث ABC باید معرف Q و R باشند. BC وCA درهمان مقیاسی که AB معرف P است، به‌ترتیب معرف Q و R هستند.

ترتیب حروف، درهرحالت، نشان دهندهٔ جهت نیرواست واین ترتیب، اگر به‌دورمثلث‌در یك جهت بچرخیم، به‌دست می‌آید.

۱۰.۱۷. در شکل ۱۰ـ۹ دیدیم که CA معرف نیروی R است که با برایند دو نیروی P و Q درحال تعادل است. پس AC باید ازنظرجهت وبزرگی‌معرف‌برایند P و Q باشد. بنابراین بزرگی و جهت‌برایند P و Q را می‌توانیم ازمثلث ABC وبدون استفاده از متوازی‌الاضلاع نیروها به‌دست‌آوریم.

اگر دو نیروکه برنقطه‌ای وارد می‌شوند، از نظر بزرگی و جهت به وسیلهٔ اضلاع AB وBC مثلث ABC نمایش داده شوند، AC، ضلع سوم، ازنظربزرگی وجهت معرف برایند آن دو نیرو خواهد بود.

با علامتهای برداری $\overrightarrow{AC}$ جمع برداری $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ است، یعنی

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

یا

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$$

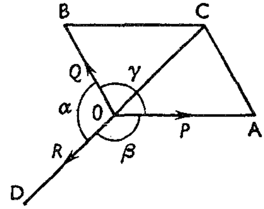
باید به خوبی درك کردکه AC معرف مکان برایند نخواهدبود؛ زیرا نقطهٔ اثر آن نقطهٔ اثر نیروهایی خواهدبودکه با AB و BC نمایش داده می‌شوند.

اگرAB و BC واقعاً خطوط اثرنیروها باشند برایند آنها در B اثرخواهدکرد اما برابر وموازی با AC خواهد بود.

۱۰.۱۸. عکس مثلث نیروها را می‌توان به‌شکل مثلثاتی نیز ارائه کرد، که غالباً به‌قضیهٔ لامی معروف است.

اگرسه نیروکه بریك نقطه اثرمی‌کنندبه‌حال تعادل باشند، هریك‌ازآن سه‌نیرو متناسب با سینوس زاویهٔ میان دو نیروی دیگر است.

فرض‌می‌کنیم P،Q،R(شکل۱۰ـ۱۰)معرف‌سه‌نیرویی باشندکه‌بر O واردمی‌شوند.
فرض می‌کنیم OA معرف P، و OBمعرف Q باشد. دراین‌صورت CO ازنظر بزرگی وجهت معرف R خواهدبود.
فرض می‌کنیم α ، β و γ به‌ترتیب‌زاویه‌های میان Q و R، R و P ، P و Qباشند.
درمثلث OAC خواهیم داشت:



شکل۱۰ـ۱۰

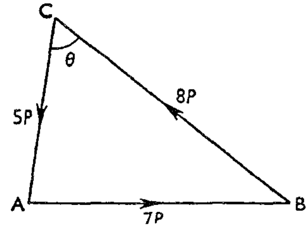
$$\angle ACO = \angle BOC = ۱۸۰^\circ - \alpha \quad \therefore \quad \sin ACO = \sin \alpha$$
$$\angle COA = ۱۸۰^\circ - \beta \quad \therefore \quad \sin COA = \sin \beta$$
$$\angle CAO = ۱۸۰^\circ - \gamma \quad \therefore \quad \sin OAC = \sin \gamma$$

نیز
$$\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin COA} = \frac{CO}{\sin OAC}$$

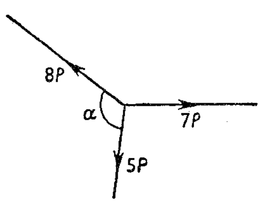
$$\therefore \quad \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$

۱۹.۱۰. مثال ۱ : نیروهایی برابر $۷P$ ، $۸P$ و $۵P$ که بر یك نقطهٔ مادی وارد میشوند بهحال تعادلند. به طریقهٔ ترسیم و محاسبه،زاویهٔ بین نیروهای $۸P$ و $۵P$ را پیدا کنید.

حل: چون نیروها درحال تعادلند،آنها را میتوان بهترتیب بهوسیلهٔاضلاع یك مثلث نشان داد. مطابق شکل۱۰ـ۱۱ الف ، مثلث ABC را طوری رسم میکنیم که AB برابر ۷ واحد و BC برابر ۸ واحد و CA برابر ۵ واحد باشد . بنابراین نیروها باید به موازات اضلاع این مثلث واردشوند.



شکل۱۰ـ۱۱ الف



شکل۱۰ـ۱۱ ب

برطبق نتیجهٔ اندازهگیری: $\angle ACB = ۶۰^\circ$ است. بر طبق محاسبه، اگر

$\angle ACB=\theta$ باشد، داریم:

$$۷^۲=۸^۲+۵^۲-۲\times۸\times۵\cos\theta$$

$$\therefore \quad ۴۹=۶۴+۲۵-۸۰\cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{۴۰}{۸۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$\therefore \quad \theta=۶۰^\circ$$

جهت نیروها باید مطابق شکل ۱۰-۱۱ ب باشد، که در آن بردارهایی که معرف نیروها هستند به موازات اضلاع مربوطه ازمثلث ABC رسم شده‌اند.

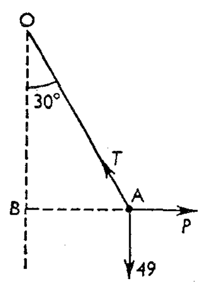
زاویهٔ میان نیروهای P ۸ و P ۵ برابر $۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ-\theta$ است.

مثال۲: وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg به‌وسیلهٔ نخ انعطاف‌ناپذیرسبکی از نقطه‌ای مانند O آویزان است. آن را درامتداد افقی بانیرویی برابر P نیوتون می‌کشیم. به‌طوری که باخط قائم زاویهٔ ۳۰° بسازد. P را پیدا کنید.

حل : درشکل ۱۰-۱۲، A وضع تعادل وزنه است.

وزنه تحت اثرسه نیرواست: (۱) نیروی وزن که برابر N ۴۹ است؛ (۲) نیروی افقی P N، (۳) نیروی T N که برابر کشش نخ است.

اگر AB را به طور افقی رسم کنیم، اضلاع مثلث OAB به موازات سه نیرو هستند و بنابراین در یك مقیاس معین معرف این نیروها هستند.



شکل ۱۰-۱۲

$$\therefore \quad \frac{T}{AO}=\frac{P}{BA}=\frac{۴۹}{OB}$$

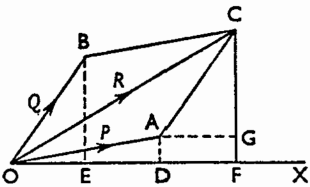
$$\therefore \quad P=۴۹\frac{BA}{OB}=۴۹\ tg\ ۳۰^\circ=\frac{۴۹}{\sqrt{۳}}=۲۸/۳$$

۲۰-۱۰. برای حل بسیاری از مسائل‌مربوط به تعادل نقطهٔ مادی‌که تحت اثر سه نیرو قرارگرفته است، روشی به‌کارمی‌رود که‌به قضیهٔ زیر بستگی دارد.

اگر دو نیرو بر یك نقطهٔ‌مادی وارد شوند، مجموع مؤلفه‌های آنها درهرجهت دلخواه برابر مؤلفهٔ برایند آن دو نیرو در آن جهت است.

فرض‌کنید OA وOB وOC معرف دونیروی P، Q معرف برایندآنها یعنی R باشد. بنابراین OACB یك متوازی الاضلاع است(شکل۱۰-۱۳).

فرض می‌کنیم جهت دلخواه مفروض جهت OX باشد.



شکل۱۰—۱۳

AD، BE وCF را عمود بر OX و AG را عمود بر CF رسم می‌کنیم.

اضلاع OB و AC ازمثلثهای OBE و ACG باهم برابرند واضلاع این دو مثلث متوازی هستند، بنابراین ازهرجهت این‌دو مثلث باهم برابرند.

$$OE = AG = DF$$

$$OF = OD + DF = OD + OE$$

اما OD ، OE و OF معرف‌مؤلفه‌های P، Q، R در جهت OX هستندوبنابراین قضیه به اثبات رسید.

بدیهی است‌که این قضیه را برای هرچند نیرو می‌توان تعمیم‌داد.

درنتیجه،اگر سه نیرو یا بیشتر بریك نقطهٔ مادی واردشوند ودرحال تعادل باشند، مجموع جبری مؤلفه‌های نیروها در هر جهت باید صفرباشد.

برعکس‌می‌توان نشان دادکه اگرمجموعهای جبری مؤلفه‌های‌نیروها در هر دوجهت صفر باشند، دراین‌صورت‌نیروها باید درحال تعادل باشند (۱۰-۲۶ رانگاه‌کنید).

مثال۱: نقطه‌ای مادی‌به‌جرم ۵۰ kg به وسیلهٔ دونخ به‌طولهای ۳متر و۴متر ازدونقطهٔ همترازآویزان است. فاصلهٔ این دونقطه ازیکدیگر برابر۵متر است. کششهای نخها

را پیدا کنید.

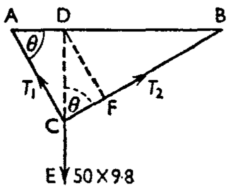
: فرض می‌کنیم $T_۱$ و $T_۲$ کششهای نخها AC و BC (شکل ۱۰-۱۴) معرف دونخ و برحسب نیوتون باشند.

AC = ۳ m، BC = ۴ m، AB = ۵ m و زاویهٔ ACB قائمه است.

فرض می‌کنیم CD عمود بر AB باشد. چون AB افقی است، DC قائم است، و وزن نقطهٔ مادی که بر C اعمال می‌شود در امتداد DC است.

فرض می‌کنیم $\angle DCB = \theta$ باشد، در این صورت $\angle BAC = \theta$ و

$$\cos\theta = \frac{۳}{۵} \text{ و } \sin\theta = \frac{۴}{۵}$$



شکل ۱۰—۱۴

روش (الف): اگر در امتداد افقی، نیروها را تجزیه کنیم، مؤلفه‌ای که به طرف چپ وارد می‌شود، باید با مؤلفه‌ای که به‌طرف راست وارد می‌شود، برابر باشد،

$$T_۱\cos\theta = T_۲\sin\theta \qquad (۱)$$

اگر در امتداد قائم، نیروها را تجزیه کنیم، مؤلفه‌ای که به طرف بالا وارد می‌شود، باید با مؤلفه‌ای که به‌طرف پایین وارد می‌شود، برابرباشد. پس

$$T_۱\sin\theta + T_۲\cos\theta = ۵۰ \times ۹/۸ = ۴۹۰ \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) $\quad \frac{۳}{۵}T_۱ = \frac{۴}{۵}T_۲ \quad$ یا $\quad T_۲ = \frac{۳}{۴}T_۱$

و برطبق رابطهٔ (۲) $\quad \frac{۴}{۵}T_۱ + \frac{۳}{۵}\cdot\frac{۳}{۴}T_۱ = ۴۹۰$

$$\frac{۲۵}{۲۰}T_۱ = ۴۹۰$$

$$\therefore \qquad T_1 = ۳۹۲$$

$$\therefore \qquad T_2 = ۲۹۴$$

در غیراین صورت، با تجزیه درامتداد AC و CB بیدرنگ خواهیم داشت:

$$T_1 = ۴۹۰ \sin\theta = ۳۹۲$$

و

$$T_2 = ۴۹۰ \cos\theta = ۲۹۴$$

روش (ب): DC را تا E امتداد می‌دهیم، سپس برطبق قضیهٔ لامی

$$\frac{T_1}{\sin \mathrm{BCE}} = \frac{T_2}{\sin \mathrm{ACE}} = \frac{۵۰ \times ۹/۸}{\sin \mathrm{ACB}}$$

اما $\sin \mathrm{BCE} = \sin\theta$، $\sin \mathrm{ACE} = \sin(۹۰ - \theta) = \cos\theta$ و $\angle \mathrm{ACB} = ۹۰°$.

پس

$$\frac{T_1}{\frac{۴}{۵}} = \frac{T_2}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴۹۰}{۱}$$

$$\therefore \qquad T_1 = ۳۹۲ \text{ و } T_2 = ۲۹۴$$

روش (پ): اگرشکل را بر طبق مقیاس رسم کنیم، و DF را به موازات AC بکشیم، اضلاع مثلث DCF به‌ترتیب با وزن ۴۹۰، کشش T_2 وکشش T_1 متوازیند.

پس CF و FD معرف T_2 و T_1 و در همان مقیاسندکه DC معرف ۴۹۰ N است. اما $\frac{۳}{۵} = \cos\theta = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}$ است. پس $T_2 = ۲۹۴$.

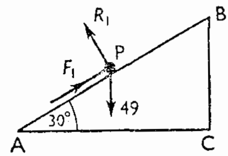
مثال ۲: نقطه‌ای مادی به‌جرم ۵ kg برروی سطح صیقلی‌شیبداری که باافق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد قرار دارد. بزرگی نیرویی را که باید وارد شود تا تعادل برقرار شود درحالتهای زیرتعیین کنید:

(الف) نیرویی‌که به‌موازات سطح شیبدار وارد می‌شود؛

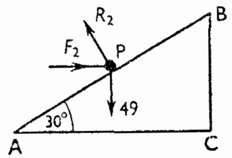
(ب) نیرویی‌که به‌طور افقی برنقطهٔ مادی وارد می‌شود.

حل: فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۰-۱۵) نشان‌دهندهٔ سطح شیبدار، AC سطح افقی و P نقطهٔ مادی مفروض باشد.

چون‌سطح صیقلی است، هیچ نیرویی به‌موازات سطح ازلغزش نقطهٔ‌مادی به‌طرف پایین جلوگیری نمی‌کند. تنها نیرویی که وجود دارد عکس‌العمل قائم است کـه درحالت (الف) برابراست با R_1 نیوتون و در حالت (ب) برابر است با R_2 نیوتون.



شکل ۱۰-۱۵ الف



شکل ۱۰-۱۵ ب

(الف) بدیهی‌است نیروی $F_۱$ که لازم است به‌موازات سطح وارد شود تا از لغزش نقطهٔ مادی به طرف پایین سطح جلوگیری کند (شکل ۱۰-۱۵ الف)، برابراست با $۴۹\,sin\,۳۰^\circ = ۲۴/۵$ N، که به‌طرف بالای سطح وارد می‌شود. مؤلفهٔ وزن که عمود برAB وارد می‌شود با عکس‌العمل $R_۱$ سطح متعادل خواهد شد.

(ب) اگرنیروی $F_۲$ مطابق شکل (۱۰-۱۵ب) به‌طور افقی وارد شود، مؤلفهٔ $F_۲ sin ۳۰^\circ$ عمود برAB است و نقطهٔ مادی را برسطح می‌فشارد.بنابراین مؤلفهٔ $F_۲ cos ۳۰^\circ$ که به‌موازات سطح است، باید برای متعادل شدن با مؤلفهٔ N ۲۴/۵ وزن که‌درامتداد سطح به‌طرف پایین وارد می‌شودکافی باشد.

$$\therefore \qquad F_۲ cos ۳۰^\circ = ۲۴/۵$$

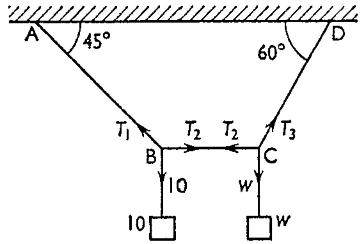
$$\therefore \qquad F_۲ = \frac{۴۹}{\sqrt{۳}} = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۳}\ \text{N}$$

باید توجه داشت که

$$R_۲ = F_۲ sin ۳۰^\circ + ۴۹\, cos ۳۰^\circ = ۹۸\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال ۳: نخ ABCD از دونقطهٔ همتراز A و Dآویزان است. وزنه‌ای به‌وزن ۱۰ N به‌نقطهٔ B ازنخ ABCD گره زده شده‌است وازآن‌آویزان است. وزنه‌ای‌به‌وزن W نیوتون به نقطهٔ C ازنخ ABCD گره زده شده است وازآن آویزان است. اگرAB و CD با امتداد افقی، به‌ترتیب زاویه‌های ۴۵° و۶۰° بسازند، واگر BC افقی باشد،کشش نخ BC ووزن W را تعیین کنید.

حل: فرض می‌کنیم کششهای نخهای AB، BC و CD به ترتیب $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ نیوتون باشند (شکل۱۰-۱۶).



شکل ۱۰-۱۶

سه نیرویی را که در B اثر می‌کنند مورد توجه قرار می‌دهیم، و آنهارا درامتدادهای افقی وقائم تجزیه‌می‌کنیم. خواهیم‌داشت:

$$T_۱ \cos ۴۵^\circ = T_۲$$

و $$T_۱ \sin ۴۵^\circ = ۱۰$$

پس $$T_۲ = ۱۰ \quad و \quad T_۱ = ۱۰\sqrt{۲}$$

به‌همین طریق با توجه به‌سه نیرویی که برC وارد می‌شود وتجزیهٔ آنها در امتدادهای افقی وقائم خواهیم داشت:

$$T_۳ \cos ۶۰^\circ = T_۲$$

و $$T_۳ \sin ۶۰^\circ = W$$

پس $$T_۳ = ۲T_۲ = ۲۰$$

و $$W = ۱۰\sqrt{۳}$$

در عین حال، می‌توانیم مثلث نیروها را برای نیروهایی که بر B وارد می‌شوند، با رسم BM عمود برAD، بسازیم. به‌سادگی نتیجه می‌شود که $T_۱ = ۱۰\sqrt{۲}$ و $T_۲ = ۱۰$. به‌همین طریق اگرCN را عمود برAD رسم کنیم، مثلث CND به‌عنوان مثلث نیروهایی که برC وارد می‌شوند به‌کارخواهد رفت.

تمرین ۲.۱۰

۱ـ وزنه‌ای به‌جرم ۲۰ کیلوگرم به‌وسیلهٔ دونخ سبک، به‌طولهای ۶ متر و ۸ متر از دو نقطهٔ همتراز که به‌فاصلهٔ ۱۰ متر ازیکدیگرواقعند، آویزان شده است. کششهای نخها را تعیین کنید.

۲ـ وزنه‌ای به‌جرم ۹۰ کیلوگرم به‌وسیلهٔ دونخ سبک، به‌طولهای ۹متر و ۱۲متر ازدو نقطهٔ همتراز که به‌فاصلهٔ ۱۵متر ازیکدیگرواقعند، آویزان شده است. کششهای نخها

را تعیین کنید.

۳ـ وزنه‌ای به‌جرم ۲۶ کیلوگرم، به‌وسیلهٔ دو نخ سبك، به‌طولهای ۵ متر و ۱۲ متر ازدو نقطهٔ همترازکه به‌فاصلهٔ ۱۳ متر از یکدیگرواقعند، آویزان شده است. کششهای نخها را تعیین کنید.

۴ـ قرقرهٔ صیقلی بدون وزنی، وزنه‌ای به‌جرم ۱۵ kg حمل می کند، و می‌تواندآزادانه درشیارصیقلی قائمی بالا یا پایین برود. آن را به‌وسیلهٔ نخی که از حول قرقره گذشته است طوری دربالانگاه می‌دارندکه دوجزء نخ باافق، زاویه‌های °۳۰ و °۶۰ بسازند. نشان دهیدکه کشش نخ کمی کمتراز ۱۰۸ N است.

۵ـ دونخ به‌طولهای ۱/۵ مترو۱/۸ متربه‌نقطه‌ای مادی به‌جرم ۱۰ kg بسته شده‌اند. دوانتهای دیگرنخها به‌دونقطهٔ همترازکه به‌فاصلهٔ ۲/۴ مترازیکدیگرند بسته‌شده‌اند. کشش هریك ازنخها را تعیین کنید.

۶ـ وزنه‌ای‌به‌جرم ۵ kg به‌وسیلهٔ‌دونخ‌به‌طولهای ۷ cm و ۲۴ cm ازدونقطه که‌دریك خط افقی واقعندآویزان است. فاصلهٔ این‌دونقطه ازیکدیگر ۲۵ cm است. کششهای نخها را تعیین کنید.

۷ ـ نقطه‌ای مادی‌به‌جرم ۱۰ kg برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ°۶۰ می‌سازد، قرار دارد. بزرگی نیرویی راکه بایدبرنقطهٔ مادی وارد شود تانقطهٔ مادی به‌حال‌سکون بماند، درحالتهای زیرتعیین کنید:(الف) نیروبه‌موازات سطح‌شیبدار وارد می‌شود؛ (ب) نیروبه‌طورافقی وارد می‌شود.

۸ ـ جسم کوچکی‌به‌جرم ۱۰ kg ازدونقطهٔ A و B که به‌فاصلهٔ ۱۲ m ازیکدیگر ودریك خط افقی واقعند به‌وسیلهٔ نخهایی به‌طولهای ۷ m و ۱۰ m آویزان‌است. این‌دونخ به‌یك نقطه ازجسم بسته شده‌اند. کشش هریك ازنخها را تعیین کنید.

۹ ـ نقطه‌ای مادی به‌جرم ۶ kg برسطح صیقلی شیبداری که‌با افق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد قراردارد، وبه‌نخ سبکی‌بسته شده است. این نخ از دورقرقره‌ای صیقلی که در بالای سطح شیبداراست می گذرد وبه‌وزنه‌ای به‌جرم M کیلوگرم کـه به‌طور قائم آویزان است، بسته شده است. مقدار M را طوری‌پیداکنیدکه وزنه‌ها به‌حال تعادل‌باشند و نیزتعیین کنید وقتی که این شرط برقراراست، چه نیرویی برقرقره فشارمی‌آورد.

۱۰ـ وزنهٔ C به‌جرم ۱۰ kg، با دو تکه ریسمان AC و BC، که طول‌آنها به‌ترتیب ۲ متر و ۳ متراست، به‌دونقطهٔ A و B، که به‌فاصلهٔ ۴ متر ازیکدیگرودریك خط افقی واقعند، متصل شده است. کششهای ریسمانها را تعیین کنید.

۱۱ـ سه نیروی P، Q و R دریـك نقطه متقاربند. بـرایند Q و R، برایند R و P، و

برایند P و Q ازنظربزرگی وجهت معلومند. نشان‌دهید که چگونه‌هریك‌ازنیروهای P، Q و R را تعیین می‌کنید.

۱۲ـ نقطه‌ای مادی برسطحی شیبدار قراردارد. برای نگاهداری نقطهٔ مادی چه‌نیرویی، (۱) در امتداد افقی، (۲) درامتداد سطح شیبدار و به‌طرف بالا، در هر یك از حالتهای زیر لازم است؟

(الف) جرم نقطهٔ مادی ۱۰ kg، طول سطح شیبدار ۱۰متر و ارتفاع آن ۶ متر است.

(ب) جرم نقطهٔ مادی ۴۵ kg، طول سطح شیبدار ۲۵ متر و ارتفاع‌آن ۲۰ متراست.

(پ) جرم نقطهٔ مادی ۵ تن، زاویهٔ سطح شیبدار با افق °۳۰ است.

۱۳ـ جسمی‌به‌جرم ۱۰ kg برسطح صیقلی شیبداری که با افق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد قرار دارد. حداقل مقدار نیروی لازم برای آنکه جسم به‌حال تعادل بماند وبرایند عکس‌العمل سطح را پیدا کنید.

۱۴ـ نقطه‌ای مادی‌به‌جرم ۵ kg به‌وسیلهٔ دونخ آویزان است. اگرجهت یکی‌ازنخها با افق زاویهٔ °۶۰ بسازد، تعیین کنید جهت دیگری باافق چه‌زاویه‌ای بسازدبه‌طوری که کشش به‌کمترین حد ممکن برسد؟ مقادیرکشش نخها را دراین حالتها تعیین کنید.

۱۵ـ سیم بی‌وزنی میان دونقطهٔ همتراز A و B که به‌فاصلهٔ ۱/۲ m از یکدیگرواقعند، کشیده شده است. وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg ازنقطهٔ وسط سیم آویزان شده است و سبب شده‌که سیم ۵ cm پایینتر از AB بیفتد. کشش سیم را پیدا کنید.

۱۶ـ به‌وزنهٔ سبك P که درحال تعادل است، سه‌نخ متصل شده است. دوتا ازنخها از روی‌دوقرقره می‌گذرند وسپس‌به‌طورقائم‌آویزانند ووزنه‌هایی را حمل می‌کنند. نخ سوم به‌وزنه‌ای به‌جرم M کیلوگرم متصل است. زاویه‌های انحراف نخهای بالایی با خط قائمی که از P به‌طرف بالا رسم می‌شود، به‌ترتیب °۳۰ و°۴۵ است. اکنون وزنهٔ دیگری‌به‌جرم ۱۰ kg به‌وزنهٔ M اضافه می‌کنیم. تعیین کنید به‌دونخ دیگرچه وزنه‌هایی باید اضافه‌کرد تا P، بازهم به‌حال تعادل درهمان وضع باقی بماند.

۱۷ـ دونخ به‌طولهای ۴۰ cm و ۳۰ cm به‌وزنه‌ای به‌جرم ۶ kg متصل شده‌اند ودو انتهای دیگرنخها به‌دومیخ، که به‌فاصلهٔ ۵۰ cm ازیکدیگر در یك خط افقی قرار دارند، محکم شده است. ازراه ترسیم یا راه دیگر، کشش نخ بلندتررا پیدا کنید.

اکنون‌به‌جای میخها، قرقره‌هایی صیقلی‌می‌گذاریم و نخها را از روی آنها می‌گذرانیم وبه‌انتهای آزاد نخها به‌ترتیب وزنه‌های ۴/۵ kg و ۶ kg می‌بندیم.

ازراه ترسیم یا راه دیگر، زاویه‌هایی راکه اجزای غیرقائم نخ باخط قائم‌می‌سازند، در وضع جدید تعادل پیدا کنید.

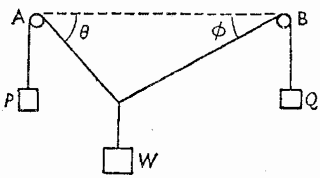
۱۸- وزنه‌ای به‌جرم ۱۰ kg به‌وسیلهٔ نخ انعطاف‌ناپذیرسبکی از نقطـهٔ ثابت Oآویزان است. این وزنه به‌وسیلهٔ‌نیرویی برابر P نیوتون که همیشه عمود برنخ واردمی‌شود به‌یك طـرف‌کشانده می‌شود. اگـردروضع تعادل، نخ باخـط قائم، زاویه‌ای برابر (الف) °۴۵، (ب) °۳۰ بسازد مقدارP را تعیین کنید.

۱۹- نخی که می‌تواند حداکثر کششی‌برابرN ۱۰۰ را تحمل کند، از نقطه‌ای ثابت‌آویزان است ودرB وزنه‌ای به‌جرم ۶ kg به‌آن‌بسته شده است. اکنون‌کشش افقی P برB وارد می‌شود وآن‌را به‌یك‌سو می‌کشاند. دروضع تعادل، اگرP برابرN ۲۵ باشد، کشش نخ وزاویهٔ امتداد آن را باخط قائم تعیین کنید.

درحالتی که نخ در حال پاره شدن است، بزرگی کشش افقی P وشیب نخ را پیدا کنید.

۲۰- شکل ۱۰-۱۷ نشان مـی‌دهـد کـه وزنـهٔ W به دو نـخ متصل است. نخهـا از روی دومیخ صیقلی همتراز می گذرندوبه‌انتهای آزادآنها وزنه‌های P و Q متصل شده‌اند. ثابت کنیدکه‌دروضع تعادل

$$\sin\theta=\frac{(W^{2}+P^{2}-Q^{2})}{2WP}$$



شکل ۱۰-۱۷

۲۱- نخ ABCD درنقطه‌های A و D به‌صفحه‌ای افقی بسته شده است. درB وزنه‌ای به‌جرم ۱۰ kg و درC وزنه‌ای به‌جرم M کیلو گرم متصل شده است. نخ AB بـا خط قائم زاویهٔ °۴۵ می‌سازد، DC با خط قائم زاویهٔ °۳۰ وBC کـه شیب آن به‌طرف بالاست با افق زاویهٔ °۴۵ می‌سازد. کششهای AB، BC وCD و مقـدار M را تعیین کنید.

۲۲- ABCD نخ سبکی است که به‌دونقطهٔ ثابت A و D متصل شده است، ودر B وC دو وزنهٔ متساوی به‌آن آویزان شده است. در حال تعادل اجزای AB و CD نخ

باخط قائم به‌ترتیب زاویه‌های $30°$و$60°$ می‌سازند. ثابت کنید که کشش قسمت BC برابر وزن یکی ازوزنه‌هاست. نیز ثابت کنید که BC باخط قائم زاویهٔ $60°$ می‌سازد.

۲۳- A و D نقطه‌هایی هستند که دریك خط افقی وبه‌فاصلهٔ ۴۸ cm از یکدیگرواقعند. دوسرریسمان سبکی که‌طول‌آن ۶۶ cm است به A و D بسته شده‌اند. B نقطه‌ای است ازنخ که‌به‌فاصلهٔ ۲۵ cm از A واقع است و C نقطه‌ای است ازنخ که‌به‌فاصلهٔ ۲۹ cm از D واقع است. به B وزنه‌ای به‌جرم ۱۴ g می‌آویزیم. اندازهٔ جرم Q راکه باید به C بیاویزیم، تا قسمت BC نخ افقی شود، تعیین کنید.

۲۴- وزنه‌های ۲، ۴ و۳ کیلوگرم به‌نقطه‌های B، C و D از نخی که دوسرآن A و E به‌دو نقطهٔ ثابت متصل شده است، آویزانند. اگرهریك ازاجزای BC و CD نخ‌با امتداد افقی‌زاویهٔ $25°$ بسازند، ثابت کنید که AB و DE با امتداد افقی زاویه‌هایی تقریباً برابر $43°$ و $49° 23'$ می‌سازند.

۲۲.۱۰. نقطه‌ای مادی که تحت اثر بیش از سه نیرو است

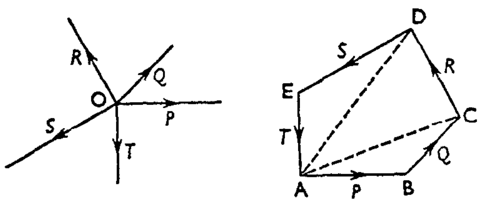
اگر بر یك نقطهٔ مادی چند نیرو وارد شود، می‌توان نشان داد که نیروها در حالت کلی برابر یك نیروی‌منفرد هستند که همان برایند نیروهاست. اگر برایند نیروها صفر باشد، نقطهٔ مادی به حال تعادل خواهد بود.

اکنون دومسئلهٔ مهم مطرح می‌شود: نخست‌این‌که برایند چند نیرورا چگونه پیدا می‌کنند. دوم این‌که وقتی‌که نیروها درحال تعادلند، رابطهٔ میان آنها چیست؟

۲۳.۱۰. چند ضلعی نیروها

اگر چند نیرو که بر یك نقطهٔ مادی اثرمی‌کنند، بتوانند از نظر جهت و بزرگی به ترتیب با اضلاع یك چندضلعی نمایش داده شوند، نیروها در حال تعادل خواهند بود.

فرض می‌کنیم‌اضلاع AB، BC، CD، DE و EA ازچندضلعی ABCDE (شکل ۱۰-۱۸) بیان‌کنندهٔ نیروهایی باشند که بریك نقطهٔ مادی درنقطهٔ O وارد شده‌اند.



شکل ۱۰-۱۸

برایند نیروهایی که با AB و BC نمایش داده شده‌اند، از نظر بزرگی وجهت برابر AC است.

برایند نیروهایی‌که با AC وCD نمایش داده شده‌اند، ازنظربزرگی و جهت برابر AD است. وبه‌همین طریق برایند نیروهایی‌که با AD و DE نمایش داده شده‌اند، ازنظر بزرگی وجهت برابرAE است. پس برایند P، Q، R و S برابر ودرخلاف جهت Tاست وچون همهٔ نیروها بریك‌نقطه وارد شده‌اند، این‌برایند وT با یکدیگرتعادل دارند ودستگاه نیروها درحال تعادل است.

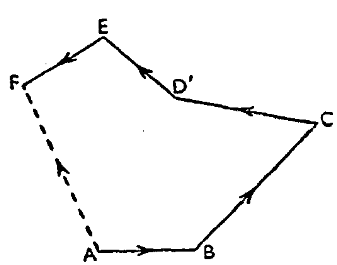
بدیهی است که این روش اثبات را می‌توان دربارهٔ هرچند نیرو به‌کاربرد. نیز روشن است که لزومی نداردکه نیروها دریك صفحه باشند.

۲۴.۱۰. برایند چند نیرو

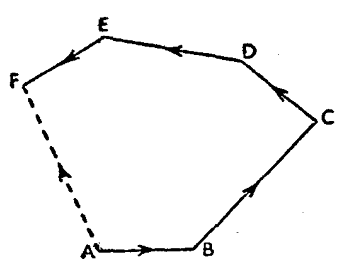
اگر مانند بند قبل، چند نیرو در O بر یك نقطهٔ مادی وارد شوند، وچندضلعی‌ای‌بسازیم که اضلاع آن متناسب ومتوازی باآن نیروها باشد(همیشه ضلع بعدی‌را ازنقطه‌ای شروع می‌کنیم‌که ضلع قبلی درآن نقطه ختم شده‌است)، دراین صورت‌اگرچند ضلعی، بسته شود، می‌دانیم که‌دستگاه به‌حال تعادل است، امااگرچندضلعی بسته‌نشود، برایند نیروها به‌وسیلهٔ خط راستی کـه بـرای بستن شکل لازم است نمایش داده می‌شود. جهت برایند، مخالف جهتی است که برای بستن شکل لازم است، یعنی در جهتی است‌که از رأس اول به رأس آخر رسم می‌شود.

پس‌اگرمطابق‌شکل ۱۰-۱۹ الف، شکل‌ABCDEF را به‌دست‌آوریم، برایند پنج نیرو، نیرویی است‌که برO اثـر می‌کند وازنظـربزرگی و جهـت بـا AF نمـایش داده می‌شود.

بـا علائم برداری مـی‌توان نوشت: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$



شکل ۱۰-۱۹ ب



شکل ۱۰-۱۹ الف

بردارهایی که معرف نیروهاهستند، می‌توانند با هرترتیب دلخواه رسم شوند، یعنی برایند، مستقل از ترتیب اضافه کردن نیروهاست. در شکل ۱۰-۱۹ ب چندضلعی نیرو باچندضلعی نیرودرشکل ۱۰-۱۹ الف تفاوت‌دارد، واین تفاوت به‌سبب اختلاف ترتیب نیروهای سوم وچهارم است که جای آنها عوض شده است، اما AF درهرحالت تفاوتی نکرده‌است.

این روش که برای به‌دست آوردن برایند چند نیرو، به‌طریقهٔ ترسیم، به‌کارمی‌رود، خیلی ساده‌تر ازروشی است که با متوازی‌الاضلاع نیروها وبا توجه به‌زوج نیروها به‌دست می‌آید.

به‌طوری که خواهیم دید، وقتی که نیروهایی بر یك جسم صلب وارد می‌شوند، غالباً این روش به‌کار می‌رود.

امامحاسبهٔ برایندچند نیرو، اگر نیروهارا در دو جهت عمود برهم، به‌طریقی که در بندبعد خواهیم‌دید، تجزیه کنیم، درست‌تر وسریعترخواهد بود.

۱۰.۲۵. تعیین برایند چند نیرو که در یك صفحه بر یك نقطهٔ مادی وارد می‌شوند.

فرض می‌کنیم در O بر یك نقطهٔ مادی نیروهای P، Q، R و غیره وارد شده‌اند (شکل ۱۰-۲۰). ازO دومحور متعامدOXوOY را به‌هرترتیب که بخواهیم رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم همهٔ نیروها در صفحهٔXOY وارد می‌شوند.

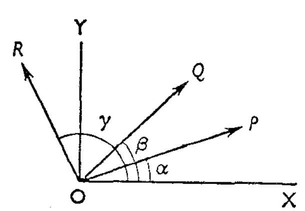
فرض می‌کنیم نیروهای P، Q، R و ... با OX زاویه‌های α، β، γ و ... بسازند. مؤلفه‌های P در جهتهای OX و OY به ترتیب عبارتند از $P\cos\alpha$ و $P\sin\alpha$؛ مؤلفه‌های Q نیز عبارتند از$Q\cos\beta$ و $Q\sin\beta$ وهمین‌طور تا آخر.

پس نیروها معادل نیرویی هستندکه مؤلفهٔ آن درامتداد OX برابراست با

$$P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma+\cdots$$

ومؤلفهٔ آن درامتداد OY برابراست با

$$P\sin\alpha+Q\sin\beta+R\sin\gamma+\cdots$$



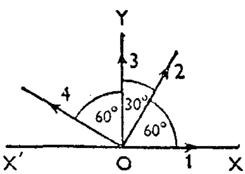
شکل ۱۰-۲۰

فرض می‌کنیم این مؤلفه‌ها به ترتیب X و Y باشند. برایند نیروها را F و زاویهٔ میان این برایند و OX را برابر θ می‌گیریم.

پس
$$F\cos\theta = X$$
و
$$F\sin\theta = Y$$
$$\therefore \quad F^۲ = X^۲ + Y^۲$$
و
$$tg\theta = \frac{Y}{X}$$

مثال ۱: نقطه‌ای مادی تحت اثر نیروهایی برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ نیوتون قرار دارد. زاویهٔ میان ایـن نیروها به‌ترتیب °۶۰، °۳۰ و °۶۰ است. بزرگی وجهت برایند را تعیین کنید.

حل: بهترآن‌است که محور x ها رامنطبق‌برخط اثریکی از نیروها بکنیم.
فرض‌می‌کنیم O (شکل۱۰-۲۱ **الف**) وضع نقطهٔ مادی و OX خط اثر نیروی N ۱ باشد. در این‌صورت نیروی N ۳ درامتداد OY وارد می‌شود.



شکل ۱۰-۲۱ الف

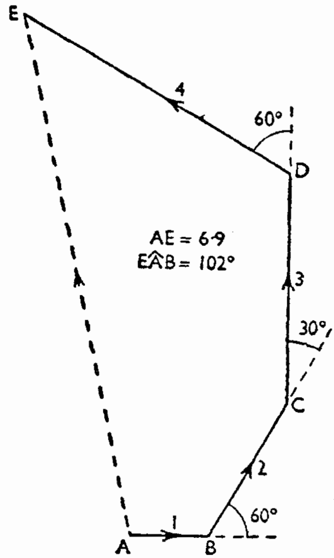
مؤلفهٔ برایند درامتداد OX برابراست با
$$۱ + ۲\cos۶۰ - ۴\cos۳۰ = ۱ + ۱ - ۲\sqrt{۳}$$
$$= ۲ - ۳/۴۶۴ = -۱/۴۶۴$$
یعنی معادل نیرویی برابر N ۱/۴۶۴ درامتداد OX است.
مؤلفهٔ برایند درامتداد OY برابراست با
$$۲\cos۳۰ + ۳ + ۴\cos۶۰ = \sqrt{۳} + ۳ + ۲$$
$$= \sqrt{۳} + ۵ = ۶/۷۳۲$$
برایند برابراست با
$$\sqrt{[(۱/۴۶۴)^۲ + (۶/۷۳۲)^۲]} = ۶/۹ \text{ N}$$

اگر θ زاویهٔ میان این برایند و OX باشد،

$$tg\theta = -\frac{۶/۷۳۲}{۱/۴۶۴} = -۴/۵۹۷$$

$$\therefore \qquad \theta = ۱۰۲^\circ \quad ۱۶' \quad \text{تقریباً}$$

این مسئله را می‌توان ازراه ترسیم مطابق شرح زیر نیز حل کرد. مطابق شکل ۱۰–۲۱ ب AB، BC، CD و DE را به‌ترتیب به‌موازات نیروهای داده شده وبه‌بزرگیهای ۱، ۲، ۳ و ۴ رسم می‌کنیم.



شکل ۱۰–۲۱ب

دراین صورت $\overrightarrow{AE}$ ازنظر بزرگی وجهت معرف برایند نیروهاست.

با اندازه‌گیری، $AE = ۶/۹$ و $\angle EAB = ۱۰۲^\circ$ به‌دست می‌آید. اگر با استفاده ازشکل ۱۰–۲۱ ب این کمیتها حساب شوند، یکسان بودن نتیجهٔ دو روش روشن می‌شود.

ترسیم اضلاع چندضلعی نیروی ABCDE با تغییردادن ترتیب نیروهابرای خواننده آموزنده خواهد بود.

مثال ۲: سه نیرو به‌بزرگیهای P ۱۵، P ۱۰ و P ۵ بریك نقطهٔ مادی طوری اثرمی‌کنند که دو به دو با یکدیگر زاویهٔ ۱۲۰° می‌سازند. برایند آنها را پیدا کنید.

حل:

روش (الف): مجموع مؤلفه‌های نیروها به‌موازات نیروی $15P$ برابراست با

$$15P - 10P\cos 60^\circ - 5P\cos 60^\circ = \frac{15P}{2}$$

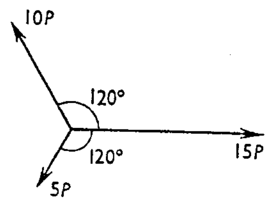
نیزمجموع مؤلفه‌های نیروهـا درامتداد عمودبرنیروی $15P$ برابر است با

$$10P\sin 60^\circ - 5P\sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}P$$

پس برایند $R = \frac{1}{2}P\sqrt{15^2 + (5\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{3}\,P$ وزاویهٔ‌آن بانیروی $15P$ برابراست با

$$\theta = \mathrm{Arc}tg\frac{5\sqrt{3}}{15} = 30^\circ$$

روش (ب): می‌دانیم کـه نیروهای $5P$ ، $5P$ ، $5P$ در جهتهایی که نشان داده شده‌اند درحال‌تعادلند. زیرا آنها را می‌توان ازنظربزرگی وجهت به‌وسیلهٔ اضلاع یك مثلث متساوی‌الاضلاع نمایش داد.



شکل۱۰–۲۲

پس سه نیروی داده‌شده برابر با دونیروی $10P$ و $5P$ می‌شوندکه باهم زاویهٔ 120° می‌سازند. برایند این نیروها، R ، مطابق زیر به دست‌می‌آید:

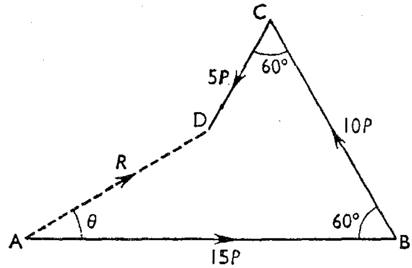
$$R^2 = (10P)^2 + (5P)^2 + 2\times 10P \times 5P\cos 120^\circ$$
$$= 100P^2 + 25P^2 - 50P^2 = 75P^2$$

$$\therefore \qquad R = 5\sqrt{3}\,P$$

زاویهٔ θ که برایند باجهت نیروی $15P$ می‌سازد ازاین راه به‌دست می‌آید:

$$tg\,\theta = \frac{5\sin 60^\circ}{10 - 5\cos 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

بنابراین $\theta = 30^\circ$



شکل ۱۰–۲۳

روش (پ): چندضلعی برداری ABCD (شکل ۱۰–۲۳) را که در آن $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$ به‌ترتیب معرف نیروهای P ۱۵، P ۱۰، P ۵ هستند رسم می‌کنیم.

دراین‌صورت $\overrightarrow{AD}$ معرف برایند سه نیرو است.

با اندازه‌گیری، یا از راه محاسبه، $AD = ۸/۷\ P$ و $\angle DAB = ۳۰^\circ$ است.

تمرین ۳.۱۰

۱ ـ نیروهای ۲،۳،۴ و ۱ نیوتون بر نقطهٔ A در جهتهای AB، AC، AD و AE وارد می‌شوند، به‌طوری‌که $\angle BAC = ۳۰^\circ$ ، $\angle CAD = ۳۰^\circ$، $\angle DAE = ۹۰^\circ$ است. بزرگی براینداین سه نیرو وزاویه‌ای که برایند با امتداد AB می‌سازد چقدر است؟ نتیجه را با رسم نمودار برداری تحقیق کنید.

۲ ـ نقطه‌ای مادی تحت‌اثر نیروهای ۲و۴ نیوتون که بازاویهٔ قائمه برهم‌وارد می‌شوند ونیزتحت اثر نیرویی برابر $۴\sqrt{۲}$ نیوتون که جهتش نیمساز زاویهٔ میان دونیروی‌دیگر است، قرارگرفته است. برایندنیرویی‌را که برنقطهٔ مادی وارد می‌شود تعیین کنید.

۳ ـ سه‌نیروی ۵،۱۰،۱۳ نیوتون دریك صفحه بریك نقطهٔ مادی وارد می‌شوند.زاویهٔ میان هردوجهت‌آنها ۱۲۰° است. بزرگی وجهت برایندآنها را تعیین کنید.

۴ ـ ABCD یك‌مربع‌است‌ونیروهای ۲،۴ و۵ نیوتون به‌ترتیب درجهتهای AB، AC و AD بر A وارد می‌شوند. بزرگی وجهت برایند را تعیین کنید.

۵ ـ بزرگی‌وجهت برایندنیروهایی راپیدا کنید که بریك‌نقطه واردمی‌شوند وبزرگی‌وجهت آنها‌به‌ترتیب عبارتند از N ۲۰ درجهت‌مشرق، N ۴۲ درجهت شمال‌غربی، N ۶۰ درجهت ۳۰° جنوب غربی و N ۱۵ درجهت‌جنوب.

۶ ـ ABCDEF یك شش ضلعی‌منظم است. نیروهایی به‌بزرگی ۲، $۴\sqrt{۳}$، ۸، $۲\sqrt{۳}$ و۴

نیوتون، به ترتیب در جهتهای AB، AC، AD، AE و AF بر A وارد می‌شوند. بزرگی برایند وزاویهٔ جهت‌آن‌را با AB پیدا کنید. نتیجه را بارسم نمودار برداری تحقیق کنید.

۷ - چهارسیم افقی به یك تیرتلفن متصلند و برآن کششهای زیررا واردمی‌کنند. ۸۰ N به‌سوی‌شمال، ۱۲۰ N به‌سوی‌شرق، ۱۶۰ N به‌سوی‌جنوب غربی و۲۰۰ N به‌سوی جنوب‌شرقی. برایندکشش وارد برتیرتلفن وجهت‌آن را پیدا کنید.

۸ - چهارمیخ صیقلی A، B، C وD دریك‌صفحهٔ قائم، طوری نصب‌شده‌اندکه‌چهارگوشهٔ پایینی یك‌شش‌ضلعی منظم راکه‌ضلع BCآن افقی است، تشکیل داده‌اند. نخی را به A می‌بندیم وآن را اززیر BوC وازروی DوA می‌گذرانیم ووزنه‌ای به‌جرم ۱۰ کیلوگرم‌رابه‌انتهای‌آزادآن‌متصل‌می‌کنیم. وزنه به‌طورقائم‌قرارمی‌گیرد. نیروهایی راکه بر چهارمیخ فشار می‌آورد تعیین کنید.

۹ - سه نیروکه بزرگی هریك برابر F است بر نقطهٔ O در امتداد خطوط OA، OB و OC که در یك صفحه‌اند وارد می‌شوند. زاویهٔ BOA برابر $+۴۵°$، و زاویـهٔ BOC برابر $-۹۰°$ است. بزرگی‌برایند نیرو را تعیین کنید وجهت آن را،با تعیین تانژانت‌زاویه‌ای‌که برایند بـا OB می‌سازد، پیداکنید.

۱۰- سه‌نیرو درجهتهای‌شمال غربی، شمال شرقی و جنوب بریك نقطه وارد می‌شوند و بزرگی‌آنها به‌ترتیب برابر۱۰۰، ۲۰۰و۳۰۰ نیوتون است. جهت وبزرگی نیروی برایند را پیداکنید وآن را شرح دهید.

۱۱- اضلاع BC، CA و AB یك مثلث‌به‌ترتیب۷، ۵و۳ سانتیمتر است.ازراه‌ترسیم یا از هرراه دیگر، بزرگی‌برایند نیروهایی‌راکه‌بریك نقطه وارد می‌شوند وانحراف‌آن را نسبت به BC تعیین کنید، درصورتی‌که‌می‌دانیم نیروی ۵ N درجهت BC، و۹ N درجهت AC و ۳ N درجهت AB برنقطهٔ مادی وارد می‌شوند.

۱۲- نیروهای ۲، ۳و۴ نیوتون درجهتهایی به‌ترتیب متوازی‌با اضلاع AB، AC و BC ازیك مثلث متساوی‌الاضلاع وارد می‌شوند. برایندآنها را پیدا کنید.

۱۳- نیروهای ۵، ۴، ۱۲و۴ نیوتون‌برنقطهٔ A به‌ترتیب در امتدادهای AB، AC، AD و AEواردمی‌شوند. $\angle BAC=۳۰°$، $\angle BAD=۹۰°$، $\angle BAE=۱۵۰°$است. بزرگی برایند و زاویه‌ای‌راکه خط اثرآن بابرایند می‌سازد تعیین کنید.

۱۴- ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است، و G مرکـز بـرخـورد میانه‌های آن است. نیروهای ۸، ۸و۱۶ نیوتون به تـرتیب در امتدادهای GB، GC و GA بر G وارد می‌شوند. بزرگی وجهت برایندآنها راتعیین کنید.

۱۵- نیروهای N ۱۱، N ۲۰ و N ۵ به‌ترتیب در امتدادهای OA،OB و OC وارد می‌شوند. $tg AOB = cotg AOC = \frac{۳}{۴}$ و OB میان OA و OC واقع است. مؤلفهٔ نیرو را در امتداد OA و نیز بزرگی برایندکل را تعیین کنید.

۱۶- چهار نیروی ۱۰، ۹، ۴ و ۱ نیوتون به‌ترتیب درجهتهای شمال، مشرق، جنوب و مغرب برنقطهٔ O وارد می‌شوند. بزرگی‌برایند و انحراف آن را نسبت به شمال پیداکنید.

نیز اگر درجهت شمال‌غربی، نیرویی برابر $\sqrt{۸}$ N به نقطهٔ O اضافه شود، بزرگی‌برایندجدید را پیداکنید.

۱۷- نیروهای متقارب زیر بر یك نقطه وارد می‌شوند. واحد نیرو N ۱ است، زاویه‌ها درخلاف جهت‌حرکت عقربه‌های‌ساعت ونسبت به خط‌معلوم OX سنجیده‌می‌شوند.

۲ بر ۰° ، ۳ بر ۳۰° ، ۳ بر ۱۵۰° ، ۲ بر ۲۴۰° و ۴ بر ۲۷۰°

بزرگی وجهت برایندآنها را از دو راه زیر تعیین کنید:

(الف) از راه ترسیم چندضلعی نیروها؛

(ب) از راه محاسبهٔ مؤلفه‌های موازی وعمود بر OX.

۱۸- ABCD مربعی است‌به ضلع ۳۰cm. نیروهای ۴، ۲و۲ نیوتون به ترتیب درامتداد اضلاع DA ، AB و BC وارد می‌شوند. نشان دهیدکه برایند نیروهایی که در امتدادهای AB و BC وارد می‌شوند نیرویی راکه درامتداد DA واردمی‌شود، در نقطه‌ای‌مانند E قطع می‌کند، به‌طوری که AE = ۲۰cm است وسپس بزرگی وجهت و راستای برایند سه نیرو را تعیین کنید.

۱۹- نیروهای ۱، ۲و۳ نیوتون‌درامتداداضلاع AB،BC وCA ازمثلث‌متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع ۵ cm وارد می‌شوند. از راه ترسیم تعیین کنیدکه برایند نیروهایی که در امتدادهای ABوBC وارد می شوند، امتداد AC را درکجا قطع می‌کنند وسپس بزرگی وجهت برایند سه نیرو وجایی‌راکه راستای آن امتداد BC را قطع می‌کند تعیین کنید.

۲۰- k مقداری است‌ثابت و ABC مثلثی‌است‌که طول اضلاع‌آن a، b و c است. تعیین کنید: (الف) برایند نیروی ka درامتداد BC ونیروی kc درامتداد AB؛ (ب) برایند نیروی ka در امتداد BC و نیروی kc درامتداد BA. بزرگی و راستا را در هر دوحالت بالا تعیین کنید.

ثابت‌کنیدکه نیروی ۲ ka درامتداد BC ونیروی kc درامتداد BA معادل بانیرویی‌برابر ۳kBD درامتداد BD است، که D نقطه‌ای‌است برCA به‌طوری که

AD = ۲DC

۲۶.۱۰. شرایط تعادل چند نیرو که بر یک نقطهٔ مادی وارد می‌شوند.

اگر نیروها را در دوجهت متعامد دلخواه تجزیه کنیم ومؤلفه‌ها را در این جهتها جمع کنیم وجمع آنها X و Y باشد، برایند F برطبق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F^{2}=X^{2}+Y^{2}$$

اما اگر نیروها درحال تعادل باشند F باید صفرباشد.

از طرفی جمع مربعهای دوکمیت واقعی نمی‌تواند صفرباشد، مگرآنکه هریک ازدو کمیت جداگانه برابر صفر باشد.

$$\therefore \qquad X=0 \text{ و } Y=0$$

پس، اگرچندنیروکه بر یک نقطهٔ مادی وارد می‌شوند، در حال تعادل باشند، مجموع جبری مؤلفه‌های آنها در هر دو جهت متعامد دلخواه، باید جداگانه برابر صفر باشد.

برعکس، **اگر مجموع مؤلفه‌های آنها در هر دو جهت متعامد صفرباشد، نیروها در حال تعادلند.** زیرا دراین صورت هم X و هم Y صفرند وبنابراین F برابرصفر است.

۲۷.۱۰. در مسائلی که نیروهای وارد بریک نقطه‌درحال تعادلند، باتوجه به نتایجی که در بند قبل بیان شد، می‌توان راه حل کلی به وسیلهٔ محاسبه به دست آورد.

در این‌گونه مسائل ، نیروهای داده شده را در دو جهت عمود بر هم (معمولاً افقی و قائم) تجزیه می‌کنیم و مجموع مؤلفه‌ها را در هریک از این دو جهت برابر صفر می‌گیریم.

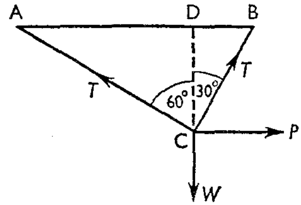
ازروشهای ترسیمی که شامل مثلث وچند ضلعی نیروهاست، می‌توان درموردهرچند نیرو استفاده کرد، اما این روشهاغالباً وقت‌زیادمی گیرند ودقت‌نتایج‌آنها کمترازمحاسبه‌است. روش برداری غالباً مناسبتر است.

مثال۱: نخی به دونقطهٔ همتراز محکم شده است و حلقه‌ای صیقلی به وزن W می‌تواند آزادانه درطول‌نخ‌جابه‌جا شود. این حلقه را با نیرویی‌افقی برابر P فشارمی‌دهند. اگر دروضع تعادل، اجزای نخ با خط قائم زاویه‌های ۶۰° و ۳۰° بسازند، مقدار P و کشش نخ را تعیین کنید.

حل: فرض می‌کنیم A و B (شکل ۱۰-۲۴) نقطه‌هایی باشندکه نخ به‌آنها بسته شده است و C وضع حلقهٔ θ و CD عمود بر AB باشد . بنابراین $\angle ACD=۶۰^\circ$ ، $\angle BCD=۳۰^\circ$. چون حلقه صیقلی است، کشش T نخ درسراسرآن یکسان‌است.

با تجزیه‌درامتداد قائم،

$$T\cos ۳۰^\circ+T\cos ۶۰^\circ=W$$



شکل ۱۰–۲۴

$$\therefore \qquad \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)T=W$$

$$\therefore \qquad T=\frac{۲W}{\sqrt{۳}+۱}=W(\sqrt{۳}-۱)$$

با تجزیه درامتداد افقی،

$$P+T\sin ۳۰^\circ=T\sin ۶۰^\circ$$

$$\therefore \qquad P=\frac{\sqrt{۳}}{۲}T-\frac{۱}{۲}T=\frac{T}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$$

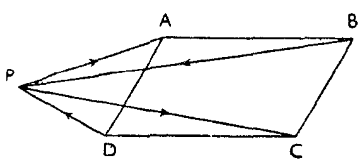
$$\therefore \qquad P=\frac{W}{۲}(\sqrt{۳}-۱)^{۲}=W(۲-\sqrt{۳})$$

مثال۲: ABCD یک‌متوازی‌الاضلاع‌است و P نقطه‌ای است دلخواه. ثابت کنید که‌دستگاه نیروهایی‌که با PA، BP، PC، DP نمایش داده می‌شوند درحال تعادلند.

حل: در شکل ۱۰–۲۵ روشن است که برایند نیروهایی که با BP و PA نمایش داده می‌شوند، از نظر بزرگی وجهت برابر BA است. البته این‌برایند برنقطهٔ P وارد می‌شود.

برایند نیروهایی که با DP و PC نمایش داده شده‌اند ازنظربزرگی وجهت با DCنمایش داده می‌شود. این برایند نیز بر نقطهٔ P وارد می‌شود.

اما AB مساوی وموازی DC است، بنابراین برایندها ازنظر بزرگی با هم



شکل ۱۰–۲۵

برابرند، وچون هردوبرنقطهٔ P وارد می‌شوند، در امتداد یك خط مستقیم هستند. چون جهتهای آنهامتفاوتند، نیروها باهم‌متعادلند ودستگاه به‌حال تعادل است.

به‌طور برداری می‌توان نوشت:

$$\text{مجموع برداری نیروها} = (\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC})$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$$

که‌چون AB وDC برابر وموازی‌هستند ودو بردار درجهتهای متفاوت بایکدیگرند، نتیجهٔ بالا برابرصفر است.

چون نیروها بریك نقطه اثرمی کنند و برایند برداری آنها صفراست، این نیروها درحال تعادلند.

دراین‌حالت، تجزیهٔ نیروها در دوجهت متعامد، روش مناسبی نخواهد بود.

تمرین ۴۰۱۰

۱ ـ دونیروی ۹ و ۱۰ نیوتون که بریك نقطه وارد می‌شوند، باهم زاویـه‌ای می‌سازند که تانژانت آن برابر $\frac{۴}{۳}$ است.

دونیروی P وQ براین نقطه طوری‌وارد می‌شوند که چهار نیرو در حال تعادلند. Q درجهت مخالف نیروی N ۹ وارد می‌شود وP عمود بر Q است. بزرگیهای این دو نیرو را تعیین کنید.

۲ ـ E نقطهٔ وسط ضلع CD ازمربع ABCD است. نیروهای ۱۶، ۲۰، P و Q نیوتون‌در امتدادهای AB، AD، EA وCA و در جهتهایی که ترتیب حروف رعایت می‌شود، وارد می‌شوند. اگرنیروها درحال تعادل باشند P و Q را تعیین کنید.

۳ ـ نخی به‌طول m ۰/۶ به‌دو نقطهٔ همتراز A وB که به فاصلهٔ m ۰/۳ از یکدیگـر واقعند، بسته شده است. حلقه‌ای به‌وزن N ۵۰ که ازنخ عبورکرده است، تحت‌اثر نیرویی افقی برابر P است، به‌طوری‌که درست درزیر B به حال تعادل است. کشش نخ وبزرگی P را پیدا کنید.

۴ ـ نخی به‌طول cm ۳۱ به دونقطهٔ همتراز که به فاصلهٔ cm ۲۵ از یکدیگر واقعند، بسته شده‌است. حلقه‌ای که‌جرم‌آن g ۹۰ است می‌تواند درنخ جابه‌جا شود وتحت اثـرنیرویی افقی است. بزرگی این نیرو به‌قدری است‌که حلقه درفاصلهٔ cm ۷ از نزدیکترین انتهای نخ به حال تعـادل است. نشان دهید کـه نیروی مذکور تقریباً برابر وزن یك وزنهٔ ۵۰ گرمی است و کشش نخ را تعیین کنید.

۵ - ABCD یك مربع است. نیروهای ۲، $۳\sqrt{۲}$، و ۹ نیوتون، به ترتیب در جهتهای AB،AC وAD برنقطهٔ A وارد می‌شوند. بزرگی نیرویی اضافی راکه باید برای ایجاد تعادل بر A واردشود، تعیین کنید.

۶ - نیروهای ۳، $\sqrt{۳}$، ۵، $۳\sqrt{۳}$، ۲ و۶ نیوتون، به‌ترتیب بریك رأس‌بر یك‌شش ضلعی منتظم وبه‌طرف پنج‌رأس دیگر وارد می‌شوند. بزرگی نیرویی راکه باید براین رأس وارد کرد تا این نیروها به‌حال تعادل درآیند، تعیین کنید.

۷ - پنج نیروکه بریك نقطه وارد می‌شوند، به حال تعادلند. بزرگی چهارتای ازآنها برابر ۱، ۲، ۳ و۴ نیوتون است که بایك خط راست معین، به‌ترتیب زوایای °۰، °۶۰، °۱۲۰ و°۲۱۰ می‌سازند. بزرگی وجهت نیروی دیگررا تعیین‌کنید واز راه ترسیم نتیجهٔ به‌دست‌آمده را تحقیق کنید.

۸ - ABCDEF یك‌شش‌ضلعی منتظم است. نشان دهیدکه نیروهایی‌که با $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$، $۲\overrightarrow{DA}$، $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AF}$ نمایش داده می‌شوند، به‌حال تعادلند.

۹ - ABCD مربع است و BEC مثلثی متساوی‌الاضلاع است‌که درهمان صفحه قرار دارد و E درخارج مربع ABCD است. اگرنیروهایی‌که به وسیلهٔ $p\overrightarrow{AB}$، $q\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AC}$، و $\overrightarrow{EA}$ نمایش داده می‌شوند، درحال تعادل باشند، pوq را تعیین کنید.

۱۰- اگر D،E،F نقطه‌های وسط اضلاع BC،CA،AB ازمثلث ABC باشند، نشان دهیدکه سه نیرویی‌که بریك نقطه وارد می‌شوند وبا AD،BE وCF نمایش داده می‌شوند، درحال تعادلند.

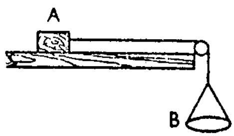
۱۰.۲۸. اصطکاک

هنگامی که جسمی روی جسم دیگر می‌لغزد، تجربه نشان داده است، که نیرویی وارد عمل می‌شودکه مایل است در مقابل حرکت مقاومت‌کند. این نیرو را **نیروی اصطکاك** می‌نامیم.

اگرقطعه چوب A را (شکل۱۰-۲۶) که وزن‌آن معلوم است، روی میزی قرار دهیم وسپس یك قطعه نخ به‌آن ببندیم و نخ‌را ازشیار قرقره‌ای عبور دهیم وانتهای آن‌را به‌یك کفه متصل کنیم، می‌توانیم‌قوانینی‌را که در بارهٔ عمل نیروی اصطکاك صدق‌می‌کند، پیدا کنیم.

اگروزنهٔ کوچکی درکفهٔ B بگذاریم، حرکتی درA تولید نخواهد شد. دراین‌صورت اصطکاك میان Aومیزباید برابربامجموع‌وزن‌کفه و وزن وزنه‌ای باشدکه درکفه‌افزوده‌ایم

تجربه نشان می‌دهد که اگر وزن B را به‌تدریج زیاد کنیم، هنگامی می‌رسد که نقطه‌ای از A شروع به‌حرکت می‌کند. این نشان می‌دهد که فقط مقدار محدودی اصطکاك می‌تواند، وارد عمل شود.



شکل ۱۰ــ۲۶

هرچه نیرویی که مایل است A را به‌حرکت درآورد ازصفرزیادتر می‌شود، نیروی اصطکاك نیز به‌همان نسبت ازصفرزیادتر می‌شود تاآنکه به‌مقدار ماکزیمم یا حدی برسد و درآن هنگام، حرکت آغازشود. دراین صورت وزن کل B برابرنیروی اصطکاك است. اکنون اگروزنه‌ای روی A قراردهیم، به‌طوری که عکس‌العمل میان A ومیزافزایش یابد وآزمایش را تکرار کنیم، درمی‌یابیم که باید وزنهٔ بیشتری به B اضافه شود تاحرکت آغاز شود، یعنی اصطکاك ماکزیمم افزایش می‌یابد. اگرآزمایش را با وزنه‌های مختلفی دربارهٔ A تکرار کنیم، برای اصطکاك ماکزیمم یك‌سری مقادیر به‌دست می‌آوریم که به‌روشنی بستگی به‌عکس‌العمل میان A ومیزدارد. با تقسیم وزن کل B بروزن کل A در هرحالت، به‌این نتیجه می‌رسیم که عددی که به‌دست می‌آید، تقریباً ثابت است.

آزمایشهای‌مشابهی را می‌توان بااستفاده ازمواد متفاوت تکرار کرد. نتایج‌این گونه آزمایشها به‌شرح زیر است:

قوانین اصطکاك

۱ـ جهت اصطکاك درخلاف جهتی است که جسم مایل به‌حرکت است.

۲ـ بزرگی اصطکاك، تا یك‌حد معین، درست برابر نیرویی است که مایل است جسم را به حرکت درآورد.

۳ـ فقط مقدار معینی اصطکاك می‌تواند وارد عمل شود. مقدارماکزیمم آن رااصطکاك حدی می‌نامیم.

۴ـ نسبت‌بزرگی اصطکاك حدی (برای سطوح معین) به‌عکس‌العمل قائم میان‌سطوح‌مقدار ثابتی برابر μ است. این نسبت ثابت، μ، به ماهیت سطوح بستگی دارد و ضریب «استاتیکی» اصطکاك نامیده می‌شود.

۵ـ مقدار اصطکاك، به شرط آنکه عکس‌العمل قائم میان سطوح تغییری نکند، مستقل از مساحتها وشکل سطوح درحال تماس است.

۶ـ وقتی که حرکت برقرار می‌شود، اصطکاك بازهم در خلاف جهت حرکت وارد می‌شود ومستقل از تندی است و متناسب با نیروی فشاری قائم است وکمی کمتر ازاصطکاك حدی است.

باید به‌خوبی درك شود که این قوانین، تجربی هستند وبه‌استثنای سه قانون اول، دامنهٔ صحت سه قانون دیگرمحدود است. مثلاً اگرفشارهای فوق‌العاده زیاد برسطوح تماس وارد شود، ممکن است این سطوح ازهم بپاشند وقانون ۴ دیگرصدق نکنند.

برطبق قانون۴، اگراصطکاك حدی برابر F (یعنی نیروی اصطکاکی که‌درست‌درآغاز حرکت وارد می‌شود)، وعکس‌العمل قائم‌برابرR وضریب استاتیکی اصطکاك برابرμباشد، دراین صورت

$$F = \mu R \quad \text{یا} \quad \frac{F}{R} = \mu$$

بایدکاملاً دقت کردکه فرض نشودکه اصطکاك همیشه برابرμR است. این‌مقدارفقط هنگامی است که جسم می‌خواهد شروع به‌حرکت کند. درغیراین صورت، مقدار اصطکاك می‌تواند از صفر تا μR باشد.

۲۹.۱۰. زاویهٔ اصطکاك

اگر عکس‌العمل قائم R و نیروی اصطکاك F را ترکیب و به صورت یك نیروی منفرد درنظربگیریم (شکل ۱۰ــ۲۷)، این نیرو را عکس‌العمل کل‌یا برایند می‌نامند. این عکس‌العمل باخط قائم زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر$\frac{F}{R}$ است.

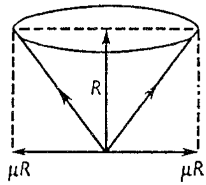
وقتی که F ازصفرشروع به‌زیاد شدن می‌کند، زاویه‌ای که این برایند باخط قائم می‌سازد، افزایش می‌یابد تاآنکه اصطکاك F به‌مقدار ماکزیمم خود یعنی μR برسد. در این حالت تانژانت زاویهٔ میان برایند وخط قائم برابر $\frac{\mu R}{R}$ یا μ است. وقتی که اصطکاك به‌مقدارحد خود می‌رسد، زاویه‌ای که عکس‌العمل برایند با خط قائم می‌سازد، زاویهٔ اصطکاك نامیده می‌شود وبا λ نمایش داده می‌شود.

بنابراین
$$tg\lambda = \mu$$

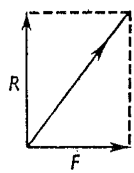
عکس‌العمل کل می‌تواند هر زاویه‌ای‌میان صفرواین مقدار با خط قائم بسازد، اما نمی‌تواند زاویه‌ای بیشتر ازاین مقدار باخط‌قائم داشته باشد. نیرویی که درامتداد سطح،

برجسم وارد می‌شود و تمایـل به‌حرکت درجسم ایجـاد مـی کند، درهـرجهـت بـاشد، عکس‌العمل کل‌مربوط به‌آن برسطح مخروطی‌قرار می گیرد که نیم‌زاویهٔ رأس آن برابر λ یا $\mathrm{Arc}\, tg\mu$ است.

این‌مخروط به مخروط اصطکاك (شکل ۱۰ـ۲۸) مـوسوم است. عـکس‌العمل کـل همیشه بایـد درداخل یـا برروی سطح ایـن‌مخروط واقع شود ودرحالت اخیریعنی وقتی کـه برسطح مخروط واقـع می‌شود، تعـادل‌به‌حالت حدی خود می‌رسد.



شکل ۱۰-۲۸

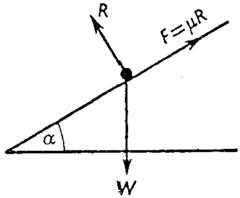


شکل ۱۰-۲۷

۳۰.۱۰. تعادل یك نقطهٔ مادی بر سطح شیبدار ناصاف

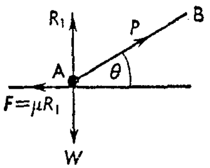
فرض می‌کنیم که نقطه‌ای مادی به‌وزن W برسطح ناصافی قرار داردکه زاویهٔ آن نسبت به افق کم‌کم زیاد می‌شود (شکل ۱۰ـ۲۹). وقتی کـه زاویهٔ آن با افق برابر α است، مؤلفهٔ وزن در امتداد پایین سطح برابر $W\sin\alpha$ است . اصطکاك حداقل یـا حدی برابر $\mu W\cos\alpha$ است، پس وقتی که $W\sin\alpha=\mu W\cos\alpha$ یا $tg\alpha=\mu$ است، درست هنگامی‌است که حرکت می‌خواهد شروع شود.

بنابراین نقطهٔ مادی هنگامی‌که زاویهٔانحـراف سطـح شیبـدار طـوری است کـه $tg\alpha=\mu$ است، تحت اثروزن خـود، درحال‌شروع به‌حرکت خواهد بـود. واین هنگامی است‌کـه زاویهٔ سطح شیبدار بـا افـق برابر زاویهٔ اصطکاك است.

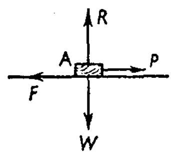


شکل ۱۰-۲۹

۳۱.۱۰. نقطهٔ مادی که بریك سطح افقی ناصاف وتحت اثر نیروی خارجی قراردارد
اگر نیرو، افقی (مانند شکل ۱۰ــ۳۰) و برابر P باشد، دراین صورت برای اینکه‌حرکت روی دهد، P باید بزرگتر از μR باشد. اما چون حرکت در امتداد قائم وجود ندارد $R=W$ است وبنابراین P باید بزرگتر از μW باشد.



شکل ۱۰-۳۱



شکل ۱۰-۳۰

اگر نیروی P با سطح افق زاویهٔ θ بسازد وجهت آن به‌طرف بالا باشد، (مانند شکل ۱۰-۳۱)، دراین صورت این نیرو دارای مؤلفه‌ای قائم به‌طرف بالاخواهد بود، که موجب می‌شود فشارمیان نقطهٔ مادی وسطح راکاهش دهد.
اکنون عکس‌العمل‌قائم R_1 برابر $W-P\sin\theta$ است، واصطکاك حدی مربوط به‌آن برابر $\mu(W-P\sin\theta)$ است. پس هنگامی که حرکت درست درحال روی دادن است، باید چنین داشته باشیم:

$$P\cos\theta=\mu(W-P\sin\theta)$$

$$\therefore \quad P(\cos\theta+\mu\sin\theta)=\mu W$$

$$\therefore \quad P\left(\cos\theta+\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right)=\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}W$$

که درآن λ زاویهٔ اصطکاك است.

$$\therefore \quad P\frac{\cos\theta\cos\lambda+\sin\theta\sin\lambda}{\cos\lambda}=\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}W$$

$$\therefore \quad P\cos(\theta-\lambda)=W\sin\lambda$$

$$\therefore \quad P=W\frac{\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$$

مقدار P هنگامی حداقل خواهد بود که $\cos(\theta-\lambda)$ ماکزیمم باشد، یعنی $\theta=\lambda$ یا $P=W\sin\lambda$ باشد.

اگر P،مانند شکل ۱۰-۳۲ به‌طرف پایین درامتداد CA شیب داشته‌باشد، دارای مؤلفهٔ قائمی به‌طرف پایین خواهد بودکه‌موجب می‌شود عکس‌العمل قائم سطح ودرنتیجه

اصطکاك زیاد شود. بنابراین برای آنکه نقطهٔ مادی با حداقل نیرو به‌حرکت درآید، باید نیرو به‌طرف بالا ودرامتدادی وارد شود‌که زاویهٔ آن با افق برابرزاویهٔ اصطکاك باشد.

وقتی‌که P به‌طرف پایین واردمی‌شود(شکل ۱۰-۳۲)، اصطکاك برابراست با

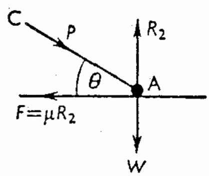
$$\mu(W+P\sin\theta)$$

و برای آنکه حرکت روی بدهد، باید چنین داشته باشیم:

$$P\cos\theta > \mu(W+P\sin\theta)$$

$$\therefore \qquad P\left(\cos\theta - \frac{\sin\lambda\sin\theta}{\cos\lambda}\right) > \frac{W\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$\therefore \qquad P > \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta+\lambda)}$$



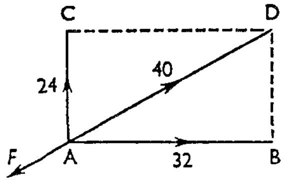
شکل ۱۰-۳۲

حال اگر $(\theta+\lambda)$ تقریباً $90°$ باشد، مخرج‌کسر طرف راست خیلی‌کوچك خواهد بود وبرای‌آنکه‌حرکت روی بدهد، P باید خیلی بزرگ باشد. اگر$\theta+\lambda$ برابر$90°$باشد، نقطهٔ مادی به‌هیچ‌وجه حرکت نخواهدکرد، حتی اگرP فوق‌العاده بزرگ باشد.

نیزاگر$\theta+\lambda$ بزرگتراز$90°$ باشد،کسینوس آن منفی و برای P غیرممکن است که بتواند نقطهٔ مادی را به‌حرکت درآورد. مقدارمنفی به‌این معنی است‌که P باید درجهت مخالف، یعنی‌درامتداد AC، وارد شود.

مثال: نقطه‌ای مادی‌به‌جرم ۳۰ kg برسطح افقی ناصافی قرار دارد. وقتی‌که نیروهای افقی N ۲۴ و N ۳۲، عمود بریکدیگر، برآن‌وارد می‌شوند، درست به‌نقطهٔ‌شروع حرکت می‌رسد. ضریب اصطکاك میان نقطهٔ مادی وسطح افقی ونیزجهتی راکه اصطکاك درآن اعمال می‌شود تعیین‌کنید.

حل: درمسائلی ازاین‌نوع، باید برایند نیرویی راکه درنقطهٔ مادی تمایل به‌حرکت ایجاد می‌کند، پیدا کنیم. نقطهٔ مادی درامتداد این برایند تمایل به‌حرکت دارد واصطکاك



شکل ۱۰-۳۳

درجهت عکس آن وارد می‌شود.

فرض مـی‌کنیم AB و AC (شکل ۱۰-۳۳) جهتهای نیروهـا و A نقطهٔ مادی‌باشد. برایند نیروها برابراست با

$$\sqrt{۲۴^۲+۳۲^۲} = ۴۰ \text{ N}$$

و درامتداد AD واردمی‌شود و با نیروی N ۳۲ زاویه‌ای می‌سازدکه کسینوس‌آن $\frac{۴}{۵}$ است. اصطکاك درجهت DAوارد می‌شود. چون اصطکاك حدی‌برابر μR است که R عکس‌العمل قائمی است که بر نقطهٔ مادی وارد می‌شود،

$$۴۰ = ۳۰ \times ۹/۸\mu$$

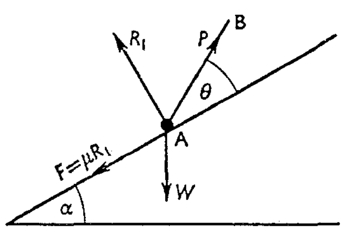
$$\mu = \frac{۴}{۲۹/۴} = ۰/۱۴ \quad \text{یا}$$

۳۲.۱۰. نقطهٔ‌مادی‌که بریك سطح شیبدار ناصاف وتحت اثر نیرویی‌خارجی قراردارد

I ـ هنگامی که زاویهٔ سطح شیبدار با افق کمتر از زاویهٔ اصطکاك است.

دراین حالت اصطکاك به‌قدری است که از لغزش نقطهٔ مادی به‌طرف پایین و تحت‌اثر وزن خود جلوگیری می‌کند.

برای تعیین نیروی P، که درصفحهٔ قائمی‌که ازخط بزرگترین شیب سطح می‌گذرد،



شکل۱۰ـ۳۴

وارد می‌شود و برای به حرکت درآوردن نقطهٔ مادی به‌طرف بالا یا پایین سطح لازم است، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(الف) اگر P به طرف بالا وارد شود و با سطح زاویه‌ای برابر θ بسازد (مطابق شکل ۱۰-۳۴)، دراین صورت عکس‌العمل قائم R_1 برابر $W\cos\alpha - P\sin\theta$ است.

پس اصطکاک حدی برابر $\mu(W\cos\alpha - P\sin\theta)$ است و به طرف پایین سطح وارد می‌شود. مؤلفهٔ وزن به طرف‌پایین سطح برابراست با $W\sin\alpha$. بنابراین هنگامی که نقطهٔ مادی در حال شروع به حرکت به‌طرف بالای سطح است، چنین خواهیم داشت:

$$P\cos\theta = W\sin\alpha + \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta)$$

$$\therefore \quad P\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right) = W\left(\sin\alpha + \frac{\sin\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda}\right)$$

$$\therefore \quad P\frac{\cos(\theta-\lambda)}{\cos\lambda} = W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}$$

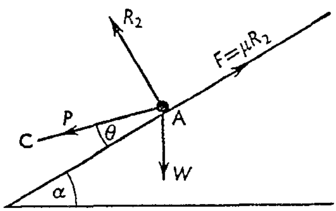
$$\therefore \quad P = W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

ایـن مـقدار ، وقتی که $\theta = \lambda$ باشد، حداقل‌است ودر این‌صورت $P = W\sin(\alpha+\lambda)$ است.

اگر $\theta = 0$ باشد، یعنی P به موازات سطح وارد شود،

$$P = W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}$$

(ب) اگر P به‌طرف‌پایین‌و درامتدادی‌واردشود که باسطح زاویهٔ θ بسازد، یعنی در امتداد AC (شکل ۱۰-۳۵) وارد شود، اصطکاک حدی بازهم‌برابر $\mu(W\cos\alpha - P\sin\theta)$ است،اما این باروقتی‌که نقطهٔ مادی در حال شروع به حرکت است به طرف بالای سطح وارد می‌شود.



شکل ۱۰-۳۵

$$\therefore \quad P\cos\theta + W\sin\alpha = \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta)$$

$$\therefore \quad P\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda\sin\theta}{\cos\lambda}\right) = W\left(\frac{\sin\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda} - \sin\alpha\right)$$

$$\therefore \quad P\frac{\cos(\theta-\lambda)}{\cos\lambda} = W\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\cos\lambda}$$

$$\therefore \quad P = W\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P بازهم هنگامی حداقل است که $\theta=\lambda$ باشد ودراین صورت مقدارش برابراست با

$$W\sin(\lambda-\alpha)$$

II‐ هنگامی که زاویهٔ سطح شیبدار با افق بیشتر از زاویهٔ اصطکاک است

دراین حالت نقطهٔ مادی به‌طرف‌پایین سطح می‌لغزد، مگرآنکه نقطهٔ مادی به‌کمك يك‌نیروی خارجی نگاهداری شود. اکنون بایدبه‌دومورد توجه کنیم: (الف) نیروی لازم برای به‌حرکت درآوردن نقطهٔ مادی به‌طرف بالای سطح؛ (ب) نیروی‌لازم برای‌نگاهداری نقطهٔ مادی.

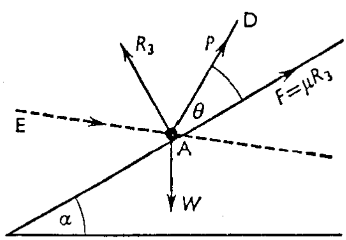
(الف) این حالت درست مانند حالت I (الف) است. نیرویی‌که بـه موازات سطح وارد می‌شود، باقراردادن $\theta=0$ برابر است با

$$W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}$$

اگربه طرف بالا با زاویهٔ θ وارد شود،

$$P = W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P هنگامی‌حداقل‌است‌که $\theta=\lambda$ باشد. دراین‌صورت مقدارآن برابر است‌با $W\sin(\alpha+\lambda)$



شکل ۱۰ــ۳۶

(ب) اگر P به‌طرف بالا وبا زاویهٔ θوارد شود (شکل ۱۰-۳۶)، در این صورت، همان‌طور که در بالا بیان شد، عکس‌العمل قائم R_3 برابر $W\cos\alpha - P\sin\theta$ است و اصطکاك حدی برابر است با

$$\mu(W\cos\alpha - P\sin\theta)$$

اکنون در هنگامی که نقطهٔ مادی در حالت شروع به حرکت به طرف پایین است، اصطکاك به‌طرف بالا وارد می‌شود.

$$\therefore \quad P\cos\theta + \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta) = W\sin\alpha$$

$$\therefore \quad P\left(\cos\theta - \frac{\sin\lambda\sin\theta}{\cos\lambda}\right) = W\left(\sin\alpha - \frac{\sin\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda}\right)$$

$$\therefore \quad P\frac{\cos(\theta+\lambda)}{\cos\lambda} = W\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda}$$

$$\therefore \quad P = W\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)} \qquad (۱)$$

P هنگامی حداقل خواهدبود که $\theta = -\lambda$ باشد، یعنی هنگامی که P در امتداد EA وارد شود. این را می‌توان به طریق زیر نشان داد.

اگر P درامتداد EA وارد شود، مؤلفه‌ای عمود برسطح خواهد داشت که موجب افزایش عکس‌العمل قائم می‌شود. بنابراین اصطکاك حدی برابر $\mu(W\cos\alpha + P\sin\theta)$ خواهد شد وبه طرف بالای سطح وارد می‌شود.

$$\therefore \quad P\cos\theta + \mu(W\cos\alpha + P\sin\theta) = W\sin\alpha$$

$$\therefore \quad P\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda\sin\theta}{\cos\lambda}\right) = W\left(\sin\alpha - \frac{\sin\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda}\right)$$

$$\therefore \quad P\frac{\cos(\theta-\lambda)}{\cos\lambda} = W\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda}$$

$$\therefore \quad P = W\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)} \qquad (۲)$$

P هنگامی حداقل است که $\theta = \lambda$ باشد، ودراین صورت $P = W\sin(\alpha-\lambda)$ است.

تمرین ۵.۱۰

۱ - جسمی به جرم ۲۰ kg برسطح افقی ناصافی قراردارد. ضریب اصطکاك سطح برابر ۰/۵ است. تعیین کنید باچه نیرویی، (الف) درامتداد افقی، (ب) درامتدادی که با

افق زاویهٔ 30° می‌سازد که به‌جسم وارد می‌شود، جسم شروع به‌حرکت خواهد کرد.

۲ ـ جسمی به‌جرم $40\ kg$ برسطح افقی ناصافی قراردارد ومی‌تواند با نیرویی برابر $98\ N$ که به‌طور افقی برآن وارد می‌شود، شروع به‌حرکت کند. ضریب اصطکاک را تعیین کنید.

۳ ـ حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآوردن جسمی به‌جرم $20\ kg$ را درامتداد سطح افقی ناصافی که ضریب اصطکاک آن $0/25$ است، پیدا کنید.

۴ ـ قطعه چوبی به‌وزن W، درامتداد سطح افقی ناصافی به‌وسیلهٔ نیرویی کشیده می‌شود که برمرکز وجه بالایی آن، طوری وارد می‌شود که با خط قائم زاویهٔ θ می سازد. ثابت کنید که اگر θ کمتر اززاویهٔ اصطکاک باشد، قطعه چوب حرکت نخواهد کرد. نیزثابت کنید که اگر θ بزرگتر از زاویهٔ اصطکاک λ باشد، حداقل نیرویی که قطعه چوب‌را به حرکت وامی‌دارد برابراست با

$$\frac{W \sin\lambda}{\sin(\theta-\lambda)}$$

۵ ـ طول سطح شیبداری $5\ m$ وارتفاع آن $3\ m$ است. نیرویی برابر $49\ N$ که به‌موازات سطح وارد شود قادر است که ازلغزش وزنه‌ای به‌جرم حداکثر $10\ kg$ جلوگیری کند. ضریب اصطکاک را تعیین کنید.

۶ ـ برسطح شیبدار ناصافی که زاویهٔ آن با افق برابر 30° است، جسمی به‌جرم $10\ kg$ درحال حد تعادل قراردارد. سطح را بالامی‌برند تا زاویهٔ آن با افق برابر 60° شود. تعیین کنید چه نیرویی باید به‌موازات سطح واردکرد تا جسم را نگاه داشت.

۷ ـ جسمی به‌جرم $20\ kg$ برروی سطح شیبدار ناصافی که زاویهٔ آن با افق $\mathrm{Arc}\sin\frac{3}{5}$ است قراردارد. اگرضریب اصطکاک میان سطح وجسم $0/2$ باشد، حداقل نیرویی را پیدا کنید که باید به‌موازات سطح واردکرد تا (الف) ازلغزش جسم به‌طرف پایین جلوگیری کند؛ (ب) آن را به‌طرف بالای سطح بکشاند.

۸ ـ جسمی به‌جرم $40\ kg$ برروی سطح شیبدار ناصافی قرار دارد. وقتی که با نیروی $196\ N$ که به‌موازات سطح برآن وارد می‌شود، نگاهداری می‌شود، درست درحال شروع به‌لغزش است. وقتی که برآن نیرویی برابر $294\ N$ به‌موازات سطح وارد می‌شود، درست در حال شروع به‌حرکت به طرف پایین است. ضریب اصطکاک را تعیین کنید.

۹ ـ وزنه‌ای به جرم $610\ kg$ برسطح شیبدار ناصافی که زاویهٔ شیب آن $\mathrm{Arc}\,tg\,\frac{11}{60}$

است قرار دارد. ضریب اصطکاک سطح $\frac{۱}{۶}$ است. این جسم به ریسمانی متصل است که با امتداد بالای سطح زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن $\frac{۵}{۱۲}$ است. مقادیر حدی کشش ریسمان را درمواردی که تعادل درحالت حد است، پیدا کنید.

۱۰- سطح شیبدار ناصافی است که باافق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد وضریب اصطکاک آن ۰/۷۵ است. وزنه‌ای به‌جرم ۸۰ kg برآن‌قراردارد. حداقل نیروی لازم برای‌آنکه جسم به‌طرف بالا شروع به حرکت کند چقدراست؟

۱۱- اگرحداقل نیروی لازم برای‌آنکه جسمی ازیك سطح شیبدار ناصاف که زاویهٔ آن با افق برابر α است، به طرف بالا شروع به حرکت کند، دوبرابر حداقل نیروی لازم برای‌جلوگیری ازلغزش این‌جسم به‌طرف پایین باشد، نشان‌دهید که ضریب اصطکاك میان جسم و سطح برابر $\frac{۱}{۳}\, tg\alpha$ است.

۱۲- حداقل نیروی لازم برای آنکه جسمی ازیك‌سطح شیبدار شروع به‌حرکت به‌طرف بالا بکند P است. نشان دهید که حداقل نیرو، که به موازات سطح وارد می‌شود و سبب می‌شود که جسم به طرف بالا شروع به حرکت کند برابر است با

$$P\sqrt{۱+\mu^{۲}}$$

که μ ضریب اصطکاك است.

۱۳- زاویهٔ سطح شیبداری با افق °۲۰ است وقرار است که به‌کمك‌آن وزنه‌ای به جرم ۱۰۰ kg را به‌طرف بالا بکشانند. ضریب اصطکاك موجود برابر ۰/۲۵ است. جهت وبزرگی حداقل نیروی لازم را پیدا کنید.

۱۴- دوسطح شیبدار، دارای یك رأس مشترك هستند. قرقره‌ای صیقلی به بالای رأس مشترك نصب شده است ونخی ازشیارآن عبور کرده است. وزنه‌های مساوی به‌دو انتهای نخ‌متصل است. هروزنه برروی یکی ازسطوح قراردارد. اگریکی ازسطوح صیقلی ودیگری شیبدار باشد، ووزنه‌ای که برروی سطح صیقلی قرار دارد، درحال شروع‌حرکت به طرف پایین باشد، تعیین کنید چه رابطه‌ای میان زاویه‌های شیب دوسطح وجود دارد.

۱۵- دوسطح شیبدار، که ناصافی هردویکسان است، دارای یك رأس مشترك هستند و زاویه‌های شیب‌آنها با افق °۶۰ و °۳۰ است. براین دوسطح نقاطی مادی که جرم‌آنها به‌ترتیب ۲ kg و ۱ kg است قرار دارند. این دونقطهٔ مادی به‌وسیلهٔ نخ سبکی که ازشیار قرقرهٔ سبکی می‌گذرد که بالای دوسطح نصب شده است، به‌یکدیگر

متصل هستند. اگر وزنهٔ سنگینتر درحال شروع به حرکت بـه طـرف پایین باشد، نشان دهید که ضریب اصطکاك برابر $\sqrt{۳}۵ - ۸$ است.

۱۶- وزنه‌ای به‌جرم ۲۰ kg برسطح شیبدار ناصافی که با افق زاویهٔ °۲۲ می‌سازد، قرار دارد. حداقل نیروی لازم که به طرف پایین درامتداد سطح شیبدار وارد می‌شود و سبب حرکت وزنه می‌گردد، برابر ۲۴ N است. تعیین کنید: (الف) ضریب اصطکاك را؛ (ب) حداقل نیرویی را که درامتداد شیب سطح واردمی‌شود وسبب حرکت وزنه به طرف بالا می‌شود.

۱۷- درامتداد خط بزرگترین شیب یك سطح شیبدار ناصاف، که با افق زاویهٔ α می‌سازد، به کمك نیرویی برابر P که باقسمت بالای سطح زاویهٔ β می‌سازد، وزنه‌ای به‌جرم W به طرف بالاکشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاك برابر μ باشد، مقدار P راکه موجب می‌شود، وزنهٔ W درست درحال شروع به حرکت به‌طرف بالاگردد، تعیین کنید. کاری کـه به وسیلهٔ این نیروی P انجام می‌شود تا وزنهٔ W به اندازهٔ l در امتداد سطح شیبدار بالابرود، چقدراست؟ اگر $W = ۵۰\ \mathrm{N}$، $\alpha = ۱۵°$، $\beta = ۳۰°$، $\mu = ۰/۲۰$، $l = ۳۰\ \mathrm{m}$ باشد کار انجام شده را تعیین کنید.

۱۸- جسمی به‌وزن W که بر یك سطح شیبدار ناصاف قـراردارد، به‌وسیلهٔ نیروی افقی P نگاهداری می‌شود. این جسم را می‌توان به وسیلهٔ نیرویی برابر Q نیز، که در امتداد سطح شیبدار وبه‌طرف بالا بر وزنه وارد می‌شود، نگاهداری کرد. کسینوس زاویهٔ اصطکاك را فقط برحسب P، Q و W تعیین کنید.

۱۹- نقطه‌ای مادی به وزن W برسطح شیبدار ناصافی کـه زاویـهٔ آن با افق اززاویـهٔ اصطکاك بیشتر است، قراردارد. حداقل نیروی افقی لازم برای جلوگیری ازحرکت وزنه به طرف پایین سطح، برابر W است. حداقل نیروی افقی لازم برای تـولید حرکت به‌سمت بالا برابر $W\sqrt{۳}$ است. زاویـهٔ شیب و زاویـهٔ اصطکاك را تعیین کنید. بزرگی وجهت حداقل نیرویی که می‌تواند نقطهٔ مادی را بـه‌حال تعادل نگاه دارد تعیین کنید.

۲۰- دو وزنهٔ متساوی که به‌وسیلهٔ نخی به‌یکدیگرمتصل هستند، برسطح کره‌ای ناصاف به شعاع R، به‌حال‌سکونند. یکی‌ازوزنه‌ها دربالاترین نقطهٔ کره‌است. اگرزاویهٔ‌اصطکاك برابـر α باشد واز اصطکاك نخ بتوان صرف‌نظر کرد، بزرگترین طـول ممکن نخ‌را، تعیین کنید.

۲۱- قطعه چوبی به‌جرم ۲ kg برروی تخته‌ای‌افقی به‌طول ۱/۸ m واقع‌است. تجربه نشان داده است که وقتی کـه انتهای تخته به‌اندازهٔ ۰/۶ m بالا بیاید قطعه چوب

شروع به‌لغزش می‌کند. ضریب اصطکاک را تعیین کنید. اگر ارتفاع قائم انتهای تخته به $0/9\ m$ برسد، حداقل نیروی عمود بر تخته را که موجب نگاهداری تعادل می‌شود پیدا کنید.

۲۲- صفحه‌ای است که با افق زاویهٔ 30° می‌سازد. برروی آن وزنه‌ای به‌جرم $20\ kg$ قرار دارد. نیرویی را تعیین کنید که اگر به موازات صفحه بروزنه وارد شود ازلغزش وزنه به‌طرف پایین جلوگیری می‌کند. اگر صفحه ناصاف باشد و ضریب اصطکاک آن $\frac{1}{4}$ باشد، حداقل نیرویی که به‌موازات صفحه باید وارد کرد تا وزنه شروع به‌حرکت به طرف بالا بکند، چقدر است؟

۲۳- نیروی P که درامتداد سطح شیبدار ناصافی وارد می‌شود، برای نگاهداری جسم برروی صفحه کافی است. زاویهٔ اصطکاک که برابر λ است از α یعنی زاویهٔ شیب سطح کمتر است. ثابت کنید که حداقل نیرویی که در امتداد سطح برجسم وارد می‌شود و جسم را به طرف بالا شروع به کشاندن می‌کند برابر است با $P\frac{sin(\alpha+\lambda)}{sin(\alpha-\lambda)}$.

۲۴- جسمی به‌وزن W بر صفحهٔ شیبداری که زاویهٔ شیب آن با افق برابر α است قرار دارد. نشان دهید که حداقل بزرگی نیرویی که جسم را به‌طرف بالای سطح به‌حرکت در می‌آورد برابر $W sin(\alpha+\lambda)$ است که λ ضریب اصطکاک است. اگر جهت نیرو ثابت نگاه داشته شود، نشان دهید که اگر $\alpha > \lambda$ باشد، بزرگی نیرو را می‌توان تا $\frac{W sin(\alpha-\lambda)}{sin 2\lambda}$ کاهش داد تا جسم به‌طرف پایین سطح شروع به‌حرکت کند.

۱۱

استاتیک جسم صلب ـ نیروهای متوازی ـ گشتاور ـ زوج

۱۰۱۱. در بخش قبلی اثر نیروها را بـر یك نقطهٔ مادی مـورد توجه قرار دادیم. اکنو توجه خود را به اثر نیروها بر یك جسم صلب معطوف می‌داریم. بدیهی است که در ایر حالتها ممکن است مجبورباشیم براینددو نیرو را، که با هم موازی هستند و دریك راس نیستند، پیدا کنیم. چون چنین نیروهایی دریك نقطه برخورد نمی‌کنند، نمی‌توانیم برایند آنها رامستقیماً با استفاده از متوازی‌الاضلاع نیروها به‌دست آوریم. با این همه، با توج به قانون متوازی‌الاضلاع، بـه‌طوری کـه در دو بند بعدی بیان شده است، بـرایند چنیر نیروهایی را به‌دست می‌آوریم.

نیروهای متوازی راکه دریك جهت اثرمی‌کنند، همسو می‌نامیم، و وقتی نیروهای متوازی در جهتهای مخالف اثر می‌کنند، آنها را ناهمسو می‌نامیم.

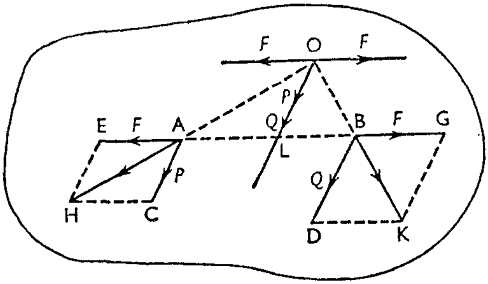
۲۰۱۱. تعیین برایند دونیروی متوازی همسوکه بریك جسم صلب اثرمی‌کنند

فرض می‌کنیم P و Q نیروهایی باشندکه بر نقاط A و B (شکل ۱۱ـ۱) از یك جسم اثر می‌کنند وفرض می‌کنیم که آنها را با خطوط AC و BD نمایش داده‌ایم.

در A و B دو نیروی مساوی و مخالف، F، در امتداد خط AB تولید می‌کنیم و آنهارا با AE و BG نمایش می‌دهیم. اعمال این نیروها درعمل نیروهای P و Q تغییری ایجاد نمی‌کنند، زیرا جسم را صلب فرض کرده‌ایم ونیروی F را که در A وارد می‌شود، می‌توان فرض کرد که به B منتقل شود و در آنجا با نیروی دیگر F به‌حال تعادل درآید. متوازی‌الاضلاعهای AEHC و BGKD را تکمیل مـی‌کنیم، و قطرهـای HA و KB را امتداد می‌دهیم تا در O یکدیگـر را قطع کنند. OL را بـه موازات AC یا BD رسم می‌کنیم تا AB را در L قطع کنند.

برایند نیروهای P و F در A با AH نمایش داده می‌شود که ممکن است فرض کرد

که در O اثر می‌کند. به همین طریق برایند Q و F در B با BK نمایش داده می‌شود که ممکن است فرض کرد که در O اثر می‌کند.



شکل ۱۱—۱

اکنون این نیروها را، که در O اثرمی‌کنند، به‌مؤلفه‌های P در امتداد OL، F به موازات AE و Q در امتداد OL، F به موازات BG، تجزیه می‌کنیم. دو نیروی F در حال تعادلند.

پس نیروهای اصلی P و Q معادل با نیروی $(P+Q)$ هستند که در امتداد OL اثر می‌کند، یعنی به موازات جهتهای اصلی P و Q و بر L واقع بر AB اثر می‌کند.

تعیین وضع نقطهٔ L

مثلثهای OLA و ACH متشابهند.

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LA}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CH}}=\frac{P}{F}$$

$$\therefore \quad P.\mathrm{LA}=F.\mathrm{OL} \qquad (۱)$$

مثلثهای OLB وBDKمتشابهند.

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LB}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DK}}=\frac{Q}{F}$$

$$\therefore \quad Q.\mathrm{LB}=F.\mathrm{OL} \qquad (۲)$$

بنابراین از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$P.\mathrm{LA}=Q.\mathrm{LB}$$

یعنی‌نقطهٔ L برخط AB ودر میان نقطه‌های A و B است و خط AB را به نسبت عکس نیروها تقسیم می‌کند.

بدیهی است که اگر $P=Q$ باشد، نقطهٔ L وسط خط AB است.

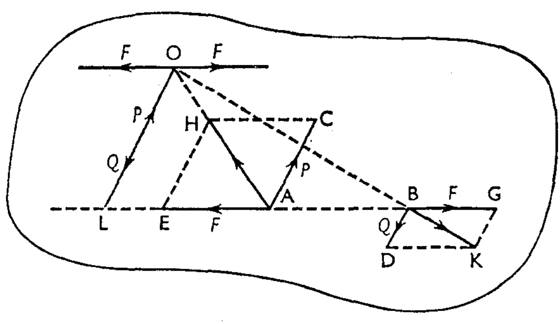
۳.۱۱. تعیین برایند دونیروی متوازی ناهمسوکه بر یك جسم صلب اثر می‌کنند

فرض می‌کنیم P و Q نیروهایی باشند (P نیروی بزرگتر باشد) که برنقاط A و B (شکل ۱۱-۲) از یك جسم صلب اثر می‌کنند و فرض می‌کنیم که آنها را با AC و BD نمایش داده‌ایم.

در A و B دو نیروی مساوی و مخالف، F، در امتداد خط AB تولید می‌کنیم و آنها را با AE و BG نمایش می‌دهیم.

چون جسم، صلب است این نیروها درحال تعادل خواهند بود و در عمل نیروهای P و Q تغییری ایجاد نمی‌کنند.

متوازی‌الاضلاعهای AEHC و BGKD را تکمیل می‌کنیم و قطرهای AH و KB را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در O قطع کنند (این قطرها همیشه، جز وقتی که موازی هستند، یعنی حالتی که P و Q مساوی هستند، یکدیگر را قطع می‌کنند).



شکل ۱۱-۲

OL را به‌موازات CA و BD رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در L قطع کند.
نیروهای P و F در A دارای برایندی هستندکه با AH نمایش داده می‌شود و می‌توان فرض کرد که در O اثرمی‌کند. به‌همین‌طریق Q و F در B دارای برایندی‌هستند که با BK نمایش داده می‌شود و می‌توان فرض کرد که آن نیز در O اثر می‌کند.

اکنون ممکن است این نیروها را در O به‌مؤلفه‌های P درامتداد LO، F به‌موازات AE و Q در امتداد OL و F به‌موازات BG تجزیه کرد.

دو نیروی F در حال تعادلند.

پس نیروهای اصلی P و Q معادل با نیرویی برابر $(P-Q)$ هستندکه در امتداد LO وارد می‌شود، یعنی به‌موازات P و همسو با P و در L، امتداد BA، وارد می‌شود.

تعیین وضع نقطهٔ L

مثلثهای OLA و HEA متشابهند.

$$\therefore \qquad \frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LA}}=\frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{EA}}=\frac{P}{F}$$

$$\therefore \qquad P.\,\mathrm{LA}=F\,.\,\mathrm{OL}$$

مثلثهای OLB وBDK متشابهند.

$$\therefore \qquad \frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LB}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DK}}=\frac{Q}{F}$$

$$\therefore \qquad Q\,.\,\mathrm{LB}=F\,.\,\mathrm{OL}$$

$$\therefore \qquad P.\,\mathrm{LA}=Q\,.\,\mathrm{LB}$$

یعنی L بر خط AB وخارج از نقطه‌های A و B است و خط AB را به نسبت عکس نیروها تقسیم می‌کند.

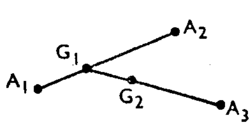
۴.۱۱. حالت خاص

در شکل مربوط به بند قبل، اگر $P=Q$ باشد، مثلثهای AEH و BGK از هر جهت متساوی هستند. دراین حالت $\angle\mathrm{HAE}=\angle\mathrm{GBK}$ است، بنابراین خطوط AH و KB متوازی خواهند شد ودرهیچ نقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع نمی‌کنند ونمی‌توان ترسیم را تا آخر ادامه داد. پس وقتی که دو نیروی مساوی و متوازی و ناهمسو بریك جسم صلب اثر می‌کنند، نیروی منفردی معادل‌آنها وجود ندارد.

چنین جفت نیرویی‌را زوج می‌نامند. زوج نیرورانمی‌توان‌با چیزی‌ساده‌ترجانشین کرد. خواص زوجها را بعداً (۱۱-۱۴ و ۱۲-۱۶) مورد توجه قرار خواهیم داد.

۵.۱۱. مرکز نیروهای متوازی

فرض می‌کنیم مجموعه‌ای از نیروهای متوازی وهمسوی $W_۱$، $W_۲$، $W_۳$، ... بر نقاط $\mathrm{A}_۱$، $\mathrm{A}_۲$، $\mathrm{A}_۳$، ... (شکل ۱۱-۳) وارد شوند.



شکل ۱۱-۳

برایندنیروهای W_1 و W_2 که بر A_1 و A_2 وارد می‌شوند، برابراست با W_1+W_2 و جهت دو نیرو هر چه باشد، همیشه از نقطه‌ای مانند G_1 که بر A_1A_2 واقع است می‌گذرد (به‌طوری که $W_1 . A_1G_1 = W_2 . G_1A_2$) به‌همین طریق برایند نیروهای متوازی و همسوی W_1+W_2 که بر G_1 وارد می‌شودو W_3 که بر A_3 وارد می‌شود $W_1+W_2+W_3$ است که همیشه از نقطه‌ای مانند G_2 واقع بر G_1A_3 می‌گذرد، به طوری که

$$(W_1+W_2)G_1G_2 = W_3 . G_2A_3$$

پس، به‌فرض‌آنکه همهٔ نیروها همسو و متوازی باشند، برایندآنها برابر مجموع نیروهاست و همیشه از نقطه‌ای می‌گذردکه وضع‌آن نسبت به‌نقاط A_1، A_2، ... ثابت است. وضع این نقطه به‌جهت مشترك نیروهای متوازی بستگی ندارد.

این نقطه را مرکز نیروهای متوازی می‌نامند و بدیهی است که استدلال فوق درهر مورد چه نیروها در یك صفحه باشند و چه نباشند، صادق است.

۶.۱۱. یکی ازکاربردهای مهم قضیهٔ بندقبل درمورد وزن یك جسم است. هرنقطهٔ مادی از ماده به‌طرف مرکز زمین جذب می‌شود. این نیروی جاذبه، متناسب با جرم‌نقطهٔ مادی است و وزن نامیده می‌شود (بند ۳-۱۵ را ببینید).

جسم‌را ممکن‌است متشکل ازنقاط مادی متعدد دانست، و اگرابعادجسم درمقایسه با زمین‌کوچك باشد، نیروهایی را که بر همهٔ نقاط مادی‌آن جسم وارد می‌شود، ممکن است تقریباً متوازی فرض‌کرد.

در مورد اجسامی‌که ابعادآن معمولی است، این نیروها را متوازی فرض خواهیم کرد.

بنابراین نقاط A_1، A_2، ... را در شکل ۱۱-۳ ممکن است نمایش دهندهٔ نقاط مادی یك جسم در نظرگرفت و چون وزنهای این نقاط مادی، مجموعه‌ای از نیروهای متوازی تشکیل می‌دهند، براینداین نیروها (که مساوی‌وزن‌جسم است) همیشه ازنقطه‌ای مانند G می‌گذردکه وضع‌آن نسبت به‌جسم ثابت است و بستگی به‌جهت جسم ندارد. این نقطه را مرکز ثقل یا مرکز جرم جسم می‌نامند.

وضع مرکز ثقل اجسامی که شکلهای متفاوت دارند در بخش ۱۶ مورد توجه قرار خواهدگرفت. درآنجا خواهیم دیدکه این نقطه لزومی نداردکه داخل جسم باشد ولی غالباً چنین است.

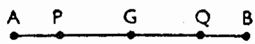
تعیین وضع این نقطه در مورد بعضی از اجسام بسیار ساده است، مثلاً تعیین مرکز ثقل یك میلهٔ باریك، یك‌مستطیل، یك متوازی‌الاضلاع یا یك مثلث بسیارساده است. چون این حالتها در بسیاری از مسائل روی می‌دهد، اکنون به‌مطالعهٔ آنها می‌پردازیم.

۷.۱۱. مرکز ثقل یك میلهٔ باریك یکنواخت

چون میله یکنواخت است، طولهای متساوی از آن، هرقدرهم کوچك باشند، دارای وزنهای متساوی هستند.

فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۱-۴) نشان دهندهٔ میله و G نقطهٔ وسط آن باشد.

نقطه‌ای مانند P بین A و G و نقطه‌ای مانند Q بین G و B اختیار می‌کنیم. به‌طوری که $PG=GQ$ باشد.



شکل ۱۱-۴

بدیهی است مرکزثقل نقاط مادی متساوی ازمیله که در P و Q واقعند در G است، زیرا برایند نیروهای متوازی وهمسو که در P و Q وارد می‌شوند از G می‌گذرد.

نیز برای هرنقطهٔ مادی مانند P که بین G و A است، نقطهٔ مادی متساوی با آن به‌فاصله‌ای متساوی از G بین G و B وجود دارد.

مرکز ثقل هر یك از این جفت نقاط مادی در G است و بنابراین مرکز ثقل تمام میله در G است.

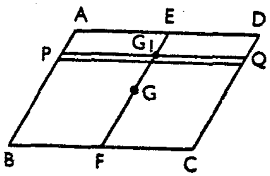
یادآوری می‌شود که جهتی که درآن جهت این نیروهای متوازی اعمال می‌شوند (اوزان‌نقاط مادی) تفاوتی ایجادنمی‌کند، یعنی‌برایند اوزان همهٔ نقاط مادی ازGمی‌گذرد، اگرچه وضع میله جا به‌جا شود.

۸.۱۱. مرکز ثقل تیغهٔ نازکی‌که به‌شکل متوازی‌الاضلاع است

فرض می‌کنیم $ABCD$ (شکل ۱۱-۵) متوازی‌الاضلاع باشد. فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع به‌عدهٔ بسیاری نوارهای بسیار باریك، نظیرPQ، به‌موازات AD، تقسیم شده باشد.

هر یك از این نوارها را می‌توان میلهٔ باریك یکنواختی تصورکرد و مرکز ثقل آن در نقطهٔ وسط آن یعنی G_1 خواهد بود.

پس مرکز ثقل کـل شکل، روی خطی‌واقع خواهد شدکه نقاط وسط این نوارها را به‌یکدیگر متصل می‌کند، یعنی روی خط EF که وسطهـای AD و BC را بـه هـم وصل



شکل ۱۱–۵

می‌کند، قرار دارد. بـه‌همین طریق و با این تصورکـه شکل به نوارهایی موازی با AB تقسیم شده است، مشاهده می‌شود که مرکزثقل باید برخطی واقع شود که وسطهای AB و DC را به‌یکدیگر متصل می‌کند.

بنابراین مرکزثقل در G، یعنی محل تلاقی این خطوط، خواهد بود. البته G نقطهٔ تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع نیز هست.

۹.۱۱. مرکز ثقل تیغهٔ مثلثی شکل نازك

فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱۱–۶) تیغهٔ مثلثی شکل باشد.

فرض می‌کنیم کـه این مثلث بـه‌عدهٔ بسیاری نوارهای بسیار نازك مانند B_1C_1 به موازات BC تقسیم شده است.

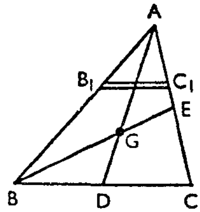
مرکز ثقل هر نوار درنقطهٔ وسط آن نوار است. پس مرکز ثقل همهٔ مثلث برخطی واقع می‌شودکه نقاط وسط نوارها را به‌هم وصل می‌کند، یعنی بر میانهٔ AD واقع است.

به‌همین طریق با فرض اینکه نوارها را بـه‌موازات AC بگیریم، مشاهده خواهیم کرد که مرکز ثقل بر میانهٔ BE واقع است. بنابراین مـرکز ثقل در G یعنی محل تلاقی میانه‌هاست.

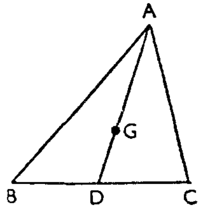
درهندسه دانسته‌ایم که‌این نقطه در $\frac{1}{3}$هر میانه ازقاعده است، یعنی $DG=\frac{1}{3}DA$.

۱۰.۱۱. مرکز ثقل هرتیغهٔ مثلثی شکل مانند مرکز ثقل سه نقطهٔ مادی متساوی است‌که در رئوس مثلث است.

فرض می‌کنیم ABC (شکـل ۱۱–۷)تیغه باشد. برایند نیروهای متوازی وهمسو،



شکل ۱۱ــ۶



شکل ۱۱ــ۷

که هر کدام برابر W است و بر B و C وارد می‌شوند، نیرویی است برابر $۲W$ که به موازات آنهاست و بر D نقطهٔ وسط BC اعمال می‌شود. برایند نیروهای $۲W$ که برD اعمال می‌شود و W که بر A اعمال می‌شود، نیرویی است برابر $۳W$ که بر G واقع بر AD اعمال می‌شود و نقطهٔ G جایی است که $AG = ۲GD$. پس G که مرکز ثقل سه نقطهٔ مادی‌متساوی است که درA، BوC قرار‌دارند برAD واقع است و$GD = \frac{۱}{۳}AD$ ، یعنی در همان نقطه‌ای است که مرکز ثقل تیغه است.

تمرین ۱۰۱۱

۱ ــ نیروهای متوازی‌همسوبه‌اندازه‌های N ۴۰وN ۷۰ برنقطه‌های A وBکه به‌فاصلهٔ ۲۲ cm از یکدیگرند، وارد می‌شوند. بزرگی برایند و نقطه‌ای راکه برایند AB را قطع می‌کند تعیین کنید. نیز اگر دونیروناهمسو بودند، بزرگی برایند و نقطه‌ای را که برایند آنها امتداد AB را قطع می‌کرد پیدا کنید.

۲ ــ نیروهای متوازی همسو به‌اندازه‌های ۹ و ۱۲ نیوتون بر نقطه‌های A و B که به فاصلهٔ ۴۲ cm ازیکدیگرند، وارد می‌شوند. بزرگی برایندآنها و نقطه‌ای را که برایندآنها، خط AB را قطع می‌کند، تعیین کنید. نیز اگر دو نیرو ناهمسو بودند، بزرگی برایند آنها و نقطه‌ای را پیدا کنیدکه این برایند، امتداد خط AB را قطع می‌کرد.

۳ ــ نیروهای متوازی ناهمسو به اندازه‌های ۱۲ و ۸ نیوتون بر نقطه‌های A و B که به فاصلهٔ ۱۲ cm از یکدیگرند، وارد می‌شوند. بزرگی برایند و نقطه‌ای را پیدا کنیدکه این برایند امتداد AB را قطع می‌کند.

۴ ــ بزرگی برایند دو نیروی متوازی همسو، که یکی از آنها N ۸ است، برابر N ۲۰ است‌واین برایند به‌فاصلهٔ ۶ cm ازنیروی N ۸ وارد می‌شود. بزرگی‌نیروی دیگر و فاصلهٔ راستای‌آن را از نیروی N ۸ تعیین کنید.

۵ ـ دو نیروی متوازی و همسو بر دو نقطه به‌فاصلهٔ ۴ متر ازیکدیگر وارد می‌شوند و برایند آنها $100\ N$ است که در فاصلهٔ ۱ متری از یکـی از نیروها وارد می‌شود. بزرگی این دو نیرو را تعیین کنید.

۶ ـ چهارنیروی متوازی همسو بر رئوس یك مربع وارد می‌شوند. نشان دهیدکه‌برایند آنها از مرکز مربع می‌گذرد.

۷ ـ سه نیروی متوازی همسو بر رئوس یك مثلث وارد می‌شوند. نشان دهیدکه برایند آنها از نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث می‌گذرد.

۸ ـ نیروهای متوازی همسو به‌بزرگی P، P و $2P$ به‌ترتیب بر رئوس A، B و C از مثلث ABC وارد می‌شوند. نشان دهیدکه برایندآنها از نقطهٔ وسط خطی که Cرا به نقطهٔ وسط AB وصل می‌کند می‌گذرد.

۹ ـ Pو Q نیروهـای متوازی همسو هستند. اگر Q بـه موازات خودش حرکت‌کند و مسافتی به‌اندازهٔ x طی‌کند، ثابت‌کنیدکه برایند P و Q به‌اندازهٔ $\dfrac{Qx}{P+Q}$ جابجا می‌شود.

۱۰ـ سه نیروی متوازی همسو بر نقاط وسط اضلاع یـك مثلث وارد می‌شونـد. دهیدکه برایندآنها از نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث می‌گذرد.

۱۱ـ نیروهای متوازی همسوبه‌بزرگیهای ۴، ۲،۴ واحد به‌ترتیب بررئوس A، B و C از مربع ABCD وارد می‌شوند. بزرگی نیروی متوازی دیگرکـه باید بر رأس D مربع وارد شود تا برایند چهار نیرو از مرکز مربع بگذرد چقدر است؟ اگر بر D نیروی متوازی همسویـی وارد شودکـه بزرگی‌آن ۵ واحد است، وضع راستای برایند را پیدا کنید.

۱۲ـ نیروهای متوازی همسو به‌بزرگی ۲، ۵، ۳ نیوتون به‌ترتیب بر رئوس A، B وC از مثلـث ABC وارد مـی‌شوند. در ایـن مثلث $AB=4\ cm$، $BC=3\ cm$، $CA=5\ cm$ است. راستای برایند را تعیین کنید.

۱۱.۱۱. گشتاور یك نیرو

یك مجموعهٔ نیروکه بر یك جسم صلب اثر می‌کنند ممکن است مایل باشندکه آن‌جسم را بچرخانند.

اگر تنها یك نیرو بر جسم صلبی‌کـه یك نقطهٔ آن ثابت است، وارد شود، در این صورت، جز در حالتی‌که راستای نیرو از نقطهٔ ثابت جسم می‌گـذرد، جسم مایل است که

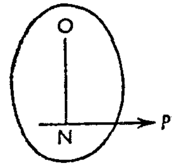
حول‌آن نقطه بچرخد*. ایـن موضوع، تصور اثر چرخانندگی یا گشتاور یك نیرو را، که معمولاً به‌صورت زیر بیان می‌شود، به‌وجود می‌آورد:

گشتاوریك نیرو حول یك نقطهٔ معین برابر است با حاصل ضرب نیرو در فاصلهٔ قائم آن نقطه از راستای نیرو.

پس گشتاورنیروی P، که راستای‌آن مطابق‌شکل ۱۱ــ۸ است، حول نقطهٔ O، برابر است با $P \times \mathrm{ON}$ که ON فاصلهٔ قائم O از راستای P است.

بدیهی است که اگر راستای P از نقطهٔ O بگذرد، گشتاورآن حول‌این نقطه‌صفراست.

اگر O نقطه‌ای ثابت از جسم باشد، که مقطع آن با یك صفحه، شامل O است و راستای P همان راستایی باشدکه در شکل نشان داده شده است، حـاصل‌ضرب $P \times \mathrm{ON}$ اندازهٔ تمایل P را به‌چرخاندن جسم در حول O نشان می‌دهد. قدرت چرخانندگی چه با افزایش P و چه با افزایش فاصله ازO افزایش‌می‌یابد.



شکل ۱۱ــ۸

گشتاور یك نیروحول یك نقطهٔ معین ممکن است مثبت یا منفی باشد و این بستگی به‌آن داردکه نیرو در چه جهتی مایل است جسم را حول‌آن نقطه بچرخاند.

در شکل بالا نیروی P مـایـل است کـه جسم را در جهتـی مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند. دراین حالتها گشتاور را مثبت می گویند. اگر نیرو مایل‌باشد که جسم را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند، گشتاور را منفی می گویند.

وقتی که‌چندنیرو بریك‌جسم‌وارد می‌شوند، مجموع جبری‌گشتاورهای‌آنها را با تعیین مقدارگشتاور هرنیرو و با توجه به‌علامت‌آن وافزودن‌آنها به‌یکدیگر، به‌دست می‌آوریم.

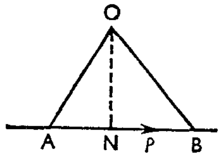
گشتاوریك نیرو، هم دارای بزرگی است و هم دارای جهت است، و بنابراین یك کمیت برداری است.

واحد گشتاوریك‌نیرو برابر است با واحد نیرو ضرب در واحدطول، یعنی نیوتون ــ متراست.

* درست‌تر آن که، در نقطه‌ای که جسم ثابت است، نیروهای دیگر وارد عمل می‌شوند.

۱۲.۱۱. نمایش ترسیمی یك گشتاور

اگر طول AB که در راستای نیروی P است (شکل ۱۱-۹) معرف بزرگی P باشد، در این صورت گشتاور P حول O با $\mathrm{AB} \times \mathrm{ON}$ نشان داده می‌شود.



شکل ۱۱-۹

اما مساحت مثلث AOB برابر است با $\frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{ON}$، بنابراین دو برابر مساحت مثلث AOB برابر گشتاور P حول نقطهٔ O است. اکنون می‌توانیم با استفاده ازاین روش ترسیمی که برای نمایش گشتاور به‌کار برده می‌شود، قضیهٔ اساسی گشتاورهای نیروهای متقارب را ثابت کنیم.

۱۳.۱۱. مجموع جبری گشتاورهای دو نیرو حول هر نقطه‌ای که در صفحهٔ آن نیروها باشد، برابر است با گشتاور برایند آن نیروها حول آن نقطه. (قضیهٔ وارینیون)

دو حالت وجود دارد که باید در نظر گرفت:

(۱) فرض می‌کنیم که نیروها در یك نقطه برخوردکنند.

فرض می کنیم که نیروهای P و Q، مطابق شکلهای ۱۱-۱۰ الف و ب، بر A وارد شوند و نیز O نقطه‌ای است واقع در صفحهٔ این دو نیرو.

OC را به‌موازات امتداد P رسم می کنیم تا راستای Q را در C قطع کند. فرض می کنیم که AC نشان دهندهٔ بزرگی Q و با همین مقیاس AB نشان دهندهٔ P باشد. متوازی‌الاضلاع ABCD را تکمیل می کنیم، و OA را به OB وصل می کنیم.

AD نشان دهندهٔ R برایند P و Q است.

در هر یك از شکلها،

گشتاور P حول O با $2\triangle\mathrm{AOB}$ نمایش داده می‌شود،

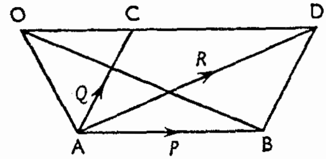
گشتاور Q حول O با $2\triangle\mathrm{AOC}$ نمایش داده می‌شود،

گشتاور R حول O با $2\triangle\mathrm{AOD}$ نمایش داده می‌شود،

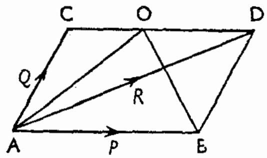
نیز $\triangle\mathrm{AOB} = \triangle\mathrm{ADB} = \triangle\mathrm{ADC}$.

درشکل ۱۱-۱۰ الف، گشتاورها هردو مثبت هستند و مجموع جبری آنها به‌صورت

زیر نمایش داده می‌شود:



شکل ۱۱ـ۱۰ الف



شکل ۱۱ـ۱۰ ب

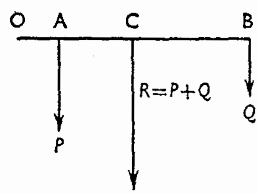
$$۲\triangle AOB + ۲\triangle AOC = ۲\triangle ADC + ۲\triangle AOC$$
$$= ۲\triangle OAD = R \text{ گشتاور}$$

در شکل ۱۱ـ۱۰ ب، گشتاورها در جهتهای مخالفند، یعنی گشتاور P مثبت و گشتاور Q منفی است؛ مجموع جبری آنها به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

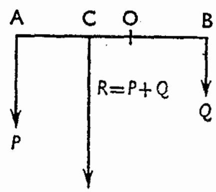
$$۲\triangle AOB - ۲\triangle AOC = ۲\triangle ADC - ۲\triangle AOC$$
$$= ۲\triangle OAD = R \text{ گشتاور}$$

(۲) فرض می‌کنیم که نیروها متوازی باشند.

فرض می‌کنیم P و Q نیروهای متوازی‌ای باشند که مطابق شکلهای ۱۱ـ۱۱ الف و ب وارد می‌شوند و O نقطه‌ای از صفحهٔ آنها باشد.



شکل ۱۱ـ۱۱ الف



شکل ۱۱ـ۱۱ ب

OAB را عمود بر نیروها رسم می‌کنیم تا راستاهای آنها را در نقطه‌های A و B قطع کند.

برایند R (که مساوی $P+Q$ است) بـه موازات P و Q است، و بر نقطهٔ C از AB طوری وارد می‌شود که

$$P \,.\, AC = Q \,.\, CB$$

در شکل ۱۱ـ۱۱ الف، مجموع جبری گشتاورهای P و Q حول O برابر است با

$$
\begin{aligned}
& P \cdot \mathrm{OA}+Q \cdot \mathrm{OB} \\
&= P(\mathrm{OC}-\mathrm{AC})+Q(\mathrm{OC}+\mathrm{CB}) \\
&= (P+Q)\mathrm{OC}-P \cdot \mathrm{AC}+Q \cdot \mathrm{CB} \\
&= (P+Q)\mathrm{OC} \\
&= \text{گشتاور } R \text{ حول O}
\end{aligned}
$$

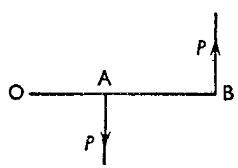
در شکل ۱۱-۱۱ب، مجموع جبری گشتاورهای P و Q حول O برابر است با

$$
\begin{aligned}
& P \cdot \mathrm{OA}-Q \cdot \mathrm{OB} \\
&= P(\mathrm{OC}+\mathrm{AC})-Q(\mathrm{BC}-\mathrm{OC}) \\
&= (P+Q)\mathrm{OC}+P \cdot \mathrm{AC}-Q \cdot \mathrm{BC} \\
&= (P+Q)\mathrm{OC} \\
&= \text{گشتاور } R \text{ حول O}
\end{aligned}
$$

۱۴.۱۱. **اگر نیروها تشکیل یك زوج بدهند برایند وجود ندارد و قضیه صادق نیست.** در این حالت به آسانی می‌توان ثابت کرد که مجموع گشتاورهای نیروهایی که تشکیل یك زوج نیرو را داده‌اند، حول هر نقطه‌ای که در صفحهٔ این نیروها واقع باشد، مقداری است ثابت.

فرض می‌کنیم P، P زوج نیرویی باشد که مطابق شکل ۱۱-۱۲ وارد شده‌اند و O نقطه‌ای از صفحهٔ این دو نیرو باشد.

OAB را عمود بر این دو نیرو رسم می‌کنیم تا راستاهای آنها را در A و B قطع کند.



شکل ۱۱-۱۲

مجموع گشتاورها حول O برابر است با

$$
\begin{aligned}
& P \cdot \mathrm{OB}-P \cdot \mathrm{OA} \\
&= P\,(\mathrm{OB}-\mathrm{OA}) \\
&= P \cdot \mathrm{AB}
\end{aligned}
$$

یعنی بستگی به‌محل نقطهٔ O ندارد.

حاصل‌ضرب $P \cdot \mathrm{AB}$، که در آن P بزرگی هر یك از نیروهای زوج است، و AB

فاصلهٔ قائم میان نیروهاست، گشتاور زوج نامیده می‌شود.

باید توجه داشت که گشتاور یك زوج برابر است با گشتاور هر یك از دو نیروی زوج حول هر نقطه‌ای که بر راستای نیروی دیگر واقع است و بسته به جهت دوران زوج، ممکن است مثبت یا منفی باشد.

۱۵۰۱۱. واضح است که قضیهٔ وارینیون را می‌توان برای هر چند نیرو که دارای یك برایند باشند، تعمیم داد. زیرا قضیه برای هر دو نیرویی که تشکیل زوج نیرو نمی‌دهند صادق است. بنابراین برای برایند این دو نیرو و نیروی دیگر، اگر با هم تشکیل زوج ندهند، صادق است. همین طور برای برایند دو نیروی اخیر با نیروی دیگر با همان شرایط صادق است. پس قضیه برای آخرین نیرو و برایند بقیهٔ نیروها صادق است و می‌توان اصل گشتاورها را به‌صورت زیر بیان کرد:

اگر چند نیروی واقع در یك صفحه بر یك جسم صلب وارد شوند و دارای برایند باشند، مجموع جبری گشتاورهای آنها حول هر نقطه‌ای، واقع در صفحهٔ نیروها، برابر است با گشتاور برایندشان حول این نقطه.

۱۶۰۱۱. اگر دستگاهی از نیروهای واقع در یك صفحه در حال تعادل باشند، برایندشان صفر است، و بنابراین گشتاور آنها حول هر نقطه باید صفر باشد.

پس، وقتی که یك دستگاه نیروهای واقع در یك صفحه درحال تعادل باشند، مجموع جبری گشتاورهای آنها حول هر نقطهٔ واقع در صفحهٔ آنها صفر است.

لزوماً عکس این مطلب درست نیست. زیرا گشتاور نیرو نسبت به هر نقطه‌ای که بر راستای نیرو واقع است صفر است، پس گشتاور یك دستگاه نیروهای واقع در یك صفحه، حول هر نقطه‌ای که بر راستای نیروی برایند واقع است صفر است. بنابراین وقتی که می‌گوییم مجموع گشتاورهای یك دستگاه نیروهای واقع در یك صفحه حول یك نقطه صفر است، لازم نیست که آن دستگاه به‌حال تعادل باشد، چه ممکن است که این نقطه بر راستای برایند دستگاه واقع باشد.

تمرین ۲۰۱۱

۱ - ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر ۸ cm است. نیروهای ۲، ۴ و ۸ نیوتون در امتداد اضلاع AB، BC و CA اثر می‌کنند. گشتاور این دستگاه نیروها را حول هر یك از رئوس مثلث تعیین کنید.

۲ ـ چهار نیرو که بزرگی آنها ۳، ۴، ۵ و ۶ نیوتون است به ترتیب در امتداد اضلاع مربعی به‌ضلع $20\ cm$ و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت اثرمی کنند. گشتاورهای این نیروها را حول: (الف) مرکز مربع، (ب) محل تلاقی نیروهای $3\ N$ و $6\ N$ به‌دست‌آورید.

۳ ـ درامتداد اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع $2\ m$ نیروهای ۴، و ۶ نیوتون به‌ترتیب در جهتهای BC، CA و AB اثر می کنند. مجموع گشتاورهای این نیروها را حول نقطهٔ تلاقی میانه‌های این مثلث تعیین کنید.

۴ ـ نیروهای ۲، ۴، ۲ و ۴ نیوتون به‌ترتیب درامتداد اضلاع AB، CB، DC و DA ازمربع $ABCD$ به‌ضلع $3\ m$ اثرمی کنند. مجموع گشتاورهای این نیروها راحول: (الف) مرکز مربع، (ب) نقطهٔ A، به‌دست‌آورید.

۵ ـ بر یك خط افقی ازچپ به‌راست به‌ترتیب نقاط A، B، C و D قرار گرفته‌اند. فاصلهٔ هریك ازاین نقاط ازنقطهٔ مجاور $1\ m$ است. بر B نیرویی برابر $2\ N$ و عمود بر AD به‌طرف پایین اثرمی‌کند. بر C نیرویی برابر $4\ N$ به‌طرف بالا طوری اثر می‌کند که با جهت CD زاویه 30° می‌سازد. بر D نیرویی معادل یك نیوتون عمود بر AD به طرف بالا اثر می‌کند. مجموع گشتاورهای این نیروها را حول (الف)A، (ب)C تعیین کنید.

۶ ـ نیروهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نیوتون به‌ترتیب در امتداد اضلاع AB، BC، CD، DE، EF و FA از یك شش ضلعی منظم وارد می‌شوند. اگر طول ضلع این شش ضلعی $2\ cm$ باشد، مجموع گشتاورهای نیروها را حول: (الف) مرکز شش ضلعی، (ب)A تعیین کنید.

۱۷.۱۱. اصل گشتاورها اهمیت فوق‌العاده دارد و پیوسته در بقیهٔ کتاب از آن استفاده خواهد شد. دراین بخش، مورد استفادهٔ آن‌را درچندحالت ساده درنظر می گیریم، که درآن میله‌ای صلب بر تکیه‌گاههایی قراردارد یا حول لولایی می‌چرخد و برآن‌علاوه‌بر نیروی وزن، نیروهای دیگری وارد می‌شوند.

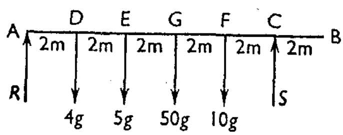
به‌جای آنکه مجموع جبری گشتاورها را برابر صفر بگیریم، غالباً بهتر است که مجموع جبری گشتاورهایی را که در یك جهت حول نقطه‌ای اثر می کنند با مجموع جبری گشتاورهایی که در جهت مخالف حول‌آن نقطه اثر می کنند برابر بگیریم.

باید دراینجا توجه داشت که اصل گشتاورها ونتیجه‌هایی را که‌ازآن به‌دست‌می‌آید، و بعداً در این بخش ذکر خواهد شد، می‌توان به‌طور تجربی تحقیق کرد، وآن با اعمال

نیروهای معین بر یك جسم صلب، نظیر یك میله، و اندازه‌گیریهای مناسب امکانپذیر است. همان طور که در بند ۱۰-۵ پیشنهاد شد، اصل گشتاورها را می‌توان به‌عنوان مبنای استاتیك به‌کار برد و در واقع علم استاتیك از این نقطه شروع به‌گسترش کرده است.

مثال۱: میلهٔ یکنواخت AB، به‌طول ۱۲ مترو جرم ۵۰ kg برروی دو پایه قراردارد. یکی‌ازپایه‌ها درA ودیگری در دومتری B است.وزنه‌های۵،۴ و۱۰ کیلوگرمی به‌ترتیب در ۲ متری، ۴ متری و ۸ متری از A متصل شده‌اند. نیروهایی را تعیین کنیدکه برپایه‌ها فشار می‌آورند.

حل: فرض می‌کنیم C (شکل ۱۱-۱۳) محل پایهٔ دیگراست و G مرکزثقل میله‌است و D، E، F نقطه‌هایی هستندکه وزنه‌هابه‌آنها متصل شده‌اند، وعکس‌العملهای در A و B برابر R و S نیوتون هستند.



شکل ۱۱—۱۳

وزن میله برابر ۵۰ g N است و بر G وارد می‌شود. وزنهایی که بر D، E، F واردمی‌شوند به‌ترتیب g ۴، g ۵ و g ۱۰ هستند.

حول A گشتاور می‌گیریم،

$$
\begin{aligned}
۱۰S &= ۴g\times ۲ + ۵g\times ۴ + ۵۰g\times ۶ + ۱۰g\times ۸\\
&= (۸+۲۰+۳۰۰+۸۰)g\\
&= ۴۰۸g\\
\therefore \quad S &= ۴۰/۸g = ۳۹۹/۸
\end{aligned}
$$

حول C گشتاور می‌گیریم،

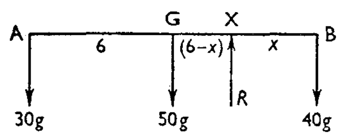
$$
\begin{aligned}
۱۰R &= ۱۰g\times ۲ + ۵۰g\times ۴ + ۵g\times ۶ + ۴g\times ۸\\
&= (۲۰+۲۰۰+۳۰+۳۲)g\\
&= ۲۸۲g\\
\therefore \quad R &= ۲۸/۲g = ۲۷۶/۴
\end{aligned}
$$

چون می‌دانیم که مجموع R و S باید مساوی مجموع همهٔ وزنها (حتی

وزن میله) باشد، ممکن بود که R را با تفریق کردن S ازمجموع وزنها (یعنی $69\,g$) به‌دست‌آوریم. اما عملاً بهتر است که هریك از عکس‌العملها را جداگانه به‌دست‌آوریم و ازاین واقعیت که مجموع آنها باید برابرمجموع وزنها باشدبرای تحقیق درستی جوابهای به‌دست‌آمده استفاده کنیم، چه اگر اشتباهی در محاسبات عکس‌العمل اول رخ داده باشد، هردوجواب غلط خواهند بود.

مثال۲: میلهٔ یکنواختی‌است‌به‌طول ۱۲ m وجرم ۵۰ kg. وزنه‌های ۳۰ و ۴۰ کیلوگرمی به‌دو انتهای میله متصل شده‌اند. درچه نقطه‌ای از میله باید پایه‌ای قرار داد تا میله به‌طور افقی قرار گیرد؟

حل: فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۱-۱۴) نمایش میله وG مرکز ثقل‌آن باشد. نقطهٔ مطلوب X، نقطه‌ای است که گشتاورهای وزنه‌های ۳۰، ۴۰، و ۵۰ کیلوگرم، حول آن به‌حال تعادلند. بنابراین باید در X بر میله نیرویی برابر R اعمال شود ومیله را نگاه دارد. R باید قائم وبرابر ۱۲۰ g N باشد.



شکل ۱۱-۱۴

فرض می‌کنیم BX برابر x متر باشد. حول X گشتاور می‌گیریم،

$$۴۰x = ۵۰(۶-x) + ۳۰(۱۲-x)$$
$$= ۳۰۰ - ۵۰x + ۳۶۰ - ۳۰x$$
$$\therefore \quad ۱۲۰x = ۶۶۰$$
$$\therefore \quad x = ۵/۵\ \mathrm{m}$$

محل X را می‌توانیم با تعیین گشتاورهای همه‌نیروها حول‌یکی ازدوانتهای میله به‌دست‌آوریم.

پس، حول B گشتاور می‌گیریم،

$$Rx = ۵۰\,g \times ۶ + ۳۰\,g \times ۱۲$$
$$= (۳۰۰ + ۳۶۰)\,g$$
$$\therefore \quad ۱۲۰x = ۶۶۰$$
$$\therefore \quad x = ۵/۵\ \mathrm{m}$$

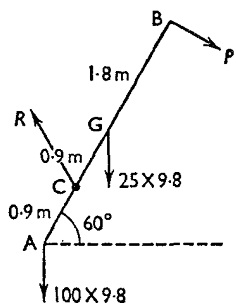
مثال۳: میلهٔ یکنواخت AB، بـه طول ۳/۶ m و جرم ۲۵ kg در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۰/۹ m از A لولا شده است. وزنه‌ای به‌جرم ۱۰۰ kg از A آویزان است. چه نیرویی باید بر B و درجهت عمود بر میله وارد شود تا میله به‌حال تعادل طوری قرار گیرد که A زیر B باشد و زاویهٔ AB با افق برابر °۶۰ باشد؟

حل: فرض می‌کنیم G (شکل ۱۱–۱۵)، نقطهٔ وسط میله و C محل لولا باشد. فرض می‌کنیم عکس‌العملی که در لولا بر میله وارد می‌شود R نیوتون باشد.

میله‌هنگامی به‌حال تعادل است که مجموع گشتاورهای وزن‌میله که به‌طور قائم‌بر G وارد می‌شود ونیروی P نیوتون که‌بر B عمود برAB وارد می‌شود، حول نقطهٔ C برابر گشتاورنیروی ۹۸۰N حول C باشد.

برای به‌دست‌آوردن گشتاورهای نیروهاحول C بایدفاصله‌های قائم‌راستاهای آنها را از C تعیین کنیم.

فاصلهٔ قائم راستای ۹۸۰ N برابراست با ۰/۴۵ m = °۰/۹cos۶۰، و این برابر فاصلهٔ راستای نیروی ۲۴۵ N نیز هست.



شکل ۱۱–۱۵

فاصلهٔ قائم راستای P از C برابر است‌با ۲/۷ m

$$\therefore \qquad ۲/۷P + ۲۴۵ \times ۰/۴۵ = ۹۸۰ \times ۰/۴۵$$

$$\therefore \qquad ۲/۷P = ۷۳۵ \times ۰/۴۵$$

$$\therefore \qquad P = ۱۲۲/۵$$

تمرین ۱۱·۳

۱ ـ میله‌ای یکنواخت به طول ۱/۸ m و جرم ۱۰ kg به‌طور افقی بر دو پایه در دو انتهای خود قرار دارد. اگر وزنه‌ای به‌جرم ۳ kg به‌نقطه‌ای در ۱/۲ m از یکی

از دو انتهای میله متصل شود، تعیین کنید که چه نیرویی بر پایه‌ها فشار می‌آورد.

۲ ـ میلهٔ یکنواخت AB به‌طول ۱۰m و جرم ۴۰ kg برروی دوپایه قرار دارد. یکی از پایه‌ها در A و دیگری در ۲ متری B است. اگر وزنه‌ای بـه جرم ۲۰ kg به ۶ متری نقطهٔ A به‌میله متصل شود، نیروهایی را کـه بر پـایـه‌ها فشار می‌آورد تعیین کنید.

۳ ـ دو نفر وزنه‌ای به‌جرم ۱۰۰ kg را که از میله‌ای سبک‌آویزان است حمل می‌کنند. بلندی میله ۲/۴ m است و هر یك از دوانتهـای میله بر روی شانـهٔ یکی از دو نفر قرار دارد. وزنه از نقطه‌ای از میله آویـزان شده است‌کـه بـه‌یکی از دو نفر ۰/۶ m نزدیکتراست. نیرویی که برشانهٔ هریك ازدونفر فشارمی‌آورد چقدراست؟

۴ ـ میلهٔ یکنواختی است بـه‌طول ۳ مترکـه به‌یکی از دو انتهای آن وزنه‌ای به جرم ۲۵ kg آویزان است. این‌میله حول نقطه‌ای‌کـه در ۰/۹ متری این انتهاست در وضع افقی قرار دارد. وزن میله را تعیین کنید.

۵ ـ ازمیلهٔ AB به‌طول ۱/۸ m، وزنه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ کیلوگرم آویزانند. جرم میله ۳ kg است. دوانتهای این میله برروی دو پایه واقع است. وزنه‌های‌مذکور به‌ترتیب در ۰/۳ m، ۰/۶ m، ۰/۹ m، ۱/۲ m و ۱/۵ m از A آویزانند. نیروهایی را که بر پایه‌ها فشار می‌آورند تعیین کنید.

۶ ـ وزنه‌های ۱ kg، ۲ kg، ۳ kg و ۴ kg ازمیلهٔ یکنواختی‌به‌طول ۱/۵ مترکه جرم آن ۳ kg است‌آویزانند. فاصله‌های این‌وزنه‌ها ازیکی ازدوانتهابه‌ترتیب ۰/۳ m، ۰/۶ m، ۰/۹ m و ۱/۲ m هستند. محل نقطه‌ای را پیدا کنید که میله حول‌آن نقطه به‌حال تعادل خواهد بود.

۷ ـ بزرگی و راستای برایند نیروهای متوازی ۳، ۶ و۸ واحد را که در یك جهت و نیروی ۱۲ واحد را که در جهت مخالف به ترتیب بر نقاط A، B، C و D وارد می‌شوند تعیین کنید. نقاط A، B، C وD بـر یك استقامت واقعند و AB = ۱ m، BC = ۳ m، CD = ۵ m.

۸ ـ میلهٔ AB به‌طول ۳ m وجرم ۶ kg در A و نقطه‌ای دیگر بر روی دو پایه قرار دارد. وزنه‌ای‌به‌جرم ۱ kg به Bآویزان است. وزنه‌های ۵ kg و ۴ kg به‌ترتیب در ۱ متری و ۲ متری B آویزانند. اگر نیرویی‌که بر پایهٔ A فشارمی‌آورد ۴۰ N باشد، پایهٔ دیگر درکجا واقع است؟

۹ ـ میلهٔ یکنواخت سنگینی به‌طول ۳/۶ m وجرم ۳۰ kg با دونخ قائم به‌وضع افقی آویزان است. هریك ازاین نخها فقط می‌توانند حداکثر، کششی‌برابر ۱۹۶ N تحمل

کنند. در چه فاصله‌ای از مرکز می‌توان وزنه‌ای به‌جرم ۷/۵ kg آویزان کرد بی‌آنکه هیچ یك از نخها پاره شوند.

۱۰- میلهٔ یکنواخت AB به‌جرم ۳ kg و طول ۷۵ cm برروی دو پایهٔ C و D، که به فاصله‌های ۱۰ cm و ۶۰ cm از A واقعند، قراردارد، برنقاط E و F که به‌ترتیب به‌فاصله‌های ۲۰ cm و ۵۰ cm از A واقعند، به‌ترتیب وزنه‌هایی به‌جرم ۷ kg و ۲ kg آویزان‌می‌کنیم. عکس‌العملهایی‌راکه در C و D واردمی‌شوند و گشتاورهمهٔ نیروهایی را که در طرف راست نقطهٔ وسط میله وارد می‌شوند، حول این نقطه تعیین کنید.

۱۱- میله‌ای یکنواخت، به طول ۱/۸ m و جرم ۱ kg است. دو انتهای این میله بر روی دو پایه قرار دارد و میله در وضع افقی است. هر یك از پایه‌ها حداکثر می‌تواند وزنه‌ای به‌جرم ۶ kg را تحمل کند و بیشتر از‌آن را نمی‌تواند تحمل کند. تعیین کنید درچه قسمتی از میله می‌توان وزنه‌ای به‌جرم ۸/۵ kg قرارداد، بدون آنکه پایه‌ها ازهم بپاشند.

۱۲- مسافری به وزن W در داخل اتوبوسی است که فاصلهٔ میان فنرهای عقبی آن با فنرهای جلویی آن برابر b است. ثابت کنیدکه اگر این مسافر، در داخل اتوبوس، مسافتی برابر a جلو برود، وزنی معادل $W\dfrac{a}{b}$ از روی فنرهای عقبی به فنرهای جلویی منتقل می‌شود.

۱۳- میلهٔ یکنواختی به‌طول ۰/۶ m و جرم ۱۷ kg با دونخ قائم آویزان است. یکی از نخها در ۷/۵ cm از یکی از دو انتها بسته شده است و حداکثر می‌تواند وزنه‌ای به جرم ۹ kg تحمل کند. نخ دیگر، که حداکثر می‌تواند وزنه‌ای به جرم ۱۰ kg تحمل کند، در۱۰ سانتیمتری انتهای دیگربسته شده است. اکنون وزنه‌ای به جرم ۱/۷kg به‌میله متصل می‌کنیم. حدود محلهایی‌راکه این وزنه را می‌توان به‌میله متصل‌کرد بدون‌آنکه نخها پاره شوند، تعیین‌کنید.

۱۴- نیروهای متقارب ۱۰، ۳، ۷ واحدکه در یك صفحه واقعند، به طور قائم به‌طرف بالا وارد می‌شوند. فاصلهٔ این نیروها از نقطهٔ ثابت O، که در صفحهٔ آنها واقع است، به‌ترتیب ۵، ۹—، و ۲متراست. فاصله‌ها ازچپ‌به‌راست نقطهٔ O مثبت‌فرض شده‌اند. نیرویی برابر ۲۰ واحد به‌طور قائم و به‌طرف پایین بر نقطهٔ O وارد می‌شود. برایند را تعیین‌کنید. اگر نیرویی که‌از O می گذرد برابر ۳۰ واحد شود، برایند چقدر خواهد شد؟

۱۵- مرکز ثقل میلهٔ AB به‌طول $a+b$ و وزن W در فاصلهٔ a از A است. این میله بر روی لبه‌های دو چاقوی متوازی که به‌فاصلهٔ c از یکدیگرند و لبه‌های آنها در همان صفحهٔ افقی میله است قرار دارد. دوجزءِ میله که خارج از هر لبهٔ چاقو است با هم برابرند. ثابت کنید که نیروهایی که بر لبه‌های چاقوها فشار وارد می‌آورند به ترتیب برابرند با

$$\frac{(a-b+c)\,W}{۲\,c} \quad \text{و} \quad \frac{(b-a+c)\,W}{۲\,c}$$

۱۶- میلهٔ یکنواخت سنگینی به‌جرم ۱۰ kg و طول ۱/۲ m دروضعی متقارن بر روی دو پایه که به‌فاصلهٔ ۰/۹m از یکدیگرند قرار دارد. اکنون وزنه‌ای به‌جرم ۲ kg به‌یکی از دو انتهای میله آویزان می‌کنیم. نیرویی را که بر هر یك از دو پایه فشار وارد می‌آورد تعیین کنید.

۱۷- میلهٔ افقی‌سبکی به‌طول ۳۰ cm برروی دوپایهٔ قائم، که هریك به‌فاصلهٔ ۷/۵ cm از یك انتهای میله است، قرار دارد. به‌هر یك از دو انتهای میله وزنه‌ای به جرم ۱۶ kg آویزان است. چه وزنه‌هایی به‌دو انتها آویزان‌کنیم تا نیرویی که بر یکی از پایه‌ها فشارمی‌آورد دوبرابر و نیرویی که برپایهٔ دیگر فشارمی‌آورد نصف‌نیرویی باشدکه از طرف وزنهٔ ۱۶ kg وارد می‌شد.

۱۸- ۴ متر از تخته چوبی به طول ۱۲ متر و جرم ۱۰۰ kg بیرون از لبهٔ پشت بام است. چه وزنه‌ای باید بر روی انتهای دیگر چوب قرار داد تا شخصی به جرم ۷۵ kg بتواند بدون‌آنکه‌چوب به‌طرف پایین شیب پیداکند روی چوب قدم‌بزند؟

۱۹- تیر افقی ABCD بر روی دو پایه در B و C قرار دارد. AB=BC=CD. معلوم شده است که اگر وزنه‌ای به جرم p کیلوگرم از A یا وزنه‌ای به جرم q کیلوگرم از D آویزان شود، تیر تعادل خود را از دست می‌دهد. جرم تیرآهن را تعیین کنید و ثابت کنید که مرکز ثقل آن AD را به نسبت $۲p+q$ به $p+۲q$ تقسیم می‌کند.

۲۰- طول تیریکنواخت AB برابر ۱/۸ m و جرم آن ۲۴ kg است. این تیر برروی دو پایهٔ قائم در C و D قرار دارد. CD برابر ۰/۹ m است و نیرویی که بر C فشار می‌آورد دو برابر نیرویی است که بر D فشار می‌آورد. طولهای AC و DB را، به‌فرض اینکه A به C نزدیکتر است تا به D، تعیین کنید.

۲۱- تیر یکنواختی که در وضعی افقی قرار دارد، در نقطه‌ای به‌فاصله ۰/۶ m از یك انتها بر روی پایه‌ای قراردارد و به‌این انتها وزنه‌ای به‌جرم ۱۰ kg آویزان‌است.

نیرویی که بر تکیه‌گاه فشار می‌آورد برابر $300\ \text{N}$ است. جرم و طول تیر را تعیین کنید.

۲۲- میلهٔ سنگین ABGCD، که جرم‌آن $12\ \text{kg}$ و مرکز ثقل آن G است، با دو نخ که به B و C متصل هستند آویزان است. هر یک از این دو نخ فقط می‌توانند وزن میله را تحمل کنند. $AB = 5\ \text{cm}$، $BG = 7/5\ \text{cm}$، $GC = 10\ \text{cm}$ و $CD = 7/5\ \text{cm}$ است. کشش نخها را، هنگامی که وزنه‌هایی به‌جرمهای M_1 و M_2 کیلوگرم به‌ترتیب از A و D آویزان است، تعیین کنید، و مقدار M_1 و M_2 را هنگامی که هر دو نخ در حال پاره شدن هستند به‌دست‌آورید.

۲۳- میلهٔ یکنواختی به‌طول $3/6\ \text{m}$ وجرم $25\ \text{kg}$ بر روی دو پایه قرار دارد. فاصلهٔ هر پایه از یك انتها برابر فاصلهٔ پایهٔ دیگر از انتهای دیگر است. حداکثر فاصلهٔ این دو پایه را هنگامی تعیین کنید که شخصی به‌جرم $77\ \text{kg}$ بتواند درهرجای میله بدون‌آنکه خطر چرخش میله وجود داشته‌باشد بایستد.

۲۴- تیغهٔ مسطح یکنواختی به‌شکل شش ضلعی منتظم ABCDEF می‌تواندآزادانه در صفحهٔ خودش که قائم است، حول مرکزش O دوران کند. جرمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ کیلوگرم به‌ترتیب به‌رئوس A، B، C، D، E و F متصل شده‌اند. برای‌آنکه دستگاه به‌حال تعادل باشد انحراف AD از خط قائم مکان چقدر است؟

۲۵- میلهٔ افقی سبکی است به‌طول $6\ \text{m}$. بر سه نقطه از میله که به‌ترتیب $0/9\ \text{m}$، $2/1\ \text{m}$، و $4/5\ \text{m}$ از یك انتها قرار دارند سه وزنهٔ ۱۰ کیلوگرمی آویزان می‌کنیم. بر نقطهٔ وسط این میله نیرویی برابر $49\ \text{N}$ به طرف بالا وارد می‌شود. برایند این نیروهای متوازی را که بر میله وارد می‌شوند تعیین کنید، و اگر میله در دو انتهای خود بر روی پایه‌هایی قرارگیرد، نیرویی را که بر هر پایه فشار وارد می‌آورد نتیجه بگیرید.

۱۱.۱۸.۰ اهرم

اهرم اساساً ازمیلهٔ صلبی تشکیل یافته است که می‌تواندحول نقطه‌ای ثابت به‌نام تکیه‌گاه بچرخد. همان‌طور که قبلاً اشاره‌شد (۱۰-۵)، اصل اهرم به‌وسیلهٔ ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق. م.) شناخته شده بود وتا قرن شانزدهم، تا وقتی‌که متوازی‌الاضلاع نیروها کشف شد، اصل اساسی استاتیك بود.

این اصل به‌طور ساده اصل گشتاورهاست، یعنی وقتی‌که اهرم به حال تعادل است مجموع جبری گشتاورهای نیروهایی که برآن وارد می‌شوند حول تکیه‌گاه برابرصفراست.

اکنون به‌چند مورد عملی اهرم توجه خواهیم کرد.

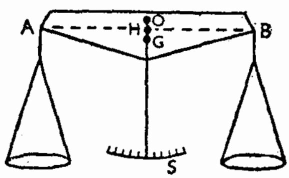
۱۹.۱۱. ترازو

ترازو تشکیل‌شده است‌ازشاهین محکمی که به‌دوانتهای آن کفه‌ها آویزانند (شکل ۱۱-۱۶). دراین شکل دو انتهای شاهین را با خط نقطه‌چین AB به‌هم وصل کرده‌ایم.

تکیه‌گاه شاهین نقطهٔ O است و کفه‌ها به‌نقاط A و B آویزانند.

شاهین طوری ساخته شده است که G، مرکز ثقل، زیرخط AB و O، تکیه‌گاه، خیلی نزدیك به AB است به‌طوری‌که وقتی‌که شاهین افقی قرار می‌گیرد، G و H (نقطهٔ وسط AB) برخط قائمی واقعندکه از O می‌گذرد. بنابراین وقتی کـه شاهین افقی است، وزن‌کفه‌ها و محتویاتش با فواصل مساوی برتکیه‌گاه اثر می‌کنند.

این مطلب با این‌گفته‌که بازوهای ترازو با هم برابرند، و نکتهٔ بسیار مهمی‌است، بیان می‌شود.



شکل ۱۱-۱۶

عقربه‌ای‌که محکم به‌شاهین چسبیده است و بر AB عمود است، حول صفحهٔ‌مدرج S دوران می‌کند و نشان می‌دهدکه چه موقعی شاهین افقی است.

وزنهای‌کفه‌ها و متعلقاتش (نخ و...) باید مساوی باشند. ما اکنون نشان‌خواهیم داد که، هنگامی‌که ایـن شرایط برقرار باشد، شاهین فقـط هنگامی می‌تواند به‌وضع افقـی بایستدکـه وزنه‌های متساوی درکفه‌ها قـرارگیرنـد، و اگـر وزنه‌ها نامتساوی بـاشند، شاهین زاویهٔ معینی با افق می‌سازد.

نقاط A ، B ، O ، G و H در شکل ۱۱-۱۷ برای وضعیتی مشخص شده‌اند که شاهین AB با افق زاویهٔ θ می‌سازد.

فرض می‌کنیم:

وزن هریك ازکفه‌ها $= P$

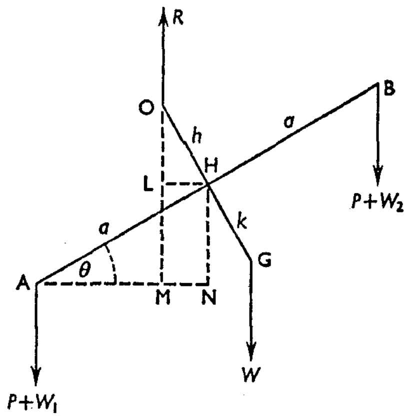
وزن شاهین $= W$

وزن وزنه‌های درون‌کفه‌ها $= W_2$ و W_1

$a =$ طول هریك از بازوها $(\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = a)$

$h = \mathrm{OH}$

$k = \mathrm{HG}$



شکل ۱۱-۱۷

نیروهایی‌که برشاهین اثر می‌کنند،

$P+W_{۱}$ و $P+W_{۲}$، قائم به‌طرف پایین و مؤثر برنقاط A و B،

W، قائم به‌طرف پایین و مؤثر بر G،

عکس‌العمل R، قائم به‌طرف بالا ومؤثر برO.

در شکـل داریم $\angle \mathrm{LOH} = \theta$، $\mathrm{AN} = a\cos\theta$، $\mathrm{LH} = h\sin\theta$ و فاصلـهٔ G از خط قائمی‌که از H می‌گذرد برابر است با $k\sin\theta$.

فاصلهٔ $(P+W_{۱})$ از O برابر است با $\mathrm{AM} = a\cos\theta - h\sin\theta$

فاصلهٔ $(P+W_{۲})$ از O برابر است با $= a\cos\theta + h\sin\theta$

فاصلهٔ W از O برابر است با $= h\sin\theta + k\sin\theta$

گشتاور نیروها را حول O تعیین می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$(P+W_{۱})(a\cos\theta - h\sin\theta)$$
$$= W(h+k)\sin\theta + (P+W_{۲})(a\cos\theta + h\sin\theta)$$
$$\therefore \quad \sin\theta[W(h+k) + (P+W_{۲})h + (P+W_{۱})h]$$
$$= \cos\theta[(P+W_{۱})a - (P+W_{۲})a]$$

$$\therefore \qquad tg\theta = \frac{(W_1 - W_2)a}{(W_1 + W_2 + 2P)h + W(h+k)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که اگر وزن وزنه‌های داخل کفه‌ها با هم مساوی باشند، یعنی $W_1 = W_2$ باشد، θ صفراست وشاهین می‌تواند فقط دروضع افقی به‌حال تعادل بماند.

اگر وزن وزنه‌ها با هم متفاوت باشند، شاهین زاویهٔ معینی با افق خواهد ساخت.

باید توجه کرد که اگر h و k هردو صفرباشند، یعنی مرکز ثقل شاهین و مرکزآویز برهم و برخط AB منطبق باشند، وقتی که وزنه‌های مساوی در کفه‌ها قرار گیرد، شاهین می‌تواند در هروضعیتی قرار گیرد واگروزن وزنه‌ها نامتساوی باشد، شاهین فقط به‌وضعیت قائم باقی می‌ماند.

۲۰۰۱۱. لازمهٔ یك ترازوی خوب این است که:

(۱) درست، (۲) حساس، (۳) پایدار، (۴) محکم، باشد.

(۱) اگر بازوهای ترازو برابر، و وزن کفه‌ها نیز متساوی باشند، و اگر مرکز ثقل شاهین نقطهٔ وسط شاهین باشد، وتکیه‌گاه برخط مستقیمی قرار گیرد که عمودبرشاهین است، در این صورت ترازو درست خواهد بود.

(۲) دریك ترازوی حساس، شاهین باید به‌ازای اختلاف کوچکی در اوزان دو کفه به‌قدر کافی نسبت به‌افق منحرف شود. با استفاده از نتیجه‌ای که دربند قبل به‌دست آمد، حساسیت ترازو باید نسبت $\frac{tg\theta}{W_1 - W_2}$ باشدکه مساوی است با

$$\frac{a}{(W_1 + W_2 + 2P)h + W(h+k)}$$

این عبارت نشان می‌دهدکه حساسیت ترازو با افزایش وزن کفه‌ها کاهش می‌یابد.

اما اگر $h = 0$ باشد، یعنی اگر تمام تیغه‌های کاردها دریك صفحه باشند، حساسیت برابر $\frac{a}{Wk}$ می‌شودکه مستقل از وزن کفه‌هاست.

این شرط معمولاً مورد نظراست، اماخمیدگی مختصری که در شاهین هست‌موجب می‌شودکه نتوانیم این شرط را به‌طور درست فراهم کنیم.

برای وزنهای معلوم، حساسیت با a افزایش می‌یابد، یعنی با طول بازوها افزایش می‌یابد. نیز اگر W کاهش بیابد حساسیت افزایش پیدا می‌کند. بنابراین داشتن شاهینی‌بلند

و سبك مزیت دارد. سبك کردن شاهین منجر به کاهش استحکام شاهین می‌شود، ودرترازوهای بهتر به‌شاهین میلهٔ دیگری نصب می کنند.

کاهش k نیز موجب افزایش حساسیت می‌شود.

(۳) ترازو ، هرچه زودتر به‌حال سکون و به‌وضع تعادل درآید ، پایدارتر است. پایداری ترازو هنگامی بیشتر است که گشتاور نیروهــا حول O بزرگتر باشد؛ یعنی اگر وزن هریك از کفه‌ها w_1 بـاشد هر چه $[2(P+w_1)h+w(h+k)\sin\theta]$ بزرگتر باشد ترازو پـایدارتر است . این شرط بـرای مقدار معلوم θ هنگامی برقرار است که h و k بزرگترین مقدار خود را داشته‌باشند.

چون وقتی که h و k کوچك باشند، حساسیت ترازو بیشتر است و هنگامی که h و k بزرگ باشند پایداری ترازو بیشتر است، نتیجه می‌شودکه نمی‌توان دریك ترازوحساسیت زیاد و سرعت عمل در توزین را توأماً داشت.

۲۱.۱۱. اگر ترازو درست نباشد، و علت آن اختلاف وزن کفه‌ها باشد، می‌توان با قرار دادن کاغذ یا شن درکفهٔ سبکتر یا باکارگذاشتن پیچ کوچکی درانتهای شاهین، ودرنزدیکی نقاطی که کفه‌ها به‌آن آویزانند، خطای توزین را تصحیح کرد.

اگر بازوهای شاهین نابرابرباشند، هیچ تصحیحی ازاین نوع نمی‌تواند درست‌باشد.

علت نادرست بودن ترازو هــرچه باشد، وزن صحیح یــك جسم را می‌توان از راه زیر به‌دست آورد:

جسم را دریك کفهٔ ترازو قرار می‌دهیم و با ریختن شن یــا سنگریزه در کفهٔ دیگــر تعادل را برقرار می کنیم.

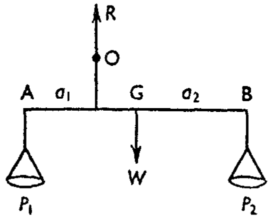
جسم را برمی‌داریم و به‌جای آن وزنه‌های معلــوم می گذاریم تا بــا سنگریزه‌های طرف دیگر تعادل برقرار کنند.

وزن این وزنه‌ها باید مساوی وزن جسم باشد.

این روش را معمولاً روش بوردا می‌نامند.

۲۲.۱۱. توزین مضاعف

فرض می کنیم که طول بازوها برابر a_1 و a_2 و وزن کفه‌هــا برابر P_1 و P_2 باشند ووزن شاهین به‌فاصلهٔ x از تکیه گاه O اثر کند (شکل ۱۱-۱۸)، اما شاهین، هنگامی که‌در کفه‌ها وزنه‌ای نیست، به‌حال افقی قرار می گیرد.



شکل ۱۱—۱۸

در این صورت

$$P_۱a_۱=Wx+P_۲a_۲ \qquad (۱)$$

اکنون فرض می‌کنیم که در برابر وزن $W_۱$ که درکفهٔ $P_۱$ قرار می‌دهیم باید وزن $W_۲$ درکفهٔ $P_۲$ قرار دهیم تا تعادل برقرار شود. دراین صورت نتیجه می‌شود:

$$(P_۱+W_۱)a_۱=Wx+(P_۲+W_۲)a_۲ \qquad (۲)$$

اکنون $W_۱$ را درکفهٔ $P_۲$ قرار می‌دهیم ووزن $W_۳$ راکه باید درکفهٔ $P_۱$ قراردهیم تا تعادل برقرار شود پیدا می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$(P_۱+W_۳)a_۱=Wx+(P_۲+W_۱)a_۲ \qquad (۳)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $W_۱a_۱=W_۲a_۲$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود: $W_۳a_۱=W_۱a_۲$

و از این معادله‌ها نتیجه می‌شود: $W_۱^۲=W_۲W_۳$

یا $W_۱=\sqrt{W_۲W_۳}$

یعنی وزن صحیح جسم برابر است با واسطهٔ هندسی $W_۲$ و $W_۳$.

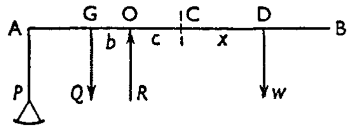
نیز $\dfrac{a_۱}{a_۲}=\dfrac{W_۲}{W_۱}=\dfrac{W_۱}{W_۳}$

نسبت طول بازوها را به‌دست می‌دهد.

۱۱.۲۳. قپان

قپان از میلهٔ سنگینی مانند AB (شکل ۱۱–۱۹) تشکیل شده است که برتکیه‌گاه ثابتی مانند O، که به‌یکی از دو انتها نزدیکتر است، تکیه می‌کند.

به‌انتهای بازوی کوچکتر، کفه‌ای متصل شده است و جسمی راکه منظور توزین‌آن است دراین کفه می‌گذارند. در طول OB، که مدرج است، وزنه‌ای مانند w را می‌توان حرکت داد.



شکل ۱۱-۱۹

فرض می‌کنیم: $P =$ وزن کفه

$Q =$ وزن میله که بر G وارد می‌شود

$a = OA$

$b = OG$

فرض می‌کنیم C نقطه‌ای باشد که باید وزنهٔ w درآنجا قرار گیرد تاوقتی که‌وزنه‌ای درکفه نیست، میلهٔ AB به‌طور افقی قرار گیرد و $OC = c$ باشد. دراین صورت،

$$wc = Pa + Qb \qquad (۱)$$

اگر درکفه وزن W قرار گیرد، وزن w، هنگامی که در نقطهٔ D یعنی به‌فاصلهٔ x از C باشد، موجب تعادل می‌شود. دراین صورت،

$$w(c+x) = (P+W)a + Qb \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $wx = Wa$

پس اگر از C فاصله‌های a، $۲a$، $۳a$ و غیره را نشانه بگذاریم، وزنه‌ای که در کفه قرار می‌گیرد اگر با w، هنگامی که در نخستین نشانه است، به‌حال تعادل درآید، دارای وزن w است و اگر، هنگامی که w در دومین نشانه است، میله به‌حال تعادل درآید، وزن W برابر $۲w$ است و همین‌طور با نشانه‌های دیگر می‌توان وزن جسم مورد نظر را تعیین کرد.

اگر $w = ۱$ kg باشد، هریک از درجه‌ها، برحسب کیلوگرم، جرم وزنه‌ای راکه در کفه است بیان می‌کند. می‌توان فاصلهٔ میان درجه‌ها را به‌قسمتهای کوچکتری تقسیم کرد و به‌این ترتیب جرمهای کمتر ازکیلوگرم را نیز با این وسیله اندازه‌گیری کرد.

درفاصلهٔ $۱۰a$ از C وزنهٔ لغزان w باجرم ۱۰ kg که درکفه قرار گیرد تعادل‌برقرار می‌کند. در بسیاری از حالتها به‌انتهای بازوی بلندتر میله‌ای متصل است و می‌توان وزنه‌های سوراخ شده‌ای را به‌این میله آویزان کرد.

در این حالت نیز C نقطه‌ای خواهد بودکه وزنهٔ لغزان w باید درآنجا قرارگیرد

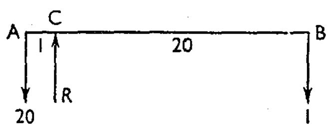
تا میلهٔ AB هنگامی که وزنه‌ای در کفه نیست به‌حال افقی بماند.

درجه‌بندی به‌همان شیوهٔ پیشین انجام می‌گیرد، اما اگر w در C باشد، برای‌آنکه با وزن W که در کفه است تعادل برقرار شود باید وزنه‌ای برابر X در میلهٔ اضافی وارد کرد. دراین صورت

$$X\ .\ \mathrm{OB}=W.\mathrm{OA}$$

به‌این طریق ممکن است وزنهٔ کوچکی با وزنهٔ بسیار بزرگی که درکفه است تعادل برقرار کند.

۲۴.۱۱. اصل اهرم کاربردهای عملی بسیار داردکه درهمهٔ آنها هدف کلی، اعمال نیرویی بزرگ در یك نقطه به‌وسیلهٔ اعمال نیرویی کوچکتر در یك نقطهٔ دیگراست.



شکل ۱۱-۲۰

بنابراین با میلهٔ AB، که در C لولاشده است و درآن $\mathrm{BC}=۲۰\mathrm{AC}$ است (شکل ۱۱-۲۰)، وزن ۲۰ N که در A اعمال می‌شود می‌تواند با وزن ۱ N که در B اعمال می‌شود تعادل داشته باشد. اکنون اگر وزنهٔ بسیار کوچکی در B اضافه شود، وزنهٔ A از جایش بلند خواهد شد. قیچی مثالی از اهرمهای مضاعف از این نوع است.

اگرAB در A لولا شود، نیرویی برابر ۱ N که برB به‌طرف بالا اعمال می‌شود، می‌تواند وزنه‌ای به‌جرم ۲۱ N راکه در C وارد می‌شود تحمل کند. تیری که یك انتهای آن روی زمین است و برای برداشتن تیرهای سنگین به‌کار می‌رود مثالی از این نوع‌اهرم است. فندق‌شکن مثالی از اهرم مضاعف از این نوع‌است وبرای تولید نیروی شکننده‌ای در C به‌کار می‌رود.

اگر AB در A لولا شده باشد و نیرویی برابر F در C برمیله اعمال شود، این نیرو می‌تواند برنیرویی برابر $\frac{۱}{۲۱}F$ که در جهت مخالف درB اعمال می‌شود غلبه‌کند. اما انتهای B مسافتی ۲۱بار بیشتر از مسافتی که C طی می‌کند، می‌پیماید. اهرمهایی از این نوع برای افزایش حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلاً در رکاب چرخ خیاطی،

پا بر C نیرو وارد می‌کند و براثرآن، انتهای B حرکت قابل‌ملاحظه‌ای می‌کند وحال‌آنکه پا مسافت کوتاهی می‌پیماید.

تمرین ۴۰۱۱

۱ ـ توضیح دهیدکه قپان را چگونه برای یك وزنهٔ لغزنده درجه‌بندی می‌کنند و درجهٔ صفر را درآن چگونه پیدا می‌کنند. وزنهٔ لغزنده به‌جرم ۱۰۰ g است. اگرهنگامی که وزنهٔ لغزنده روی صفر است و به‌انتهای بازوی کوچکتر قپان وزنه‌ای به‌جرم ۴ kg آویزان است با یك وزنهٔ ۵۰ g که به‌انتهای بازوی بزرگتر آویزان می‌شود بتوان تعادل برقرارکرد ، تعیین‌کنید فاصلهٔ میان درجه‌های قپان چه کسری از طول بازوی بزرگتر باشد ، تا هر یك از درجه‌ها بـا وزنهٔ لغزندهٔ مذکور نمایشگر یك کیلوگرم باشد.

۲ ـ ثابت کنیدکه اگر تکیه‌گاه یـك ترازو مستقیماً بالای مرکز ثقل نباشد، امـا بازوها برابر باشند، با تـوزین جسم در دوکفه و تعیین واسطهٔ عـددی نتیجه‌ها می‌تـوان اندازه‌گیری درست انجـام داد. ازاین‌گذشته نشان دهید که اگـر بازوها نیز نابرابر باشند ومقدار اختلاف طـول آنها برابر h و طول دو بازو روی هـم برابر l باشد، نتیجهٔ درست اندازه‌گیری با تعیین واسطهٔ عددی منهای $\frac{۱}{۲}(W_۱-W_۲)\frac{h}{l}$ به‌دست می‌آیدکه در آن $W_۱$ و $W_۲$ وزنهای ظاهری در دو حالت هستند و $W_۱$ بزرگتر از $W_۲$ است.

۳ ـ ماشین توزینی مطابق شرح زیرساخته شده است: میلهٔ ABCD که در C لولا شده است و BC کوچکتر از CD است. میله‌های همطول BF و DE از B وDآویزانند و انتهای آنها E و F به‌میله‌ای همطـول BD متصل شده است. مفصلهای میله‌هـا در B، D، E و F آزاد است. کفه‌ای به‌نقطـهٔ وسط FE متصل شده است. وزنه‌ای به‌وزن P می‌تواند در امتداد AC بلغزد. اگـرهنگامی کـه وزنه‌ای درکفه نیست و ماشین به‌حال تعادل است، وزنهٔ P دروضع M باشد، نشان دهیدکه ماشین راچگونه مدرج می‌کنند.

۴ ـ ترازویی یك جفت کفه داردکه متعادل نیستند. برای‌آنکه تعادل برقرارشود وزنه‌ای کوچك به‌یکی ازکفه‌ها متصل می‌کنند. بقالی می‌خواهد با استفاده ازاین ترازو وزن معینی از یك جنس را به‌مشتری بفروشد. نشان دهیدکه اگرنصف‌آن جنس را در یك کفه ونصف دیگر را بـاکفهٔ دیگربکشد، جنس را به‌انـدازهٔ درست تحـویل مشتری

خواهد داد.

۵ ـ میلهٔ یکنواختی به‌طول $0/9$ m حول میخ افقی ثابتی که درمرکزش C هست‌حرکت می‌کند. نخهایی به‌دو انتهای A و B از میلـه متصل شده‌اند و به‌ترتیب از درون حلقه‌های صیقلی ثابت A' و B' عبور می‌کنند و هرکدام از نخها در انتهای دیگـر وزنه‌ای به‌جرم ۷ kg حمل می‌کنند. A' به‌طور قائم دربالای C و B' به‌طور قائم در زیر C است وفاصلهٔ هریك از C برابر ۴۵ cm است. وزنه‌ای به‌جرم x کیلوگرم در A به‌میله آویزان شده است. ثابت کنیدکه اگر میله بخواهد درحالتی، جزحالت قائم، ساکن بماند، x نباید از مقدار معینی کمتر باشد و برای‌آنکه میله در وضع‌افقی به‌حال تعادل بماند آن مقدار x را تعیین کنید.

۶ ـ ترازویی است‌که بازوهای سبکی با طولهای نابرابر دارد وکفه‌ها نیز وقتی‌که خالی هستند، اگرچه وزنهای نابرابر دارند، به‌حال تعادل قرار نمی‌گیرند. این ترازو جرم جسمی راکه معلوم و برابر a کیلوگرم است x کیلوگرم نشان می‌دهد وجـرم جسمی راکه معلوم و برابر b کیلوگرم است y کیلوگـرم نشان می‌دهد. نشان دهیدکـه جرم واقعی جسمی‌که با این ترازو z کیلوگرم به‌نظر می‌رسد برابر است با

$$\frac{bx-ay+(a-b)z}{x-y}$$

۷ ـ میلهٔ سنگین نایکنواختی به‌طول ۳ m می‌تواند هنگامی‌که به‌یك انتهای‌آن وزنه‌ای به‌جرم ۲ kg آویزان می‌شود، حول نقطهٔ وسطش به‌حال تعادل بایستد. اگروزنه‌ای به‌جرم ۶ kg از همین انتهای میلـه آویزان شود، میله حـول نقطه‌ای‌کـه به‌فاصلهٔ $0/3$ m ازمرکز است به‌حال تعادل می‌ایستد. جـرم میله ومحل مرکـز ثقل آن را تعیین کنید. نشان دهیدکه این میله را چگـونه می‌توان به‌عنوان قپانی کـه تکیه‌گاه متحرك دارد مدرج کرد. نیز نشان دهیدکه فاصله‌های درجه‌ها کـه از انتهایی سنجیده می‌شوندکه ازآن انتهاجرمها توزین می‌گردند، تشکیل یك‌تصاعد هارمونیك‌می‌دهند.

۸ ـ دومیلهٔ یکنواخت AB و BC که از یك ماده و دارای یـك ضخامت هستند، در B محکم به‌یکدیگر متصل شده‌اند به‌طوری‌کـه زاویهٔ ABC برابر $120°$ است. سپس این اهرم خمیده را در B لولا می‌کنند به‌طوری‌که بتواند آزادانه در یك صفحهٔ‌قائم بچرخد. دروضع تعادل، BC افقـی است. نشان دهیدکه اگـر وزنه‌ای به Cآویزان شود به‌طوری‌که در وضع تعادل، AB افقی شود، جرم آن $\frac{3}{2}$ جرم BC است.

۹ ـ ABC اهرمی افقی است که در B، نقطهٔ وسطش، لـولا شده است و در C کفه‌ای به‌وزن W_0 به‌آن آویزان است. AD میلهٔ سبکی است‌که در A به‌اهرم و در D که

به‌طور قائم در زیر A است، به‌یك میلهٔ افقی FDE لولاشده است. میلهٔ FDEحول انتهای F آن‌که ثابت است می‌تواند آزادانه حرکت کند. وزن ایـن میله W_1 است و مرکزثقل آن به‌فاصلهٔ d از F است و c = FD. نشان دهیدکه چگونه ایـن میله را با وزن متحرك w بـرای وزنهای متغیر Wکه در کفـهٔ C می‌گذارند درجه‌بندی می‌کنند. اگر هرسانتیمتر ازدرجه‌بندی نشان‌دهندهٔ ۲۰۰ g باشد و $w =$ ۱۰۰g باشد، مقدارc را تعیین کنید. دراین‌حالت رابطهٔ میان W_0 و W_1 را هنگامی‌که $d =$ ۲ cm است و درجهٔ صفر در دو سانتیمتری F است تعیین کنید.

۱۲

نیروهایی که در یك صفحه‌اند و بریك جسم صلب وارد می‌شوند

۱۰۱۲. جسم صلبی که تحت اثر سه نیرو است

ابتدا به‌مسائلی توجه خواهیم کرد که درآنها فقط سه نیرو بریك جسم صلب اثر کرده‌اند.

اگر یك جسم صلب تحت اثر سه نیرو که دریك صفحه واقعند به‌حال تعادل باشد، راستاهای این سه نیرو یا باید همگی با هم متوازی باشند یا در یك نقطه یکدیگر را قطع کنند.

فرض می‌کنیم نیروها P، Q و R باشند. اگرهرسه متوازی نباشند، دوتای ازآنها، مثلاً P و Q باید درنقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع کنند.

دراین صورت برایند P و Q باید نیرویی باشدکه از O می گذرد.

اما چون سه نیرو درحال تعادلند، این برایند باید با R متعادل باشد.

چون R باید مساوی و در خلاف جهت برایند P و Q و در همان راستا باشد، بنابراین راستای آن باید از O بگذرد.

اگر نیروها همگی متوازی باشند، برایند هردوتای ازآنها باید مساوی و در خلاف جهت نیروی دیگر باشد و راستای آن نیز با راستای نیروی سوم باید یکسان باشد.

۲۰۱۲. از قضیهٔ قبل مشاهده می‌شود که، جز درحالتی‌که سه‌نیرو متوازی هستند، می‌توانیم روشهایی را به کار ببریم که در بارهٔ نیروهایی به‌کار می‌بردیم که بر یك نقطهٔ مادی اعمال می‌شوند. یعنی می‌توانیم قضیهٔ لامی، یا روش ترسیمی مثلث نیروها را به‌کار ببریم. نیز می‌توانیم نیرو را به‌دو نیروی عمود برهم تجزیه کنیم. در بعضی از حالتها ممکن است تعیین گشتاورها حول نقطه‌ای مناسب سریعتر باشد. در همهٔ حالتها، رسم شکلی که سه نیرو را، چه متوازی باشند وچه دریك‌نقطه برخوردکنند، نشان دهد بسیاراهمیت‌دارد.

۳.۱۲. نکته‌های زیر را، که بعضی ازآنها را قبلاً متذکر شده‌ایم، باید به‌دقت به‌خاطر سپرد، زیرا اهمیت اساسی دارند:

(۱) وزن جسم به‌طور قائم و به‌طرف پایین و برمرکز ثقل وارد می‌شود.

(۲) وقتی‌که جسمی بریك سطح صیقلی قرار دارد، عکس‌العمل جسم، عمود برسطح است.

(۳) وقتی‌که میله‌ای بریك میخ صیقلی قرار می‌گیرد، عکس‌العمل میخ برمیله عمود برمیله است.

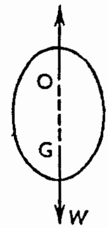
(۴) کشش در سراسر یك نخ سبك یکسان است، و این‌کشش هنگامی که نخ از روی یك قرقره یا میخ صیقلی عبورکند تغییری نمی‌کند. اگر قرقره‌ناصاف باشد،کشش نخ در دو طرف قرقره متفاوت خواهد بود.

(۵) برایند دو نیروی متساوی، زاویهٔ میان آن دونیرو را نصف می‌کند. پس، وقتی‌که نخی از روی یك میخ صیقلی عبور می‌کند، نیرویی‌که برمیخ‌فشار می‌آورد نیمساز اجزای نخ در دو طرف میخ است.

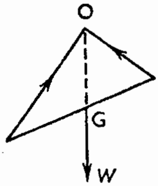
(۶) وقتی‌که جسم صلبی، آزادانه از نقطهٔ ثابتی مانند O آویزان شده است، مرکزثقل G جسم باید برخط قائمی‌که از O می‌گذرد قرارگیرد.

برایند عکس‌العمل در O باید با وزن جسم متعادل شود و برای‌اینکه چنین چیزی ممکن باشد باید دو نیرو همراستا باشند. این نتیجه، چه O نقطه‌ای در داخل‌جسم باشد، مانند شکل ۱۲-۱ ، وچه جسم با دوتکه نخ به O متصل شده باشد، مانند شکل۱۲-۲ ، صادق است. اگر نیروهای دیگری برجسم اثر کنند، G لزوماً در زیر O وبرخط قائمی‌که از O می‌گذرد نخواهد بود.

ملاحظات فوق، که همراه با این واقعیت درنظرگرفته شوندکه هنگامی‌که فقط سه نیروی غیرمتوازی وجود دارند، آن سه نیرو باید در یك نقطه برخورد کنند، ما را قادر می‌سازندکه شکل درستی رسم‌کنیم‌که وضع جسم را نشان دهد. این مطلب را با مثالهای



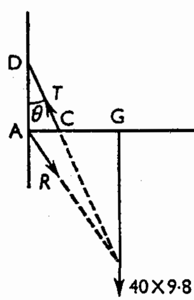
شکل ۱۲-۱



شکل ۱۲-۲

زیر روشن می‌کنیم.

مثال ۱: میلهٔ‌یکنواخت AB به‌طول ۶ m و جرم ۴۰ kg است. انتهای A که میله حول آن می‌تواند آزادانه بچرخد، به‌دیوار قائمی متصل است. به‌وسیلهٔ ریسمانی که یك انتهای آن به‌نقطه‌ای در ۱/۲۵ متری A به‌میله بسته شده وانتهای دیگر آن به‌نقطه‌ای از دیوار که بالای A است کوبیده شده است، میله در وضعی افقی قرار دارد. اگر کشش ریسمان ازوزن وزنهٔ ۱۲۰ kg تجاوز نکند، نشان دهیدکه ارتفاع نقطه‌ای که ریسمان درآن نقطه به‌دیوار کوبیده شده است از A نبایدکمتر از $۱\frac{۲}{۳}$ m باشد.



شکل ۱۲-۳

حل:

فرض می‌کنیم G (شکل ۱۲-۳) مرکز میله، C و D نقاط اتصال ریسمان با میله و دیوار باشند.

فرض می‌کنیم $AD = x$ متر و زاویهٔ $ADC = \theta$ باشد.

دراین صورت

$$cotg\theta = \frac{x}{1/25} = \frac{4}{5}x$$

$$\therefore \quad sin^2\theta = \frac{1}{1+cotg^2\theta} = \frac{1}{1+\frac{16}{25}x^2}$$

$$\therefore \quad sin\theta = \frac{5}{\sqrt{25+16x^2}}$$

عکس‌العمل R نیوتون که برمیله در A اثر می‌کند باید از نقطهٔ تلاقی کشش T، که در C وارد می‌شود، و وزن میله بگذرد.

برای میله حول A گشتاور می‌گیریم. اگر کشش ریسمان T نیوتون باشد، چنین خواهیم داشت:

$$T \cdot xsin\theta = 3 \times 40 \times 9/8$$

$$\therefore \quad T = \frac{120 \times 9/8}{xsin\theta}$$

اما T نباید بزرگتر از $120 \times 9/8$ باشد و بنابراین

$$\frac{120}{xsin\theta} \not> 120$$

$$\therefore \quad xsin\theta \not< 1$$

$$\therefore \quad 5x \not< \sqrt{25+16x^2}$$

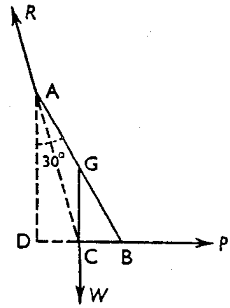
$$\therefore \quad 25x^2 \not< 25+16x^2$$

پس $$x \not< \frac{5}{3}m$$

یعنی x نباید کوچکتر از $1\frac{2}{3}m$ باشد.

مثال ۲: میلهٔ سنگین یکنواخت AB، به‌وزن W، از A به نقطهٔ ثابتی لـولا شده است. آن را با نیروی افقی P به‌یك طرف می‌کشانیم، به‌طوری که میله با خـط قائم زاویهٔ °۳۰ بسازد. بزرگی نیروی P و عکس‌العمل لولا را حساب کنید.

حل: فرض می‌کنیم G (شکل ۱۲-۴) نقطهٔ وسط میله باشد. وزن W به‌طـورقائم و



شکل ۱۲-۴

به‌طرف پایین وارد می‌شود.

فرض می‌کنیم خطوط قائمی که از G و A می‌گذرند، راستای P را به‌ترتیب در C و D قطع کنند. دراین صورت راستای عکس‌العمل R در A باید از C، نقطهٔ تلاقی W و P، بگذرد.

روش (الف). برای میله حول A گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$P.\mathrm{AD}=W.\mathrm{CD}$$

اما

$$\mathrm{CD}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AB}\sin ۳۰^\circ \quad \text{و} \quad \mathrm{AD}=\mathrm{AB}\cos ۳۰^\circ$$

$$\therefore \quad P=W\frac{\frac{۱}{۴}\mathrm{AB}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}W$$

نیز اگر X و Y مؤلفه‌های افقی وقائم R باشند،

$$X=P=\frac{\sqrt{۳}}{۶}W$$

و

$$Y=W$$

$$\therefore \quad R=\sqrt{X^۲+Y^۲}=W\sqrt{(\frac{۳}{۳۶}+۱)}=W\sqrt{\frac{۱۳}{۱۲}}$$

اگر زاویهٔ R با افق برابر θ باشد،

$$tg\theta=\frac{Y}{X}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

روش (ب). اضلاع مثلث ADC به‌ترتیب به‌موازات نیروهای W، P و R است‌و

بنابراین می‌توانند به‌عنوان مثلث نیروها مورد استفاده قرار گیرند.

$$\therefore \quad \frac{P}{DC}=\frac{R}{AC}=\frac{W}{AD}$$

ومانند بالا $\quad AD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB$ و $CD=\frac{۱}{۴}AB$

نیز $\quad AC^{۲}=AD^{۲}+CD^{۲}=\left(\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۱۶}\right)AB^{۲}$

$$\therefore \quad AC=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}AB$$

$$\therefore \quad P=W\frac{\frac{۱}{۴}AB}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}W$$

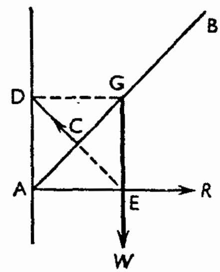
و $\quad R=W\frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}AB}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}=W\sqrt{\frac{۱۳}{۱۲}}$

نیز $\quad tg\,ACD=\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}{\frac{۱}{۴}AB}=۲\sqrt{۳}$

مثال ۳: انتهای A از میلهٔ سنگین و یکنواخت AB به‌دیـوار قائم صیقلیی تماس دارد، و انتهای نخی به‌نقطهٔ C از میله محکم شده است، به‌طوری‌که $AC=\frac{۱}{۴}AB$ است. انتهای دیگرنخ به‌نقطه‌ای از دیوارکه به‌طور قائم بالای A است محکم شده است. اگر میله در وضعی قرار گیردکـه با قائم زاویه بسازد، طول نـخ را تعیین کنید.

حل: خط AB راطوری رسم می‌کنیم‌که با دیوارزاویه بسازد (مطابق شکل ۱۲-۵) و فرض می‌کنیم G نقطهٔ وسط آن باشد.

چون دیوارصیقلی‌است، عکس‌العمل در A عمود بردیوار، یعنی افقی است. فرض‌می‌کنیم که‌راستای‌این عکس‌العمل، راستای‌وزن را در E قطع کند. دراین



شکل ۱۲-۵

صورت، چون تنها نیروهایی که برمیله وارد می‌شوند، این عکس‌العمل و وزن میله و کشش نخ هستند، این نیروها باید در یك نقطه تلاقی کنند.

پس امتداد نخ باید از E بگذرد. EC را وصل می‌کنیم وامتداد می‌دهیم تا دیوار را در نقطهٔ D قطع کند. در این صورت D باید نقطهٔ اتصال نخ به‌دیوار باشد و CD طول نخ باشد.

اما چون GEA و EAD زاویه‌های قائمه‌اند و C نقطهٔ وسط AG است، شکل AEGD مستطیل خواهد بود و AG و ED قطرهای آن هستند.

$$\therefore \qquad CD = AC$$

یعنی طول نخ برابر $\frac{1}{4}$ طول میله است.

کشش نخ و عکس‌العمل در A را می‌توان با تجزیهٔ آنها به‌مؤلفه‌های قائم و افقی یا با استفاده از مثلث ADE، به عنوان مثلث نیروها، پیدا کرد. این دو نیرو بستگی به‌زاویهٔ انحراف میله نسبت به‌خط قائم دارند، که این زاویه هرمقداری کوچکتر از 90° می‌تواند داشته باشد.

یادداشت. بدیهی است که اگرمیله، مطابق شکل ۱۲-۵، طوری قرار گیرد که انتهای B میله روبه‌بالا باشد، نقطه‌ای که نخ به‌میله بسته می‌شود میان A و G خواهد بود. زیرا خط واصل میان E واین نقطه باید دیوار را، درنقطه‌ای که نخ به‌دیوار بسته می‌شود، قطع کند و مسلماً اگر C برروی G یا بالای G باشد، چنین چیزی غیرممکن است.

اگرنخ میان G و B یا درB به‌میله بسته شود، دراین صورت B باید، به‌طوری که در مثال بعد می‌بینیم، پایینتر از A قرار گیرد.

مثال ۴: انتهای A ازمیلهٔ‌یکنواخت AB بردیوار صیقلی‌قائمی تکیه‌کرده است. به‌انتهای دیگر این میله نخی به‌طول l متصل است و نخ به‌نقطه‌ای از دیوار که به‌طور قائم دربالای A است‌بسته‌شده است. نشان دهیدکه اگرمیله طوری قرار گیردکه بادیوار زاویهٔ θ بسازد، دراین صورت

$$cos^{۲}\theta=\frac{l^{۲}-a^{۲}}{۳a^{۲}}$$

حل : چون دیوار صیقلی است، عکس‌العمل R در A (شکل ۱۲-۶) افقی است.
امـا راستای نخ باید از نقطه‌ای بگـذردکه راستای وزن بـا راستای R تلاقی می‌کنند وچنین چیزی، جزآنکه B در زیر A باشد، غیرممکن است.
پس AB را به‌طرف پایین رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم کـه G نقطهٔ وسط آن باشد. فرض می‌کنیم خط قائمی‌که ازG می‌گذرد راستای R را در D قطع‌کند. BD را وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دیوار را در C قطع‌کند. دراین‌صورت BC معرف نخ و $\mathrm{BC}=l$ است.

فرض می‌کنیم $\mathrm{AC}=h$ ودراین‌صورت $\mathrm{DG}=\frac{۱}{۲}h$ است ، زیرا G وسط AB و GD موازی AC است.

در مثلث AGD،

$$cos\theta=\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{AG}}=\frac{\frac{۱}{۲}h}{\frac{۱}{۲}a}\qquad (۱)$$

درمثلث ACB،

$$cos\mathrm{CAB}=\frac{h^{۲}+a^{۲}-l^{۲}}{۲ah}$$

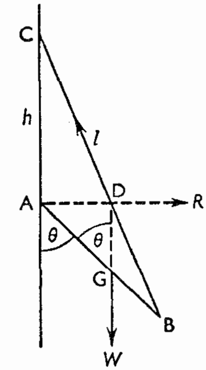
اما

$$cos\mathrm{CAB}=-cos\theta$$

$$\therefore\quad -cos\theta=\frac{h^{۲}+a^{۲}-l^{۲}}{۲ah}$$

از رابطهٔ (۱) $h=a\,cos\theta$ است. بنابراین خواهیم‌داشت:

$$-cos\theta=\frac{a^{۲}cos^{۲}\theta+a^{۲}-l^{۲}}{۲a^{۲}cos\theta}$$



شکل ۱۲-۶

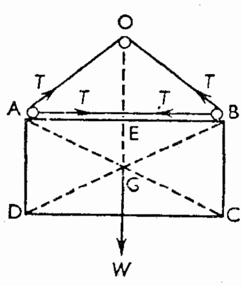
$$\therefore \qquad -۲a^۲cos^۲\theta = a^۲cos^۲\theta + a^۲ - l^۲$$

$$\therefore \qquad cos^۲\theta = \frac{l^۲ - a^۲}{۳a^۲}$$

بازهم، کشش نخ و عکس‌العمل R را در A می‌توان با تجزیهٔ آنها به‌مؤلفه‌های افقی و قائم یا با استفاده از مثلث CAD به‌عنوان مثلث نیروها، پیدا کرد.

مثال ۵: تخته‌ای است به‌شکل مستطیل و به‌ابعاد ۱/۸ m و ۱/۲ m. این تخته با نخی به‌طول ۴/۸ m طوری‌آویزان شده است که اضلاع بزرگ آن افقی است. نخ از درون حلقه‌هایی صیقلی که به‌گوشه‌های بالایی تخته نصب شده و از روی یك‌میخ صیقلی می‌گذرد. کشش نخ را و نیز نیرویی را که برهرحلقه فشار می‌آورد تعیین کنید. درصورتی که می‌دانیم وزن تخته برابر W است.

حل : فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۲-۷) نشان‌دهندهٔ تخته و O وضع میخ باشد و حلقه‌ها به A و B نصب شده باشند.



شکل ۱۲-۷

چون نخ پیوسته است وفقط ازروی سطوح صیقلی می‌گذرد، کشش T درسراسر آن یکسان است.

براینده دوکشش در O نیمساز زاویهٔ AOB است و باید با وزن W که به‌طور قائم برG، مرکز ثقل تخته، وارد می‌شود تعادل داشته باشد.

پس G باید به‌طور قائم در زیر O باشد.

اگر OG خط AB را در E قطع‌کند، $AE = ۰/۹\ m$ است.

نیز $OA = OB$ و $AO + OB = ۳\ m$

$$\therefore \quad AO = ۱/۵\ m$$

$$\therefore \quad OE = \sqrt{۲/۲۵ - ۰/۸۱} = ۱/۲\ m$$

اگر زاویهٔ $AOE = \theta$ باشد، در این‌صورت با تجزیه در امتداد قائم،

$$۲T\cos\theta = W$$

$$\cos\theta = \frac{۴}{۵}$$

و

$$\therefore \quad T = \frac{۵}{۸}W$$

نیروی R که در A برحلقه فشار می‌آورد براینده دو نیروی T است‌که زاویهٔ میان آنها OAE است و می‌دانیم که $\cos OAE = \frac{۳}{۵}$.

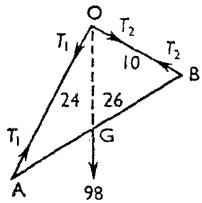
$$\therefore \quad R^۲ = T^۲ + T^۲ + ۲T^۲ \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱۶}{۵}T^۲ = \frac{۱۶}{۵} \times \frac{۲۵}{۶۴}W^۲$$

$$\therefore \quad R = \frac{\sqrt{۵}}{۲}W$$

جهت R نیمساز زاویهٔ OAE است.

مثال ۶: میلهٔ سنگین یکنواختی است به‌طول $۲۶\ cm$ و جرم $۱۰\ kg$ که به‌کمك دو نخ، به طولهای $۲۴\ cm$ و $۱۰\ cm$ از یك نقطهٔ ثابت آویزان شده است. زاویه‌ای را که میله با خط قائم می‌سازد وکششهای نخها را تعیین‌کنید.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۲-۸) نمایشگر میله و O نقطهٔ آویز باشد. وزن میله $۹۸N$ است.



شکل ۱۲-۸

چون فقط سه نیرو برمیله اثر می‌کنند، راستای وزن باید از O بگذرد، یعنی G، نقطهٔ وسط میله، باید به‌طور قائم در زیر O باشد.

فرض می‌کنیم $\angle OAB=\theta$

چون $۲۴^۲+۱۰^۲=۲۶^۲$

است، زاویهٔ AOB قائمه است و

$$GO=GA=GB$$

$$\therefore \quad \angle AOG=\theta$$

کششهای OA و OB را $T_۱$ و $T_۲$ نیوتون فرض می‌کنیم. بـا تجزیهٔ OA و OB خواهیم داشت،

$$T_۱=۹۸cos\theta=\frac{۱۲}{۱۳}\times ۹۸=۹۰/۵$$

$$T_۲=۹۸sin\theta=\frac{۵}{۱۳}\times ۹۸=۳۷/۷$$

مثال ۷: میله‌ای است که مرکز ثقل آن، آن را به‌دوجزء a و b تقسیم می‌کند. این میله در داخل کره‌ای صیقلی در وضعی قراردارد که با افق زاویه می‌سازد. نشان دهیدکه اگر زاویهٔ آن با افق برابر θ باشد وزاویهٔ مرکزی قوسی ازکره که دو انتهای‌آن، دو انتهای میله است، برابر ۲α باشد، دراین صورت

$$tg\theta=\frac{b-a}{b+a}tg\alpha$$

حل : فرض می‌کنیم، AB (شکل ۱۲-۹)، میله و C مرکز کره باشد. چون کره صیقلی

است، عکس‌العملهای در A و B باید عمود برکـره باشند و بنابراین بایـد از C بگذرند. پس راستای وزن باید از C بگذرد، یعنی مرکزثقل G باید به‌طور قائم‌در زیر C باشد.

سپس نتیجه ازطریق هندسه از روی شکل به‌دست می‌آید.

فـرض می‌کنیم $AG=a$ ، $GB=b$ باشد. چـون زاویهٔ $ACB=2\alpha$ است، زوایای A و B هریك برابر $90°-\alpha$ است.

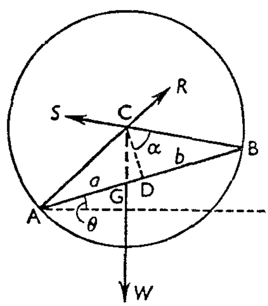
CD را عمود برAB رسم می‌کنیم. در ایـن صورت $\angle GCD=\theta$ است. نیـز

$$AD=\frac{1}{2}(a+b) \quad و \quad GD=\frac{1}{2}(a+b)-a=\frac{1}{2}(b-a)$$

پس

$$tg\theta=\frac{GD}{CD}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(b-a)}{\frac{1}{2}(b+a)cotg\alpha}=\frac{b-a}{b+a}tg\alpha$$



شکل ۱۲-۹

اگرتعیین عکس‌العملها نیزموردنظربودند،آنهارا می‌توانستیم با تعیین‌گشتاور، یا با تجزیه، در دوجهت عمود برهم به‌دست آوریم.

فرض می‌کنیم R و S به‌ترتیب عکس‌العملهای در A و B باشند.

با تعیین‌گشتاور برای میله حول A چنین خواهیم داشت:

$$S(a+b)\sin(90^\circ-\alpha)=Wa\cos\theta$$

$$\therefore \qquad S=W\frac{a\cos\theta}{(a+b)\cos\alpha}$$

با تعیین گشتاور حول B چنین خواهیم داشت،

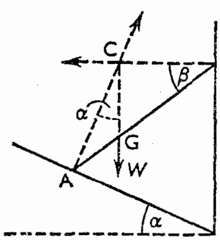
$$R(a+b)\sin(90^\circ-\alpha)=Wb\cos\theta$$

$$\therefore \qquad R=W\frac{b\cos\theta}{(a+b)\cos\alpha}$$

مثال ۸: دریك صفحهٔ قائم، میله‌ای‌که یکنواخت نیست طوری قراردارد کـه A، انتهای پایینی میله، برصفحهٔ صیقلیی کـه زاویهٔ آن با افـق برابر α است قراردارد و B، انتهای بالایی میله، بردیوار قائم صیقلی تکیه دارد. اگر G مرکزثقل میله باشد و β زاویهٔ انحراف میله نسبت به‌افق باشد، نشان دهیدکه

$$\frac{AG}{GB}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$$

حل : فرض می‌کنیم عکس‌العملهای در A و B، که برصفحه و دیوار عمودند، درنقطهٔ C تلاقی کنند (شکل ۱۲-۱۰). دراین صورت G باید به‌طور قائم در زیرC باشد.



شکل ۱۲-۱۰

اما $\angle CBG=\beta$، $\angle ACG=\alpha$ و $\angle CAG=90^\circ-\beta-\alpha$.

پس

$$\frac{AG}{\sin\alpha}=\frac{CG}{\sin CAG}=\frac{CG}{\cos(\alpha+\beta)}$$

و

$$\frac{GB}{\sin 90^\circ}=\frac{CG}{\sin\beta}$$

$$\therefore \quad \frac{AG}{GB}=\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$$

یادداشت. در بسیاری ازاین مسائل، نتیجه ازطریق هندسه و از روی شکل به‌دست می‌آید. البته باید سه نیرو طوری ترسیم شوند که دریك نقطه تلاقی کنند.

تمرین ۱۰۱۲

۱ ـ میلهٔ یکنواختی می‌تواند آزادانه حول لولایی که به‌یك انتهای‌آن نصب شده است بچرخد. به‌انتهای دیگراین میله نیرویی افقی و برابر نصف وزن میله واردمی‌شود و میله راازحالت قائم منحرف می‌کند. زاویهٔ انحراف میله را ازخط قائم تعیین کنید.

۲ ـ اگر درمسئلهٔ ۱، نیروی افقی سه چهارم وزن میله باشد، زاویهٔ انحراف میله از خط قائم و نیز عکس‌العمل لولا را تعیین کنید.

۳ ـ A، انتهای بالایی نردبان AB، بردیوار صیقلی قائمی تکیه‌کرده است. B،انتهای پایینی نردبان، دریك سوراخ قراردارد. خط قائمی که از G می‌گذرد (G مرکزثقل نردبان وبار روی آن است) خطی افقی راکه ازA رسم می‌شود در K قطع‌می‌کند. همین خط افقی، خط قائمی راکه از B می‌گذرد در L قطع می‌کند. ثابت کنید که مثلث BKL را می‌توان به‌عنوان مثلث نیروها، برای وزن و عکس‌العملهای در A و B، به‌کاربرد.

۴ ـ تیر یکنواخت AB به وزن W می‌تواند حول لولایی که در A نصب شده است، دریك صفحهٔ قائم بچرخد. B، انتهای دیگر تیر به‌نخی محکم شده است ونخ از روی قرقرهٔ C، که‌به‌طورقائم دربالای A است،می‌گذرد، به‌طوری که $AC=AB$ است.کشش نخ را برای‌آنکه تیر با افق زاویهٔ ۶۰° بسازد تعیین‌کنید. نیزجهت و بزرگی‌عکس‌العمل لولا را تعیین‌کنید.

۵ ـ AB میلهٔ یکنواختی است به‌وزن W، که می‌تواند حول یك محور افقی صیقلی که در A ثابت است، حرکت‌کند. B به‌نخ سبکی متصل است‌که از روی قرقرهٔ C که به‌طور قائم بالای A است می‌گذرد. به‌انتهای دیگر نخ جسمی به‌وزن P آویزان است. با به‌کاربردن مثلث نیروها، ثابت کنیدکه دروضع تعادل

$$CB=۲\frac{P}{W}\cdot AC$$

۶ ـ میلهٔ یکنواخت سنگین AB به‌نقطهٔ ثابت A واقع بردیواری صیقلی لولا شده‌است و در وضعی افقی و به‌موازات دیـوار نگاه داشته شده است. برای این کار نخی

سبك به‌انتهای B آن بسته شده است و انتهای نخ به‌نقطهٔ P، واقع برخط LM، که فصل مشترك دیوار وسقف است، متصل شده است. ثابت‌کنید که برای اوضاع مختلف P، برروی خط LM (طول نخ به‌اندازه‌ای گرفته می‌شود که میله همیشه افقی‌باشد)، کشش نخ متناسب با طول BP است.

۷ ـ انتهای P از میله‌ای دریك‌گودال قرار دارد. نخی را به‌نقطهٔ Q از میله می‌بندیم وانتهای دیگر نخ را به‌نقطهٔ R، که به‌طور قائم بالای‌گودال است، متصل‌می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه اگرخط قائم مکانی‌که از مرکزثقل می‌گذرد، QR را در S قطع‌کند، مثلث PRS برای وزن، کشش نخ و عکس‌العمل‌گودال، مثلث نیروها محسوب خواهد شد.

۸ ـ میلهٔ یکنواختی‌به‌طول ۳ m به‌کمك نخی به‌طول ۵ m که ازروی‌میخی‌صیقلی‌عبور کرده است به‌طورافقی نگاه داشته شده است. نخ به‌دو انتهای میله متصل شده است. اگرجرم میله ۷ kg باشد، کشش نخ را تعیین‌کنید.

۹ ـ میلهٔ یکنواخت AB به‌جرم ۱۰ kg در A به‌طور صیقلی لولا شده است. میله در صفحه‌ای قائم طوری قراردارد‌که انتهای آن بردیوار صیقلی قائمی تکیه‌کرده‌است. اگرمیله با دیوار زاویهٔ ۴۰درجه بسازد، نیروی‌فشاریی راکه بردیوار وارد می‌کند و نیز بزرگی وجهت عکس‌العمل در A را تعیین‌کنید.

۱۰ ـ تیغهٔ یکنواختی به‌وزن W به‌شکل مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویهٔ ABCاست که در B قائمه است و از A به‌نقطهٔ ثابتی لولاشده است وطوری قراردارد‌که AC قائم است و C بالای A است. تعادل به‌کمك نخی افقی که به C متصل است برقرار شده است. کشش نخ وجهت وبزرگی عکس‌العمل در A را تعیین‌کنید.

۱۱ ـ تیغهٔ یکنواختی به‌وزن W، که به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است، از رأس A به‌نقطهٔ ثابتی لولا شده است وحول آن می‌تواند آزادانه دریك صفحه‌قائم بچرخد. این تیغه طوری قراردارد‌که AB قائم است و B بالای A است و رأس C با یك دیوار قائم صیقلی تماس دارد. عکس‌العمل میان تیغه و دیوار، و بزرگی وجهت عکس‌العمل A را تعیین‌کنید.

۱۲ ـ انتهای A از میلهٔ ACB به‌وزن W بردیوار صیقلی قائمی تکیه کرده است و به‌کمك نخی‌که به‌نقطهٔ C از این میله بسته شده است، انتهای B به‌طرف بالاقرار دارد. انتهای دیگر نخ به‌نقطهٔ D از دیوارکه همتراز با B است متصل شده‌است. اگرزاویهٔ انحراف CD نسبت به‌دیوار $30°$ باشد، کشش نخ وعکس‌العمل دیوار را

تعیین کنید و ثابت‌کنید که $AC=\frac{۱}{۳}AB$.

۱۳ ـ میلهٔ یکنواخت AB به حال تعادل است و با افق زاویهٔ α می‌سازد. A، انتهای بالایی میله، بریك میخ صیقلی تکیه کرده است و B، انتهای دیگر میله، به‌کمك نخی سبك، به‌نقطهٔ C همتراز A بسته شده است. ثابت‌کنیدکه β، زاویه‌ای‌که نخ با افق می‌سازد، از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$tg\beta=۲tg\alpha+cotg\alpha$$

و نیز

$$AC=\frac{AB}{cos\alpha(۱+۲tg^{۲}\alpha)}$$

۱۴ ـ میلهٔ یکنواخت سنگینی است‌که طول آن برابر با قطرجام نیمکره‌ای شکل صیقلی است. محور این نیمکره ثابت و قائم است. یك انتهای این میله در جام و انتهای دیگرآن خارج ازجام است. ثابت‌کنیدکه زاویهٔ انحراف این میله با افق درحدود $۳۲^\circ ۳۲'$ است.

۱۵ ـ کره‌ای به‌جرم ۵ kg وبه‌شعاع ۶۳ cm به‌کمك نخی به‌طول ۲۴ cm از نقطه‌ای واقع بردیواری قائم وصیقلی آویزان شده است. کشش نخ را تعیین کنید.

۱۶ ـ طول تیر پرچمی ۱۲ m وجرم‌آن ۱۲۰ kg است. یك‌سرآن‌به‌حلقه‌ای گردان واقع برروی زمین متصل شده است. این تیر به‌کمك ریسمانی که به‌بالاترین نقطهٔ آن متصل شده است راست می‌شود. اگرهنگامی‌که تیرپرچم با افق زاویهٔ ۵۰°می‌سازد انحراف ریسمان نسبت به‌افق ۲۰° باشد، از راه نمودار یا از راه دیگر، کشش ریسمان وبزرگی وجهت عکس‌العمل حلقه را پیداکنید.

۱۷ ـ میلهٔ یکنواخت AB، به‌وزن $۲W$ و طول l، می‌تواند آزادانه حول یك لولای صیقلی که در A، انتهای بالایی آن است بچرخد. به‌انتهای B این میله، نیرویی افقی وارد می‌شود، به‌طوری‌که میله درحالت تعادل می‌ماند وانتهای B از امتداد قائم A به‌فاصلهٔ a است. ثابت‌کنیدکه عکس‌العمل لولا برابراست با

$$W\left[\frac{۴l^{۲}-۳a^{۲}}{l^{۲}-a^{۲}}\right]^{۱/۲}$$

۱۸ ـ بلوکی به‌شکل مکعب به‌کمك دو سیم همطول، که به‌دونقطهٔ متقارن از وجه‌بالایی آن متصل شده است، آویزان است. سردیگرهردوسیم به‌یك نقطه متصل شده‌است. نشان دهیدکه اگرطول سیمها راکوتاه کنیم‌کشش سیمها افزوده می‌شود. اگرجرم بلوك ۲۰۰۰ kg وطول هریك از وجوه‌آن ۰/۹ m باشد، و دونقطه‌ای‌که سیمها

به‌بلوك متصل‌شده‌اند m ۰/۶ ازهم فاصله داشته باشند، کوتاهترین طول ممکن‌را برای سیمها پیدا کنید. می‌دانیم که توانایی هریك از سیمها در برابر پاره شدن ۱۵۰۰۰N است.

۱۹ - ورقهٔ مدور یکنواختی است به‌وزن W. مرکزآن C است وصفحهٔ آن قائم است. این ورقه می‌تواند درصفحهٔ خودش حول محوری افقی که از نقطهٔ A، واقع برمحیط آن، می‌گذرد آزادانه حرکت‌کند. خط AC باید نسبت به‌امتداد قائم زاویهٔ معین α بسازد. برای این منظور این ورقه را از نقطهٔ B، واقع برمحیط آن، برمیخی صیقلی تکیه می‌دهند. وضع نقطهٔ B را طوری پیداکنیدکه نیرویی‌که برمیخ فشار می‌آورد حداقل شود واین نیروی حداقل را تعیین‌کنید.

۲۰ - قرقرهٔ یکنواخت مدوری، به‌شعاع a و وزن W، که می‌تواند آزادانه دریك صفحهٔ قائم حرکت‌کند درنقطهٔ P از حلقهٔ‌کوچك صیقلی ثابتی عبور‌کرده است. نقطهٔ Q از قرقره، به‌وسیلهٔ نخ انعطاف‌ناپذیری به‌طول l به‌نقطهٔ ثابت O که به‌طور قائم بالای P است‌متصل شده است. ثابت‌کنیدکه درحالت تعادل‌کشش نخ برابر است با $\dfrac{W(l+a)}{PO}$، به‌شرط‌آنکه $PO>l$ است.

۲۱ - قاب عکسی به‌جرم kg ۵ ازیك میخ به‌وسیلهٔ نخی به‌طول m ۱/۵ آویزان است. دو انتهای نخ به‌دو حلقه از قاب‌عکس که به‌فاصلهٔ m ۰/۹ ازیکدیگرند بسته شده است. کشش نخ را تعیین‌کنید.

۲۲ - نردبان یکنواختی است به‌جرم kg ۲۰ که با امتداد قائم زاویهٔ °۲۵ می‌سازد. یك انتهای آن بردیوار صیقلی قائمی تکیه دارد وانتهای دیگرآن برزمین افقی ناصافی تکیه‌کرده است. صفحهٔ قائمی‌که از نردبان می‌گذرد، عمود بردیوار است. عکس‌العملهای دیوار و زمین را تعیین‌کنید.

۲۳ - برسطح صیقلی شیبداری‌که زاویهٔ آن با افق برابر α است، کره‌ای به‌شعاع a و وزن W قراردارد. به‌نقطه‌ای از این کره، نخی به‌طول l بسته شده است. انتهای دیگرنخ به‌نقطه‌ای ازسطح شیبدار بسته شده است. ثابت کنید که کشش نخ برابر است با

$$\frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^{2}+2al}}$$

۲۴ - میلهٔ یکنواخت AB می‌تواند در صفحه‌ای قائم حول انتهای A، که ثابت است، بچرخد و این میله به‌وسیلهٔ نخی‌که به‌نقطهٔ B متصل شده است طوری نگاه داشته

شده است که با خط قائم زاویهٔ θ می‌سازد. جهت نخ را طوری تعیین کنید که کشش آن به‌حداقل ممکن برسد و در این حالت عکس‌العمل لولا را تعیین کنید.

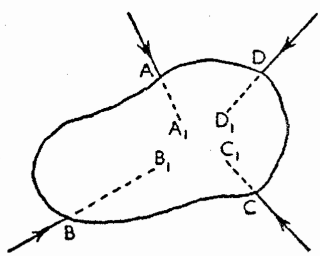
۲۵ ـ تیغه‌ای است به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع که به‌دو رأس آن دو نخ متصل شده است. امتداد نخها از مرکزثقل تیغه می‌گذرد و یکی از دو نخ به‌طور افقی است و کشش آن ۵ N است. کشش نخ دیگر و وزن تیغه را تعیین کنید.

۲۶ ـ میلهٔ یکنواختی به‌طول ۳ m و جرم ۲۰ kg بردوسطح صیقلی شیبدار که زاویهٔ یکی با افق، °۳۰ وزاویهٔ دیگری با افق °۶۰ است تکیه کرده است. تعیین کنید هنگامی که میله به‌حال تعادل است با چه نیروهایی بردو سطح فشار می‌آورد و زاویهٔ میله با افق چقدر است.

۴.۱۲. جسم صلبی که تحت اثربیش از سه نیرو است

اکنون حالتی عمومی را درنظرمی گیریم که بیشتر از سه‌نیروی واقع دریك صفحه برجسم صلب وارد می‌شوند. این نیروها لزومی ندارد که متقارب باشند.

با استفاده از اصل انتقالپذیری نیرو، نقطهٔ اثر هرنیرو را می‌توان هرنقطه‌ای از راستای نیروگرفت. مثلاً اگرچهارنیرو درنقاط A، B، C و D بریك جسم صلب، مطابق شکل ۱۲-۱۱، اثر کنند، می‌توان فرض کرد که نقاط اثرآنها عبارتند از A_1، B_1، C_1 و D_1 که برراستای چهار نیرو واقعند. بنابراین نتیجه می‌شود که شکل و اندازهٔ جسم اهمیت ندارد، بلکه آنچه دارای اهمیت است بزرگی و اوضاع نسبی نیروهاست.



شکل ۱۲-۱۱

بنابراین شرایط تعادل فقط بستگی به‌نیروها دارد و به‌جسم بستگی ندارد. به‌همین دلیل است که غالباً از شرایط تعادل یك دستگاه نیروگفتگو به‌عمل می‌آید، بدون‌آنکه از جسمی که نیروها برآن وارد شده‌اند ذکری بشود.

گاهی تعیین برایند چندنیرو که براضلاع یك‌مربع یا یك‌چندضلعی واردشده‌اند مورد نظراست. اضلاع شکل صرفاً راستاهای نیروها را مشخص می کند ولزومی ندارد که جسم دارای چنان شکلی باشد. شکل جسم هرچه باشد، به‌شرط آنکه جسم صلب باشد برایند تفاوتی نمی کند.

از قضیه‌ای که در بند بعد مطرح می کنیم، ابتدا شرایط تعادل را نتیجه می گیریم. روش عمومیتر در بند ۱۲-۲۱ خواهد آمد.

۵.۱۲. دستگاه غیرمشخصی ازنیروهای همصفحه‌که بریك جسم صلب اثرمی‌کنند، و درحال تعادل نیستند، می‌توانند به‌یك نیرو یا یك زوج نیرو تبدیل شوند.

همیشه می‌توانیم سه نیرو، مثلاً P، Q وR، را به‌دونیرو تبدیل‌کنیم. زیراهمیشه می‌توانیم P را با Q یا R ترکیب‌کنیم. مگرآنکه P با هریك ازآنها تشکیل زوج بدهد.

دراین حالت Q و R مساوی، متوازی و همسو هستند (زیرا هریك ازآنهادرخلاف جهت P است)، بنابراین Q و R می‌توانند با هم ترکیب شوند.

اگرنیروی دیگری از دستگاه را با دو نیرویی که از ترکیب P، Q و R به‌دست آمده است درنظربگیریم، بازهم می‌توانیم سه‌نیرو را به‌دو نیرو تبدیل‌کنیم وبدیهی‌است که با تکرار این کار، می‌توان دستگاه نیروها را به‌دو نیروتبدیل‌کرد، که اگر درحال‌تعادل نباشند، باید یا زوج نیرو تشکیل دهند یا بدیهی است‌که به‌یك نیرو تبدیل شوند.

۶.۱۲. اگردستگاه به‌یك نیروتبدیل شود،آن را معمولا با R نمایش می‌دهند؛ اگردستگاه به‌یك زوج نیرو تبدیل شود،گشتاورآن را به G نمایش می‌دهند.

بدیهی است که‌تبدیل هردستگاه نیروها به‌یك یاچند نیرو، تغییری درمجموع‌مؤلفه‌ها درهیچ جهت نمی‌دهند، زیرا با ترکیب هردو نیرو، مؤلفهٔ برایند برابراست با مجموع مؤلفه‌های دو نیرو. پس با کاهش دستگاه نیروها، مجموع مؤلفه‌های دونیروی اخیر در هرجهت برابراست با مجموع مؤلفه‌های نیروهای اولیه درآن جهت، و نیز برابر است با مؤلفهٔ نیروی مجرد برایند R که دستگاه نیروها سرانجام به‌آن تبدیل شده‌است. اگردستگاه به‌یك زوج تبدیل شود، مجموع مؤلفه‌های نیروهای اولیه درهرجهت باید صفر باشد.

به‌همین ترتیب با عمل‌کاهش دادن یك دستگاه نیروها، در مجموع گشتاورها حول هرنقطه تغییری حاصل نمی‌شود؛ گشتاور R یا گشتاور زوج حول هرنقطه برابر است با مجموع گشتاورهای نیروهاکه به‌طور جداجدا حول‌آن‌نقطه تعیین شده باشد (بند ۱۱-۱۳ را ببینید).

آشکار است که R از نظربزرگی وجهت به‌کمك بردار مجموع دستگاه نیروها تعیین می‌شود. اگر بردارمجموع، صفرباشد، $R = 0$ خواهد بود. دراین صورت دستگاه، به‌طور کلی به‌یك زوج باگشتاور G کاهش می‌یابد. اگرعلاوه برآن $G = 0$ باشد، دستگاه درحال تعادل خواهد بود.

۷.۱۲. شرایط تعادل

اگر R برابرصفر باشد، مؤلفه‌اش درهرجهت می‌بایستی برابرصفر باشد؛ به‌طور معکوس برای‌آنکه یقین حاصل شودکه R صفر است، باید بدانیم‌که مؤلفه‌هایش در دو جهت متفاوت صفرند. اگر بدانیم‌که مؤلفه‌اش فقط دریك جهت صفراست، این جهت برجهت R عمود است، اما اگرمؤلفه‌اش دریك جهت دیگرنیز صفرباشد، دراین صورت R می‌بایستی برابرصفرباشد.

نیز اگرمؤلفه‌های R دردوجهت دلخواه‌برابرصفرند، مجموعهای مؤلفه‌های‌نیروهای جداگانه دراین دوجهت می‌بایستی صفرباشند.

چون گشتاور یك زوج نسبت به‌همهٔ نقاط صفحه‌اش یکسان است، مشاهده می‌شود که اگر G صفر باشد، مجموع گشتاورهای نیروهای جداگانهٔ دستگاه حول هر نقطه از صفحهٔ خودشان می‌بایستی صفرباشد.

برعکس، اگرمجموع گشتاورهای نیروها حول هرنقطه از صفحه‌اشان برابر صفر باشد، دستگاه نمی‌تواند به‌یك زوج کاهش پیداکند.

اما باید توجه داشت‌که وقتی‌که مجموع گشتاورها حول یك یا دونقطه برابر صفر است، دلیل براین نیست‌که دستگاه درحال تعادل است، زیرا ممکن است این دونقطه برراستای نیروی برایند قرار داشته باشند. اما اگر مجموع گشتاورها حول سه‌نقطهٔ غیر واقع بر یك استقامت صفرباشد، دراین صورت دستگاه به‌حال تعادل است، زیرا نمی‌تواند به‌یك نیرو یا یك زوج نیروکاهش پیداکند.

شرایط لازم برای‌آنکه یك دستگاه نیرو به‌حال تعادل باشد به‌این قرار است:

(۱) مجموع مؤلفه‌ها در هرجهت دلخواه باید برابرصفرباشد.

(۲) مجموع گشتاورها نسبت به‌هرنقطهٔ دلخواه باید برابرصفر باشد، اما برای آنکه یقین پیداکنیم‌که نیروها درحال تعادل هستند، وجود هریك از این شرایط به‌طور جداگانه، کافی نیست.

۸.۱۲. ساده‌ترین مجموعهٔ شرایطی‌که می‌توان با برقرار بودن آنها، یقین حاصل کردکه

نیروها به‌حال تعادلند به‌شرح زیراست:

(۱) مجموعهای مؤلفه‌های نیروها در هردو جهت دلخواه می‌بایستی برابرصفر باشد.
(۲) مجموع جبری گشتاورهای نیروها نسبت به‌هرنقطهٔ دلخواه که در صفحهٔ آنها واقع است باید برابرصفرباشد.

صورت دیگر شرط (۱) این است‌که بردار مجموع همهٔ نیروها می‌بایستی برابر صفر باشد.

شرط (۱) اطمینان می‌دهدکه دستگاه نمی‌تواند به‌یك نیروی مجردکاهش پیداکند، و شرط (۲) اطمینان می‌دهدکه دستگاه نمی‌تواند به‌یك زوج کاهش پیداکند.

آشکار است‌که شرایط (۱) و (۲) درواقع معادل با سه شرط هستند.

مجموعهٔ دیگری از شرایط که قبلاً در بالا ذکرکردیم این است‌که مجموعهای گشتاورهای نیروها نسبت به‌هرسه نقطه‌ای که دریك خط مستقیم واقع نیستند باید برابر صفرباشد. این شرط نیز معادل با سه شرط است.

۹.۱۲. درحل مسئله‌های استاتیك با مجموعهٔ نیروهایی‌که درحال تعادلند سروکارداریم، و بنابراین می‌توانیم از هریك از مجموعه‌های شرایطی‌که در بالا ذکرکردیم استفاده‌کنیم.

برطبق قاعده‌ای‌که در زیرشرح می‌دهیم سه معادله به‌دست می‌آوریم‌که به‌نیروها و زاویه‌های مجهول مربوطند:

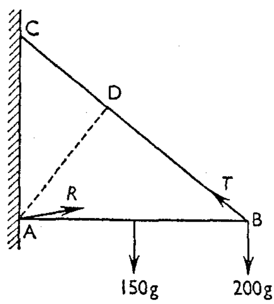
(الف) مجموع جبری مؤلفه‌های همهٔ نیروها را درجهت مناسبی برابر صفر می‌گیریم.
(ب) مجموع جبری مؤلفه‌های همهٔ نیروها را درجهت مناسب دیگر(عموماً عمود برجهتی‌که در (الف) گفتیم) برابرصفر می‌گیریم.
(پ) مجموع جبری گشتاورهای نیروها را نسبت به‌نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ آنها برابرصفرمی‌گیریم.

یادداشت. جهتهایی‌که در(الف) و (ب) انتخاب می‌شوند عموماً، اما نه‌همیشه، افقی وقائم هستند. نقطه‌ای‌که گشتاورها را حول آن تعیین می‌کنند طوری انتخاب می‌شودکه حتی‌الامکان روی بیشتر نیروها واقع باشد، یعنی نقطه‌ای را انتخاب می‌کنندکه بیشتر نیروها ازآن نقطه می‌گذرند.

۱۰.۱۲. روشی که برای به‌دست آوردن معادلات در بند قبل بیان کردیم در مثالهای زیر به‌کاربرده شده است.

باید توجه داشت‌که دربسیاری از حالتها، میان طولها و زاویه‌ها، رابطه‌هایی هندسی وجود دارندکه معادله‌های بیشتری، علاوه برمعادله‌هایی که از تجزیه و گشتاور گرفتن به‌دست می‌آیند، به‌ما می‌دهند. دربعضی ازمسائل، به‌کاربردن اصول مکانیك‌چندان دشوار نیست، اما برای به‌دست آوردن نتیجهٔ مطلوب، اطلاعات هندسی ومثلثاتی مورد لزوم است.

مثال ۱: میلهٔ یکنواخت وسنگینی به‌جرم ۱۵۰ kg و به‌طول ۴/۵ m به‌دیوار قائمی‌لولا شده‌است. به‌انتهای دیگر میله، نخی بسته‌شده‌است و انتهای دیگرنخ، در ۳/۶ متری بالای لولای میله به‌دیوار بسته شده است، به‌طوری که میله افقی است. از این انتهای میله وزنه‌ای به‌جرم ۲۰۰ kg آویزان است. کشش نخ و نیروی فشاری راکه برمیله وارد می‌شود تعیین‌کنید.



شکل ۱۲-۱۲

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۲-۱۲) میله را نشان بدهد، AC دیوار وBC نخ باشد. چون $AB = ۴/۵\ m$، و $AC = ۳/۶\ m$

$$\sin ABC = \frac{۴}{\sqrt{۴۱}} \quad \text{و} \quad BC = \frac{۹\sqrt{۴۱}}{۱۰} m$$

اگر AD عمودی باشدکه از A بر BC رسم می‌شود،

$$AD = AB \sin ABC = \frac{۱۸}{\sqrt{۴۱}} m$$

نیروهایی که برمیله اثرمی‌کنند درشکل نشان داده شده‌اند، R عکس‌العملی‌است که در لولای A وارد می‌شود و T، نیرویی است که در B وارد می‌شود وبرابر با کشش نخ است.

نسبت به A گشتاور می گیریم، زیرا R حذف می‌شود. خواهیم داشت:

$$\frac{۱۸}{\sqrt{۴۱}}T = ۱۵۰ g \times \frac{۴/۵}{۲} + ۲۰۰ g \times ۴/۵$$

$$\therefore \qquad T = \frac{۲۷۵ \times ۹/۸ \times ۴/۵}{۱۸}\sqrt{۴۱} = ۶۷۳/۷۵\sqrt{۴۱}\,\mathrm{N}$$

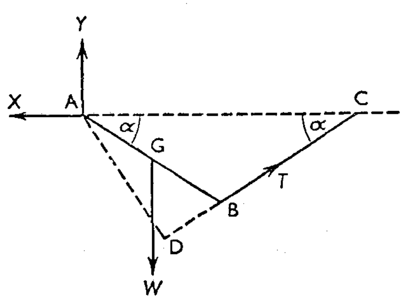
تنها نیروهای افقی که برمیله اثر می کنند عبارتنداز مؤلفه‌های افقی کشش نخ و عکس‌العمل در A. این مؤلفه‌ها باید مساوی و در خلاف جهت یکدیگر باشند، و نیروی فشاری که برمیله وارد می‌شود برابر با یکی ازآنهاست.

بنابراین نیرویی که برمیله فشار می‌آورد برابر است با

$$T \cos \mathrm{ABC} = ۶۷۳/۷۵\sqrt{۴۱} \times \frac{۵}{\sqrt{۴۱}}$$

$$= ۳۳۶۸/۷۵ \ \mathrm{N}$$

مثال ۲: انتهای میلهٔ یکنواختی به‌وزن W به‌یك لولا متصل شده است، وانتهای دیگر با نخی نگاهداری می‌شودکه یك طرف آن به‌میله وطرف دیگرآن به‌نقطه‌ای همسطح لولا متصل شده است. زاویه‌هایی که میله ونخ با افق می‌سازند یکسان است. کشش نخ و عکس‌العمل در لولا را تعیین کنید.



شکل ۱۲-۱۳

حل : فرض می کنیم AB (شکل ۱۲-۱۳) نشان‌دهندهٔ میله، G نقطهٔ وسط، و BC

نخ، و AC امتداد افقی باشد.

فرض می‌کنیم $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ و $AB = l$ باشد.

دراین صورت $AC = ۲l\cos\alpha$ و اگر AD عمودی باشدکه از A برBC رسم شده است، خواهیم داشت: $AD = ۲l\cos\alpha\sin\alpha$.

پس اگر T کشش نخ باشد وحول A گشتاور بگیریم،

$$T.۲l\cos\alpha\sin\alpha = W\frac{l}{۲}\cos\alpha$$

یا

$$T = \frac{W}{۴\sin\alpha}$$

اگر X و Y مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل در A باشند، دراین صورت با تجزیهٔ عکس‌العمل درامتداد افقی:

$$X = T\cos\alpha = \frac{W\cos\alpha}{۴\sin\alpha}$$

و با تجزیه در امتداد قائم،

$$Y = W - T\sin\alpha = \frac{۳}{۴}W$$

اگر R برایند عکس‌العمل در A باشد،

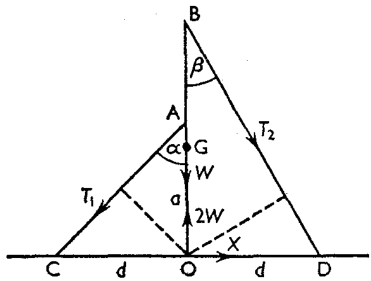
$$R = \sqrt{X^۲ + Y^۲} = \frac{W}{۴}\sqrt{۹ + \cot g^۲\alpha}$$

اگر θ زاویهٔ R با افق باشد،

$$tg\theta = \frac{Y}{X} = \frac{۳}{۴} . \frac{۴\sin\alpha}{\cos\alpha} = ۳tg\alpha$$

مثال ۳: تیری‌که انتهای آن روی زمین قرار دارد، به کمك دو ریسمان به‌طور قائم نگهداری شده است. یك انتهای هریك ازاین دو ریسمان به‌زمین و به‌فاصله‌های d از دو طرف پای تیر، متصل شده است. این دو ریسمان در ارتفاعهای a و b به‌تیر محکم شده‌اند وکشش طوری تنظیم شده است، که عکس‌العمل قائم زمین دوبرابر وزن تیراست. ثابت‌کنیدکه عکس‌العمل‌کل زمین با امتداد قائم‌زاویه‌ای برابر θ می‌سازد، به‌طوری که

$$tg\theta = \frac{۱}{۴}d\left(\frac{۱}{a} \sim \frac{۱}{b}\right)$$



شکل ۱۲-۱۴

حل : فرض می‌کنیم OAB (شکل ۱۲-۱۴) نشان‌دهندهٔ تیرباشد، وO پایینترین نقطه، و A و B نقطه‌هایی باشندکه ریسمانهای AC وBD درآن نقطه‌ها به‌تیرمحکم شده‌اند به‌طوری‌که $OC = OD = d$.

فرض‌کنیم $AO = a$ ، $OB = b$ ، $\angle OBD = \beta$ ، $\angle OAC = \alpha$ و کششهای AC و BD به‌ترتیب $T_۱$ و $T_۲$ باشد.

نسبت به O گشتاور می‌گیریم:

$$T_۱ d \cos\alpha = T_۲ d \cos\beta \qquad (۱)$$

اما چون عکس‌العمل قائم زمین برابر $۲W$ است کـه W وزن تیر است، مجموع مؤلفه‌های قائم‌کشش می‌بایستی برابر W باشد.

$$\therefore \qquad T_۱ \cos\alpha + T_۲ \cos\beta = W \qquad (۲)$$

پس با استفاده از (۱):

$$T_۱ \cos\alpha = T_۲ \cos\beta = \frac{W}{۲}$$

X، مؤلفهٔ افقی عکس‌العمل زمین می‌بایستی برابر تفاوت میان‌مؤلفه‌های افقی‌کششها باشد. با تجزیهٔ آنها در امتداد افقی خواهیم داشت:

$$X = T_۱ \sin\alpha - T_۲ \sin\beta = \frac{W}{۲}(tg\alpha - tg\beta)$$

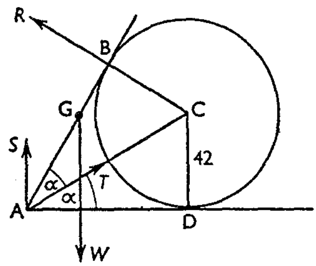
$$= \frac{W}{۲}\left(\frac{d}{a} - \frac{d}{b}\right)$$

عکس‌العمل قائم برابر $۲W$ است، بنابراین

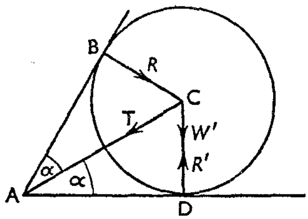
$$tg\theta = \frac{X}{۲W} = \frac{d}{۴}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right)$$

مثال ۴: غلتکی به‌شعاع ۴۲cm روی زمین قرار دارد. تخته چوب یکنواختی به طـول ۶۰ cm براین غلتك تکیه کرده است. یك انتهای تخته چـوب برزمین است و انتهای دیگر تخته‌چوب کمی از غلتك بالاتررفته است. تخته‌چوب برمحور غلتك عمود است. نخی به‌طول ۷۰ cm به‌محور غلتك و به‌آن انتهای تخته‌چوب که روی زمین متصل است، با این کار از لغزش غلتك وتخته‌چوب جلوگیری کنیم. ثابت کنیدکه کشش نخ ۰/۱۸ وزن تخته‌چوب است.

یادداشت. به‌اصطکاك میان اجسام وزمین یا میان خودشان اشاره‌ای نشده است. اما چون گفته‌ایم که از لغزش آنها به‌کمك نخ جلوگیری شده است، باید فرض کنیم که‌سطوح تماس صیقلی هستند. درواقع، مسئله، درغیراین صورت، نامعین‌است.



شکل ۱۲ــ۱۵ الف



شکل ۱۲ــ۱۵ ب

حل : فرض می‌کنیم C (شکل ۱۲-۱۵) مرکز غلتك، D نقطهٔ تماس غلتك بـا زمین، AB تخته‌چوبی که در B با غلتك تماس دارد، G نقطهٔ وسط تخته‌چوب،وزاویهٔ CAD برابر α باشد.

چون $AC = ۷۰\ cm$ و $CD = ۴۲\ cm$

$$AD = \sqrt{۷۰^۲ - ۴۲^۲} = ۵۶\ cm$$

$$\therefore \quad AB = ۵۶\ cm$$

شکل ۱۲-۱۵ الف نیروهایی را نشان می‌دهد که برتخته‌چوب وارد می‌شوند و شکل ۱۲-۱۵ب نیروهایی را نشان می‌دهدکه برغلتك وارد می‌شوند.

عکس‌العمل R تخته‌چوب در نقطهٔ تماس باغلتك درامتداد شعاع CB است، و W، وزن تخته‌چوب درامتداد قائمی است که از G می‌گذرد.

برای تخته‌چوب، نسبت به A گشتاور می‌گیریم، تا عکس‌العمل S زمین وکشش T حذف شوند. خواهیم داشت:

$$۵۶R = W \times ۳۰ \cos ۲\alpha$$

اما $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ ، $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = \frac{۷}{۲۵}$

$$\therefore \qquad R = W\frac{۳۰ \times ۷}{۵۶ \times ۲۵} = \frac{۳}{۲۰}W$$

نیروهایی که مایلند غلتك را درامتداد افقی حرکت دهند مؤلفه‌های افقی R وکشش T نخ هستند. چون این نیروها باید مساوی و مخالف یکدیگر باشند خواهیم داشت:

$$T\cos\alpha = R\sin ۲\alpha$$

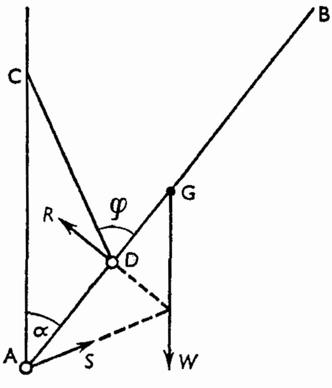
$$\therefore \qquad T = ۲R\sin\alpha = ۲ \times \frac{۳W}{۲۰} \times \frac{۳}{۵} = ۰/۱۸W$$

مثال ۵: میلهٔ یکنواختی به‌وزن W و طول $۲a$ می‌تواند حول A، یك انتهای خودش، آزادانه بچرخد. این میله به‌وسیلهٔ نخی نگاهداری می‌شود که یك انتهای آن به‌نقطه‌ای که به‌طور قائم بالای A و به‌فاصلهٔ h از A است متصل شده است و انتهای دیگرآن به‌حلقه‌ای صیقلی به‌وزن W متصل شده است ومیله از این‌حلقه عبورکرده است. نشان دهیدکه دروضع تعادل، نخ با امتداد قائم زاویه‌ای‌برابر θ می‌سازد به‌طوری‌که $Wal(h\cos\theta - l) = w(l^۲ - ۲lh\cos\theta + h^۲)^{۳/۲}$

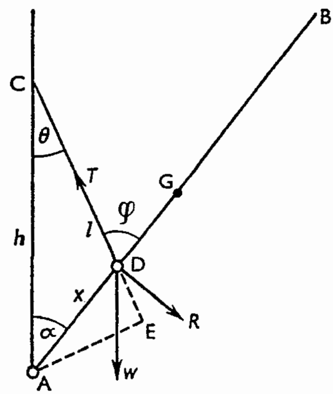
حل : فرض می‌کنیم C (شکل ۱۲-۱۶) انتهای بالایی نخ، D محل حلقه، G نقطهٔ وسط میله و زاویهٔ CAD برابر α، زاویهٔ CDG برابر φ و $AD = x$ باشد.

AE (شکل ۱۲-۱۶ الف) را عمود برCD رسم می‌کنیم، دراین صورت $AE = h\sin\theta$؛ فرض می‌کنیم‌کشش نخ برابر T باشد.

شکل ۱۲-۱۶ الف نیروهایی را نشان می‌دهدکه برحلقه وارد می‌شوند، وشکل ۱۲-۱۶ ب نیروهایی را نشان می‌دهدکه برمیله وارد می‌شوند. S عکس‌العملی است‌که در لولا برمیله وارد می‌شود. برحلقه و برمیله نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت R عمود برمیله وارد می‌شوند.



شکل ۱۲-۱۶ ب



شکل ۱۲-۱۶ الف

برای حلقه، با تجزیهٔ نیرو در امتداد AB و در امتداد عمود برAB، چنین خواهیم داشت:

$$T\cos\varphi = w\cos\alpha \qquad (۱)$$

$$T\sin\varphi = w\sin\alpha + R \qquad (۲)$$

تنها برای میله با گرفتن گشتاور نسبت به A خواهیم داشت:

$$Rx = Wa\sin\alpha \qquad (۳)$$

T را از (۱) و R را از (۳) به‌دست می‌آوریم و در معادلهٔ (۲) می‌گذاریم. خواهیم داشت:

$$w\cos\alpha\, tg\varphi = w\sin\alpha + W\frac{a}{x}\sin\alpha$$

$$\therefore \quad wx(\cos\alpha\, tg\varphi - \sin\alpha) = wa\sin\alpha$$

$$\therefore \quad wx\sin(\varphi-\alpha) = Wa\sin\alpha\cos\varphi$$

$$\therefore \quad wx\sin\theta = Wa\sin\alpha\cos\varphi$$

اما برطبق شکل،

$$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{l}{\sin\alpha}$$

پس

$$wx^{2} = Wal\cos\varphi$$

نیز برطبق شکل،

$$DE = x\cos\varphi = h\cos\theta - l$$

پس

$$Wal(h\cos\theta - l) = wx^{3}$$

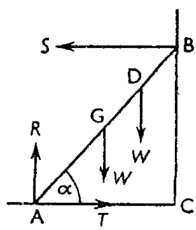
که می‌توان نتیجهٔ مطلوب را ازآن به‌دست آورد، زیرا داریم:

$$x^{2}=h^{2}-2hl\cos\theta+l^{2}$$

یادداشت. علاوه برمعادلهٔ (۳) می‌توانستیم با تجزیهٔ نیرو در امتداد میله و در امتداد عمود برمیله دو معادلهٔ دیگر به‌دست آوریم. این دو معادله امکان تعیین بزرگی وجهت S را برای ما فراهم می‌کردند.

مثال ۶: نردبانی با افق زاویهٔ α می‌سازد ویك انتهای‌آن برزمینی صیقلی وافقی‌وانتهای دیگرآن بردیواری صیقلی وقائم قرار دارد. انتهای پایینی نردبان به‌وسیلهٔ نخی به‌محل تلاقی دیوار و زمین متصل شده است. کشش نخ و عکس‌العمل دیوار و زمین را تعیین کنید. نیزکشش نخ را برای‌هنگامی تعیین کنیدکه شخصی که‌وزنش برابر وزن نردبان است، تا سه‌چهارم طول نردبان از نردبان بالارفته است.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۲-۱۷) نردبان، C محل تلاقی دیوار و زمین، و G نقطهٔ وسط نردبان باشد.



شکل ۱۲-۱۷

چون سطوح صیقلی هستند، عکس‌العملهای در A و B برزمین و دیوار عمودند. این عکس‌العملها را R و S می‌نامیم.

فرض می‌کنیم وزن نردبان که در امتداد قائم است و از G می‌گذرد برابر W وکشش نخ برابر T باشد.

با تجزیه در امتداد قائم: (۱) $R=W$

با تجزیه در امتداد افقی (۲) $S=T$

باگشتاور گرفتن نسبت به B،

$$T.\mathrm{AB} sin\alpha = R.\mathrm{AB} cos\alpha - W\frac{\mathrm{AB}}{۲}cos\alpha \qquad (۳)$$

R را میان (۱) و (۳) حذف می‌کنیم:

$$T sin\alpha = W cos\alpha - \frac{۱}{۲}W cos\alpha$$

$$\therefore \qquad T = \frac{۱}{۲}W cotg\alpha$$

از (۲):

$$S = T = \frac{۱}{۲}W cotg\alpha$$

وقتی‌که آن شخص درنقطهٔ D است، که $\mathrm{AD} = \frac{۳}{۴}\mathrm{AB}$، معادلات (۱) و (۳) چنین می‌شوند.

$$R = W + W = ۲W$$

و

$$T.\mathrm{AB} sin\alpha = R.\mathrm{AB} cos\alpha - W\frac{\mathrm{AB}}{۲}cos\alpha - W\frac{\mathrm{AB}}{۴}cos\alpha$$

$$\therefore \qquad T sin\alpha = ۲W cos\alpha - \frac{۳}{۴}W cos\alpha$$

$$\therefore \qquad T = \frac{۵}{۴}W cotg\alpha$$

تمرین ۲۰۱۲

۱ - میلهٔ سنگین AB به‌طول ۲/۴ m وبه‌جرم ۲۰ kg در A، به‌نقطه‌ای واقع بریك دیوار قائم، لولا شده است. ایـن میله به‌وسیلهٔ زنجیری‌که به B متصل شده است به‌طور افقی قرار دارد. انتهای دیگر زنجیر به‌نقطه‌ای از دیوارکه در ۱/۵ متری بالای A است متصل شده است. اگر در ۱/۸متری ازA وزنه‌ای به‌جرم ۱۰ kg به‌میله آویزان باشد، کشش زنجیر و بزرگی وجهت عمل A را میان میله و دیوار حساب کنید.

۲ - میلهٔ یکنواخت ACB به‌طـول ۱/۸ m و به‌جـرم ۴ kg می‌تواند آزادانه حول لـولای C که در ۰/۶متری A است بچـرخد. به‌کمك نیروی قائمی‌کـه سوی آن به‌طرف پایین و بزرگـی آن ۴۹N است و برA وارد می‌شود و نیرویی افقی‌کـه برB وارد می‌شود میله را به‌وضعی نگاه می‌دارندکه باخط‌قائم زاویهٔ °۴۵می‌سازد،

و A در سمت پایین است. بزرگی نیرویی که برB وارد می‌شود و بزرگی و جهت عکس‌العمل لولای C را تعیین کنید.

۳ ـ میلهٔ سنگین ویکنواختی به‌وزن W ازیك نقطه به وسیلهٔ دونخ با طولهای مساوی آویزان است. هریك از نخها به‌یك انتهای میله متصل شده‌اند. وزنه‌ای به وزن W در نیمه‌راه میان مرکز میله ویك انتهای میله به‌میله آویزان است. ثابت کنید که نسبت کششهای نخها برابراست با $\frac{۲W+۳w}{۲W+w}$

۴ ـ دری به‌ارتفاع ۲/۲۵ m به دو لولا که به‌فواصل ۲۵ cm از بالا و از پایین در هستند متصل است. جرم در ۱۸ kg ومرکز ثقل آن در ۶۷/۵ cm ازخط واصل میان لولاهاست. کل نیرویی راکه برهرلولا وارد می‌شود تعیین کنید. فرض می‌شود که هرلولا نصف وزن در را تحمل می‌کند.

۵ ـ دری از دو لولای A و B آویزان است. مرکزثقل آن G است و خط قائمی که از G می‌گذرد، خطی افقی راکه از B می‌گذرد در K قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر تمام وزن در را لولای A تحمل کند، مثلث ABK را می‌توان به عنوان مثلث نیروها به‌کاربرد و از روی آن عکس‌العملهای در A و B را حساب کرد. نیز این ترسیم را هنگامی که وزن در به‌طور متساوی میان A وB تقسیم شود تکمیل کنید.

۶ ـ دو انتهای میلهٔ یکنواختی برروی دوسطح صیقلی شیبدار قرار دارد. یکی‌ازسطوح با افق زاویهٔ °۳۰ و دیگری با افق زاویهٔ °۶۰ می‌سازد. وزنه‌ای که وزن آن دو برابر وزن میله است می‌تواند در طول میله بلغزد. وضع وزنهٔ لغزنده را هنگامی که میله در وضع افقی است تعیین کنید.

۷ ـ دو انتهای نردبان صیقلی یکنواخت، یکی بر سطح افقی و دیگری بردیواری قائم است. این نردبان به‌وسیلهٔ نخی نگاهداری می‌شود که یك انتهای آن به‌یك پلهٔ نردبان، که در $\frac{۱}{۴}$ طول نردبان از طرف پایین است، متصل شده است و انتهای‌دیگر آن به‌نقطه‌ای از پای دیوارکه مستقیماً به‌طور قائم در زیر انتهای بالایی نردبان است متصل شده است. نشان دهیدکه اگر پایین و بالای نردبان از پای دیوار به‌ترتیب در فاصله‌های a و b باشند، نسبت عکس‌العملهای P و Q که به‌ترتیب میان نردبان و زمین و نردبان و دیوار است برطبق رابطهٔ زیر به‌دست‌می‌آید:

$$\frac{Q}{P}=\frac{۳a}{۵b}$$

۸ - نردبانی به‌طول ۳ m و جرم ۱۷/۵ kg از انتهای A بردیوار صیقلی قائمی تکیه کرده است. B انتهای دیگر نردبان برروی زمین و به‌فاصلهٔ ۱/۸ m ازپای دیوار است. به‌کمك ریسمانی افقی‌که به B متصل است، نردبان را در این وضع نگاه می‌دارند. اگرمرکزثقل نردبان در ۱/۲ m از B باشد، کشش نخ‌را تعیین‌کنید. نیز بزرگی وجهت نیرویی راکه باید برA اعمال‌کرد تا نردبان بدون‌کمك ریسمان در همان وضع بماند تعیین‌کنید.

۹ - تخته‌چوب یکنواخت AB به‌طول ۱/۸ m و وزن معلوم، به‌طورافقی برروی دو میخ C و D قرار دارد، به طوری‌که AC = BD = ۲۰ cm است. تخته چوب A′B′ که از هرنظرمشابهٔ AB است برروی تخته‌چوب اول قراردارد، به‌طوری‌که A′ در ۲۷/۵ سانتیمتری A است. نیروهای فشاری $R_۱$ و $R_۲$ راکه برC و D وارد می‌شوند تعیین‌کنید. اکنون طوری‌که‌تعادل بازهم برقرار بماند، نیروی‌قائمی برابر P برA′ اعمال می‌کنیم. اگرنیروهای فشاری‌که این بار برC و D وارد می‌شوند به‌ترتیب $R'_۱$ و $R'_۲$ باشند، نشان دهیدکه

$$\frac{R'_۱ - R_۱}{R_۲ - R'_۲} = \frac{۷۵}{۱۹}$$

۱۰- مرکزثقل یك ظرف نیمکره‌ای شکل برروی شعاعی ازآن قراردارد که ظرف نسبت به‌آن تقارن دارد و این شعاع را به‌نسبت m و n تقسیم می‌کند. اگرظرف ازطرف منحنی آن برروی سطح شیبداری‌که با افق زاویهٔ θ می‌سازد قرارگیرد وآن سطح به‌قدری ناصاف باشدکه از لغزش ظرف جلوگیری‌کند، زاویهٔ امتداد دورهٔ ظرف را با افق تعیین‌کنید. معلوم شده است که وقتی‌که θ تقریباً برابر °۲۵ است، صفحهٔ دورهٔ ظرف به‌طورقائم قرار می‌گیرد. نسبت $\frac{m}{n}$ را تعیین کنید.

۱۱- شخصی می‌خواهد یك غلتك صیقلی به‌قطر ۵۰ cm و جرم ۱۰۰ kg را از روی حاشیهٔ یك جدول‌که بلندی آن ۱۰ cm است بکشد. غلتك را درهروضع‌که باشد، درچه جهت بکشد تا باکمترین‌کوشش از حاشیهٔ جدول بالا برود. نشان دهیدکه حداکثر نیروی لازم ۷۸۴ N است.

۱۲- می‌خواهند یك غلتك راکه وزن آن W وشعاع آن r است و مرکزثقل آن برروی محورش واقع است از پله‌ای به بلندی $\frac{۱}{۲}r$ بالا بکشند. نیرویی که بردسته وارد می‌شود مستقیماً برمحور غلتك وارد می‌شود. بهترین جهت برای کشیدن دسته

چیست؟ نیرویی راکه برای به‌حرکت درآوردن غلتك دراین جهت وارد می‌کنند با نیرویی مقایسه کنیدکه برای به‌حرکت درآوردن غلتك درامتداد افقی واردمی‌کنند. آیا درغلتك تمایلی برای لغزش برروی پله یا زمین وجود دارد؟

۱۳- به‌دو انتهای میلهٔ یکنواخت AB، به‌طول ۰/۹ m وجرم ۲ kg، دوانتهای نخی به طول ۱/۵ m متصل شده‌اند. نخ از حلقهٔ صیقلی O که به‌دیوار صیقلی قائمی متصل است عبور کرده است. میله که انتهای A ازآن در زیرقائم نقطهٔ O بردیوار تکیه کرده است، در صفحه‌ای قائم که عمود بردیوار است قرار دارد. ثابت کنیدکه اگر OA برابر ۰/۶ m باشد، میله به‌حال تعادل خواهد بود، ونشان دهیدکه کشش نخ برابر ۱۴/۷N است.

۱۴- به تیر تلگرافی شش سیم بسته شده است. سه‌سیم به طرف جنوب می‌رود، دو سیم به طرف شمال شرقی می‌رود و یك سیم به‌طرف مغرب می‌رود. اگر همهٔ سیمها در یك صفحهٔ افقی باشند وکششی هر یك ۹۰۰ N باشد، تعیین‌کنید چه فشاری بر تیر وارد می‌شود. سیمها هریك در ۱۲متری بالای زمین هستند و تیر را با مهاری که یك طرف آن به ۹متری بالای تیرمتصل شده وطرف دیگرآن در۴/۵متری از پای تیر برزمین تکیه دارد محکم می‌کنند. اگر تیر تمایل به‌افتادن نداشته باشد، کششی این مهار را تعیین‌کنید.

۱۵- جرم تیغهٔ مثلث شکل ABC، که درآن زاویه‌های B و C هریك 45° هستند، برابر ۳ kg است. این تیغه ازنقطهٔ وسط ضلع BC آویزان شده است. وزنه‌های ۲ kg و۸ kg به‌ترتیب از نقاط A و B و وزنهٔ M kg ازC آویزان است. اگر ضلع BC با خط قائم زاویهٔ 60° بسازد، مقدار M را تعیین کنید.

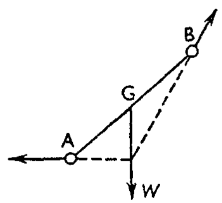
۱۱.۱۲ میله‌های مفصل‌دار

اکنون مسائلی را بررسی خواهیم کردکه شامل دویا چند جسم صلب است، و مخصوصاً، حالتهایی راکه درآن چند میلهٔ سنگین به‌طور صیقلی با هم مفصل شده‌اند.

فشارهایی راکه برمادهٔ میله‌ها وارد می‌شود درنظرنخواهیم گرفت.

در مسائل معمولی مربوط به‌تعادل میله‌های سنگین مفصل‌دار، فقط نیروهایی راکه برمفصلها وارد می‌شوند درنظرخواهیم‌گرفت (والبته وزن میله‌را نیزبه‌حساب‌می‌آوریم)، یعنی تعادل میله‌ها را تحت اثر اوزان آنها و نیروهایی که در انتهاهای آنها به‌وسیلهٔ لولاها وارد می‌شود موردنظر قرار می‌دهیم.

۱۲.۱۲. میلهٔ سنگین AB (شکل ۱۲-۱۸) را که آزادانه در A و B مفصل شده است درنظر می‌گیریم.



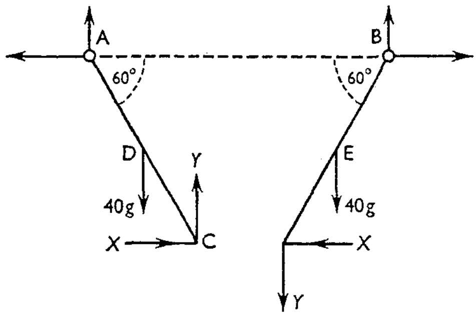
شکل ۱۲-۱۸

امتداد نیروی وزن آن قائم و ازمرکزثقل G می‌گذرد، وآشکار است که برای‌آنکه تعادل برقرارشود باید بر A و B نیروهایی وارد شوند. این نیروها ممکن است درامتداد قائم یا درامتداد دیگری مثلاً امتدادی که در شکل نشان داده شده است باشند. یعنی در هرصورت امتداد آنها باید ازنقطه‌ای واقع برروی راستای نیروی وزن بگذرد.

درهیچ حالتی این نیروها نمی‌توانند در امتداد میله وارد شوند (مگرآنکه میله‌قائم باشد). اماا گرمیله سبك باشد، دراین‌صورت نیروهایی که بر دوانتهای میله واردمی‌شوند ومیله را به‌حال تعادل نگاه می‌دارند می‌بایستی برابر و در سوی مخالف یکدیگر باشند و در امتداد میله وارد شوند.

غالباً دانش‌آموزان میان حالتهای مربوط به‌مسائل میله‌های سنگین با حالتهای مربوط به‌مسائل میله‌های سبك اشتباه می‌کنند. در حالتهای مربوط به‌میله‌های سنگین، تنها امتدادی که‌نیروها نمی‌توانند برانتهاهای میله‌وارد شوند، امتداد میله است. معمولاً مؤلفه‌های افقی وقائم نیرویی راکه به‌وسیلهٔ لولا برمیله وارد می‌شود در نظر می‌گیریم، و برای‌آنکه این مؤلفه‌ها را در نمودار به‌طورآشکار نشان دهیم، بهتراست که میله‌ها را متلاقی رسم نکنیم بلکه میان میله‌ها فاصله‌ای بگذاریم.

۱۳.۱۲. مثال ۱: دو میلهٔ مشابه و یکنواخت AC و CB به‌طور صیقلی در C مفصل شده‌اند، وانتهاهای دیگراین میله‌ها به‌دو نقطهٔ همتراز A و B متصل شده‌اند. اگر جرم هر میله ۴۰ g باشد وامتداد هرمیله با افق زاویهٔ °۶۰ بسازد، نیرویی راکه لولای C وارد می‌کند تعیین کنید.



شکل ۱۲ـ۱۹

حل: فرض می‌کنیم D، E (شکل ۱۲ـ۱۹) نقاط وسط میله‌ها باشند و بنابراین اوزان میله‌ها به‌طور قائم از D و E می‌گذرند.

فرض می‌کنیم مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی که لولای C برمیلهٔ AC وارد می‌کند به‌ترتیب X و Y باشند. نیرویی که ازطرف لولا برBC وارد می‌شود دارای مؤلفه‌هایی با همین بزرگی است، امـا جهت آن مؤلفه‌ها در جهت عکس مؤلفه‌های X و Y مربـوط به‌میلهٔ AC است. این نیروهـا و نیروهایی کـه در تکیه گاههای A و B برمیله‌ها وارد می‌شوند در شکل نشان داده شده‌اند.

فرض می‌کنیم طول هریك از میله‌ها برابر l باشد.

برای AC نسبت به A گشتاور می‌گیریم،

$$Xl\sin ۶۰^\circ + Yl\cos ۶۰^\circ = ۴۰\, g\frac{l}{۲}\cos ۶۰^\circ$$

$$\therefore \qquad X\,tg\,۶۰^\circ + Y = ۲۰\, g \qquad (۱)$$

برای BC نسبت به B گشتاور می‌گیریم،

$$Xl\sin ۶۰^\circ - Yl\cos ۶۰^\circ = ۴۰ g\frac{l}{۲}\cos ۶۰^\circ$$

$$\therefore \qquad X\,tg\,۶۰^\circ - Y = ۲۰\, g \qquad (۲)$$

از معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $Y = ۰$ است.

پس عکس‌العمل C فقط مشتمل برنیروی افقی X نیوتون است که مقدار آن چنین به‌دست می‌آید:

$$Xtg60 = 20g$$

$$\therefore \quad X=\frac{196}{\sqrt{3}}=\frac{196}{3}\sqrt{3}$$

یادداشت. چون تمام دستگاه نسبت به‌قائمی‌که از C می‌گذرد قرینه است، ممکن‌بود بدون نوشتن معادله‌ها، نتیجه بگیریم که Y می‌بایستی برابرصفر باشد. روشن است‌که برطبق شکل ۱۲-۱۹ فقط اگر Y برابرصفرباشد، نیروهایی‌که بردومیله وارد می‌شوند مشابه خواهند بود، درغیراین صورت تقارن ازمیان خواهد رفت.

مثال ۲: دومیلهٔ یکنواخت AB و AC با طولهای متساوی و اوزان W و W' از دو لولای همتراز B و C دریك صفحهٔ قائم آویزان شده‌اند. دومیله به‌طور صیقلی در انتهای A به‌یکدیگر متصل شده‌اند. ثابت‌کنید که مؤلفهٔ افقی عکس‌العمل A برابر $\frac{1}{4}(W+W')\frac{a}{h}$ است، که در آن $2a$ برابر فاصلهٔ BC است و h ارتفاع BC از A است. نیز مؤلفهٔ قائم عکس‌العمل را تعیین کنید.

حل: فرض می‌کنیم E ،D (شکل ۱۲-۲۰) نقاط وسط میله‌ها، و X و Y مؤلفه‌های افقی وقائم عمل لولای A برمیله‌ها باشد.

این نیروها می‌بایستی در جهتهای مخالف یکدیگر بردو میله باشند، اما چه آنها را درجهتهایی مطابق شکل نشان دهیم چه درجهتهای مخالف‌آن‌نشان دهیم تفاوتی نخواهدکرد. اگرآنها را در جهتهای مخالف جهتهایی‌که واقعاً اثر می‌کنند نشان بدهیم مقادیر منفی برای آنها به‌دست خواهیم آورد.

فرض می‌کنیم زاویهٔ ABC برابر α باشد. دراین صورت $\angle ACB=\alpha$.

فرض می‌کنیم طول هریك از میله‌ها برابر l باشد.

برای AB گشتاورها را نسبت به B تعیین می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$Xl\sin\alpha+Yl\cos\alpha=W\frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$\therefore \quad Xtg\alpha+Y=\frac{1}{2}W \qquad (1)$$

برای AC گشتاورها را نسبت به C تعیین می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$Xl\sin\alpha-Yl\cos\alpha=W'\frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$\therefore \quad Xtg\alpha-Y=\frac{1}{2}W' \qquad (2)$$

از جمع (۱) و (۲)،

$$۲Xtg\alpha=\frac{۱}{۲}(W+W')$$

$$\therefore \quad X=\frac{۱}{۴}(W+W')cotg\alpha$$

چون $cotg\alpha=\frac{a}{h}$ است،

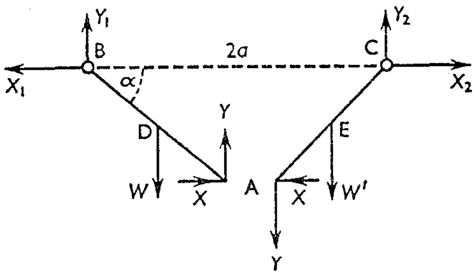
$$\therefore \quad X=\frac{(W+W')a}{۴h}$$

(۲) را از (۱) کم می‌کنیم:

$$۲Y=\frac{۱}{۲}(W-W')$$

یا

$$Y=\frac{۱}{۴}(W-W')$$



شکل ۱۲ــ۲۰

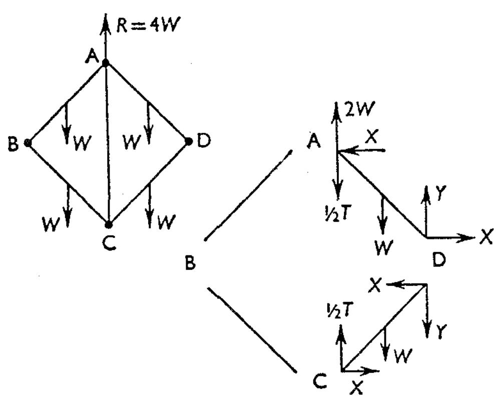
یادداشت. چهار معادلهٔ دیگری که از تجزیه در امتدادهای افقی و قائم برای میلهٔ AB و میلهٔ BC به‌دست می‌آوریم، این امکان را فراهم می‌کند که $X_۱$، $Y_۱$ و $X_۲$، $Y_۲$ مؤلفه‌های عکس‌العملهای میله‌ها را در لولاهای B و C تعیین کنیم.

مثال ۳: چهارچوبهٔ مربعی‌شکل ABCD از چهارمیلهٔ سنگین ویکنواخت که به‌هم مفصل شده‌اند تشکیل شده است و دستگاه از مفصل A آویزان است و برای آنکه چهارچوبه به‌شکل مربع باقی بماند، مفصلهای A وC را با یك نخ به‌هم‌مربوط می‌کنند. کشش نخ وبزرگی وجهت عمل را در هریك از مفصلهای B یا Dتعیین کنید.

حل : نموداری مطابق شکل ۱۲-۲۱ رسم‌می‌کنیم ومیان A، B، C و D فاصله‌هایی می‌گذاریم. تمام نیروهایی‌که برAD و CD وارد می‌شوند همانهایی هستند که نشان داده‌ایم؛ از تقارن معلوم می‌شودکه مجموعهٔ نیروهای مشابهی برAB و BC وارد می‌شوند.

فرض می‌کنیم مؤلفه‌های افقی وقائم عمل لولای D بر AD به‌ترتیب X و Y باشند. عکس‌العملی‌که برCD وارد می‌شود مشتمل برمؤلفه‌هایی مساوی‌با مؤلفه‌های AD، اما در جهتهایی مخالف باآنهاست.

نیروهایی‌کـه برAD وارد می‌شوند عبارتند از نیروهای X، Y کـه برD وارد می‌شوند، وزن W وچند نیروی دیگرکه برA وارد می‌شوند. چون‌نیرویی که از تکیه‌گاه A برتمام دستگاه وارد می‌شود برابر $4W$ است، از روی قرینه معلوم می‌شودکه نیرویی برابر $2W$ برAD و نیرویی برابر $2W$ بر AB وارد می‌شود. به‌همین طریق، نیروی $\frac{1}{2}T$، برابر با نصف کشش نخ، در A، به‌طرف پایین برAD وارد می‌شود. از این‌گذشته در لولای A عکس‌العملی وجود دارد که مؤلفهٔ قائم آن، به‌سبب تقارن، صفراست ومؤلفهٔ افقی آن می‌بایستی برابر X ودرجهتی باشدکه درشکل نشان‌داده شده است، زیرا تنها نیروی افقی‌دیگری که برAD وارد می‌شود X است‌که برD اثرمی‌کند.



شکل ۱۲—۲۱

با تجزیه درامتداد قائم،

$$۲W+Y=W+\frac{۱}{۲}T \qquad (۱)$$

و اگر l طول میله باشد و نسبت به A گشتاور بگیریم، خواهیم داشت:

$$Xl\cos ۴۵^\circ + Yl\sin ۴۵^\circ = W\left(\frac{۱}{۲}l\sin ۴۵^\circ\right)$$

$$\therefore \qquad X+Y=\frac{۱}{۲}W \qquad (۲)$$

نیروهایی کـه برCD وارد می‌شوند عبارتند از X و Y، کـه برD مطابق شکل وارد می‌شونـد، وزن W، کشش $\frac{۱}{۲}T$ که به‌طرف بالا مطابق آنچه درفوق شرح‌دادیم وارد می‌شود، وعکس‌العمل درلولای C. مؤلفهٔ قائم این‌عکس‌العمل برطبق تقارن برابرصفراست، ومؤلفهٔ افقی آن می‌بایستی برابرX ودرجهتی‌باشد که نشان داده‌ایم، زیرا تنها نیروی افقی دیگری‌که بر CD در D وارد می‌شود X است.

با تجزیه در امتداد قائم،

$$\frac{۱}{۲}T=W+Y \qquad (۳)$$

و باگرفتن گشتاور نسبت به C، خواهیم داشت،

$$Xl\cos ۴۵^\circ - Yl\sin ۴۵^\circ = W\left(\frac{۱}{۲}l\cos ۴۵^\circ\right)$$

$$\therefore \qquad X-Y=\frac{۱}{۲}W \qquad (۴)$$

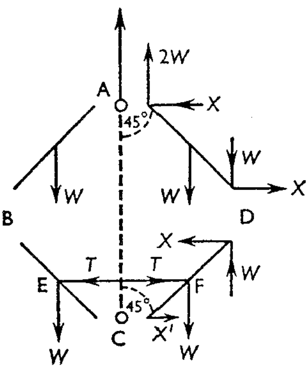
از (۲) و (۴) نتیجه می‌شودکه $Y=۰$ و $X=\frac{۱}{۲}W$ است. (دراینجا نمی‌توانستیم پیشبینی کنیم‌که Y برابرصفرخواهد بود).

از (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم‌که $T=۲W$ است.

مثال ۴: چهارمیلـهٔ متشابه و یکنواخت آزادانه به‌یکدیگـر مفصل شده‌اند و تشکیل یك لوزی داده‌اند. این لوزی از مفصل A آویزان است و به‌کمك میله‌ای که وزن آن ناچیز است و به‌نقاط وسط میله‌های BC و CD مفصـل شده است، به‌شکل مـربع درمی‌آید. مؤلفه‌های افقـی و قائم عکس‌العملهای مفصلهای B و D را تعیین کنید.

حل : چون EF وزن ندارد، نیروهایی‌که به‌کمك میله‌ها در E وF برآن واردمی‌شوند

می‌بایستی درامتداد طول آن ومساوی و در خلاف جهت یکدیگر باشند (شکل ۱۲-۲۲). نیز چون اگرمیلهٔ EF نبود، شکل جمع می‌شد یعنی B و D به‌طرف داخل شکل حرکت می‌کردند، آشکار است که در میله EF نیروی فشاریی‌برابر T وجود دارد.



شکل ۱۲-۲۲

چون نیرویی که تمام دستگاه را تحمل می‌کند و برA وارد می‌شود برابر $۴W$ است، از روی تقارن معلوم می‌شود که از تکیه‌گاه A برAD نیروی $۲W$ و بر AB نیروی $۲W$ وارد می‌شود.

مؤلفهٔ قائم عکس‌العمل AD در مفصل A برطبق تقارن برابرصفراست؛ مؤلفهٔ افقی را با X نشان می‌دهیم. در مفصل دیگرD، مؤلفهٔ افقی‌عکس‌العملی که بر AD وارد می‌شود نیز می‌بایستی برابر X و در جهتی باشدکه نشان داده‌ایم، و مؤلفهٔ قائم می‌بایستی برابر W و به‌طرف پایین باشد.

برای میلهٔ AD نسبت به A گشتاور می‌گیریم. اگر l طول AD باشد، خواهیم داشت:

$$Xl\cos ۴۵^\circ = Wl\sin ۴۵^\circ + W\left(\frac{۱}{۲}\, l \sin ۴۵^\circ\right)$$

$$\therefore \qquad X = \frac{۳}{۲}W$$

بنابراین مؤلفه‌های قائم و افقی عکس‌العمل در A برابرند با W و

$\frac{۳}{۲}W$، و به‌سبب تقارن در B نیز نیروهایی مشابه وارد می‌شوند.

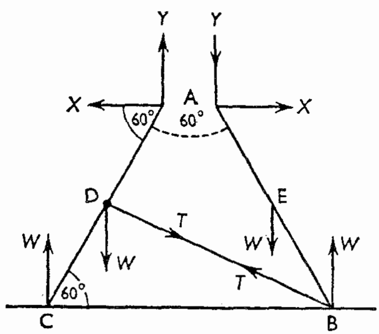
اگر نیروی فشاری EF را از ما خواسته بودند، می‌توانستیم آن را با گرفتن گشتاور برای CD نسبت به C به‌دست آوریم. نتیجه می‌شد

$$T\frac{l}{۲}cos۴۵^\circ+W\frac{l}{۲}sin۴۵^\circ=\frac{۳}{۲}W.l\,cos۴۵^\circ+W.l\,sin۴۵^\circ$$

$$\therefore \qquad \frac{۱}{۲}T+\frac{۱}{۲}W=\frac{۳}{۲}W+W$$

$$\therefore \qquad T=۴W$$

مثال ۵: دو میلهٔ متشابه و سنگین AB و AC در A بـه یکدیگر به‌طور صیقلی مفصل شده‌اند. B به‌کمك یك نخ به نقطهٔ وسط AC متصل شده است. نقاط B و C از میله‌ها برروی‌سطح افقی صافی قراردارند. اگرزاویهٔ $BAC=۶۰^\circ$ باشد، کشش نخ را برحسب وزن میله‌ها تعیین کنید.



شکل ۱۲ــ۲۳

حل : فرض می‌کنیم D (شکل ۱۲ــ۲۳) نقطهٔ وسط AC، و E نقطهٔ وسط AB باشد. چون $AB=AC$ است‌وزاویهٔ $BAC=۶۰^\circ$ است،مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. پس BD عمود بر AC است.

چون میله‌ها هموزن ووزن هریك ازآنها برابر W است و راستاهای‌اوزان آنها از B و C به‌یك فاصله‌اند، در نتیجه عکس‌العملهای قائم در B و C هریك برابر W خواهد بود.

(این نکته را می‌توانستیم با گرفتن گشتاور برای هردومیله نسبت به C و B نشان دهیم.)

فرض می‌کنیم T کشش نخ، و l طول هرمیله باشد.

برای AC نسبت به A گشتاور می‌گیریم.

$$T.\frac{l}{۲}+W\frac{l}{۴}=W\frac{l}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{T}{۲}=\frac{W}{۴}\Longrightarrow T=\frac{W}{۲}$$

اگر عکس‌العمل در A را لازم داشته باشیم، می‌توانیم آن را مطابق شرح زیر تعیین کنیم:

فرض می‌کنیم X و Y مؤلفه‌های افقی وقائم عمل لولای A برAC باشد.

از تجزیهٔ نیروهایی‌که بر AC وارد می‌شوند، در امتداد افقی،

$$X=T\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۴}W$$

از تجزیهٔ نیروهایی‌که بر AC وارد می‌شوند، در امتداد قائم،

$$Y+W=W+T\sin ۳۰^\circ$$

$$\therefore \quad Y=\frac{۱}{۲}T=\frac{۱}{۴}W$$

برایند عکس‌العمل R در A چنین به‌دست می‌آید:

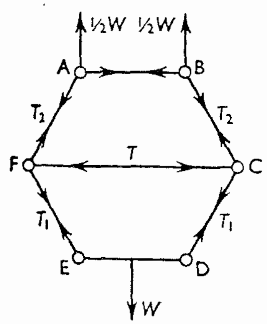
$$R=\sqrt{X^۲+Y^۲}=W\sqrt{\frac{۳}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۱}{۲}W$$

این برایند با امتداد افقی زاویه‌ای می‌سازدکه

$Arctg\frac{Y}{X}=Arctg\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است یعنی ۳۰° است.

مثال ۶: شش میلهٔ مشابه بی‌وزن از انتهاهای خود به‌یکدیگر مفصل شده‌اند و تشکیل یك شش‌ضلعی منتظم ABCDEF را داده‌اند. میلهٔ AB به‌طور افقی‌نگاهداری شده است، و از نقطهٔ وسط DE وزنه‌ای به‌وزن W آویزان است. برای آنکه شکل شش‌ضلعی به‌هم نخورد، آن را بامیلهٔ سبك CF به‌وضع خود نگاه‌می‌دارند. نیروی فشاری CF را تعیین کنید.

حل : فرض می‌کنیم ABCDEF (شکل۱۲-۲۴) نشان‌دهندهٔ داربستِ موردنظرباشد.



شکل ۱۲-۲۴

چون میله‌ها سبك هستند و (جز ED) فقط تحت تأثیر نیروهایی هستند که برانتهاهای آنهاوارد می‌شوند. نیروهای فشاری برهمهٔ میله، جز ED، می‌بایستی درامتداد طول میله‌ها باشند.

فرض می‌کنیم کشش CD و EF برابر T_1 وکشش BC و FA برابر T_2 باشد. میلهٔ ED، تحت تأثیروزن W و نیروهای T_1 که برE در امتداد EFوارد می‌شود و T_2 که بر D در امتداد DC وارد می‌شود، به‌حال تعادل است. مؤلفه‌های قائم کششهای T_1 می‌بایستی وزن W را تحمل کنند، و بنابراین،

$$2T_1 \cos 30^\circ = W$$

$$\therefore \qquad T_1 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

بدیهی است نیروی فشاری قائم در A و در B برابر $\frac{W}{2}$ است. پس با تجزیه در امتداد قائم برای لولای B داریم،

$$T_2 \cos 30^\circ = \frac{W}{2}$$

$$\therefore \qquad T_2 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

اگرنیروی فشاری CF برابر T باشد، با تجزیه در امتدادهای افقی و قائم برای لولای C خواهیم داشت،

$$T_1 \sin 60^\circ = T_2 \sin 60^\circ$$

یا
$$T_1 = T_2$$

و
$$T = T_1 \cos 60^\circ + T_2 \cos 60^\circ$$
$$= \frac{W}{2\sqrt{3}} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$
$$T = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

تمرین ۳.۱۲

۱ - سه میلهٔ یکنواخت متشابه هریك به‌وزن W به‌طور صیقلی به‌یکدیگر مفصل‌شده‌اند به‌طوری که تشکیل یك مثلث متساوی‌الاضلاع را داده‌اند. اگر مثلث از نقطهٔ‌وسط یکی از اضلاعش آویزان باشد، نیروهایی راکه برمفصلها وارد می‌شوند تعیین کنید.

۲ - مربع ABCD ازچهارمیلهٔ‌یکنواخت‌متشابه تشکیل‌شده است، که آزادانه‌به‌یکدیگر مفصل شده‌اند، و دستگاه از C پایینترین مفصل آویزان است. به‌کمك میلهٔ سبکی که C را به A متصل می‌کند، شکل دستگاه راثابت نگاه می‌دارند. نیروی‌فشاری براین میله و بزرگی و جهت عمل هریك از مفصلهای B یا D را تعیین کنید.

۳ - لوزی ABCD از چهارمیلهٔ یکنواخت متشابه‌که آزادانه به‌یکدیگر مفصل‌شده‌اند تشکیل شده است. دستگاه از مفصل A آویزان است و برای‌آنکه شکل آن ثابت بماند و زاویهٔ CAD برابر 30° باشد، A و C را به‌کمك نخی به‌یکدیگر متصل می‌کنند. کشش نخ و بزرگی وجهت عکس‌العمل را در B یا D تعیین کنید.

۴ - AB و BC دومیلهٔ یکنواخت وکاملاً متشابه هستندکه وزن هریك برابر W است و در B آزادانه به‌یکدیگر مفصل شده‌اند. دراین میله‌ها حلقه‌های کوچکی که وزن آنها قابل صرف‌نظرکردن است وجود دارد که موجب می‌شود انتهاهـای A و C بدون اصطکاك برروی یك سیم افقی ثابت حرکت‌کنند. میله‌ها طوری قراردارندکه تشکیل زاویهٔ قائمه می‌دهند و B درزیرسیم است. برای‌آنکه مفصل B بالا نرود، میلهٔ صلبی کـه وزن آن ناچیز است نقاط وسط میله‌ها را به‌هم متصل کـرده است. کششی که دراین میله وجود دارد وعکس‌العملهای در A، B و C را تعیین کنید.

۵ - AB و BC دو میلهٔ همطول هستندکـه آزادانه در B به یکدیگر مفصل شده‌اند. وزن AB برابر W ووزن BC برابر $2W$ است. این دو میله که بریکدیگرعمودند دریك صفحهٔ قائم قرار دارند و انتهای A و انتهای C میله‌هـا در یك صفحهٔ افقی هستند. چه نیروهای افقی باید برA و C اعمال شود تا تعادل برقرار بماند؟

۶ ـ دو میلهٔ AB و BC به طولهای a مترو b متـر از یك جنس و با یك سطح مقطع هستند و در B به‌طـورآزاد به‌یکدیگر مفصل شده‌اند و از دو انتهای A و C کـه به‌دو نقطهٔ همتراز متصل شده‌اند آویزان هستند. فاصلهٔ این دونقطه چنان است‌که ABC قائمه است. اگرجرم‌هرمتر از میله M کیلو گرم باشد، عکس‌العملهایی راکه برمفصل B و نقاط اتصال A و C وارد می‌شوند تعیین‌کنید.

۷ ـ نردبانهای یکنواختی‌که طول هریك برابر a ووزن هریك‌برابر W است،ازانتهاهای بالایی به‌یکدیگر لولا شده‌اند. ایـن نردبانها برروی سطح افقی صافی قـراردارند. از یکی از پله‌های یکی از نردبانها وزنه‌ای برابر W آویزان است. فاصلهٔ این‌پله از پایین نردبان برابر b است. از لغزش این نردبانها به‌کمك نخی به‌طـول $۲c$ که انتهاهای پایینی آنها را به‌یکدیگرمتصل‌کـرده است، جلـوگیری می‌کنند. نیروی فشار هرنردبان را برزمین، وکشش نخ را تعیین‌کنید.

۸ ـ دومیلهٔ یکنواخت AB و BC که همجنس وبا یك ضخامت ولی با طولهای‌متفاوتند به‌طور آزاد در B به‌یکدیگـر مفصل شده‌اند. انتهاهای A و C در یـك خط قائم ثابتند. نشان دهید کـه نیروی فشار در مفصل B که درامتداد BD وارد می‌شود، نیمساز زاویهٔ ABC است و بزرگی آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}W\frac{BD}{AC}$$

که درآن W وزن دومیله است.

۹ ـ نردبانی به‌وزن $۲W$ از دو قسمت تشکیل شده است‌کـه در بالا به یکدیگر مفصل شده‌اند. با یك ریسمان نقاط وسط دو نردبان را به‌یکدیگر متصل‌کرده‌اند به‌طوری کـه وقتی که نخ محکم است، زاویهٔ میـان دو نردبان برابر $۲Arctg\,\frac{۶}{۱۳}$ است . شخصی به‌وزن $۵W$ از یك قسمت نردبان بـالا می‌رود و پس ازآنکه دوسوم طول آن را پیمود متوقف می‌شود. با صرف‌نظر کردن از اصطکاك میان نردبان و زمین، کشش ریسمان و عکس‌العمل را در لولا تعیین‌کنید.

۱۰ـ دوتختهٔ یکنواخت بردو دیـوار متوازی وصیقلی تکیه‌کرده‌اند. انتهاهای پایینی‌این دوتخته برروی‌کف صیقلی افقی با یکدیگر تماس دارند. ثابت کنیدکـه اگر اوزان تخته‌ها w و w'، و انحراف آنهـا نسبت به‌قائم برابر θ و θ' باشند، شرط تعادل عبارت است از

$$w tg\theta = w' tg\theta'$$

۱۱- دوصفحهٔ سنگین با سطوح مستطیل شکل، که طول یکسان و عرض متفاوت دارند، درامتداد اضلاع متساوی خود با یکدیگرلولا شده‌اند و برصفحهٔ صیقلی افقی‌طوری قرار دارندکه لولای آنها افقی و بالاترین قسمت باشد. با نخی که نقاط وسط کناره‌های پایینی را به‌یکدیگر متصل کرده است از لغزش این صفحه‌ها جلوگیری می‌کنند. اگر وزن این صفحه‌ها به‌ترتیب W_1 و W_2 و زاویهٔ آنها نسبت به‌افق θ و φ باشد، ثابت کنیدکه عمل میان آنها در لولا با افق زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر است با

$$\frac{W_1 tg\varphi - W_2 tg\theta}{W_1 + W_2}$$

۱۲- AB، BC، CD، DE وEA پنج میلهٔ یکنواخت متساوی هستند که وزن هریك برابر W است و انتهاهای آنها آزادانه به‌یکدیگر لولا شده‌اند. این داربست که به‌شکل یك پنج‌ضلعی منتظم است ازمفصل A آویزان شده است وبرای‌آنکه‌شکل آن به‌هم نخورد، نخهای سبکی A را به C وD متصل کرده است.عکس‌العملهای در B و E را تعیین کنید و نشان دهیدکه کشش درهرنخ برابر است با $2W\cos 18^\circ$.

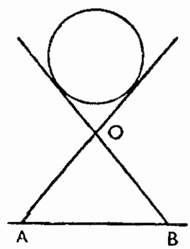
۱۳- سه‌میلهٔ متساوی AB، BC و CD و میلهٔ AD که طول آن دو برابر طول هریك از میله‌های AB، ... است در نقطه‌های A، B، C و D به‌طورآزاد به‌یکدیگر لولا شده‌اند واین داربست از نقطهٔ وسط BC آویزان شده است. اگر وزن هریك از میله‌های متساوی برابر w ووزن میلهٔ بلندتربرابر$2w$ باشد، بزرگیهای‌نیروهایی راکه برلولاها وارد می‌شوند تعیین کنید. نشان دهیدکه راستاهای نیروهایی که‌برA و B وارد می‌شوند در نقطه‌ای به‌فاصلهٔ $\frac{BC}{\sqrt{3}}$ در زیر BC با یکدیگر برخورد می‌کنند.

۱۴- داربستی از سه میلهٔ یکنواخت BC، CA وAB به‌طولهای ۱/۵، ۲، ۲/۵ متر تشکیل شده است. وزن هرمتر ازاین میله‌ها ۱ kg است. این سه میله با میخهای کوچك بیوزنی که به‌انتهاهای آنها متصل شده است به‌طور صیقلی به یکدیگر لولا شده‌اند. این داربست ازنقطه‌ای مانند Dکه برضلع AB واقع است طوری‌آویزان شده است که AB افقی است و دستگاه به‌حال تعادل است. فاصلهٔ D را از نقطهٔ وسط AB و نیروهای فشاریی راکه برلولاها وارد می‌شود تعیین کنید.

۱۵- AC و BC دومیلهٔ سبك هستندکه به‌طورآزاد در C به‌یکدیگر مفصل شده‌اند، و A و B آزادانه به‌یك دیوار لولا شده‌اند، به‌طوری‌که AC افقی و زاویهٔ

ACB برابر α است، ونقطهٔ B در زیرقائم A است. وزنه‌ای به‌وزن W از C آویزان است. کشش AC و نیروی فشاری BC را تعیین کنید. ثابت‌کنیدکه اگراز نقطهٔ وسط BC نیز وزنه‌ای به‌وزن W' آویزان شود، کشش AC برابر $\frac{1}{۲}(W'+۲W)cotg\,\alpha$ خواهد شد.

۱۶- قرصی به‌شعاع a ووزن W مطابق شکل ۱۲-۲۵ میان دو میله‌ای قراردارد‌که در O به‌طورآزاد به‌یکدیگر لولا شده‌اند و انتهاهای A و B دومیله برمیزی افقی قرار دارند، وبه‌کمك نخ AB به‌حال تعادل نگاه‌داشته شده‌اند؛ $OA = OB = c$، $\angle AOB = ۲\alpha$؛ تمام شکل درصفحه‌ای قائم است. کشش نخ را تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲۵

۱۷- BA و AC میله‌های سنگین یکنواختی هستندکه جرم آنها به‌ترتیب ۶ kg و ۳ kg است، وبه‌طورصیقلی درA به‌یکدیگر و به‌میلهٔ سبك دیگر BC لولاشده‌اند. لولاهای B و C به‌کمك نخهای قائمی نگاهداری می‌شوند، به‌طوری‌که BC افقی است و A در زیر BC است. طول عمودی‌که از A برBC فرود می‌آید برابر ۰/۹ m است وپای‌عمود، طول BC راچنان تقسیم می‌کندکه BC برابر ۰/۶ m و DC برابر ۱/۲ m است. ثابت‌کنیدکه عکس‌العمل درA افقی است؛ عکس‌العمل و نیز نیروی فشاریی راکه بر BC وارد می‌شود تعیین کنید.

۱۸- دومیلهٔ یکنواخت AB و BC از هرجهت به‌یکدیگر شبیه هستند و وزن هریك برابر W است. این دومیله در B محکم به‌یکدیگر متصل شده‌اند، به‌طوری که ABC قائمه است. انتهای A آزادانه به‌نقطهٔ ثابتی لولا شده است، به‌طوری که دو میله، درحال تعادل، آویزان هستند. اگر میله‌ها به‌طورآزاد در B لولاشوند، اما A و C به‌کمك نخ سبك انعطاف‌ناپذیری به‌یکدیگر مربوط شده باشند، که طول آن‌نخ به‌اندازه‌ای‌است‌که ABCقائم باشد، نشان دهیدکه‌کشش‌نخ برابر$\frac{۳W}{۲\sqrt{۵}}$است.

۱۹- AB و BC دو میلهٔ یکنواخت هستندکه وزن آنها به‌ترتیب W و W' است. این دومیله به‌طورآزاد در B به‌یکدیگر لولا شده‌اند. انتهای A به‌نقطهٔ ثابت A لولا شده‌است، وحال‌آنکه C می‌تواند برروی یك‌سیم افقی‌حرکت‌کند. این سیم به‌وسیلهٔ حلقه‌ای صیقلی وکوچك که وزن آن ناچیز است از A می‌گذرد. نشان دهیدکه نیروی افقیی که می‌بایستی بر C اعمال شود تا میله‌ها در وضعی قرارگیرندکه زاویه‌های CAB و ACB به‌ترتیب θ و φ باشند و B درزیرA واقع شود، برابر است با

$$\frac{1}{2}(W+W')\cos\varphi\cos\theta\times\frac{1}{\sin(\theta+\varphi)}$$

۲۰- میلهٔ افقی ABC که وزن آن ناچیزاست به‌طور افقی است و به‌لولای صیقلی A متصل شده است. وزنه‌ای برابر ۱۰۰ kg از C آویزان است. این میله از نقطهٔ وسط خود یعنی B به‌کمك میلهٔ محکم BD که وزن آن ناچیز است نگاه‌داشته شده است. انتهای D ازمیلهٔ BD به‌نقطهٔ D، که درزیرقائم A است، به‌طورصیقلی‌لولا شده است به‌طوری‌که $AD=AB$. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهای فشاریی را که بر D و B وارد می‌شوند تعیین‌کنید.

۲۱- دومیلهٔ یکنواخت AB و BC به‌طولهای مساوی ولی با وزنهای متفاوت به‌طور آزاد درB به‌یکدیگرلولا شده‌اند. این دومیله در A و C به‌دونقطهٔ ثابت، که‌بریك راستای افقی‌قراردارند وفاصلهٔ آنها طوری است‌که ABC قائمه است، لولاشده‌اند. نشان دهیدکه جهت عکس‌العمل B باامتداد میلهٔ BA زاویه‌ای می‌سازدکه‌تانژانت آن برابر نسبت وزن AB به‌وزن BC است.

۲۲- دومیلهٔ یکنواخت AB و AC با وزنهای W_1 و W_2 و طولهای متساوی به‌طور صیقلی در A به‌یکدیگرلولا شده‌اند. B و C برصفحه‌ای افقی واقعند وبه‌کمك نخ انعطاف‌ناپذیری‌که B را به C وصل‌کرده‌است، این دومیله به‌حال تعادلند. وزنه‌ای به‌وزن w از نقطه‌ای واقع برAC که به‌فاصلهٔ $\frac{3}{4}$AC ازA است‌آویزان می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه‌کشش نخ برابراست با

$$\frac{1}{4}\left(W_1+W_2+\frac{1}{2}w\right)tg\frac{1}{2}A$$

۲۳- نردبانی از دوقسمت تشکیل شده است که طول هرقسمت برابر ۱/۶۵ m است. این دوقسمت به‌وسیلهٔ طنابی به‌طول ۷۰ cm، که به‌نقاطی ازآنهاکه به‌فاصلهٔ ۴۰ cm از انتهای آزاد آنهاست، به‌یکدیگرمتصل شده‌اند. جرم قسمتی ازنردبان که دارای پله است ۸ kg وجرم‌قسمت دیگر ۲ kg است. شخصی به‌جرم ۷۷ kg

برروی پله‌ای ایستاده است که از بالای نردبان ۴۵ cm فاصله دارد. فرض‌می‌شود که طناب به‌طور کامل کشیده شده است، وعکس‌العملهای میان نردبان وزمین قائم هستند. کشش طناب را تعیین کنید.

۲۴- دومیلهٔ AB و BC به‌طور صیقلی در B به‌یکدیگر لولا شده‌اند و C به‌نقطه‌ای از دیوار به‌طور صیقلی لولا شده است. طول میلهٔ AB برابر ۱/۵ m و جرم آن ۱۰ kg است. طول میلهٔ BC برابر ۱/۲ m و جرم آن ۵ kg است. دو میله به‌کمك تیری که در زیر AB قرار داده‌اند به‌وضع افقی نگاه‌داشته شده‌اند. وضع تیر وعکس‌العمل C را تعیین کنید.

۲۵- دومیلهٔ یکنواحت AB و AC که طول هریك برابر ۱/۲ m وجرم هریك برابر ۱/۵ kg است به‌طور صیقلی در A به‌یکدیگر لولا شده‌اند. این دو میله به‌طور متقارن برروی کرهٔ صیقلی ثابتی به‌شعاع ۰/۳ m قرار دارند، به‌طوری‌که برخط قائم مکان مرکز کره ودربالای مرکز کره است. نشان دهیدکه زاویهٔ میان دومیله، هنگامی که‌درحال تعادلند، قائمه‌است. بزرگی وعکس‌العمل را درمفصل تعیین کنید.

۲۶- میلهٔ یکنواختی به‌طول ۲a وجرم m از انتهای پایینتر به‌نقطهٔ ثابت O لولا شده است. یك انتهای نخ سبکی به نقطهٔ ثابتی که در بالای خط قائم O و به فاصلهٔ ۲a از O است متصل شده است. این نخ از روی شیار صیقلی انتهای بالایی و آزاد میله می‌گذرد. در انتهای دیگر نخ وزنه‌ای به‌جرم M آویزان است. زاویهٔ شیب قسمت بالایی نخ را با خط قائم دروضع تعادل تعیین کنید.

۲۷- استوانهٔ مدوری درحال تعادل است. محور این استوانه افقی است. این استوانه درامتداد طول خود بریك سطح شیبدارکه زاویهٔ آن با افق برابر α است تکیه‌کرده است. به‌کمك میلهٔ AB، که وزن آن برابر وزن استوانه است و در A به‌صفحهٔ زیراستوانه لولا شده است و در B براستوانه مماس است، تعادل استوانه رابرقرار می‌سازند. صفحهٔ قائمی که از میله می‌گذرد، سطح شیبدار را درخط بزرگترین‌شیب آن قطع می‌کند و از مرکز ثقل استوانه می‌گذرد. اگر همهٔ سطوح صیقلی باشند و زاویهٔ میان میله وصفحهٔ شیبدار برابر θ باشد، ثابت‌کنیدکه

$$tg\alpha = \frac{sin ۲\theta}{۵ - cos ۲\theta}$$

۲۸- دومیلهٔ یکنواخت AB و CD که وزن هریك برابر W وطول هریك برابر a است به‌طور صیقلی در O به‌یکدیگرلولا شده‌اند، به‌طوری‌که $OB = OD = b$. میله‌ها در صفحه‌ای قائم قرار دارند و A و C برروی یك میزصیقلی هستند، و انتهاهای

B و D به‌کمك نـخ سبکی به‌یکدیگر متصل هستند. ثابت‌کنیدکـه عکس‌العمل در مفصل برابراست با $\frac{aW}{2b}tg\alpha$ که درآن α زاویـهٔ شیب هریك از میله‌ها با خط قائم است.

۱۴.۱۲. برایند نیروهای واقع دریك صفحه

دربخش ۱۰ نشان دادیم که‌چگونه می‌توان برایندچند نیرو را که بریك نقطه وارد می‌شوند تعیین کـرد. اکنون مسئله را درحالت‌کلیتر، کـه در آن نیروها بریـك جسم صلب وارد می‌شوند، مورد توجه قرار می‌دهیم.

بیشتر اوقات لازم است که برایند چند نیرو راکه بزرگی وراستای آنها معلوم‌است تعیین‌کنیم.

غالباً گفته نمی‌شودکه نیروها برچه‌چیزوارد می‌شوند، زیرا همان‌طورکه قبلاً اشاره کردیم، به‌شرط‌آنکـه جسم را صلب فـرض کنیم، برایند نیروها مستقل از شکل و ابعاد جسم است.

برطبق قاعده، بهترین راه بـرای تعیین بزرگی برایند، تجـزیهٔ نیروها در دوجهت متعامد وافزودن مؤلفه‌های هریك ازاین جهتها به‌یکدیگر است و سپس ترکیب دومؤلفهٔ حاصل و تبدیل آن به‌یك نیروی منفرد است.

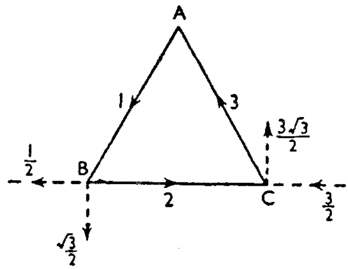
نسبت این دومؤلفه جهت برایند را نشان می‌دهد. یعنی تانژانت زاویه‌ای‌است‌که برایند با یکی از دوجهتی می‌سازدکه نیروها درآن جهتها تجزیه شده‌اند.

برای تعیین وضع راستا، می‌توانیم یك نقطه از آن را پیداکنیم یا اینکه در بعضی ازحالتها، ساده‌تر آن است‌که نقاط تلاقی برایند را با دوخط معلوم تعیین‌کنیم. روش‌اخیر غالباً با تعیین‌گشتاورهـا بهتربه‌نتیجه مطلـوب می‌رسد. هیچ روش‌کلی نباید تنظیم کرد. کوتاهترین روش برای به‌دست آوردن نتیجه‌های لازم، در حالتهای مختلف به‌طـور قابل توجهی متفاوت است.

در مثالهای زیر روشهای متفاوت به‌کار برده شده است.

مثال ۱: بزرگی، جهت و راستای برایند سه نیـرو راکـه بزرگی آنهـا ۱، ۲ و۳ واحد هستند و به‌ترتیب درامتداد اضلاع یك مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $2a$ وارد می‌شوند، تعیین‌کنید.

حل: فرض می‌کنیم نیروهای ۱، ۲ و۳ در امتداد اضلاع AB، BC و CA از مثلث



شکل ۱۲-۲۶

متساوی‌الاضلاع ABC، مطابق شکل وارد شوند:

نیروها را درامتداد BC و در امتداد عمود برBC تجزیه می‌کنیم.

مؤلفهٔ نیروی۱ که برBواردمی‌شود ودرجهت CB است برابر$\frac{۱}{۲}$ است ، و مؤلفهٔ همین نیروکه درامتداد عمود بر BC بر B به‌طرف پایین وارد می‌شود برابراست با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

مؤلفهٔ نیروی ۳که برC وارد می‌شود، درجهت CB برابراست با $\frac{۳}{۲}$ ، و مؤلفهٔ همین نیروکه درامتداد عمود برBC برC به‌طرف بالا وارد می‌شود برابر است با $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$.

مؤلفه‌هایی‌که درامتداد BC وارد می‌شوند با نیروی ۲ متعادل هستند و تنها نیروهایی‌که باقی می‌مانند و متوازی و ناهمسو هستند نیروهای $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ درB و $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ در C هستند.

برایند این نیروها برابر $\sqrt{۳}$ است‌که به طرف بالا و عمود بر BC وارد می‌شود، ونقطهٔ اثرآن نقطه‌ای است مانند Dکه برامتداد BC واقع است و برای آن این رابطه برقرار است:

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}CD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BD$$

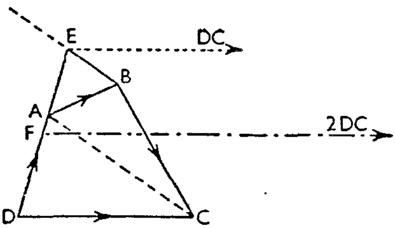
یا

$$۳CD=BD$$

یا

$$CD=\frac{۱}{۲}BC=a$$

مثال ۲: ABCD چهارضلعی معینی است. در امتداد اضلاع AB، BC، DC (ترتیب دورانی به‌هم خورده است)، و DA نیروهایی وارد می‌شوندکه بزرگی هریك متناسب با ضلع همراستای آن است. بزرگی وراستای برایند را تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲۷

حل: برایند نیروهای AB، BC (شکل ۱۲-۲۷) برابر و موازی با AC است و برنقطهٔ B وارد می‌شود.

برایند این نیرو و **نیروی** DA **برابر وموازی** با DC است و بر E وارد می‌شودکه E محل تلاقی امتداد DA وخطی است‌که ازB به‌موازات CA رسم می‌شود.

اکنون دو نیروی موازی داریم‌که هریك برابربا DC است ویکی ازآنها درامتداد DC وارد می‌شود ودیگری درامتدادی موازی با DC برنقطهٔ E وارد می‌شود.

برایند آنها نیرویی است برابر ۲DC که برF، نقطهٔ وسط DE وارد می‌شود.

ممکن بود مسئله را به‌این طریق نیز حل‌کرد:

بزرگی وجهت برایند چهار نیرو برطبق جمع‌برداری آنها تعیین می‌شود.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}$$
$$=۲\overrightarrow{DC}$$

بنابراین برایند نیرویی است برابر $۲\overrightarrow{DC}$ و راستای آن را می‌توان با

تعیین گشتاورها حول یك نقطهٔ دلخواه، مثلاً نقطهٔ D، تعیین کرد.

فرض می‌کنیم برایند $\overrightarrow{۲DC}$ خط DA را در F قطع کند. گشتاور آن نسبت به D در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و برابر است با $۴\triangle FDC$. اما گشتاور چهار نیروی مذکور نسبت به D نیز در جهت حرکت عقربه‌های ساعت هستند و برابرند با $۲\triangle ABD + ۲\triangle BCD$.

$$\therefore \qquad ۴\triangle FDC = ۲(\triangle ABD + \triangle BCD)$$

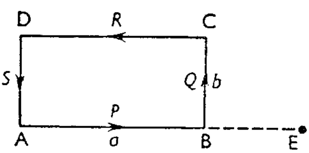
$$= ۲(\text{مساحت چهارضلعی } ABCD)$$

$$= ۲\triangle EDC \quad \text{چون } BE \text{ موازی } CA \text{ است}$$

$$\therefore \qquad ۲FD = ED$$

یعنی F نقطهٔ وسط DE است.

مثال ۳: چهار نیروی P، Q، R و S در امتداد اضلاع مستطیل ABCD به ترتیب در جهتهای AB، BC، CD و DA وارد می‌شوند. اگر $AB = a$ و $AD = b$ باشد، بزرگی برایند مجموعهٔ نیروها و فاصلهٔ A را از نقاطی که راستای برایند اضلاع AB و AD را قطع می‌کند تعیین کنید.



شکل ۱۲—۲۸

حل: مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و در آن نیروها را مطابق شکل ۱۲-۲۸ نمایش می‌دهیم. نیروهای P و R معادل نیروی $P-R$ هستند که موازی AB است. البته فرض آن است که P مساوی R نیست. به همین طریق، اگر Q مساوی S نباشد، نیروهای Q و S معادل با نیرویی برابر $Q-S$ هستند که موازی با BC است.

بنابراین بزرگی برایند برابر است با

$$\sqrt{(P-R)^۲+(Q-S)^۲}$$

اگر برایند راستای AB را درنقطه‌ای مانند E به‌فاصلهٔ x از A قطع

کند، در این صورت، چون E برراستای برایند قرار دارد، مجموع گشتاورهای نیروها نسبت به‌آن برابر صفر است،

$$\therefore \quad Q(x-a)=Rb+Sx$$

$$\therefore \quad x(Q-S)=Rb+Qa$$

$$\therefore \quad x=\frac{Rb+Qa}{Q-S}$$

به‌همین طریق اگر برایند راستای DA را درنقطهٔ F به فاصلهٔ y از A قطع کند، باگرفتن گشتاور نسبت به F، خواهیم داشت:

$$Py=Qa+R(b+y)$$

$$\therefore \quad y(P-R)=Qa+Rb$$

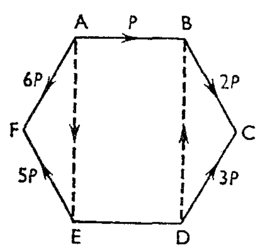
$$\therefore \quad y=\frac{Qa+Rb}{P-R}$$

یادداشت: اگر P بزرگتر از R باشد (همان‌طورکه در بالا فرض شد)، F در زیر A خواهد بود. اگر R بزرگتر از P باشد، مقدار بالا برای y منفی و F در بالای A خواهد بود.

اگر S بزرگتر از Q باشد، E به‌جای آنکه، مطابق شکل ۱۲-۲۸، در سمت راست A باشد درسمت‌چپ A خواهد بود.

اگر $R=P$ و $S=Q$ باشد، دستگاه به‌یك زوج تبدیل می‌شود که گشتاور آن برابر است با $Pb+Qa$.

مثال ۴: ABCDEF یک شش ضلعی منتظم است. نیروهای P، $۲P$، $۳P$، $۵P$ و $۶P$ به‌ترتیب در امتدادهای AB، BC، DC، EF و AF وارد می‌شوند. نشان دهیدکه می‌توان نیرویی تعیین کردکه در امتداد ED وارد شود به‌طوری که شش نیرو معادل با یك زوج باشند و گشتاور زوج را تعیین کنید.



شکل ۱۲—۲۹

حل : شش‌ضلعی را رسم می‌کنیم و نیروها را مطابق شکل ۱۲-۲۹ در آن نمایش می‌دهیم.

روش (الف) به‌فرض‌اینکه نیروهای معلوم دارای برایندی به‌موازات DE باشند با نیرویی که در امتداد ED وارد می‌شود تشکیل یك زوج خواهند داد.

اما مجموع مؤلفه‌های نیروها عمود بر ED برابر است با

$$۵P\cos ۳۰^\circ - ۶P\cos ۳۰^\circ - ۲P\cos ۳۰^\circ + ۳P\cos ۳۰^\circ = ۰$$

نیز مجموع مؤلفه‌های نیروها در امتداد موازی با ED برابراست با

$$-۵P\sin ۳۰^\circ - ۶P\sin ۳۰^\circ + ۲P\sin ۳۰^\circ + ۳P\sin ۳۰^\circ = -۲P$$

پس برایند پنج نیرو، نیرویی است به‌بزرگی $۲P$ به‌موازات DE. نقطهٔ اثرآن را می‌توان با تعیین گشتاورها نسبت به‌نقطه‌ای معین تعیین کرد.

فرض می‌کنیم که این برایند در فاصلهٔ x در بالای مرکزشش‌ضلعی وعمود برضلع شش‌ضلعی است وطول هریك از اضلاع برابر a است.

نسبت به‌مرکز، گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$۲P.x = (-۵P + ۶P - P - ۲P + ۳P)a\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\therefore \qquad x = a\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

پس فاصلهٔ قائم برایند از ED برابر است با

$$a\frac{\sqrt{۳}}{۴} + a\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳a\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

پس نیروی $۲P$ که‌درامتداد ED وارد می‌شود، با پنج نیرو تشکیل‌زوجی می‌دهندکه گشتاورآن $۲P\frac{۳a\sqrt{۳}}{۴}$ یا $\frac{۳\sqrt{۳}Pa}{۲}$ درجهت حرکت‌عقربه‌های‌ساعت است.

روش (ب) نیروی $۵P$ در امتداد EA معادل است با نیرویی برابر

$$۵P\cos ۳۰^\circ = ۵P\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

و در امتداد DE معادل است با نیروی $۵P\sin ۳۰^\circ = \frac{۵P}{۲}$.

نیروی $۶P$ در امتداد AE معادل است با نیرویی برابر

$$۶P\cos ۳۰^\circ = ۳P\sqrt{۳}$$

و در امتداد BA معادل است با نیروی $۳P = ۶P sin ۳۰^\circ$.

نیروی $۲P$ درامتداد BD معادل‌است‌بانیرویی برابر $۲P cos ۳۰^\circ = P\sqrt{۳}$
و در امتداد AB معادل است با نیروی $P = ۲P sin ۳۰^\circ$

نیروی $۳P$ درامتداد DB برابراست با نیروی $۳P\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳P cos ۳۰^\circ$ ودر امتداد ED برابراست با نیروی $\frac{۳P}{۲} = ۳P sin ۳۰^\circ$

به‌طورکلی، پنج نیرو درامتداد DE معادلند با نیرویی برابر $P = \frac{۵P}{۲} - \frac{۳P}{۲}$ و درامتداد BA معادلند بـا نیرویی برابر $۳P - P - P = P$ و درامتداد AE معادلند با $P\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و در امتداد DB معادلند با $P\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

نیروهای P درامتداد DE و BA دارای برایندی برابر $۲P$ و به‌موازات DE هستندکه از مرکز شش‌ضلعی می‌گذرد، ونیروی $P\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ درامتداد AE وDB تشکیل زوجی می‌دهندکه گشتاورآن $P\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ ودرجهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

بنابراین اگرنیروی $۲P$ را درامتداد ED تولیدکنیم، شش نیرو معادل با دو زوج خواهند شدکه گشتاورهای آنها به‌ترتیب $۲P\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $Pa\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وهردو درجهت حرکت عقربه‌های ساعت هستند. پس گشتاور زوج برایند مساوی‌است‌با $۳Pa\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

تمرین ۴.۱۲

۱ - A، B، C سه‌نقطهٔ واقع برخط ABCD هستند، به‌طوری‌که $AB = BC = a$. نیروهای ۳، ۶ و ۴ نیوتون به‌ترتیب بـر A، B و C در جهتهایی کـه بـا AD زاویه‌های ۶۰°، ۱۲۰°، و۲۷۰° می‌سازد وارد می‌شوند. نشان دهیدکه این نیروها به‌نیروی منفرد تبدیل می‌شوند وپیداکنیدکه راستای این نیرو، خط AD را درکجا قطع می‌کند.

۲ - A، B، C و D چهارنقطه‌اند که به‌فاصله‌های متساوی وبرابر ۰/۶ m ازیکدیگر برروی خط مستقیمی واقعند. بر A، B، D به‌ترتیب نیروهای ۲، ۳ و ۴ نیوتون عمود برAD به‌طرف بالاوارد می‌شوند. نیرویی که برC وارد می‌شود عمودبرAD

و به سوی پایین و برابر N ۹ است. نشان دهید که این دستگاه معادل با یك زوج است، ومعلوم کنیدکه نیروی N ۳ درکجا باید وارد شود تا تعادل به‌وجود آید.

۳ ـ نیروهای ۳، ۳ و ۵ نیوتون به‌ترتیب در امتداد اضلاع BA، AC، BC از یك مثلث متساوی‌الاضلاع که ارتفاع آن ۱/۲ m است وارد می‌شوند. فاصلهٔ A را از نقطهٔ اثر برایند تعیین کنید.

۴ ـ ABCD یك مربع است. E و F به‌ترتیب نقطه‌های وسط BC و CD هستند. بزرگی و جهت برایند نیروهای ۲، ۵، ۱۰، ۱ واحد راکه به‌ترتیب به‌موازات جهتهای AB، AE، FA و AD وارد می‌شوند تعیین کنید.

۵ ـ ABC یك مثلث متساوی‌الاضلاع است. نیروهای ۴، ۲، و ۱ واحد به‌ترتیب در امتدادهای اضلاع AB، AC وBC درجهتهایی‌که باترتیب حروف مشخص‌شده‌اند وارد می‌شوند. ثابت‌کنیدکه برایند آنها نیرویی است برابر $۳\sqrt{۳}$ واحدکه درجهتی عمود بر BC وارد می‌شود، و نقطهٔ تلاقی راستای این نیروی برایند را با BC تعیین کنید.

۶ ـ برایند نیروهای زیرراکه درامتداد اضلاع‌مربع ABCD وارد می‌شوند تعیین‌کنید: N ۲۱ درامتداد CD، N ۱۵ درامتدادDA، N ۳ درامتدادBA و N ۹ درامتداد CB؛ و نشان دهیدکه راستای برایند، دوضلع از مربع را نصف می‌کند.

۷ ـ برایند نیروهای زیر راکه در امتداد اضلاع مربع ABCD وارد می‌شوند تعیین کنید: N ۱۱ درامتداد DA، N ۷ در امتداد CB، N ۱۹ در امتداد CDو N ۵ درامتداد BA؛ وثابت‌کنیدکه راستای برایند، ضلع AD را به‌دوقسمت وضلع CD را به‌سه قسمت می‌کند.

۸ ـ AD ارتفاع مثلث ABC است که درآن BC = ۶ ، CA = ۷ ، AB = ۵ است. نیرویی برابر N ۱۲ که درامتداد DA وارد می‌شود با نیروهای متوازی‌که بر B وC وارد می‌شوند تعادل پیداکرده است. اگرهمهٔ نیروها به‌ترتیب حول A، B، C دریك جهت به‌یك اندازه بچرخند به‌طوری که همگی برAB عمود شوند، ثابت‌کنیدکه برایند نیروها یك زوج خواهد شد. گشتاور این زوج راتعیین‌کنید.

۹ ـ ABCD یك ذوزنقه است که درآن اضلاع متوازی AD و BC به‌نسبت ۲ به ۳ هستند و AB = AD = DC. بزرگی ووضع‌برایند این نیروها را تعیین‌کنید: $۳P$ از B به‌طرف C، P از B به‌طرف A، $۲P$ از D به‌طرف A، $\frac{۵}{۲}P$ ازDبه‌طرفC.

۱۰ـ نیروی واحدی در امتداد ضلع AB از مربع ABCD وارد می‌شود. بزرگیها و جهتهای نیروهایی راکه باید درامتداد سه‌ضلع دیگروارد شوند تا دستگاه به‌حالت

تعادل باشد تعیین کنید. برایند را درحالتهای زیر به‌دست آورید: (الف) جهت نیرو درامتداد BC معکوس می‌شود، (ب) جهتهای نیروهایی که در امتدادهای BC و AD وارد می‌شوند هردو معکوس می‌شوند.

۱۱- ABCD یک تختهٔ مستطیل شکلی است که در آن $AB = DC = ۰/۹\ m$، $BC = AD = ۱/۸\ m$ است. نخی با نیروی ۱۵ واحد این تخته را در امتداد AD می‌کشد. نخ دیگری این تخته را در امتداد BC با نیرویی برابر ۲۵ واحد می‌کشد، وبالاخره نخ‌دیگری این‌تخته رادرامتداد CD بانیروی ۱۶ واحد می‌کشد. تعیین‌کنید درامتداد AB چه نیرویی باید واردکرد تا برایند از G، نقطهٔ وسط مستطیل ABCD، بگذرد، و برایند را به‌طورکامل حساب‌کنید.

۱۲- ABCD مربعی‌است به‌ضلع a که برروی تیغه‌ای رسم شده است. E و F نقطه‌هایی هستند که برامتدادهای BA و BC که به‌ترتیب از A و C رسم می‌شوند قرار دارند، به‌طوری‌که $BE = ۳a$، $BF = ۳a$. مجموعهٔ نیروهایی که برتیغه وارد می‌شوند، از نیروهای زیر تشکیل شده‌اند: P درامتداد AB، $۲P$ درامتداد BC، $۳P$ درامتداد CD، $۴P$ درامتداد DA و $۲\sqrt{۲}\ P$ درامتداد EF. ثابت‌کنید‌که برایند این مجموعه، زوجی است با گشتاور Pa.

۱۳- نیروهای ۱، ۲، ۳، و ۴ نیوتون به‌ترتیب در امتداد اضلاع AB، BC، CD و DA از مربعی به‌ضلع ۱ متروارد می‌شوند. فاصلهٔ مرکزمربع را از راستای برایند تعیین‌کنید. چه نیروی اضافی بایــد درامتداد قطر BD واردکنیم تا تمام مجموعه دارای برایندی باشدکه از نقطهٔ A می‌گذرد.

۱۴- مستطیل ABCD می‌تواند آزادانه دریک صفحهٔ افقی حول مرکز خود، که ثابت است، بچرخد. نیروهای ۱، ۲، ۳ نیوتون به‌ترتیب در امتدادهای AB، BC و DC واردمی‌شوند. اگر $AB = ۰/۳m$، $BC = ۰/۶m$ باشد، تعیین‌کنید چه‌نیرویی باید در امتداد AD واردکرد تا مستطیل ساکن بماند.

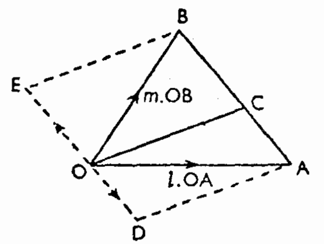
۱۵- تیغهٔ مربع شکل ABCD بریک میزصیقلی افقی قرار دارد و مــی‌تواند حول میخ صیقلی ثابتی بچرخد. این میخ برقطر BC به‌نقطه‌ای ثابت شده است‌که این قطر را به‌نسبت ۱ و ۲ تقسیم‌کرده است ومیخ به‌نقطهٔ B نزدیکتراست تا به‌نقطهٔ C. براین تیغه نیرویی برابر ۵ واحد در امتداد AD و نیرویی برابر ۳ واحد در امتداد CB وارد می‌شود. نیرویی را تعیین‌کنیدکه اگر برA درجهت AB وارد شود، تیغه به‌حالت تعادل‌درمی‌آید. نیزنیروی فشاریی راکه برمیخ ازطرف برایند نیروها وارد می‌شود تعیین‌کنید.

۱۶- نیروهای $3P$، $2P$، P، $2P$ به ترتیب در امتداد اضلاع AB، CB، CD، AD از مربع ABCD و در جهتهایی که ترتیب حروف مطابق گفتهٔ بالا رعایت می‌شود وارد شده‌اند. بزرگی وراستای برایند را تعیین کنید.

۱۵.۱۲. برایند دو نیرو که برنقطهٔ O در جهتهای OA و OB وارد می‌شوند و از نظر بزرگی با $l.\mathrm{OA}$ و $m.\mathrm{OB}$ مشخص می‌شوند، نیرویی است که از نظر بزرگی و جهت با نیروی $(l+m)\mathrm{OC}$ مشخص می‌شود که C نقطه‌ای است واقع بر AB به طوری که $l.\mathrm{CA}=m.\mathrm{CB}$.

زیرا فرض می‌کنیم C (شکل ۱۲-۳۰)، AB را طوری تقسیم کند که $l\ .\ \mathrm{CA}=m\ .\ \mathrm{CB}$ باشد.

متوازی‌الاضلاعهای OCAD و OCBE را تکمیل می‌کنیم.



شکل ۱۲-۳۰

نیروی $l.\mathrm{OA}$ برابراست با نیروهایی که با $l.\mathrm{OC}$ و $l.\mathrm{OD}$ نشان داده می‌شوند.
نیروی $m.\mathrm{OB}$ برابر است با نیروهایی که با $m.\mathrm{OC}$ و $m.\mathrm{OE}$ نشان داده می‌شوند.

پس نیروهای $l.\mathrm{OA}$ و $m.\mathrm{OB}$ معادل با نیرویی برابر $(l+m)\mathrm{OC}$ و نیروهای $l.\mathrm{OD}$ و $m.\mathrm{OE}$ است.

اما $\mathrm{OD}=\mathrm{CA}$ و $\mathrm{OE}=\mathrm{CB}$ و $l.\mathrm{CA}=m.\mathrm{CB}$.

پس دو نیروی اخیر، برابر و درسوی مخالف یکدیگرند و بنابراین با یکدیگر تعادل می‌کنند.

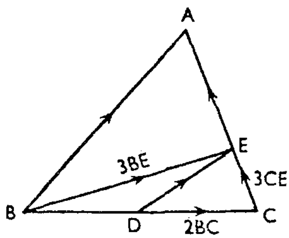
پس برایند $l.\mathrm{OA}$ و $m.\mathrm{OB}$ با نیروی $(l+m)\mathrm{OC}$ مشخص می‌شود.

برایند دو نیرو با به‌کار بردن مفاهیم برداری برابر است با بردار مجموع آنها. می‌توان نوشت:

$$l.\overrightarrow{OA}+m\,\overrightarrow{OB}=l(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})+m(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})$$
$$=(l+m)\overrightarrow{OC}+l.\overrightarrow{CA}+m.\overrightarrow{CB}$$
$$=(l+m)\overrightarrow{OC}$$ و به‌شرط آنکه $l.CA=m.CB$ باشد،

اگر $l=m=۱$ باشد، خواهیم داشت $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=۲\overrightarrow{OC}$ که در آن $CA=CB$ است، یعنی برایند نیروهای OA و OB نیروی ۲OC است که C نقطهٔ وسط AB است. این‌را می‌توانستیم ازاین واقعیت، که دراین‌حالت OC نصف قطرمتوازی‌الاضلاعی است که با OA و OB ساخته می‌شود، نیز تحقیق کنیم. درآن متوازی‌الاضلاع OA و OB اضلاع مجاور یکدیگرند.

مثال ۱: نیروهایی که با ۲BC، CA، BA نشان داده می‌شوند درامتداد اضلاع مثلث ABC وارد می‌شوند. نشان دهید که برایند آنها ۶DE است که درآن D وسط BC و E نقطه‌ای است بر CA به طوری که $CE=\frac{۱}{۳}CA$.



شکل ۱۲–۳۱

حل: در شکل ۱۲–۳۱ برایند نیروهای ۲BC و BA نیروی ۳BE است، که درآن E نقطه‌ای است واقع بر AC به‌طوری‌که $۲CE=EA$ یعنی $CE=\frac{۱}{۳}CA$.

نیز $CA=۳CE$، و برایند نیروهای ۳BE در امتداد BE و ۳CE در امتداد CA نیرویی است برابر ۶DE درامتداد DE، که D نقطهٔ وسط BC است.

ممکن بود به‌طریق زیرنیز مسئله را حل کنیم:

مجموع برداری سه نیرو برابر است با

$$۲\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}+(۲\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$$

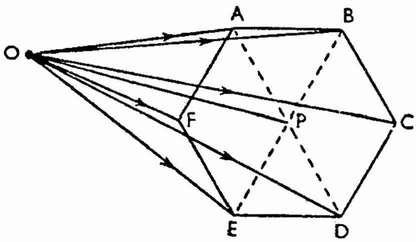
اگر $\text{۲}CE = EA$ باشد، $= \overrightarrow{CA} + \text{۳}\overrightarrow{BE}$

$= \text{۳}\overrightarrow{CE} + \text{۳}\overrightarrow{BE}$

اگر $BD = DC$ باشد، $= \text{۶}\overrightarrow{DE}$

چون مجموع گشتاورهای سه نیروی مذکور نسبت به D برابرصفر است، براینید آنهـا می‌بایستی از D بگذرد وبنابراین ازنظـربزرگی، جهت و راستا با نیروی $\text{۶}\overrightarrow{DE}$ مشخص می‌شود.

مثال ۲: ABCDEF یك شش‌ضلعی منتظم است و O نقطه‌ای دلخواه است. ثابت کنید که‌برایندنیروهایی که با OA، OB، OC، OD، OE وOF مشخص‌می‌شوند، نیرویی است برابر ۶OP، که در آن P مرکز دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی است.



شکل ۱۲ــ۳۲

حل: در شکل ۱۲ـ۳۲، P نقطـهٔ وسط AD، BE و CF است. فـرض می‌کنیم O نقطه‌ای دلخواه باشد. آن را به P وصل می‌کنیم.

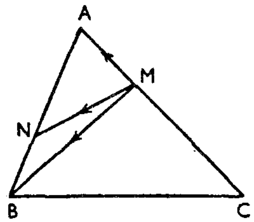
براینید نیروهایی که با OA و OD مشخص می‌شوند نیروی ۲OP است.

براینید نیروهایی که با OB و OE مشخص می‌شوند نیروی ۲OP است.

براینید نیروهایی که با OC و OF مشخص می‌شوند نیروی ۲OP است.

بنابرایـن براینید نیروهایی کـه بـا OA، OB، OC، OD، OE وOF مشخص می‌شوند با ۶OP مشخص می‌شود.

مثال ۳: M نقطه‌ای‌است که ضلع AC از مثلث ABC را به‌نسبت ۱ و ۲ تقسیم‌می‌کند، به‌طوری که به‌نقطهٔ A نزدیکتر باشد. N نقطه‌ای است که ضلع AD رابه‌نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، به‌طوری که به‌نقطهٔ B نزدیکتر باشد. نیرویی راکه ازنظر بزرگی‌وجهت با MN مشخص می‌شود به‌سه نیرو تجزیه کنیدکه هریك درامتداد



شکل ۱۲-۳۳

یکی از اضلاع مثلث وارد می‌شود.

حل: MB را وصل می‌کنیم (شکل ۱۲-۳۳).

چون N ضلع AB را به‌نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، نیروی MNمعادل است با نیروهای $\frac{2}{3}MB$ و $\frac{1}{3}MA$که برنقطهٔ M وارد می‌شوند.

نیروی اخیر در امتداد CA و برابر $\frac{1}{9}CA$ است.

چون M ضلع AC را به‌نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، نیروی MB برابر است با نیروهای $\frac{2}{3}AB$ و $\frac{1}{3}CB$که بر B وارد می‌شوند.

پس نیروی $\frac{2}{3}MB$ برابر است بانیروهای $\frac{4}{9}AB$ و $\frac{2}{9}CB$کـه بر B وارد می‌شوند.

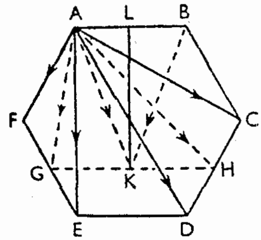
بنابراین نیروی MN معادل است با نیروهای

$$\frac{1}{9}CA \quad ، \quad \frac{2}{9}CB \quad ، \quad \frac{4}{9}AB$$

که درامتداد اضلاع مربوطه وارد می‌شوند.

مثال ۴: $ABCDEF$ تیغـه‌ای است مسطح به‌شکل یـك شش‌ضلعی منتظم. از A و B نیروهایی به طرف چهار رأس دیگر وارد می‌شوند که از نظر بزرگی متناسب با فاصلهٔ آنها از رئوس است. ثابت کنیدکـه برایند آنها متناسب با $6AE$ است. راستای برایند را تعیین کنید.

حل: برایند نیروهایی‌که متناسب با AF و AE است (شکل ۱۲-۳۴) برابراست با نیرویی‌که متناسب با $2AG$ است،که درآن G نقطهٔ وسط EF است.



شکل ۱۲—۳۴

به‌همین طریق برایند نیروهایی که متناسب با AC و AD است نیرویی است که متناسب با ۲AH است که H نقطهٔ وسط CD است.

برایند نیروهایی‌که متناسب با ۲AG و ۲AH است نیرویی است که متناسب با ۴AK است، که K نقطهٔ وسط GH است.

به‌همین طریق برایند نیروهایی‌که در امتدادهای BC، BD، BE، BF وارد می‌شوند، نیرویی است متناسب با ۴BK.

بالاخره برایند نیروهای ۴AK و ۴BK با نیروی ۸LK مشخص‌می‌شود که L نقطهٔ وسط AB است وآشکاراست که $LK=\frac{۳}{۴}AE$.

پس برایند هشت نیرو، نیرویی است متناسب با ۶AE و در امتداد LK وارد می‌شود.

به‌شیوهٔ برداری می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=۲\overrightarrow{AG}+۲\overrightarrow{AH}=۴\overrightarrow{AK}$$

و برایند از A می‌گذرد.

نیز

$$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}=۲\overrightarrow{BG}+۲\overrightarrow{BH}=۴\overrightarrow{BK}$$

و برایند از B می‌گذرد.

پس هشت نیرو معادل با نیروی ۴AK درامتداد AK و نیروی ۴BK درامتداد BK می‌شودکه‌آن هم به‌نوبهٔ خود معادل نیروی ۸LK درامتداد LK است.

تمرین ۵۰۱۲

۱ - F و H به ترتیب نقطه‌های وسط اضلاع BC و DA از چهارضلعی ABCD هستند. نشان دهید که اگر بریك نقطه دو نیرو به‌موازات و برابر با AB و DC وارد شوند، برایند آنها نیرویی به‌موازات HF و برابر ۲HF خواهد بود.

۲ - ABC یك مثلث و G محل تلاقی میانه‌های آن است. اگر O نقطه‌ای دلخواه از صفحهٔ مثلث باشد، ثابت کنید که برایند نیروهایی که با OA، OB و OC مشخص شده‌اند نیرویی است که با ۳OG مشخص می‌شود.

۳ - اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و H، محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC باشد، ثابت کنید که برایند نیروهایی که با HA، HB، و HC نمایش داده می‌شوند، از نظر بزرگی و جهت با ۲HO مشخص می‌شوند.

۴ - ABCD یك چهارضلعی است، که درآن A و C رئوس متقابل هستند. دو نیرو بر A اثر می‌کنند، که از نظربزرگی وجهت با AB و AD مشخص می‌شوند. دو نیرو نیزبر C وارد می‌شوند که ازنظربزرگی وجهت با CB و CD مشخص‌می‌شوند. نشان دهید که نیروی برایند ازنظربزرگی وجهت با چهاربرابرخط واصل میان‌نقاط وسط اقطار چهارضلعی مشخص می‌شود.

۵ - ABCD یك چهارضلعی است. نیروهایی هستند که به‌طورکامل با خطوط AB، BC، AD، DC مشخص می‌شوند. ثابت کنید که برایند آنها ازنظربزرگی وجهت با ۲AC مشخص می‌شود وراستای آن، BD را نصف می‌کند.

۶ - O نقطه‌ای دلخواه از صفحهٔ مثلث ABC است و D، E، F نقطه‌های وسط‌اضلاع هستند. نشان دهید که مجموعهٔ نیروهایی‌که با OA، OB و OC مشخص می‌شوند معادلند با مجموعهٔ نیروهایی که با OD، OE و OF مشخص می‌شوند.

۷ - ABCD یك چهارضلعی است، و O نقطه‌ای دلخواه از صفحهٔ آن است. E، F، G، H به‌ترتیب نقطه‌های وسط AB، BC، CD، DA هستند. ثابت کنید که برایند نیروهایی‌که با OA، OB، OC، OD مشخص می‌شوند با ۴OK مشخص‌می‌شود که درآن K وسط EG است.

۸ - نقطهٔ P که برمحیط یك دایره واقع است به‌دو نقطهٔ ثابت A و B که در دایره‌اند متصل می‌شود. نیروهای ۲PA، ۳PB به‌ترتیب در امتدادهای PA و PB وارد می‌شوند، و برایند آنها از نظرجهت وبزرگی با PQ نمایش داده می‌شوند. مکان هندسی Q را هنگامی‌که P به‌دور دایره بچرخد تعیین کنید.

۹ - سه نیروی AB، ۲BC، ۲AC درامتداد اضلاع مثلث ABC ودرجهتهایی‌که با حروف مشخص شده است وارد می‌شوند. برایند آنها را تعیین کنید و نتیجه بگیرید که اگر از وسط AB به نقطه‌ای از BC که BC را به‌نسبت ۱ و ۲ طوری تقسیم می‌کندکه به C نزدیکتر باشد، خطی وصل کنیم این خط امتداد AC را در E قطع می‌کند، به‌طوری‌که AC = CE.

۱۰- A و B نقطه‌های ثابتی هستند. P طوری حرکت می‌کندکه برایند نیروهای PA و PB همیشه دو برابر نیروی PA باشد. مکان هندسی P را تعیین کنید.

۱۱- نیروهایی با خطوطی نمایش داده می‌شوندکه نقطهٔ دلخواه P را به‌رئوس یك‌چهار-ضلعی وصل می‌کنند. اگر برایند این نیروها بزرگی ثابتی داشته باشد، ثابت‌کنیدکه مکان P دایره است. مرکزاین دایره وشعاع آن را تعیین کنید.

۱۲- ABCD یك متوازی‌الاضلاع است و E نقطه‌ای است واقع برAD. نقطهٔ F واقع برBC راچنان تعیین کنیدکه برایندنیروهایی‌که با AE وAF نمایش داده‌می‌شوند، درجهت AC باشد.

۱۳- نیروهای متساوی $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$ درامتداد اضلاع مثلث ABC اثرمی‌کنند. ثابت‌کنیدکه برایندآنها درامتداد ED وارد می‌شود ومساوی است با $4\overrightarrow{ED}$، که D و E به‌ترتیب نقطه‌های وسط اضلاع BC و CA هستند.

۱۴- O نقطه‌ای است واقع برمیانه‌ای از مثلث ABC. نیروهایی‌که از O به‌طرف A، B و C وارد می‌شوند متناسبندبا فاصلهٔ O ازاین نقطه‌ها. ثابت‌کنیدکه برایندآنهااز نظربزرگی وجهت با ۳OG نمایش داده می‌شودکه درآن G مرکزجرم مثلث است.

۱۵- نیروهایی که به‌طـور کامل با AB، CB، CD و AD نمایش داده می‌شوند، در امتداد اضلاع چهارضلعی ABCD وارد می‌شوند. ثابت‌کنیدکه برایندآنها به‌طور کامل با ۴HK نمایش داده می‌شود، کـه درآن H و K به‌ترتیب نقطه‌های وسط AC و BD هستند.

۱۶- ABC مثلثی است متساوی‌الاضلاع و G مرکزجرم آن است. نیروهای ۱، ۱، ۴، ۲، ۲، ۱ نیوتون و به‌ترتیب درامتداد BC، CA، AB، AG، BG، CGوارد می‌شوند. بزرگی و جهت برایند آنها و فاصلهٔ A را از محـل تلاقی این برایند با AB تعیین کنید.

۱۷- ثابت‌کنیدکه برایند چند نیروی متقارب $l.$OA ، $m.$OB ، $n.$OC ، ...برابر است با OG$(l+m+n+\ldots)$، که درآن G مرکزثقل جرمهایی است که‌متناسب با l، m، n، ... هستند و به‌ترتیب در نقاط A، B، C، ... قراردارند.

۱۸- $ABCD$ یك ذوزنقه است که در آن AB موازی با DC است. نشان دهید که نیروهایی که ازنظربزرگی، جهت و راستا با $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{CB}$، $\overrightarrow{BA}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ نمایش داده می‌شوند، دارای برایندی هستندکه ازنظربزرگی وجهت با $۲\overrightarrow{EF}$ نمایش داده می‌شوند، که E و F به‌ترتیب نقطه‌های وسط AB و CD هستند. نشان‌دهید که راستای برایند، امتداد BA را درنقطه‌ای به‌فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}CD$ از A قطع می‌کند.

۱۹- نیروهایی هستندکه از نظر بزرگی، جهت وراستا با $۳\overrightarrow{BC}$، $۲\overrightarrow{AC}$، $۷\overrightarrow{BA}$ نمایش داده می‌شوند. راستای برایند آنها، AB را در F و AC را در E قطع می‌کند. نشان دهیدکه $۲AF=۳FB$، $۷AE=۳EC$ ونیزنشان دهیدکه برایندرامی‌توان از نظربزرگی وجهت با $\frac{۵۰}{۳}\overrightarrow{FE}$ نمایش داد.

۲۰- اگر AD و BE میانه‌های مثلث غیرمشخص ABC باشند، نشان دهیدکه پنج نیرویی که از نظر بزرگی و جهت و راستا با $\overrightarrow{AB}$، $۲\overrightarrow{CB}$، $۳\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{DA}$ نمایش داده می‌شوند دارای برایندی هستندکه به‌طورکامل با $۵\overrightarrow{CH}$ نمایش داده‌می‌شود که درآن H نقطه‌ای است‌که AB را به‌نسبت ۳ و ۷ تقسیم می‌کند.

۲۱- نیروهایی هستندکه از نظر بزرگی، جهت و راستا با $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{AC}$ و $۳\overrightarrow{BA}$ در یک متوازی‌الاضلاع نمایش داده می‌شوند. نشان دهیدکه برایند آنها از نظربزرگی و جهت با $۲\overrightarrow{BD}$ نمایش داده می‌شود. راستای برایند را تعیین‌کنید.

۲۲- نقطهٔ P برصفحهٔ مستطیل $ABCD$ قراردارد. نیروهایی که به‌طور کامل با $\overrightarrow{AB}$، $۲\overrightarrow{DC}$، $l\overrightarrow{PA}$، $l\overrightarrow{BP}$، $m\overrightarrow{CP}$، $m\overrightarrow{PD}$ نمایش‌داده می‌شوند در حال تعادلند. l را برحسب m تعیین‌کنید.

ثابت‌کنیدکه P می‌تواند برهرنقطه از خطی موازی با AB قرارگیرد. تعیین‌کنید این خط، AB را به‌چه نسبتهایی تقسیم می‌کند.

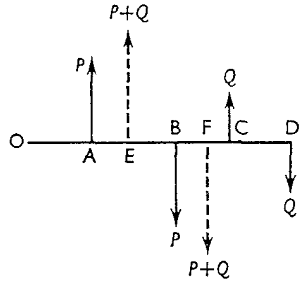
۱۶.۱۲. ترکیب زوجها

قبلاً دیدیم (بند ۱۱-۱۴) که گشتاور یك زوج نسبت به‌هرنقطه‌که درصفحهٔ آن واقع‌است ثابت است. اکنون قضیهٔ زیرراکه، در به‌دست‌آوردن برایند چند زوج که دریك‌صفحه‌اند، به‌ما کمك می‌کند ثابت می‌کنیم.

دو زوج واقع در یک صفحه، معادل با زوجی هستند که گشتاور آن برابر مجموع جبری گشتاورهای آن دو زوج است.

حالت (۱). هنگامی که راستای همهٔ نیروها متوازی است.

فرض می‌کنیم P، P، Q، Q نیروهای زوجهایی باشند که وارد می‌شوند (شکل ۱۲-۳۵). خط راست OABCD را عمود برراستاهای آنها رسم می‌کنیم تا نیروها رادر A، B، C، D قطع کند.



شکل ۱۲-۳۵

نیروهای P و Q که بر A و C وارد می‌شوند معادل با نیرویی هستند که برابر $(P+Q)$ است وموازی آنهاست و درنقطهٔ E واقع برAC وارد می‌شود، به‌طوری که $P.\mathrm{AE}=Q.\mathrm{EC}$.

نیروهای P و Q که بر B و D وارد می‌شوند، معادل با نیرویی هستند که برابر $(P+Q)$ است وموازی با آنهاست ودرنقطهٔ F واقع بر BD وارد می‌شود، به‌طوری که $P.\mathrm{BF}=Q.\mathrm{FD}$، واین نیرو درجهت مخالف نیروی قبلی است.

پس دو زوج معادل با یك زوج هستند.

نیز گشتاور زوج برایند

= مجموع گشتاورهای دو نیروی $P+Q$ که در E وF وارد می‌شود، نسبت به O.

اما گشتاور $P+Q$ که در E وارد می‌شود نسبت به O

= مجموع گشتاورهای P که در A وارد می‌شود و Q که در C وارد می‌شود، نسبت به O.

به‌همین طریق گشتاور $P+Q$ که در F وارد می‌شود، نسبت به O

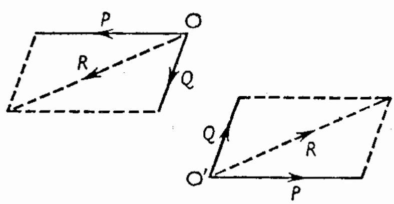
= مجموع گشتاورهای P که در B وارد می‌شود و Q که در D وارد می‌شود، نسبت به O.

پس گشتاور زوج برایند
= مجموع گشتاورهای چهار نیروی زوج
= مجموع گشتاورهای زوجهای اولیه

حالت (۲). وقتی که راستای نیروها متوازی نیستند.

فرض می‌کنیم P، P، Q، Q نیروهای زوجها باشند، و فرض می‌کنیم که یکی از نیروهای P یکی از نیروهای Q را در O تلاقی کند (شکل ۱۲-۳۶)، ودو نیروی دیگر، در نقطهٔ O' تلاقی کنند.

نیروهای P، Q که در O وارد می‌شوند می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند و نیروی منفردی مانند R تشکیل دهند وهمین‌طور است نیروهای P و Q که در O' وارد می‌شوند. نیز این نیروهای منفرد، مساوی، موازی ودرسوی مخالف یکدیگر خواهند بود، زیرا هردو برایند نیروهای P و Q هستند که با زاویهٔ یکسان، امادر جهتهای مخالف یکدیگر وارد می‌شوند.



شکل ۱۲-۳۶

پس دو زوج معادل با یك زوج منفرد هستند.
اما گشتاور این زوج برایند

= گشتاور R که در O' وارد می‌شود نسبت به O،
= مجموع گشتاورهای P و Q که در O' وارد می‌شوند نسبت به O
= مجموع گشتاورهای زوجهای اولیه

این قضیه که برای دو زوج ثابت شد می‌تواند تعمیم پیدا کند وبرای هرچندزوج که در یك صفحه‌اند تحقیق شود. نتیجه‌ای که به‌دست می‌آید این است که چند زوج واقع دریك صفحه معادل با زوجی هستند که گشتاورآن برابراست با مجموع جبری گشتاورهای زوجهای منفرد.

۱۷.۱۲. از قضیهٔ بند قبلی نکته‌های زیر استنتاج می‌شود:

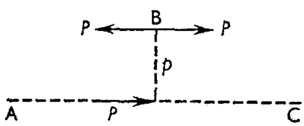
۱. دو زوج واقع در یك صفحه، که گشتاورهای آنها برابر و در سوی مخالف یکدیگرند، با یکدیگر متعادلند.

زیرا برایند آنها زوجی است که گشتاور آن صفر است و این بدان معنی است که نیروهای زوج، هریك برابر صفر است، یا اینکه بازوی زوج برابر صفر است، و در حالت اخیر می‌بایستی از دو نیروی مساوی و ناهمسو که بر یك خط مستقیم واقعند تشکیل شده باشد، و بدیهی است که چنین دو نیرویی در حال تعادلند.

۲. هر دو زوجی که گشتاور آنها مساوی یکدیگر و در یـك صفحه باشند با یکدیگر برابرند.

این نتیجه را می‌توان با وارونه‌کردن جهتهای نیروهای یکـی از زوجهای متعادل مربوط به نکتهٔ (۱) به‌دست آورد.

۱۸.۱۲. نیروی P کـه بر یك نقطهٔ دلخواه از یك جسم صلب اثـر می‌کند، ممکن است به‌موازات خودش جابه‌جا شود و بر نقطهٔ دلخواه دیگری مانند B از جسم وارد شود. برای این‌کار باید زوجی تولید کرد که گشتاور آن Pp است، که در آن p فاصلهٔ عمودی است که از B بر راستای P رسم می‌شود. بر اثر این زوج، جسم نسبت به B در جهتی می‌چرخد که وقتی P بر A وارد می‌شد، جسم نسبت به B در آن جهت می‌چرخید.



شکل ۱۲-۳۷

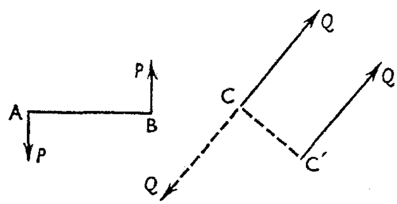
فرض می‌کنیم AC (شکل ۱۲-۳۷) راستای P باشد.

دو نیروی مساوی و ناهمسوی P را بر B طوری وارد می‌کنیم که راستای آنها از B بگذرد و به‌موازات AC باشد.

یکی از این نیروها، آنکه به‌طرف راست وارد می‌شود، نیروی اصلی P است کـه جابه‌جا شده است و در B اثر می‌کند.

نیروی دیگر با نیروی اصلی تشکیل یك زوج می‌دهدکه گشتاورآن $P\mathrm{p}$ است‌که در آن p فاصلهٔ عمود B از AC است.

۱۹.۱۲. مثال ۱: ثابت‌کنیدکه ترکیب یك زوج با نیرویی‌که درهمان صفحه است برابر است با تغییروضع راستای نیرو.



شکل ۱۲-۳۸

حل: فرض می‌کنیم زوج از دو نیروی P که در A و B اثر می‌کنند تشکیل شده باشد (شکل ۱۲-۳۸)، وفرض می‌کنیم که Q نیرویی باشدکه برC وارد می‌شود.

ما می‌توانیم این زوج را با زوج دیگری‌که دارای همان گشتاور و درهمان صفحه باشد جابه‌جا کنیم.

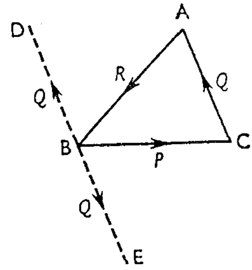
زوجی انتخاب می‌کنیم‌که بزرگی نیروهایش برابر Q باشند و یکی ازآنها برC ودرجهت مخالف نیروی Q که قبلاً وارد شده بود، اثرکند. نیروی دیگر Q بر′C وارد خواهد شد، به‌طوری‌که ′CC عمود برجهت‌اولیهٔ نیروهای Q است و $\mathrm{CC'}=\dfrac{P}{Q}\mathrm{AB}$.

اکنون دو نیرو داریم‌که در C با یکدیگرتوازن پیدا کرده‌اند، ویك نیروی Q داریم‌که در ′C وارد شده است.

بنابراین براینده باید در راستای Q به موازات خودش، به‌اندازهٔ $\dfrac{M}{Q}$ که در آن M گشتاور زوج است، حرکت‌کند.

مثال ۲: اگر سه نیرو که از نظر بزرگی، جهت وراستا با اضلاع یك مثلث، که به‌ترتیب دورانی‌حروف درنظرگرفته شوند، مشخص می‌شوند، بریك‌جسم‌صلب‌واردشوند، معادل بازوجی‌خواهند بودکه گشتاورآن بادوبرابرمساحت مثلث‌مشخص‌می‌شود.

حل : فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱۲-۳۹) مثلث مفروض باشد و P، Q، R نیروها



شکل ۱۲-۳۹

باشند، به‌طوری‌که P، Q و R به‌طور کامل به‌ترتیب با اضلاع BC، CA و AB مشخص می‌شوند.

خط DBE را به‌موازات AC رسم می‌کنیم، و در B دو نیروی متساوی و ناهمسو، برابر Q، و در جهتهای BD و BE تولید می‌کنیم.

نیروهـای P و R و نیروی Q کـه در جهت BD وارد می‌شوند به‌وسیلهٔ مثلث نیروها درحال تعادلند، زیرا همهٔ آنها بر B وارد می‌شوند.

بنابراین فقط دو نیرو باقی می‌ماند کـه هریك برابر Q است و در راستاهای CA و BE وارد می‌شوند.

این دو نیرو تشکیل زوجی می‌دهند که گشتاورآن برابراست بـا Q ضرب در فاصلهٔ قائم B از CA.

نیز چون CA معرف Q است، این گشتاور با حاصل‌ضرب CA در فاصلهٔ قائم B از CA، یعنی با دو برابرمساحت مثلث ABC، مشخص می‌شود.

به‌بیان دیگـر نیز می‌توانیم بگوییم کـه مجموع برداری سه نیـرو، یعنی $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$، برابر صفراست. پس نیروهـا معادل با یـك زوج هستند. گشتاور این زوج را می‌توان با تعیین گشتاورها، نسبت به‌هر نقطهٔ دلخواه، مثلاً B، به‌دست‌آورد. نتیجه‌ای مانند فوق به‌دست خواهد آمد.

مثال ۳: نیروهایی کـه ازنظر بزرگی وجهت بـا $l\overrightarrow{AB}$، $m\overrightarrow{BC}$، $l\overrightarrow{CD}$، $m\overrightarrow{DA}$ مشخص می‌شوند، براضلاع مربوطهٔ یك چهارضلعی ABCD وارد می‌شوند. نشان‌دهید که این نیروها، اگر $l=m$ باشد، یا اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، معادل با یك زوج هستند.

حل : اگرچهار نیرو به‌یك زوج تبدیل شوند، مجموع برداری آنهـا می‌بایستی برابر

صفرباشد. مجموع برداری برابر است با

$$l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}+l\overrightarrow{CD}+m\overrightarrow{DA}$$
$$=l(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+(m-l)(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$$
$$=(m-l)(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$$

این مقدار هنگامی صفراست‌که یا $m=l$ باشد، یا $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=0$ باشد. شرط اخیر هنگامی برقرار است‌که BC مساوی وموازی با AD باشد، یعنی ABCD یك متوازی‌الاضلاع باشد.

آشکار است وقتی‌که این شرایط برقرار باشد،گشتاور چهار نیرو نسبت به‌هرنقطه، مثلاً D، صفرنیست، و بنابراین نیروها به‌یك زوج تبدیل می‌شوند.

تمرین ۶.۱۲

۱ ـ میلهٔ یکنواخت AB به‌طول $2a$ ووزن W می‌تواند حول محور افقی صیقلی ثابتی که از A می‌گذرد بچرخد. اگر زوجی باگشتاور N برآن وارد شود و آن را تا زاویهٔ $30°$ نسبت به‌قائم بچرخاند، N را پیداکنید.

۲ ـ میلهٔ یکنواخت AB به‌طول ۳/۶ m و جرم ۵ kg از انتهای A دروضعی افقی قلاب شده است. وزنه‌ای به‌جرم ۲/۵ kg از انتهای B آویزان است. چه نیرو وزوجی برمیله باید واردکرد تا میله محکم به‌قلاب بچسبد؟

۳ ـ نردبان یکنواختی به‌طول l و وزن W طوری قرار داردکه انتهای بالایی آن‌بریك دیوار قائم صیقلی تکیه‌کرده است وانتهای پایینی آن بریك سطح افقی صیقلی قرار دارد. شخصی به‌وزن W' برروی نردبان وبه‌فاصلهٔ l' از انتهای پایینی قراردارد. نشان دهیدکه اگر از لغزش نردبان به‌کمك یك زوج جلوگیری‌کنیم،گشتاور زوج مساوی خواهد بود با

$$\left(\frac{1}{2}Wl+W'l'\right)\sin\theta$$

که درآن θ زاویهٔ انحراف نردبان با قائم است.

۴ ـ ثابت‌کنیدکه دو زوج‌که نیروهای آنها همصفحه‌اند، اگرگشتاورهای آنها از نظر بزرگی با یکدیگر مساوی ولی ازنظرعلامت با یکدیگرمخالف باشند، آن دو زوج درحال تعادل خواهند بود.

تیغهٔ مربع شکل یکنواخت ABCD به‌وزن W به‌حال تعادل است‌به‌طوری

که گوشهٔ A از آن، بهوسیلهٔ نیروی افقی که بر C وارد می‌شود، بردیوار غیر صیقلی قائمی تکیه‌کرده است. نقطهٔ B بالای نقطهٔ A است. ثابت کنید که ضریب اصطکاك نمی‌تواند کمتر از واحد باشد، نیزانحراف AB را نسبت به‌قائم پیداکنید.

۵ - میلهٔ خمیدهٔ سنگین ویکنواخت ABCD، که قسمتهای AB، BC، CD از آن، تشکیل سه‌ضلع یك مربع را می‌دهند، از A به‌نقطهٔ ثابتی واقع بردیواری صیقلی، به‌طور صیقلی لولا شده است و درصفحهٔ قائمی عمود بردیوار نگاهداری می‌شود، به‌طوری که براثر فشار دیواربرD اضلاع AB وCD افقی باشند، و CD زیرAB باشد. عکس‌العملهای لولا را در A و دیوار را در D تعیین کنید.

نشان دهیدکه فشارهایی که برمیله در B و C وارد می‌شود، هریك از یك نیرو ویك زوج تشکیل شده است؛ عکس‌العملهای قسمتهای AB، DC رابرقسمت BC تعیین کنید، وتعادل BC را تحقیق کنید.

۶ - نیروهای $3P$، $4P$، و $5P$ به‌ترتیب درامتداد اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که‌طول اضلاع آن به‌ترتیب ۳ m، ۴ m و ۵ m است وارد می‌شود، به‌طوری که اگر از هرنقطهٔ مثلث به‌این نیروها توجه شود، درجهت دورانی یکسانی هستند. نیروهایی را پیداکنیدکه اگر به‌دو انتهای ضلع ۵متری ودرامتدادهای عمود براین ضلع‌وارد شوند با این نیروها به‌حال تعادل درخواهند آمد.

۷ - ABCDEF یك شش ضلعی منتظم است. نشان دهیدکه نیروهایی که به‌طور کامل با AB، CD و EF مشخص می‌شوند، معادل با زوجی هستندکه گشتاورآن برابر مساحت شش‌ضلعی است.

۸ - P، Q، R نقطه‌های وسط اضلاع AB، BC، CA ازمثلث ABC هستند. اگر نیروهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، $k\overrightarrow{PQ}$، $k\overrightarrow{QR}$، $k\overrightarrow{RP}$ در حال تعادل باشند، k را تعیین کنید.

۹ - ABCD مربعی است به‌ضلع a متر. نیروهای ۱۰، ۵، ۱۰، ۱۵ نیوتون به‌ترتیب درامتداد اضلاع AB، BC، CD، DA وارد می‌شوند. نشان دهید که دونیرو وجود داردکه اگر هریك آنها با این چهارنیرو ترکیب شوند، دستگاه به‌یك زوج با گشتاور $5a$ N m کاهش می‌یابد.

۱۰- ABCD مستطیلی‌است که درآن $\mathrm{AB}=a$ و $\mathrm{BC}=b$ است. M نقطهٔ وسط BC است. سه نیرو که به‌طور کامل با $k\overrightarrow{AM}$، $k\overrightarrow{MC}$، $k\overrightarrow{CD}$ مشخص می‌شوند، که‌در آن k عددی مثبت است، وارد می‌شوند. بزرگی وجهت برایند آنها وفاصلهٔ A را

از راستای برایند تعیین کنید.

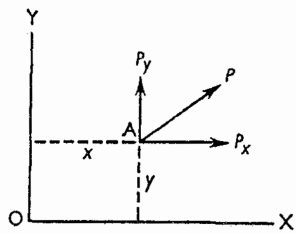
بزرگی زوجی که باید با سه‌نیرو ترکیب شود تا برایند دستگاه از نقطهٔ وسط AB بگذرد چیست؟

۲۰.۱۲. برایند نیروهای همصفحه

اکنون روش دیگری را برای کاهش یك مجموعه از نیروهای همصفحه به‌کار می‌بریم.

از قضیه‌ای که دربند بعدی ثابت شده‌است می‌توانیم قضیهٔ ۱۲-۵ را نتیجه‌بگیریم، و نیز به‌آسانی گروههای گوناگـون شرایط لازم و کافی را برای تعادل مجموعهٔ نیروها به‌دست آوریم.

۲۱.۱۲. یك مجموعه از نیروهای همصفحه را که بریك جسم صلب اثر می‌کنند، می‌توان به‌طورکلی به یك نیروی منفرد، که برنقطه‌ای دلخواه از صفحهٔ نیروها وارد می‌شود، و یك زوج تبدیل کرد.



شکل ۱۲-۴۰

فرض می‌کنیم نیروهای P_1، P_2، .... P_n برنقـاط A_1، A_2، ...، A_n اثرکنند، وفرض‌می‌کنیم O (شکل ۱۲-۴۰) نقطه‌ای دلخواه‌ازصفحهٔ نیروها باشد. O را به‌عنوان مبدأ مختصات اختیار می‌کنیم وفـرض می‌کنیم کـه مختصات A_1، A_2، ...، A_n نسبت به‌محورهای متعامدی که از O می‌گذرند (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، ... (x_n, y_n) باشند.

نیروی دلخواه P راکه برنقطهٔ $A(x, y)$ وارد می‌شود درنظرمی‌گیریم.

P را به‌مؤلفه‌های P_x، P_y به‌موازات OX، OY تجزیه می‌کنیم.

با تولید زوجی که گشتاورآن yP_x است می‌توانیم P_x رابه‌موازات خودش جابه‌جا کنیم تـا برO وارد شود. ومی‌توانیم بـا تولید زوجی کـه گشتاور آن xP_y است، P_y را

به‌موازات خودش جابه‌جا کنیم تا بر O وارد شود.

این زوجها در جهتهای مخالف یکدیگر، و مجموع جبری گشتاورهای آنها $xP_y - yP_x$ است.

همین کار را برای همهٔ نیروها انجام می‌دهیم.

فرض می‌کنیم X مجموع جبری همهٔ مؤلفه‌های نیروهایی باشندکه درامتداد محور xها جابه‌جا شده‌اند، و Y مجموع جبری همهٔ مؤلفه‌های نیروهایی باشند که درامتداد محور yها جابه‌جا شده‌اند.

این دومؤلفه را می‌توان ترکیب کرد. از ترکیب آنها نیروی منفرد R که بر O اثر می‌کند به دست می‌آید. سپس می‌توان زوجها را با هم جمع کرد (با علامتهای مخصوص به‌خودشان) وتشکیل یك‌زوج‌منفرد باگشتاور G دادکه‌مساوی است بامجموع گشتاورهای همهٔ زوجها.

اگر برایند R با محور xها زاویهٔ θ بسازد،

$$R^{2} = X^{2} + Y^{2} \quad \text{و} \quad tg\theta = \frac{Y}{X}$$

باید توجه داشت‌که مقادیر θ و R مستقل از وضع نقطهٔ O هستند، زیرا شامل مختصات هیچ‌یك از نقاط A_1، A_2، ...، A_n نیستند. درواقع R از نظر بزرگی وجهت با بردار مجموع نیروهای P_1، P_2، ...، P_n مشخص می‌شود.

گشتاور برایند زوج برابراست با

$$G = \sum (xP_y - yP_x)$$

که درآن P_x و P_y مؤلفه‌های P به‌موازات محورها، و $\sum$ علامت جمع کردن همهٔ این نیروهاست.

بدیهی است که G مجموع گشتاورهای همهٔ نیروها نسبت به‌مبدأ O است، و مقدار آن بستگی به‌وضع O دارد.

۲۲.۱۲. شرایط تعادل برای مجموعه‌ای از نیروهای همصفحه

فرض می‌کنیم که نیروها به‌یك نیروی R که برنقطهٔ اختیاری O وارد می‌شود و یك زوج تبدیل شود.

دراین صورت برای تعادل باید چنین داشته باشیم: $R = 0$، و $G = 0$.

اگر $R = 0$ باشد باید هم $X = 0$ باشد، هم $Y = 0$ باشد.

بنابراین سه‌شرط به‌دست می‌آوریم که مطابق شرح زیراست:

مجموعهای جبری مؤلفه‌های نیروها در هردو جهتی که موازی نیستند باید برابر صفر باشد، ومجموع جبری گشتاورهای همهٔ نیروها نسبت به‌هر نقطهٔ اختیاری باید صفر باشد.

این شرایط را قبلاً به‌دست آوردیم (بند ۱۲-۸)

۲۳.۱۲ تغییر مبنا

اگر نقطهٔ دیگری، مانند O' را که مختصات آن (x', y') است به‌عنوان مبدأ اختیار کنیم، گشتاور زوج برای این مبنا را ممکن است به‌این طریق به‌دست آورد که به‌جای x و y درمقدار G مقادیر $x-x'$ و $y-y'$ قراردهیم.

$$\therefore \quad G' = \sum(x-x')P_y - \sum(y-y')P_x$$
$$= \sum xP_y - \sum yP_x - \sum x'P_y + \sum y'P_x$$
$$= G - x'\sum P_y + y'\sum P_x$$

زیرا x' و y' ثابتند.

$$\therefore \quad G' = G - x'Y + y'X$$

دراین نتیجه G مجموع گشتاورهای نیروها نسبت به‌مبدأ است، x' و y' مختصات مبنا است، X و Y مجموعهای مؤلفه‌های نیروها به‌موازات محورهاست.

۲۴.۱۲ راستای برایند

اگرمجموعه درحال تعادل نباشد، وآن رابه‌یك نیروی R درنقطه‌ای به‌مختصات (x', y') و یك زوج G' تبدیل کنیم، دراین صورت

$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$\text{و} \quad G' = G - x'Y + y'X$$

حال اگر $R = 0$ باشد، $X = 0$ و $Y = 0$ است ومجموعه به‌یك زوج G تبدیل شود، زیرا نمی‌تواند G هم مساوی صفر باشد.

اگر R صفر نباشد، می‌توان مبنای خاصی را انتخاب کرد که G' برای آن صفرشود، به‌طوری که مجموعه به‌یك‌نیروی منفرد تبدیل شود. این‌حالت درهنگامی است که مختصات (x', y') مبنا درمعادلهٔ زیرصدق کند:

$$G - xY + yX = 0$$

یعنی مبنا باید براین خط واقع باشد.

اما این خط با محور xها زاویه‌ای می‌سازدکه تانژانت آن $\frac{Y}{X}$ است ، و بنابرایـن موازی با R است، وچون R برمبنا (x', y') اثرمی‌کند، این خط مستقیم، همان‌راستای R است. بنابراین معادلهٔ راستای برایندچنین است:

$$G - xY + yX = 0$$

۲۵.۱۲. صورتهای دیگر شرایط تعادل

(۱) یك مجموعه از نیروهای همصفحه درصورتی به‌حال تعادل خواهند بـود که مجموع گشتاورهای همهٔ نیروها نسبت به‌دو نقطهٔ متفاوت (مثـلا O و C) صفـر باشد، و مجموع مؤلفه‌ها نیز در جهت دلخواهی، جزجهت عمود بر OC، صفر باشد.

فرض می‌کنیم O مبدأ و C مبنا (x', y') باشد. خواهیم داشت،

$$G = 0$$

و $$G' = G - x'Y + y'X = 0$$

و $$X = 0$$

نتیجه می‌شودکه $X = 0$، $Y = 0$، $G = 0$، مشروط برآنکه x' صفر نباشد، یعنی‌مشروط برآنکه C برمحور yها نباشد (بنابراین X عمود برOC است).

(۲) مجموعه‌ای از نیروهای همصفحه درصورتی درحـال تعادل خواهند بود کـه مجموع گشتاورهای‌آنها نسبت به‌سه نقطهٔ O، C، D، که بر یك استقامت نیستند، هریك برابرصفر باشد.

O را مبدأ اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم کـه $C(x', y')$ و $D(x'', y'')$ است. ین شرایط به‌دست می‌آید:

$$G = 0$$

و $$G - x'Y + y'X = 0$$

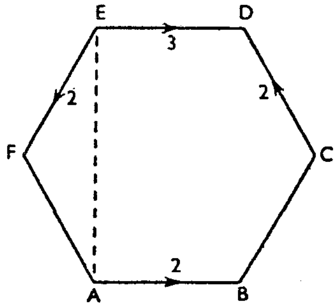
و $$G - x''Y + y''X = 0$$

$\therefore$ $$-x'Y + y'X = 0$$

و $$-x''Y + y''X = 0$$

بنابراین $X = 0$، $Y = 0$، مگرآنکه $x'y'' - x''y' = 0$ باشد، یعنی مگـرآنکه O، C، D بریك خط راست واقع باشند.

۲۶.۱۲. مثال ۱: نیروهای ۲، ۲، ۳، ۲ واحد به‌ترتیب درامتداد اضلاع AB، CD، ED، EF ازیك شش‌ضلعی ABCDEF درجهتهایی‌که با ترتیب حروف‌مشخص هستند وارد می‌شوند. بزرگی برایند را پیداکنید و ثابت کنیدکه برایند در امتداد AB وارد می‌شود.



شکل ۱۲-۴۱

حل : شکل ۱۲-۴۱ نیروهایی را نشان می‌دهد که درامتداد اضلاع شش‌ضلعی وارد می‌شوند. محورها را درامتداد AB و درامتداد عمود برAB اختیار می‌کنیم و نقطهٔ A را به‌عنوان مبدأ اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم‌که طول ضلع این شش ضلعی برابر a باشد.

مجموع مؤلفه‌های نیروها به‌موازات AB برابر است با

$$۲ - ۲\cos ۶۰^\circ + ۳ - ۲\cos ۶۰^\circ = ۳$$

ومجموع مؤلفه‌های نیروها عمود برAB برابر است با

$$۲\sin ۶۰^\circ - ۲\sin ۶۰^\circ = ۰$$

این دو معادله با هم نشان می‌دهندکه بزرگی برایند برابر ۳ و امتداد آن به‌موازات AB است.

اما مجموع گشتاورهای نیروها نسبت به A برابر است با

$$۲ \times ۲a\sin ۶۰^\circ - ۳ \times ۲a\sin ۶۰^\circ + ۲ \times a\sin ۶۰^\circ = ۰$$

و بنابراین برایند می‌بایستی از نقطهٔ A بگذرد.

بنابراین بزرگی برایند ۳ واحد است و درامتداد AB وارد می‌شود.

مثال ۲: گشتاورهای نیرویی‌که درصفحهٔ xy وارد می‌شود نسبت به‌مبدأ ونقطهٔ (۸، ۰)

و نقطهٔ $(\text{۰},\text{۱۰})$ به‌ترتیب $-\text{۶۰}\ \mathrm{Nm}$ ، $-\text{۱۵۶}\ \mathrm{Nm}$ و $\text{۸۴}\ \mathrm{Nm}$ است. مختصات نقاط برحسب متر داده شده‌اند. بزرگی نیرو و نقطه‌های تلاقی آن را با محورهای مختصات تعیین کنید.

حل : فرض می‌کنیم مؤلفه‌های نیرو درامتداد محورها X و Y نیوتون و گشتاور آن نسبت به‌مبدأ برابر G نیوتون‌ـمتر باشد.

گشتاور نسبت به نقطهٔ (x, y) برابراست با $G-xY+yX$ (برحسب Nm)

$$\therefore \quad G=-\text{۶۰}$$

و $$-\text{۶۰}-\text{۸}Y=-\text{۱۵۶}$$

و $$-\text{۶۰}+\text{۱۰}X=\text{۸۴}$$

$$\therefore \quad Y=\text{۱۲} \text{ و } X=\text{۱۴/۴}$$

$$\therefore \quad R=\sqrt{X^{\text{۲}}+Y^{\text{۲}}}=\sqrt{\text{۱۴/۴}^{\text{۲}}+\text{۱۲}^{\text{۲}}}$$

$$=\text{۱۲}\sqrt{\text{۱/۴۴}+\text{۱}}=\text{۱۸/۷۲}\ \mathrm{N}$$

معادلهٔ راستای نیروی R چنین است:

$$-\text{۶۰}-\text{۱۲}x+\text{۱۴/۴}y=\text{۰}$$

وقتی $y=\text{۰}$ است $x=-\text{۵}$ ووقتی که $x=\text{۰}$ است $y=\frac{\text{۶۰}}{\text{۱۴/۴}}=\text{۴/۲}$ است.

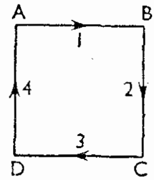
بنابراین راستای نیرو، محورها را درنقطه‌هایی به‌مختصات $(-\text{۵}, \text{۰})$ و $(\text{۰}, \text{۴/۲})$ قطع می‌کند.

۲۷.۱۲. مثالهای دیگری از نیروهای هم‌صفحه

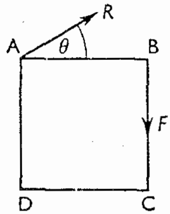
مثال ۱: نیروهـای ۱، ۲، ۳، ۴ در امتـداد اضـلاع AB، BC، CD، DA از مـربع ABCD واردمی‌شوند. مجموعه‌را به‌دونیروتبدیل‌می‌کنیم‌که یکی از Aمی‌گذرد و دیگری برBC واقع است.

حل : شکل ۱۲ـ۴۲ الف نیروهایی رانشان می‌دهدکه درامتداد اضلاع مربع ABCD وارد می‌شوند. شکل ۱۲ـ۴۲ ب نشان می‌دهدکـه مجموعهٔ نیروهـا به‌دو نیرو تبدیل شده است که یکی، R، در A وارد می‌شود و بـا AB زاویهٔ θ می‌سازد و دیگری، F، بر BC واقع است. اگر مجموع مؤلفه‌های هـریك از دو گروه نیرو در دوجهت متعامد دلخواه برابریکدیگر باشند، و اگر مجموع گشتاورهای هریك از دو گروه نسبت به‌نقطه‌ای دلخواه با یکدیگر برابر باشند درآن صورت

این دومجموعه، یعنی مجموعهٔ اولیه نیروها و مجموعهٔ تبدیل شدهٔ نیروها، با یکدیگر برابرخواهند بود.



شکل ۱۲-۴۲ الف



شکل ۱۲-۴۲ ب

با تجزیه درامتداد موازی ودرامتداد عمود برAB خواهیم داشت،

$$R cos\theta = ۱ - ۳ \qquad (۱)$$

$$R sin\theta - F = ۴ - ۲ \qquad (۲)$$

وباگرفتن گشتاور نسبت به A،

$$F \,.\, a = ۲a + ۳a \qquad (۳)$$

که درآن a طول ضلع مربع است.

از معادلهٔ (۳): $\qquad F = ۵$

بنابراین از معادلات (۱) و (۲)،

$$R cos\theta = -۲$$

$$R sin\theta = ۷$$

بنابراین $R = \sqrt{۵۳}$ و $tg\theta = -۳/۵$ (θ میان $۹۰°$ و $۱۸۰°$ قرار می‌گیرد). بنابراین نیروی R دارای بزرگی $\sqrt{۵۳}$ است و با امتداد AB زاویه‌ای می‌سازدکه تانژانت آن برابر ۳/۵ است.

مثال ۲: تیغه‌ای به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برصفحه‌ای افقی و صیقلی قرار دارد وتحت تأثیر نیرویی برابر N ۵ در امتداد BC و N ۳ در امتداد AC و N ۲ درامتداد AD است، که درآن AD عمود برBC است. تعیین‌کنید نیرویی راکه برB وزوجی راکه برتیغه وارد می‌شود تا تیغه را به‌حال سکون نگاه‌دارد.

حل : مثلث را رسم می‌کنیم و نیروها را مطابق شکل ۱۲-۴۳ برروی آن نمایش می‌دهیم.

فرض می‌کنیم نیروی اضافی R در جهتی‌که با BC زاویهٔ θ می‌سازد و زوجی باگشتاور N درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت مطابق شکل وارد شود.

چون تیغه تحت اثر این نیروها به‌حال سکون می‌ماند، این نیروها را به‌موازات و عمود بر BC تجزیه می‌کنیم. خواهیم داشت:

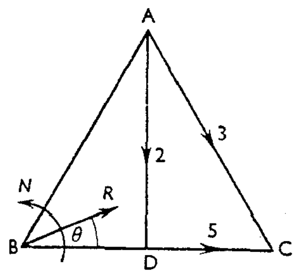
$$R\cos\theta+5+3\cos 60^\circ=0 \qquad (1)$$

$$R\sin\theta-2-3\sin 60^\circ=0 \qquad (2)$$

زیرا مجموع مؤلفه‌های دو نیرویی که زوج را تشکیل داده‌اند صفراست. نیز گشتاور نسبت به B می‌گیریم:

$$N-2\times\frac{1}{2}a-3\times a\sin 60^\circ=0 \qquad (3)$$

که درآن a طول ضلع مثلث ABC است.



شکل ۱۲-۴۳

از معادلهٔ (۲): $N=a+3a\sqrt{\frac{3}{2}}=3/598a$

از معادله‌های (۱) و (۲):

$$R\cos\theta=-5-\frac{3}{2}=-\frac{13}{2}$$

و $$R\sin\theta=2+3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad R^2=\frac{169}{4}+4+\frac{27}{4}+6\sqrt{3}=53+6\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad R=7/962$$

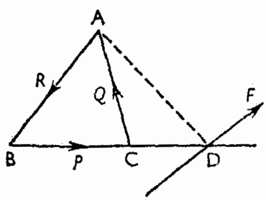
نیز $$tg\theta=-\frac{4+3\sqrt{3}}{13}=-0/7074$$

چون $\sin\theta$ مثبت و $\cos\theta$ منفی‌است، θ میان 90° و 180° قرارمی‌گیرد، ودرواقع برابراست با $180^\circ-35^\circ\,16'=144^\circ\,44'$.

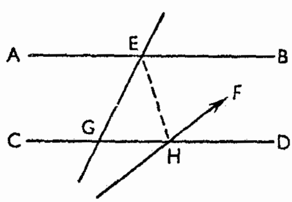
مثال ۳: نشان دهیدکه یك نیروی معین را می‌توان به‌سه مؤلفه تجزیه‌کردکه درامتداد سه‌خط معین اثرمی‌کنندکه آن خطوط با یکدیگرموازی یا متقارب نیستند.

حل : فرض می‌کنیم آن سه‌خط تشکیل یك مثلث ABC (شکل ۱۲-۴۴) می‌دهند، و فرض می‌کنیم‌که نیروی معلوم F ضلع BC را در D قطع کند.

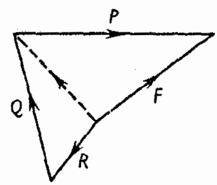
دراین‌صورت F را می‌توان به‌دومؤلفه‌به‌ترتیب درامتدادهای DA وBC تجزیه‌کرد ونیرویی راکه درامتداد DA وارد می‌شود می‌توان به‌نوبهٔ خودبه‌دو مؤلفه به‌ترتیب‌درامتدادهای AB و CA تجزیه‌کرد. تجزیه را می‌توان‌به‌طریقهٔ نموداری مطابق‌شکل ۱۲-۴۵ انجام‌داد، که درآن شکل‌خط نقطه‌چین‌به‌موازات DA است.



شکل ۱۲-۴۴



شکل ۱۲-۴۶



شکل ۱۲-۴۵

اگر دوخط AB و CD مطابق شکل ۱۲-۴۶ موازی یکدیگر باشند، و EG خط سوم باشد، به‌همان طریق می‌توان تجزیه‌کرد.

فرض می‌کنیم نیروی F خط CD را در H قطع کند.

دراین صورت F را می‌توان به‌دو مؤلفه به‌ترتیب در امتدادهای CD و HE تجزیه‌کرد.

نیرویی راکه‌درامتداد HE واردمی‌شود می‌توان به‌نوبهٔ خود به‌دومؤلفه که به‌ترتیب در امتدادهای GE و BA وارد می‌شوند تجزیه کرد.

تمرین ۷.۱۲

۱ - Ox و Oy دو محور متعامدند و P نقطه‌ای است که مختصات آن (۴, ۳) است. محل تلاقی برایند بردار OP به‌بزرگی ۷ واحد و زوجی که جهت آن خلاف‌جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌و گشتاورآن ۲۱ واحد است‌با محورهای Ox و Oyچیست؟

۲ - نیروهایی به‌بزرگیهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ واحد در یک جهت درامتداد اضلاع یك شش‌ضلعی منتظم و به‌ترتیب وارد می‌شوند و نیرویی نیز برمرکزشش‌ضلعی‌وارد می‌شود. اگرچند نیرو معادل با یک زوج باشند، گشتاور زوج وبزرگی وجهت نیرویی راکه درمرکز وارد می‌شود تعیین کنید.

۳ - نیروهایی به‌بزرگی F، $۲F$، $۳F$، $۴F$ در امتداد اضلاع BA، BC، CD، DA ازیك چهارضلعی ABCD درجهتهایی که به‌ترتیب حروف مشخص شده است وارد می‌شوند. این چهارضلعی طوری است که AB و BC دو ضلع مربع ABCE وD نقطهٔ وسط CE است. بزرگی وجهت برایند را تعیین کنید. نیز فاصلهٔ B را از نقطه‌هایی که راستای برایند، اضلاع AB و BC را قطع می‌کند تعیین کنید.

۴ - نیروهایی به‌بزرگی F، $۲F$، $۳F$، $۴F$، $۵F$، $۶F$ درامتداد اضلاع یك شش‌ضلعی منتظم وبه‌ترتیب وارد می‌شوند. نشان دهیدکه معادل با نیروی منفردی برابر$۶F$ هستندکه به‌موازات یکی از نیروهای مفروض دربالاست ونشان دهیدکه فواصل راستاهای این نیرو ونیروی برایند از مرکز شش‌ضلعی به‌نسبت ۲ و۷ است.

۵ - مجموعه‌ای از نیروها بر یك صفحه و به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $۲a$ واحد اثرمی‌کنند. گشتاورهای نیروهانسبت به‌سه رأس به‌ترتیب G_1، G_2، G_3 واحد است. بزرگی برایند را تعیین کنید.

۶ - چند نیرو بریك صفحه اثرمی‌کنند. مجموع مؤلفه‌های این نیروها در امتداد محور xها برابر X و در امتداد محور yها برابر Y است. مجموع گشتاورهای این‌نیروها نسبت به‌مبدأ مختصات برابر N است. معادلهٔ راستای برایند را تعیین کنید.

۷ - ABCD مربعی است که طول ضلع‌آن ۲ m است. P نقطهٔ وسط AD و Q نقطهٔ وسط CD است. نیروهایی به بزرگی ۱۰، ۱۰، ۳۰، ۴۰ در امتدادهای AB، CD، QB، CP ودرجهتهایی که به‌ترتیب‌حروف‌مشخص می‌شوند وارد می‌شوند. بزرگی برایند را تعیین کنید. نیز فاصله‌های A را از نقطه‌هایی‌که راستای برایند، خطوط AB و AD را قطع می‌کند تعیین کنید.

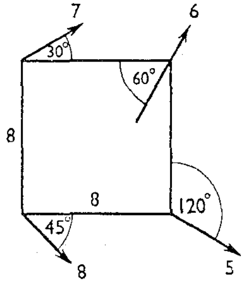
۸ - ABCDEF شش‌ضلعی منتظمی است. نیروهای ۱، ۳، ۲، ۴ نیوتون به‌ترتیب‌در

امتداد اضلاع AB، BE، ED و DA وارد می‌شوند. بزرگی برایند را تعیین کنید. AB را به‌عنوان محور xها و AE را به‌عنوان محور yها بگیرید و معادلهٔ راستای برایند را تعیین کنید. با یك پیکان، جهت برایند را نشان دهید.

۹ - مؤلفه‌های یك نیرو در صفحهٔ دو محور متعامد X و Y و به‌ترتیب در جهتهای محور xها و yهاست. راستای این نیرو از نقطه‌ای به‌مختصات (x', y') می‌گذرد. ثابت کنید که این نیرو معادل با یك نیرو و یك زوج است که مؤلفه‌های نیرو X و Y هستند و از مبدأ مختصات می‌گذرند، و گشتاور زوج برابر $x'Y - y'X$ است. نیروهای متوازی P_1، P_2، P_3، ...، در صفحهٔ این محورها به‌ترتیب بر نقاط (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، ... وارد می‌شوند. ثابت کنید که اگر $\sum P = 0$، $\sum Px = 0$، $\sum Py = 0$ باشد، جهت نیروها هرچه باشد، این نیروها در حال تعادلند.

۱۰- ABCD مستطیلی است که در آن $AB = 5\ m$، $BC = 3\ m$ است. نیروهای $2\ N$، $4\ N$، $3\ N$، $11\ N$ به‌ترتیب در امتدادهای AB، BC، DC، DA وارد می‌شوند. جهت هریك مطابق با ترتیب نوشتن حروف الفباست. اگر این مجموعه به‌یك نیرو و یك‌زوج تبدیل شود که نیرو بر نقطهٔ تلاقی AC و BD وارد شود، بزرگی وجهت این نیرو، و گشتاور وجهت زوج را تعیین کنید.

۱۱- بررئوس مربعی به‌ضلع $8\ cm$ نیروهایی مطابق شکل ۱۲-۴۷ وارد می‌شوند. با محاسبه، بزرگی وجهت برایند نیروها راکه برمرکز وارد می‌شود و زوج برایندرا حساب کنید.



شکل ۱۲-۷۴

۱۲- شش‌ضلعی منتظم مستوی OABCDE مفروض است. طول هرضلع آن $5\ cm$

است. نیروهایی به‌بزرگی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نیوتون به‌ترتیب درامتداد اضلاع OA، AB، BC، CD، DE و EO وارد می‌شوند. جهتهای نیروها مطابق‌ترتیب حروف مذکور است. نیروی برایند را که بر O وارد می‌شود و گشتاور برایند را نسبت به O تعیین کنید.

۱۳- ثابت کنید که مجموعه‌ای از نیروهای همصفحه درصورتی به‌حال تعادلند که مجموع گشتاورهای آنها نسبت به‌هریك ازسه نقطهٔ غیرواقع بریك استقامت برابرصفرباشد. زوجی باگشتاور ۱۰ Nm برمربع ABCD که طول ضلع آن ۲ m است وارد می‌شود. این زوج‌را بانیروهایی که درامتدادهای AB، BD، CA وارد می‌شوند جایگزین کنید.

۱۴- ABC مثلثی است که درآن $AB = AC = ۴$ cm، $BC = ۳$ cm است. E نقطهٔ وسط AB است، F نقطه‌ای است واقع بر BC به‌طوری که $CF = ۱$ cm. سه نیرو تعیین کنید که درامتدادهای اضلاع ABC وارد می‌شوند و روی‌هم معادلند با نیرویی برابر ۴ N که درامتداد EF وارد می‌شود. این نیروها را با مقیاس درستی برروی یك نمودار نشان دهید و در نمودار به‌ازای هرنیوتون طولی برابر ۲ cm درنظربگیرید.

۱۵- ABC تیغه‌ای است مثلثی شکل که درآن $AC = ۶$ cm، $BC = ۸$ cm و C قائمه است. نیرویی برابر ۱۰ N درامتداد AB وارد می‌شود. ثابت کنید که این نیرو می‌تواند به‌طور کامل با دو نیرو که به‌ترتیب عمود برAC و BC هستند و بر وسطهای این دو ضلع وارد می‌شوند تعادل برقرار کند. بزرگیهای این نیروها را تعیین کنید.

۱۶- مجموعه‌ای ازچند نیروکه بریك تیغهٔ صلب دریك صفحه وارد می‌شوند، یك‌بارفقط به‌یك نیروکه برنقطهٔ A از تیغه وارد می‌شود تبدیل و باردیگر به‌یك نیرو ویك زوج تبدیل می‌شود، که نیرو بر B وارد می‌شود و گشتاور زوج برابر G است. ثابت کنید که اگر مجموعه به‌یك نیرو ویك زوج تبدیل می‌شدکه نیرو برنقطهٔ وسط AB وارد می‌شد، دراین صورت گشتاور زوج برابر $\frac{۱}{۲}G$ می‌بود.

۱۷- نیروهای ۳، ۴، ۲، ۱ نیوتون به‌ترتیب درامتداد اضلاع AB، BC، CD، DA از مربع ABCD وضلع ۱ m وارد می‌شوند. مجموعهٔ این نیروها را، (الف) به‌یك نیروکه برA وارد می‌شود ویك زوج، (ب) به‌دو نیروی متوازی که از B و C می‌گذرند، تبدیل کنید.

۱۸- A و B دونقطهٔ دلخواه‌ازیك تیغه‌اند، که بر‌آن تیغه‌مجموعه‌ای از نیروهای‌همصفحه وارد می‌شوند، ووقتی که نیروها را به‌یك نیروی منفرد که بریکی از این نقاط وارد می‌شود و یك زوج تبدیل می‌کنیم، گشتاورهای زوجها به ترتیب G_a و G_b است. ثابت کنیدکه‌وقتی که مجموعهٔ نیروهارا به‌یك‌نیرو که بروسط AB واردمی‌شود و یك زوج تبدیل می‌کنیم، گشتاور زوج برابر خواهد شد با $\frac{۱}{۲}(G_a+G_b)$.

۱۹- نیروهای P، Q، P، Q به‌ترتیب درامتداد اضلاع AB، BC، CD، DA ازیك مربع وارد می‌شوند. اگراین چهارنیرو با یك نیروی پنجم R که بزرگی آن معلوم است ودرهمان صفحه واقع است برایندی داشته باشندکه ازمرکز مربع می‌گذرد، ثابت کنیدکه راستای R بردایره‌ای ثابت مماس است.

۲۰- تیغهٔ مربعی شکل یکنواخت ABCD به ضلع ۰/۶ m و جرم ۷ kg است. این تیغه می‌تواند آزادانه دریك صفحهٔ قائم حول A بچرخد. A نقطه‌ای است ثابت. این تیغه به‌کمك کشش نخی افقی که بربالاترین نقطه یعنی D وارد می‌شود واعمال یك زوج، طوری به‌حال تعادل است که AC افقی است. گشتاور زوج را هنگامی که بزرگی عکس‌العمل A برابر ۱۰۰ N است تعیین کنید.

۲۱- نیروهای P، $۴P$، $۲P$، $۶P$ در امتداد اضلاع AB، BC، CD، DA از مربع ABCD که طول ضلع آن a است وارد می‌شوند. بزرگی برایند را تعیین کنید، و ثابت کنیدکه معادلهٔ راستای آن، اگر AB و AD را به‌عنوان محورهای‌مختصات اختیارکنیم، چنین است:

$$۲x-y+۶a=۰$$

۲۲- نیروهای ۱، ۳، ۵، ۷، $۹\sqrt{۲}$ درامتداد اضلاع AB، BC، CD و DA وقطر BD از مربعی به‌ضلع a وارد می‌شوند. جهات نیروها مطابق با ترتیب حروف است. AB و AD را به‌ترتیب به‌عنوان محورهای x و y در نظر می‌گیریم. بزرگی برایند ومعادلهٔ راستای آن را تعیین کنید.

۲۳- ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است. نیروهای ۴، ۲ و ۲ واحد درامتداد اضلاع AB، AC، BC ودرجهتهایی که برحسب ترتیب حروف مشخص شده‌اند وارد می‌شوند. ثابت کنیدکه اگر E نقطهٔ تلاقی امتداد CA باخطی باشدکه از B برBC عمود می‌شود و اگر F نقطهٔ وسط AB باشد، برایند برابر است با $۲\sqrt{۷}$ واحدکه درامتداد EF وارد می‌شود.

۲۴- ABCD یك چهارضلعی است که درآن AB = BC، CD = DA است و C قائمه

است، زاویهٔ B برابر °۶۰ است، زاویهٔ D برابر °۱۲۰ است. نیروهای متساوی وبرابر $\sqrt{3}P$ در امتداد AD و DC وارد می‌شوند. نیروهای متساوی و برابر P درامتداد CB و BA وارد می‌شوند. بزرگی براینَد آنها را تعیین کنید ونقطه‌ای راکه این براینَد امتداد BD را قطع می‌کند به‌دست آورید.

۲۵- ABCD یك مربع است. چهار نیرو که بزرگیهای جبری آنها تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهند، به‌ترتیب درامتداد اضلاع مربع وارد می‌شوند. نشان دهیدکه اگر براینَد آنها از یکی از رئوس مربع بگذرد، تصاعدفوق یك تصاعد نزولی است،که درآن اگر تفاوت مشترك همهٔ نیروها برابر $۲P$ باشد، بزرگترین نیرو برابر$۵P$ یا $۳P$ است.

۲۸.۱۲. گشتاور یك نیرو نسبت به‌یك محور

تاکنون فقط با نیروهای همصفحه سروکار داشتیم، وگشتاور آنها را نسبت به‌نقطه‌ای از صفحهٔ آنها درنظرگرفتیم. اکنون فرض می‌کنیم که جسم صلبی داریم که می‌تواند آزادانه حول محور ثابتی ازجسم بچرخد.

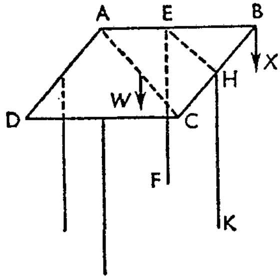
هرنیرو (که راستای آن موازی با این محور نباشد یا این محور را قطع نکند) جسم را به‌چرخش حول این محور متمایل می‌کند. این مطلب تصور گشتاور یك نیرو را نسبت به‌یك محور به‌وجود می‌آورد.

فعلاً تنها حالتهایی را درنظرمی گیریم که نیروعمود برمحور باشد. در این حالت گشتاور نیرو نسبت به‌محوربرطبق تعریف برابراست با حاصل‌ضرب نیرو وفاصلهٔ قائم‌میان نیرو ومحور. مانند قبل، گشتاور نیرو را هنگامی مثبت می گیریم که نیرو مایل باشدجسم را درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌چرخش درآورد.

می‌توان نشان دادکه اصل گشتاورها درمورد گشتاورهای نیروها نسبت به‌یك‌محور ثابت نیز صادق است.

۲۹.۱۲. مثال ۱: میزمربع‌شکلی دارای چهارپایه است که هرپایه بروسط یکی از اضلاع مربع نصب شده است. بیشترین وزنی راکه می‌توان دریکی از رئوس میز قرار داد بدون‌آنکه میزحرکتی به‌طرف بالا نشان دهد چقدر است؟ وزن میز و پایه‌ها روی هم W است.

حل : فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۲-۴۸) میزرا نشان بدهد و فرض می‌کنیم که وزن X در B گذاشته شده است.



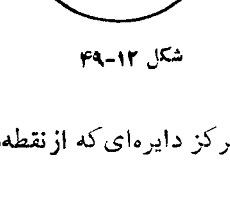
شکل ۱۲-۴۸

این وزنه مایل است که میزرا حول خط FK منحرف کند. خـط FK خط واصل میان نقطه‌های تماس پایه‌های EF و HK با زمین است. وزن W بر نقطهٔ وسط AC وارد می‌شود و بنابراین از FK ووزن X به‌یك فاصله است.

بنابراین بزرگترین مقدار X برابر W است.

مثال ۲: صفحهٔ مدور یکنواختی برروی سه‌نقطه ازمحیط خـود تکیه دارد و به‌طور افقی است. فاصلهٔ ایـن سه‌نقطه از یکدیگر به‌ترتیب l، m، n است. معلوم کنیدکـه هرپایه چه‌نسبتی از وزن را تحمل می کند.

حل : فـرض می کنیم A، B، C (شکل ۱۲-۴۹) نقـاط تکیه‌گـاه باشند، $BC = l$، $CA = m$، $AB = n$.



شکل ۱۲-۴۹

وزن صفحه برO مرکز دایره‌ای که ازنقطه‌های A و B و C می‌گذرد وارد می‌شود.

فاصلهٔ O از BC برابر است با $R\cos A$، که درآن R شعاع دایره است و فاصلهٔ A از BC برابر است بـا $m\sin C$. پس اگـرعکس‌العمل در A برابر P_A باشد و نسبت به BC گشتاور بگیریم، خواهیم داشت:

$$P_A \times m\sin C = W \times R\cos A$$

نیز

$$R = \frac{l}{۲\sin A}$$

$$\therefore \quad P_A = W \cdot \frac{l}{۲} \cdot \frac{\cos A}{m\sin C \sin A}$$

$$= \frac{Wl^{۲}}{۲\,mn} \cdot \frac{\cos A}{\sin^{۲} A}$$

چون $\sin C = \frac{n}{l}\sin A$

این نتیجه را می‌بایستی برحسب l، m، n بیان کرد.

با استفادهٔ از فرمول

$$\sin A = \frac{۲}{bc}\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$$

و با توجه به‌اینکه $a=l$، $b=m$، $c=n$ است، خواهیم داشت،

$$\sin^{۲} A = \frac{۴}{m^{۲}n^{۲}} \cdot \frac{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)}{۱۶}$$

نیز

$$\cos A = \frac{m^{۲}+n^{۲}-l^{۲}}{۲\,mn}$$

$$\therefore \quad P_A = \frac{Wl^{۲}}{۲mn} \times \frac{(m^{۲}+n^{۲}-l^{۲})}{۲\,mn}$$

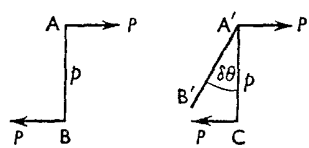
$$\times \frac{۴\,m^{۲}n^{۲}}{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)}$$

$$= W\,\frac{l^{۲}(m^{۲}+n^{۲}-l^{۲})}{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)}$$

وعبارتهایی‌مشابه با عبارت فوق نیز برای عکس‌العملهای در B و C به‌دست‌می‌آید.

۳۰.۱۲. کاری که به‌کمك زوج نیرو انجام می‌گیرد

فرض‌می‌کنیم‌هریك ازنیروهای‌زوج‌برابر P وطول‌بازوی AB (شکل ۱۲-۵۰) برابر p باشد.



شکل ۱۲-۵۰

فرض می‌کنیم جسم صلبی‌که زوج برآن وارد می‌شود طوری تغییرمکان بدهدکه AB به‌وضع A′B′ درآید، به‌طوری‌که زاویهٔ میان AB و A′B′ زاویهٔ‌کوچك $\delta\theta$ باشد. ممکن است تصورکنیم‌که حرکت در دومرحله صورت‌گرفته است.

نخست، فرض می‌کنیم نیروها به‌موازات خود حرکت کرده‌اند، به‌طوری‌که AB به‌وضع جدید A′C درآید. کاری‌که دراین تغییرمکان به‌وسیلهٔ نیروهای برابر و مختلف‌الجهت انجام می‌گیرد، P، برابرصفراست.

دوم، فرض می‌کنیم جسم به‌اندازهٔ زاویهٔ $\delta\theta$ حول A′ بچرخد، به‌طوری‌که اکنون A′C بر A′B′ منطبق‌شود. برای‌آنکه‌گشتاور زوج ثابت بماند، فرض می‌کنیم‌که نیروها به‌اندازهٔ زاویهٔ $\delta\theta$ حول A′ می‌چرخند.

نیروی P که در A′ وارد می‌شودکاری انجام نمی‌دهد، زیرا نقطهٔ اثر آن حرکت نمی‌کند. تغییرمکان نقطهٔ اثرنیروی دیگر P که در C وارد می‌شود $p\delta\theta$ است، زیرا $\delta\theta$ را بینهایت‌کوچك فرض‌کرده‌ایم وبنابراین کارکل انجام شده برابر $Pp\delta\theta$ است، یعنی برابر است باگشتاور زوج ضرب در زاویهٔ اولیه‌ای که حول آن چرخیده است.

اگرگشتاور زوج، M، ثابت بماند، کاری‌کـه ضمن چرخاندن جسم به‌اندازهٔ زاویهٔ θ انجام‌می‌گیرد برابراست با $M\theta$، یعنی‌گشتاورزوج ضرب در زاویه‌ای‌که جسم‌به‌اندازهٔ آن می‌چرخد. اگرگشتاور زوج‌برحسب θ تغییرکند، کارانجام یافته با عبارت $\int_{0}^{\theta} M d\theta$ به‌دست می‌آید.

تمرین ۸۰۱۲

۱ ـ میز مدور یکنواختی برروی چهارپایهٔ متساوی‌که به‌طور متقارن دراطراف لبهٔ‌میز نصب شده‌اند قراردارد. جرم میز ۵۰ kg است. حداقل وزنی را تعیین‌کنیدکه‌اگر ازلبهٔ میزآویزان شود، میز را ازجای خود تکان می‌دهد.

۲ ـ میز مدوری است‌که به‌طورمتقارن برروی سه‌پایهٔ قائم‌قراردارد‌که هرپایه به‌فاصلهٔ ۱ متر از دیگری به‌میز متصل شده است و نقاط اتصال پایه‌ها به‌میز تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC راداده است. جرم‌صفحهٔ رویی میز ۴۰ kg است.وزنه‌ای به‌جرم ۶۰ kg درL (درداخل مثلث ABC) بـه‌فاصلهٔ ۱۵ C از BC و۲۵ cm از CA قرارمی‌دهیم. برهرپایه چه‌نیروهایی ازطرف صفحهٔ رویی میزواردمی‌شود؟

۳ ـ نشان دهیدکه چگـونه می‌توان برایند سه نیروی متوازی را کـه همصفحه نیستند تعیین‌کرد. میزسبکی برروی سه‌پایهٔ قائم متساوی قراردارد. درمرکز دایره‌ای که‌از نقاط اتصال پایه‌ها با میزمی‌گذرد، وزنه‌ای قرار می‌دهیم. نشان دهیدکه نیروهایی

که برمیز فشار می‌آورند متناسب با اضلاع مقابل مثلث هستند.

۴ ـ قطرمیزمدوری که جرم آن 20 kg است برابراست با 1/2 m. این میزبرروی سه پایه قراردارد که به‌فاصله‌های مساوی از یکدیگر به‌لبه‌های میز متصل شده‌اند. اگر از محل تلاقی یکی از پایه‌ها با میز، قطر میز را رسم کنیم، در انتهای دیگر قطرچه وزنه‌ای می‌توان قرارداد به‌طوری که تمام وزن میز و وزنه به‌وسیلهٔ دو پایهٔ دیگر تحمل شود.

۵ ـ میزگردی است به‌قطر 1/5 m و دارای سه پایه است که هریك به‌فاصلهٔ 0/6 m از مرکز میز نصب شده است. اگر جرم میز 25 kg باشد، حداقل وزنی را تعیین کنیدکه می‌توان برلبهٔ میزقرارداد به‌طوری که تعادل میز به‌هم بخورد. حداکثر وزنی را تعیین کنیدکه می‌توان برلبهٔ میزقرارداد بدون‌آنکه تعادل میزبه‌هم‌بخورد.

۶ ـ قطرصفحهٔ رویی یك میزعسلی 0/6 m وجرم آن 4 kg است. این صفحه‌به‌وسیلهٔ سه پایه‌که طول هریك 0/6 m است وهریك با زمین زاویهٔ °60 می‌سازد، به‌طور افقی قراردارد. محل تلاقی پایه‌ها با صفحهٔ رویی میز مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌سازدکه طول هرضلع آن 0/3 m است. حداقل وزنی را تعیین کنیدکه اگربرلبهٔ میزعسلی قراردهیم، سبب انحراف میزخواهد شد.

۷ ـ قرقره‌ای به‌شعاع 0/6 m طوری قراردارد که محورش افقی است وبه‌وسیلهٔ نیروی 49 N که مماس برکنارهٔ قرقره است می‌چرخد. کاری را که در یك دوران انجام می‌شود تعیین کنید. اگریك زوج اصطکاکی باگشتاور 12 N m برمحور قرقره اثر کند، قرقره پس ازیك دور دوران چه مقدار انرژی جنبشی به‌دست خواهدآورد؟

۸ ـ زوجی باگشتاور M نیوتون متر برجسم صلبی که می‌تواند حول محوری ثابت بچرخد وارد می‌شود. کاری راکه دریك دورکامل جسم انجام می‌شود درحالتهای زیر تعیین کنید: (الف) M برابر ۱۰ است، (ب) M برابر $10-\frac{1}{2}\theta$ است، که θ زاویه‌ای است که جسم دریك لحظهٔ معین تاآن اندازه چرخیده است.

۹ ـ چرخ طیارصلبی به‌شعاع r وجرم M با سرعت n دور در ثانیه می‌چرخد. این‌چرخ را به‌کمك زوجی اصطکاکی که گشتاورآن N نیوتون‌متر است ساکن می‌کنند. نشان دهیدکه پیش ازآنکه متوقف شود $\frac{\pi M r^2 n^2}{2N}$ دور می‌زند.

۱۰ ـ یك انتهای فنری مارپیچ ثابت است وبه‌کمك زوجی پیچشی که گشتاورآن $k\theta$ است پیچانده می‌شود. θ زاویهٔ پیچش است. نشان دهیدکه برای‌آنکه فنر به‌اندازهٔ φ بپیچد کاری معادل $\frac{1}{2}k\varphi^2$ باید انجام بگیرد.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱ - (الف) ثابت کنید که برایند دو نیروی P و Q که با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند برابر است با

$$\sqrt{P^{2}+2PQ\cos\alpha+Q^{2}}$$

(ب) ABCDEF شش‌ضلعی منتظمی است که مرکزآن O است. نیروهای ۲، ۴، P، Q از O به‌ترتیب درامتدادهای OA، OC، OE وOG وارد می‌شوند ودر حال تعادلند. G وسط AB است. مقادیر P و Q را تعیین کنید.

۲ - نقاطی مادی به‌اوزان w_1 و w_2 به‌ترتیب درنقاط A و B ازنیمهٔ بالایی سیم‌صیقلی مدوری قراردارند. به‌کمك نخ سبك ومحکمی که این نقاط مادی را به‌هم وصل کرده است ودرامتداد قوس کوتاه $\widehat{AB}$ قرار دارد، این نقاط مادی بر روی سیم به‌حال تعادل قرار می‌گیرند. زاویهٔ مرکزی این قوس برابر α است. ثابت کنیدکه تانژانت زاویهٔ حاده‌ای‌که OA (O مرکز دایرهٔ سیم) با قائم می‌سازد برابراست با

$$\frac{w_2 \sin\alpha}{w_1+w_2\cos\alpha}$$

نشان دهیدکه وزنهٔ سنگینتر به‌بالاترین نقطهٔ دایره نزدیکتر است تا وزنهٔ سبکتر.

۳ - ثابت کنیدکه اگر سه‌نیروی متقارب با یکدیگر درحال تعادل باشند، هریك‌ازنیروها متناسب با سینوس زاویهٔ میان دونیروی دیگراست. نیروهای P، Q و R درحال تعادلند. بزرگی و جهت P معلوم است. بزرگی Q معلوم نیست، اما جهت آن با جهت P زاویه‌ای‌برابر θ می‌سازد. جهت R را هنگامی‌که بزرگی آن حداقل‌است تعیین کنید، ودراین حالت بزرگیهای Q و R را به‌دست آورید.

۴ - دو وزنه به‌وزنهای $2W$ و $3W$ به‌دو انتهای نخ انعطاف‌ناپذیر سبکی‌که از روی دومیخ صیقلی همترازعبورمی‌کند بسته شده‌اند. فاصلهٔ میخها برابر a است.وزنه‌ها به‌کمك وزنهٔ دیگر W'، که به‌قسمتی ازنخ‌که میان دومیخ است متصل شده‌است، به‌حال تعادلند. اگرزاویهٔ میان قسمتهای مایل نخ برابر $120°$ باشد، ثابت‌کنیدکه $W'=\sqrt{7}W$ ونیز فاصلهٔ W' ازافق میخها برابر $\frac{2a}{7\sqrt{3}}$ است.

۵ - دوحلقه باوزنهای متساوی به‌کمك نخی به‌یکدیگرمتصل شده‌اند. حلقه‌هامی‌توانند برروی دومیلهٔ ناصاف ثابت‌که دریك صفحهٔ قائم قراردارند بلغزند. هریك ازمیله‌ها

با امتداد قائمی که به‌طرف پایین است زاویه‌ای برابر ۴۵° می‌سازند ودرطرفین آن خط قائم قراردارند. اگرضریب اصطکاك برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، ثابت کنید که حداکثر زاویه‌ای که نخ می‌تواند باافق بسازد تاحلقه‌ها ساکن بمانند، برابر θ است‌به‌طوری که $tg\theta = \frac{۳}{۴}$.

۶ ـ ثابت کنیدکه‌مجموع جبری گشتاورهای‌چند نیروی متقارب‌همصفحه نسبت‌به‌نقطه‌ای که درصفحهٔ آنهاست، برابراست با گشتاور برایند آنها نسبت به‌این نقطه.

(الف) اگر سه‌نیروی X، Y، Z که درامتداد نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث ABC وارد می‌شوند، درحال تعادل باشند، ثابت کنیدکه

$$X : Y : Z = cos\frac{۱}{۲}A : cos\frac{۱}{۲}B : cos\frac{۱}{۲}C$$

(ب) نیروهای P، Q، R به‌ترتیب درامتداد اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC وارد می‌شوند و برایند آنها در امتداد خطی است که مرکز دایرهٔ محیطی را به‌مرکز دایرهٔ محاطی مثلث وصل می‌کند. ثابت کنیدکه

$$P : Q : R = \frac{۱}{cosB} - \frac{۱}{cosC} : \frac{۱}{cosC} - \frac{۱}{cosA} : \frac{۱}{cosA} - \frac{۱}{cosB}$$

۷ ـ شرایط تعادل یك مجموعه ازنیروهای همصفحه رابه‌دست آورید. تیغهٔ مربعی‌شکل یکنواخت ABCD به‌کمك دونخ که به‌نقطه‌های A و B متصل شده‌اند آویزان است. این دونخ به‌ترتیب با امتداد قائم زوایای ۳۰° و ۴۵° می‌سازند. انحراف AB را نسبت به‌افق تعیین کنید.

۸ ـ تیغهٔ یکنواخت مربع‌شکل ABCD به‌وزن W آزادانه از A آویزان است. وزنهٔ w در نقطهٔ B به‌تیغه متصل شده است، ومجموعه طوری درحال تعادل است که AB با امتداد قائم‌زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. نسبت w به W را تعیین کنید. اگراکنون وزنهٔ اضافی $۲w$ در D به‌تیغه بیفزاییم، معادله‌ای تعیین کنیدکه انحراف AD را نسبت به‌قائم دروضع جدید تعادل به‌دست بدهد. ثابت کنیدکه این انحراف بزرگتر از ۳۰° است.

۹ ـ به‌انتهای B از میلهٔ یکنواخت AB به‌وزن W، نقطه‌ای مادی به‌وزن w متصل شده است. میله ونقطهٔ مادی ازنقطهٔ ثابت O به‌وسیلهٔ دونخ سبك OA و OB که همطول با میله‌اندآویزان‌شده‌اند. ثابت کنیدکه دروضع تعادل، اگر T و T' کششهای OA و OB باشند،

$$\frac{T}{W}=\frac{T'}{W+۲w}$$

نیز ثابت کنید که اگر OA با قائم زاویه‌ای برابر α بسازد،

$$tg\alpha=\frac{(W+۲w)\sqrt{۳}}{۳W+۲w}$$

۱۰ـ میلهٔ یکنواخت AB به‌طول $۲a$ و وزن W در امتداد خط بزرگترین شیب سطح شیبداری که با افق زاویهٔ θ می‌سازد، طوری قراردارد که B بالای A است. ضریب اصطکاک میان میله و سطح شیبدار برابر است با $tg\lambda$ که λ بزرگتر از θ است. نخی که به A متصل است از روی قرقرهٔ کوچکی که به‌ارتفاع a بالای نقطهٔ وسط میله است عبور کرده‌است و انتهای دیگر آن به کفه‌ای متصل است. در کفه به‌تدریج وزنه قرار می‌دهند. ثابت کنید اگر λ بزرگتر از $\frac{۱}{۲}\theta-°۴۵$ باشد، میله پیش از آنکه بلغزد منحرف می‌شود.

۱۱ـ میلهٔ نازکی به‌طول a درداخل حلقهٔ مدور صیقلی‌ای به‌شعاع a قراردارد. صفحهٔ میله به‌طور قائم است. اگر مرکزثقل میله، طول میله را به‌نسبت ۳ به ۴ تقسیم کند، ثابت کنید که انحراف میله نسبت به‌خط قائم برابراست با $Arc\ tg۷\sqrt{۳}$.
نسبت عکس‌العملی را که برانتهای پایینی میله وارد می‌شود به‌عکس‌العملی که برانتهای بالایی میله وارد می‌شود تعیین کنید.

۱۲ـ دواستوانهٔ صیقلی متساوی به‌شعاع a و وزن W، که درامتداد مولدهایشان برمیزی افقی تکیه دارند با یکدیگر در تماسند. استوانه‌ای متساوی با آنها به‌طور متقارن برروی دواستوانه قرار می‌گیرد و دستگاه به‌کمك نواری که از دور استوانه‌ها در صفحه‌ای عمود برمولدها می‌گذرد، به‌حال تعادل نگاه داشته شده است. اگر استوانه‌های پایینی درست درحال شروع به‌جدا شدن باشند، کشش نوار را تعیین کنید. اگر نوار، کشسان وطول طبیعی آن $۱۲a$ باشد، ثابت کنید که کشش نوار براثر افزایش طولی برابر x مساوی خواهد بود با

$$\frac{Wx}{۴\sqrt{۳}(\pi-۳)a}$$

۱۳ـ دو نردبان یکنواخت، هریك به‌وزن W وطول $۲b$، درانتهاهای بالایی به‌یکدیگر لولا شده‌اند. ودرصفحهٔ افقی صیقلی قراردارند. از پلهٔ یکی از نردبانها که به‌فاصلهٔ d ازقسمت پایین‌نردبان است، وزنه‌ای به‌وزن w آویزان می‌کنیم. برای جلوگیری از لغزش نردبانها، نخی به طول $۲a$ به‌دو انتهای پایینی نردبانها متصل می‌کنیم.

نیرویی که هرنردبان برزمین وارد می‌کند چقدر است؟ ثابت کنید که کشش نخ برابر است با

$$\frac{a(۲Wb+wd)}{۴b(۴b^{۲}-a^{۲})^{۱/۲}}$$

۱۴- سه میلهٔ یکنواخت متساوی AB، BC، و CD، هریك به‌طول $۲a$ و وزن W، به‌طور صیقلی در B و C به یکدیگر لولا شده‌اند AB و CD بر دو میخ همتراز تماس دارند. دروضع تعادل AB و CD با قائم زاویه‌ای برابر α می‌سازند و BC افقی است. ثابت کنیدکه فاصلهٔ میان میخها برابر است با $۲a(۱+\frac{۲}{۳}sin^{۳}\alpha)$. اگر β زاویه‌ای باشدکه عکس‌العمل وارد در B با قائم می‌سازد، ثابت کنیدکه $tg\,\alpha\, tg\beta=۳$ است.

۱۵- پنج‌ضلعی ABCDE، که با میله‌های همطول یکنواختی ساخته شده است که به‌طور صیقلی به‌یکدیگرلولا شده‌اند، درصفحه‌ای قائم به‌طورمتقارن نگاهداری شده‌است، به‌طوری که CD افقی است و AB و AE با میخهای صیقلی درتماس است. وزن هرمیله W است. میخها همترازند و در چنان فاصله‌ای از یکدیگر قراردارندکه پنج‌ضلعی به‌طور منتظم باشد. از تعادل پنج‌ضلعی، عکس‌العملهایی راکه برمیخها وارد می‌شود پیداکنید، وبا توجه به‌تعادل میله‌های BC، CD، DE، نشان‌دهید که مؤلفه‌های افقی عکس‌العملها در B، C، D، E متساویند و به بزرگی $W cotg\frac{۲\pi}{۵}$ هستند. ازاین گذشته نشان‌دهیدکه عکس‌العمل‌در A نیرویی‌است افقی‌برابر

$$\left(\frac{۵}{۲}tg\frac{\pi}{۵}-cotg\frac{۲\pi}{۵}\right)W$$

۱۶- مربع ABCD ازچهار میلهٔ یکنواخت تشکیل شده است که وزن هریك برابر W است و آزادانه درانتهاهای خود به‌یکدیگرلولا شده‌اند. مربع را آزادانه از A آویزان می‌کنند و از پایینترین نقطهٔ آن یعنی C وزنه‌ای به‌وزن $۳W$ آویزان می‌کنند وبرای‌آنکه شکل مربع به‌هم نخورد میان نقاط وسط AB و AD نرده‌ای افقی قرار می‌دهند. ثابت کنیدکه فشاری که براین نرده وارد می‌شود برابر $۱۰W$ است.

۱۷- دوتیریکنواخت AB و BC هریك به‌طول $۲a$ ووزن W آزادانه در B به‌یکدیگر لولا شده‌اند. حلقه‌ای سبك به C متصل شده است و از درون این حلقه میله‌ای افقی وثابت گذرانده شده است. انتهای A را آزادانه به‌نقطه‌ای، که به‌فاصلهٔ $۳a$ درزیرمیلهٔ ثابت است، لولا می‌کنیم. ثابت کنیدکه تعادل فقط هنگامی ممکن است

برقرار شود که یکی از میله‌ها قائم باشد. عکس‌العمل در C را هنگامی که دستگاه به‌حال تعادل است، (الف) وقتی که AB قائم است، (ب) وقتی‌که BC قائم است، تعیین کنید.

۱۸- هریك از دوقسمت یك نردبان به‌طول ۲ m وبه‌جرم ۹ kg است. نیروی وزن برنقطهٔ وسط هریك ازقسمتها وارد می‌شود. این دوقسمت ازیك انتها به‌طورصیقلی به‌یکدیگر لولا شده‌اند. به‌کمك طناب‌کشسانی که طول طبیعی آن ۱ m و ضریب کشسانی آن λ است، نقاط وسط این دو قسمت را به‌هم بسته‌اند. نردبان برروی زمین افقی صیقلی قراردارد. پاهای نردبان ازیکدیگر فاصله دارند ووزنه‌ای‌به‌جرم ۷۵ kg از لولاآویزان شده است. اگر دستگاه به‌حال تعادل باشد، افزایش طول نخ ۱۰ cm است. λ را حساب‌کنید.

۱۹- ABCD یك چهار ضلعی است که در آن $AB = ۰/۹$ m، $BC = ۱/۲$ m، $CD = ۳/۶$ m، $DA = ۳/۹$ m و $AC = ۱/۵$ m است. B و D در دوطرف AC هستند. AB قائم است و B در زیر A واقع است. CD، DA، AC و CB چهارمیلهٔ سبك هستندکه به‌یکدیگرلولاشده‌اند ویك داربست تشکیل داده‌اند. A و B نقطه‌های ثابتی از یك دیوار قائم هستند. وزنه‌ای به‌جرم ۷۵ kg از D آویزان است. نیرویی راکه برهرچهارمیله وارد می‌شود تعیین کنید.

۲۰- دومیلهٔ یکنواخت AB و BC هریك به‌وزن W آزادانه در B به‌یکدیگر لولا شده‌اند. این دومیله با استوانه‌ای صلب وصیقلی تماس دارند. این استوانه‌طوری ثابت است که محورآن افقی است. صفحهٔ میله‌ها براین محور عمود است. دروضع تعادل، میله‌ها بریکدیگرعمودند. نشان دهیدکه طول هریك ازدومیله دوبرابر قطر استوانه است.

۲۱- دومیلهٔ یکنواخت AC و BC که وزن آنها متناسب با طول آنهاست آزادانه در C به‌یکدیگر لولا شده‌اند وانتهاهای A و B آزادانه در دونقطه از یك خط‌قائم لولا شده‌اند. نشان دهیدکه عکس‌العمل میان میله‌ها در C درامتداد نیمساز زاویهٔ ACB وارد می‌شود.

۲۲- ABCD مستطیلی است که درآن $AB = a$، $BC = b$ است. M نقطهٔ وسط BC است. سه‌نیرو به‌طورکامل با $k\overrightarrow{AM}$، $k\overrightarrow{MC}$، $k\overrightarrow{CD}$ مشخص می‌شوندکه درآن k عددی مثبت است. بزرگی و جهت برایند آنها وفاصلهٔ A را از راستای برایند تعیین کنید.

بزرگی زوجی را تعیین کنیدکه باید با این سه‌نیرو ترکیب شود تا برایند مجموعه ازنقطهٔ وسط AB بگذرد. جهت این زوج‌را برروی یك نمودارنشان‌دهید.

۲۳ـ نیروهای P، Q درامتداد خطوط BA و CA ودر جهتهایی‌که با ترتیب نوشتن حروف مشخص می‌شود وارد می‌شوند. یك جفت نیروهای معادل با این دونیرو راکه درجهتهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A وارد می‌شوند تعیین کنید. فرض کنیدکه $\angle BAC = ۲\alpha$ است.

مثلث ABC متساوی‌الساقین وقائم‌الزاویه است. A زاویهٔ قائمه است. BCD مثلث متساوی‌الاضلاعی است که درطرف دیگر BC است. نیروهای ۳، ۲، ۳، ۱۰ و۱۴ نیوتون در امتدادهای AB، BC، CA، BD وCD درجهتهایی که با ترتیب نوشتن حروف مشخص شده است وارد می‌شوند. ثابت کنیدکه‌راستای نیروی برایند درفاصلهٔ $\frac{\sqrt{۳}}{۱۵}$AB از A است.

۲۴ـ ثابت کنیدکه مجموعه‌ای از نیروهای همصفحه که درحال تعادل نیستند، ممکن‌است به‌یك نیروی منفرد یا یك زوج تبدیل شوند.

ABCD یك‌مربع‌است. نیروهایی‌به‌بزرگی ۳، ۲، ۴، ۳، P واحدبه‌ترتیب درامتدادهای AB، CB، CD، AD، DB ودرجهتهایی که باترتیب نوشتن‌حروف مشخص می‌شوند وارد می گردند. اگر مجموعه معادل با یك زوج باشد، مقدار P را تعیین کنید.

۲۵ـ مجموعه‌ای ازنیروهای همصفحه نسبت به‌نقاط $(۰, ۰)$، $(a, ۰)$، $(۰, ۲a)$دارای گشتاورهایی به‌ترتیب برابرM، $\frac{۲M}{۳}$، $\frac{۳M}{۲}$ ودرجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت هستند. بزرگی برایند نیروها را تعیین کنید وثابت کنیدکه معادلهٔ راستای برایند چنین است:

$$۳y - ۴x + ۱۲a = ۰$$

۲۶ـ نشان دهیدکه مجموعه‌ای از نیروهای همصفحه که درحال تعادل نیستند، ممکن است به‌یك نیروی منفرد یا یك زوج تبدیل شود.

نیروهای ۴، ۳، ۳ نیوتون به‌ترتیب درامتداد اضلاع AB، BC، CAاز یك مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که طول ضلع‌آن ۰/۶ m است وارد می‌شوند. بزرگی وجهت برایند آنها را تعیین‌کنید و فاصلهٔ قائم راستای آن را از C به‌دست آورید.

درصفحهٔ ABC در C نیرویی اضافی تولید می‌کنیم. اگر اکنون مجموعه معادل با یك زوج باشد، گشتاور و بزرگی وجهت این نیروی اضافی را تعیین کنید.

۲۷- نشان دهید که گشتاور یك زوج نسبت به‌همهٔ نقاط صفحه‌اش یکسان است. ثابت کنیدکه یك نیروی F ویك زوج M که دریك صفحه وارد می‌شوند معادل بایك نیروی منفرد هستند.

نیروهایی به‌بزرگی ۳، ۴، ۶، ۷ واحد در امتداد اضلاع AB، BC، CD، DA از مربع ABCD به‌ضلع a وارد می‌شوند. جهتهای نیروها با ترتیب نوشتن حروف مشخص شده است. زوجی اضافی بر صفحهٔ مربع وارد می‌شود. اگر تمام مجموعه معادل با نیرویی باشدکه ازمرکز مربع می‌گذرد، بزرگی وجهت این‌زوج را تعیین کنید. نیزبزرگی وراستای این نیرو را تعیین کنید.

۲۸- ABCD مربعی است که‌تحت تأثیر نیروهای‌زیراست که درصفحهٔ آن وارد می‌شوند: $5\sqrt{2}$ N در C درامتداد AC، $15\sqrt{2}$ N در B درامتداد DB، ۱۰ N در D و در امتداد خطی که با امتداد AD، در طرفی که دور از BC است، زاویهٔ 30° می‌سازد. نیروی P را در A قرار می‌دهند به‌طوری‌که مجموعه به‌یك زوج تبدیل شود. بزرگی و جهت P و گشتاور زوج را، اگرضلع مربع برابر ۱ m باشد، تعیین کنید.

۲۹- ثابت کنیدکه دو زوج همصفحه باگشتاورهای متساوی وناهمسو درحال تعادلند. نشان دهیدکه برایند چند زوج همصفحه، زوجی است که‌گشتاور آن مجموع جبری گشتاورهاست. ABCDE یك پنج‌ضلعی منتظم است. پنج نیرو هریك مساوی با P درامتداد AE، ED، DC، CB، BA وارد می‌شوند. پنج نیروهریك‌مساوی با Q درامتدادهای AC، CE، EB، BD، DA وارد می‌شوند. ثابت کنیدکه اگر P و Q با یکدیگر نسبت معینی داشته باشند، این ده نیرو درحال تعادل خواهند بود. آن نسبت معین را تعیین کنید.

۳۰- نیرویی که برنقطهٔ (x, y) وارد می‌شود به‌موازات محورهای مختصات دارای مؤلفه‌هایی برابر (X, Y) است. ثابت کنیدکه این نیرو را می‌توان با نیروی X که درامتداد محور xها وارد می‌شود، نیروی Y که درامتداد محور yها وارد می‌شود و زوج $xY - yX$ جانشین کرد. نیروهایی به بزرگی ۱، ۵، ۹، ۱۱، ۷، ۳ در امتداد اضلاع AB، BC، CD، DE، EF، FA از شش‌ضلعی منتظمی که‌طول ضلع‌آن a است وارد می‌شوند. جهتهای نیروها با ترتیب نوشتن حروف‌مشخص می‌شود. OA و OH را به‌عنوان محورهای مختصات بگیرید. O مرکز شش-

ضلعی است و H نقطهٔ وسط BC است. نیروهایی راکه در امتداد محـورها وارد می‌شوند وزوجی راکه‌دستگاه به‌آنها تبدیل می‌شود تعیین‌کنید. ثابت‌کنیدکه‌دستگاه معادل با نیروی منفردی است‌که محورهای مختصات را درنقاط $\left(\frac{-۹a}{۴}, ۰\right)$ و $\left(۰, -\frac{۹\sqrt{۳}a}{۲}\right)$ قطع می‌کند.

۱۳

ترسیمات نموداری

۱.۱۳ بزرگی وجهت‌چند نیروی همصفحه را می‌توان به‌روش چندضلعی نیروها ازطریق نموداری تعیین کرد. وقتی‌که نیروها بریك نقطه وارد می‌شوند، برایندآنها نیز ازآن‌نقطه می‌گذرد، بنابراین راستای آن معلوم می‌شود. وقتی‌که نیروها بریك جسم صلب وارد می‌شوند، بازهم می‌توانیم بزرگی و جهت برایند را با ترسیم چندضلعی نیروها به‌دست آوریم، اما برای تعیین راستای برایند به‌ترسیم بیشتری نیازمندیم.

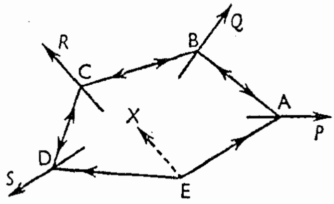
اکنون نشان خواهیم دادکه چگونه این‌کار انجام می‌گیرد، ونیز نشان می‌دهیم که چگونه بااستفاده ازروش نموداری‌فشاری‌را تعیین می‌کنیم که به‌وسیلهٔ یك‌نیرو بر داربستی که از میله‌های سبك ساخته شده است وارد می‌شود.

۲.۱۳. تعیین برایند چند نیروی همصفحه به‌طریقهٔ نموداری

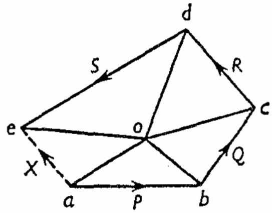
فرض می‌کنیم راستای نیروهای P، Q، R، S مطابق شکل ۱.۱۳ الف باشد.

شکل $abcde$ (شکل ۱.۱۳ ب) را که درآن اضلاع ab، bc، cd، de به‌ترتیب موازی ومتناسب با P، Q، R، S است رسم می‌کنیم. ae را نیز رسم می‌کنیم.

ae درچندضلعی نیروها ازنظربزرگی وجهت معرف برایند نیروهای P، Q، R وS است. ما این برایند را به X نمایش می‌دهیم.



شکل ۱۳-۱ الف



شکل ۱۳-۱ ب

برای‌آنکه راستای برایند را تعیین کنیم، نقطه‌ای مانند o اختیار می‌کنیم **وآن را** به a، b، c، d و e وصل می‌کنیم.

برراستای P نقطه‌ای مانند A اختیار می‌کنیم (شکل ۱۳-۱ الف) و AE و AB را به‌موازات oa و ob رسم می‌کنیم وفرض‌می‌کنیم AB راستای Q را در B قطع‌کند. P معادل است با نیروهایی که‌به‌وسیلهٔ aoوob نمایش داده می‌شوند وبه‌ترتیب درامتدادهای EA و BA وارد می‌شوند.

از B خط BC را به‌موازات oc رسم می‌کنیم تا R را در C قطع‌کند.

Q معادل است با نیروهایی‌که به‌وسیلهٔ bo و oc نمایش داده می‌شوند و به‌ترتیب درامتدادهای AB و CB وارد می‌شوند. نیروی bo که در امتداد AB وارد می‌شود با نیروی ob که درامتداد BA وارد می‌شود تعادل دارد.

از C خط CD را به‌موازات od رسم می‌کنیم تا S را در D قطع‌کند.

R معادل است با نیروهایی‌که به‌وسیلهٔ co و od نمایش داده می‌شوند وبه‌ترتیب درامتدادهای BC و DC وارد می‌شوند. نیروی co که درامتداد BC وارد می‌شود با نیروی oc که درامتداد CB وارد می‌شود تعادل دارد.

از D خط DE را به‌موازات oe رسم می‌کنیم تا AE را در E قطع‌کند.

S معادل است با نیروهای do و oe که به‌ترتیب در امتدادهای CD و ED وارد می‌شوند. نیروی do که درامتداد CD وارد می‌شود با نیروی od که درامتداد DC وارد می‌شود تعادل دارد.

پس‌نیروهای P، Q، R وS معادلند با نیروهای ao وoe که به‌ترتیب‌درامتدادهای EA و ED وارد می‌شوند وچون این دوخط درE متلاقی هستند، برایند نیروهامی‌بایستی از E بگذرد.

بنابراین برایند نیروها نیرویی است مانند X که از E می‌گذرد وبه‌موازات ae است و از نظربزرگی وجهت با ae مشخص می‌شود.

بنابراین همان‌طورکه بزرگی وجهت برایند را به‌دست آوردیم راستای آن راتعیین

کردیم.

شکل $abcde$ را چندضلعی نیرو و شکل ABCDE را چندضلعی رابط می‌نامند.

اگر چندضلعی رابط از نخ ساخته شود، درصورتی که نیروهای P، Q، R، S بر A، B، C، D وارد شوند و نیرویی مساوی و درجهت مخالف براینده این نیروها بر E وارد شود، نخ به‌حال تعادل و به‌شکل ABCDE باقی خواهد ماند.

بدیهی است که اگر اوضاع مختلف برای A و o درنظر بگیریم، شکل چندضلعی رابط تغییرمی‌کند، امانقطهٔ نهایی تلاقی AE و DE همیشه برهمان راستا، یعنی برراستای براینده، خواهد بود.

۳.۱۳ اگرنقطهٔ e ازچندضلعی نیرو بر a منطبق شود، چندضلعی نیرو را بسته می‌نامند و براینده نیروها دراین‌حالت برابرصفراست.

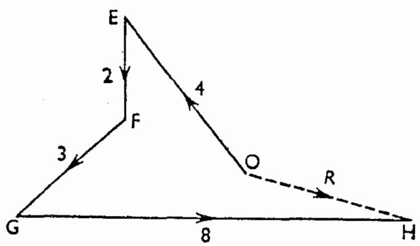
اما صفربودن براینده نیروها دلیل برآن نیست‌که نیروها درحال تعادلند.

زیرا در این حالت oe و oa بر هم منطبق می‌شوند و AE، DE با هم موازی خواهندبود، ونیروهایی‌که درامتدادآنهاوارد می‌شوند مساوی ودرخلاف جهت‌یکدیگرند.

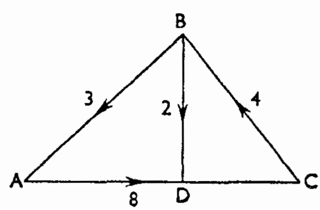
پس، جزدرموردی‌که DEA خطی مستقیم است، یعنی چندضلعی رابط بسته است، برای ما یك زوج باقی خواهد ماند.

این بدان‌معنی است‌که اگر نیروها درحال تعادل باشند، هم چندضلعی نیرو و هم چندضلعی رابط باید بسته باشند.

۴.۱۳ مثال: ABC مثلثی است‌که درآن‌طول اضلاع AB، BC، CA به‌ترتیب ۱۲، ۱۰، ۱۵ سانتیمتراست، وBD فاصلهٔ قائم B ازضلع CA است. بزرگی‌وراستای براینده نیروهای زیررا به‌طریقهٔ نموداری تعیین‌کنید: ۸ واحد از A به C، ۴ واحد از C به B، ۳ واحد از B به A، ۲ واحد از B به D.



شکل ۱۳-۲ ب



شکل ۱۳-۲ الف

حل : نیروها در شکل ۱۳ـ۲ الف نمایش داده شده‌اند. بزرگی وجهت برایند آنهـا را می‌توان با رسم چندضلعی نیرو، مطابق شکل ۱۳ـ۲ ب پیداکـرد. دراین شکل بردارهای OE، EF، FG، GH به‌ترتیب معرف نیروهای ۴، ۲، ۳، ۸واحد هستند. R برایند ایـن نیروها با ضلع OH کـه چندضلعی را می‌بندد نشان داده می‌شود.

از روی اندازه‌گیری معلـوم می‌شود، $R=۳/۴$ وزاویه‌ای کـه با GH یعنی با AC می‌سازد تقریباً برابر °۱۳ است.

دراین‌حالت برای تعیین راستای R لازم نیست که چندضلعی رابط را رسم کنیم. زیرا چون سه‌عدد ازنیروها ازB می‌گذرند، برایند آنهانیزاز B می‌گذرد. بنابراین بزرگی وجهت برایندآنها با بردار OG مطابق شکل ۱۳ـ۲ ب مشخص می‌شود.

اما اگراز B خطی به‌موازات OG رسم کنیم تا امتداد CA را درنقطه‌ای مثلاً در X قطع کند، برایند چهار نیرو می‌بایستی ازاین نقطه بگذرد.

۵.۱۳ نشانه‌گذاری بوو[1]

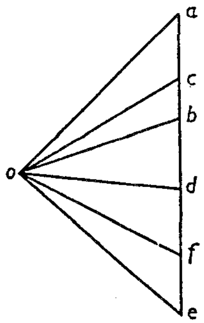
ترسیمات نموداری که شامل نیروهای همصفحه‌اند غالباً با استفاده از طریقهٔ نشانه‌گذاری بوو ساده‌ترمی‌شود. برطبق این روش، ممکن است چنین تصور شودکه راستاهای نیروها صفحه‌ای راکه نیروها درآن اعمال می‌شوند به‌مناطقی تقسیم کرده است. ایـن مناطق ر مثلاً با حروف A،B،C،D،... نمایش می‌دهند و نیرویی راکه درامتداد خطی که منطقه B را از منطقه Cجدا می‌کند با bc نمایش‌می‌دهند. به‌همین طریق برای بقیه نشانه‌گذاری می‌کنند.

این روش به ویژه در مواردی که با داربستها سروکار داریم بسیار مناسب است، به‌طوری که آن را بعداً دربند ۱۳ـ۱۰ مطرح خواهیم‌کرد.

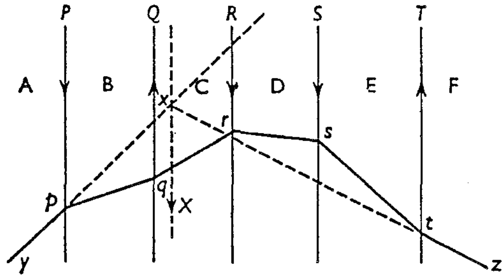
۶.۱۳ برایند چند نیروی متوازی

حالتی‌که درآن، نیروها متوازی هستند عملاً حالت بسیار مهمی است. روش تعیین‌برایند کاملاً شبیه آن است‌که دربند ۱۳ـ۲ بیان‌کردیم، اما دراین‌حالت چندضلعی نیروبه‌صورت خطی مستقیم است.

1- Bow's Notation



شکل ۱۳-۳ ب



شکل ۱۳-۳ الف

فرض می‌کنیم نیروهای مفروض P، Q، R، S، T باشند و راستاهای آنهامطابق شکل ۱۳-۳ الف باشد.

مناطق را با حروف A، B، C، D، E، F مطابق شکل نشان می‌دهیم،وبرخطی موازی با جهت نیروها ab را به طرف پایین نشانه می‌کنیم. اندازهٔ آن را برطبق مقیاس معین برابر P می‌گیریم (شکل ۱۳-۳ ب). bc را به‌طرف بالا ومعرف Q می‌گیریم. cd، de و ef را به‌ترتیب معرف R، S و T می‌گیریم.

دراین صورت af ازنظربزرگی وجهت معرف براینداست و راستای آن‌را می‌توان به‌طریقهٔ زیرتعیین کرد:

نقطه‌ای دلخواه مانند o درنظر می‌گیریم و oa، ob، oc، od، oe و of رارسم می‌کنیم.

برراستای P نقطه‌ای مانند p اختیـار می‌کنیم و py و pq را به‌مـوازات ao و ob رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم pq راستای Q را در q قطع کند.

P معادل است با نیروهای ao، ob که درامتدادهای py و pq وارد می‌شوند.

از q خط qr را به‌موازات oc رسم می‌کنیم تا R را در r قطع کند.

Q معادل است با نیروهای bo، oc که درامتدادهای qp، qr واردمی‌شوندکه نیروی اول با نیروی ob که درامتداد pq وارد می‌شود تعادل دارد.

از r خط rs را به‌موازات od رسم می‌کنیم تا S را در s قطع کند.

R معادل‌است بانیروهای co، od، که درامتدادهای rq، rs وارد می‌شوندکه نیروی اول با نیروی oc که درامتداد qr وارد می‌شود تعادل دارد.

از s خط st را به‌موازات oe رسم می‌کنیم تا T را در t قطع کند.

S معادل است با نیروهای do، oe که درامتدادهای sr، st وارد می‌شوندکه نیروی

اول با نیروی od که درامتداد rs وارد می‌شود تعادل دارد.

از t خط tz را به‌موازات of رسم می‌کنیم.

T معادل است با نیروهای eo، of که‌درامتدادهای ts،tz واردمی‌شود که نیروی اول با نیروی oe که درامتداد st وارد می‌شود تعادل دارد.

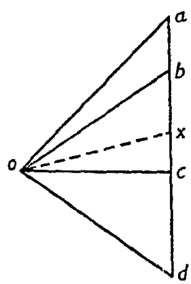
بنابراین برای ما نیروی ao درامتداد py و نیرویی در امتداد tz باقی مانده است.

yp را امتداد می‌دهیم تا zt را در x قطع کند. دراین‌صورت برایند نیروهامی‌بایستی از x بگذرد.

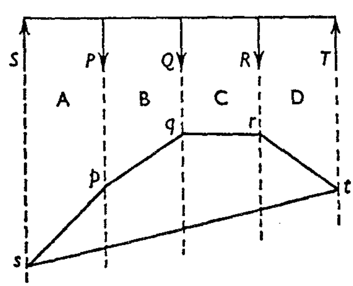
برایند از نظربزرگی و جهت نیروی X است که با af نشان داده می‌شود و از x می‌گذرد.

به‌خاطر بیاورید که این روش دربارهٔ دو نیرو که معادل با یك نیرو هستند، قبلاً در بند ۱۱-۲ به‌کاربرده شد. درواقع چندضلعی HABK (شکل ۱۱-۱) ممکن بودبه‌عنوان چندضلعی رابط برای دونیروی P و Q درنظر گرفته شود.

مثال ۱: میلهٔ سنگینی که به‌نقاط معلومی ازآن وزنه‌های معلومی آویخته شده است بردو انتهای خود تکیه کرده است. عکس‌العملهایی را که برتکیه‌گاهها وارد می‌شود تعیین کنید.



شکل ۱۳-۴ ب



شکل ۱۳-۴ الف

حل : فرض می‌کنیم وزنه‌های P،Q،R، مطابق شکل ۱۳-۴ الف وارد شوند و فرض می‌کنیم عکس‌العملهای تکیه‌گاهها S و T باشد.

مناطق را با حروف A، B، C، D مطابق شکل نشان می‌دهیم و چند ضلعی نیروی $abcd$ را (شکل ۱۳-۴ ب) رسم می‌کنیم. نقطه‌ای مانند o اختیار می‌کنیم و oa، ob، oc، od را وصل می‌کنیم.

براستای P نقطه‌ای مانند p اختیار می‌کنیم و ps را به‌موازات oa رسم

می‌کنیم تا S را در s قطع کند؛ pq را به‌موازات ob رسم می‌کنیم تا Q را در q قطع کند.

از q خط qr را به‌موازات oc رسم می‌کنیم تا R را در r قطع کند و از r خط rt را به‌موازات od رسم می‌کنیم تا T را در t قطع کند.

نیروهای P، Q، R معادلند با نیروهای ao و od درامتدادهای ps و rt.

st را وصل می‌کنیم و ox را به‌موازات st می‌کشیم تا ad را در x قطع کند.

نیروی ao که درامتداد ps وارد می‌شود معادل‌است با نیرویی که به‌وسیلهٔ ax مشخص می‌شود وبه‌طرف پایین درامتداد راستای S وارد می‌شود، ونیروی xo که درامتداد ts وارد می‌شود.

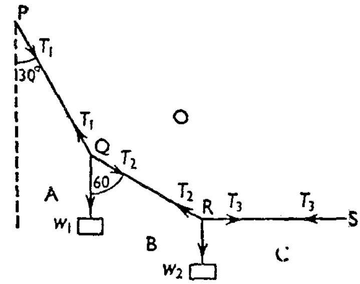
نیروی od که در امتداد rt وارد می‌شود معادل است با xd که به‌طرف پایین در امتداد راستای T وارد مـی‌شود، و نیروی ox که در امتداد st وارد می‌شود. نیروی اخیربا نیروی xo که در امتداد ts وارد می‌شود تعادل دارد، و بنابراین برای مانیروهای قائمی باقی می‌مانندکه به‌وسیلهٔ ax و xd نمایش داده می‌شوند و در راستاهای S و T وارد می‌شوند.

عکس‌العملهایی کـه برمیله در دو انتها وارد مـی‌شوند بایـد مساوی و در خـلاف جهت این نیروهـا بـاشند و بنابـراین مساوی و مخالف ax و xd هستند.

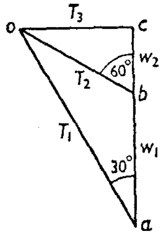
مثال ۲: PQRS نخ سبکی است‌که به‌دونقطهٔ ثابت P و S متصل شده است ووزنه‌های Q و R را نگاه می‌دارد. اگـر PQ نسبت به قائم به‌اندازهٔ °۳۰ منحرف باشد، QR نسبت به‌قائم °۶۰ منحرف باشد و RS افقی باشد، نسبت این دو وزنه را به‌دست آورید.

حل : شکل نخ PQRS مطابق شکل ۱۳-۵ الف است. ایـن شکل درواقع چندضلعی رابط برای نیروهـای متوازی W_1 و W_2 است‌کـه به‌ترتیب در Q و R وارد می‌شوند.

از روی این چندضلعی رابط می‌توانیم چندضلعی نیرو را رسم‌کنیم. برای این منظور در شکل ۱۳-۵ ب فرض می‌کنیم ba نشان‌دهندهٔ وزن W_1 باشد.از a و b به ترتیب خطوطی به‌موازات نخهای QP و QR رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم کـه این خطوط در o با یکدیگر تلاقی کنند. در این صورت این مثلث



شکل ۱۳-۵ الف



شکل ۱۳-۵ ب

abo مثلث نیروها بـرای نیروهـای $W_۱$ ، $T_۱$ و $T_۲$ است کـه بر Q وارد می‌شوند.

اکنون اگر oc را به‌موازات نخ RS، یعنی افقی، رسم کنیم، دراین صورت مثلث bco مثلث نیروهای $W_۲$، $T_۲$ و $T_۳$ است که برR وارد می‌شوند.

بنابراین cb معرف $W_۲$ و با همان مقیاسی است که ba معرف $W_۱$ است، وبنابراین $W_۱/W_۲=ab/bc$.

اما $$ac=oc\ tg\ ۶۰^\circ=oc\sqrt{۳}$$

و $$bc=oc\ tg ۳۰=\frac{oc}{\sqrt{۳}}$$

$$\therefore \qquad ac=۳bc$$

$$\therefore \qquad W_۱+W_۲=۳W_۲ \implies W_۱=۲W_۲$$

این نتیجه را می‌توان با تجزیهٔ نیروهایی کـه در Q و R وارد می‌شوند درامتدادهای افقی وقائم به‌ترتیب زیر به‌دست آورد:

برای Q: $$T_۱cos۳۰^\circ-T_۲cos۶۰^\circ=W_۱$$

و $$T_۱sin۳۰^\circ-T_۲sin۶۰^\circ=۰$$

نیز برای R، $$T_۲cos۶۰^\circ=W_۲$$

و $$T_۲sin۶۰^\circ-T_۳=۰$$

که منجربه‌این نتیجه می‌شود: $W_۱=۲W_۲$

مثال ۳: نیروهای ۵، ۹، ۷ــ، ۳ و ۱۰ ــ نیوتون درامتداد خطـوط راست متـوازی وارد می‌شوند وفاصلهٔ آنها از یکدیگـر به‌ترتیب ۱۰، ۵، ۷، ۳ سانتیمتراست.

با روش برداری و با روش چندضلعی رابط بزرگی وجهت زوج برایند را حساب کنید.

حل : نمودار منطقه‌ای را مطابق شکل ۱۳ـ۶ الف رسم می‌کنیم و همان‌طور که‌مشاهده می‌شود آن را نشانه‌گذاری می‌کنیم.

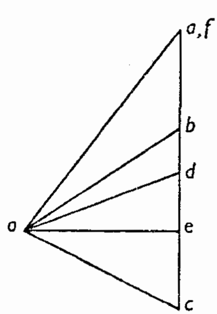
چندضلعی نیرو را مطابق شکل ۱۳ـ۶ ب رسم می‌کنیم. دراین شکل $ab=5$، $bc=9$، $cd=7$، $de=3$ و ef یا ea مساوی ۱۰ است، و چند ضلعی بسته است.

چندضاعی نیرو را با رسم خطوطی به موازات oa، ob، oc، od، oe، of به‌ترتیب درمناطق A، B، C، D، E، F رسم می‌کنیم.

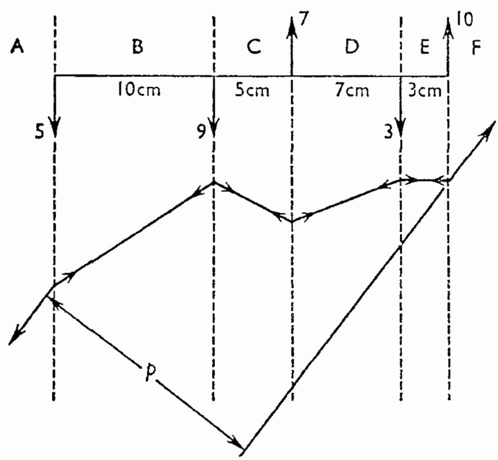
هریك از نیروهای متوازی را می‌توان به‌دو مؤلفه تجزیه کرد که مطابق شکل ۱۳ـ۶ الف، در امتداد اضلاع چندضلعی نیرو وارد می‌شوند. این‌مؤلفه‌ها جفت‌جفت با یکدیگر معادلند، جز نیروی اولی و نیروی آخری، که متساوی و متوازی ودرخلاف جهت یکدیگرند وبنابراین تشکیل یك زوج می‌دهند.

بزرگی این نیروها که به‌وسیلهٔ oa در نمودار نیرو نمایش داده می‌شود و فاصلهٔ آنها که از یکدیگر مثلاً برابر p است، از نمودار منطقه‌ای (شکل۱۳ـ۶ الف) به‌دست می‌آیند.

بنابراین گشتاور زوج به‌وسیلهٔ $oa \times p$ مشخص می‌شود ودرخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.



شکل ۱۳ـ۶ ب



شکل ۱۳ـ۶ الف

از روی شکلها نتیجه می‌شود $oa = ۱۲/۷\ \mathrm{N}$، $p = ۱۵/۷\ \mathrm{cm}$. پس گشتاور زوج برابر است با $۱۲/۷ \times ۱۵/۷ = ۱۹۹\ \mathrm{N\,cm}$

این مقداررا می‌توان با تعیین گشتاورهای همه نیروها نسبت به‌یك نقطه، مثلاً نقطه‌ای واقع برراستای نیروی ۵، تعیین کرد. چنین خواهیم داشت:

$$-۹\times ۱۰ + ۷\times ۱۵ - ۳\times ۲۲ + ۱۰\times ۲۵$$
$$= -۹۰ + ۱۰۵ - ۶۶ + ۲۵۰$$
$$= ۱۹۹\ \mathrm{N\,cm}$$

تمرین ۱۰۱۳

۱ ـ سه‌نیروی متوازی همسوی ۳، ۵ و ۴ نیوتون مفروضند. فاصلهٔ آنها از یکدیگر برابر یك متر است. وضع برایند این نیروها را با ترسیم نموداری نشان دهید.

۲ ـ میله‌ای به‌طول $۹\ \mathrm{m}$ بردو انتهای خود تکیه‌کرده است. تکیه‌گاهها همترازهستند. بارهای ۵، ۳، ۹ و ۲ مگاگرم در فاصله‌های ۲/۴، ۳/۶، ۵/۱ و ۷/۵ متر از انتهای چپ میله برروی این میله قرار دارند. به‌طریقهٔ نموداری با چندضلعیهای رابط وبرداری عکس‌العملهای تکیه‌گاهها را به دست آورید. نیز عکس‌العملها را حساب کنید.

۳ ـ وضع برایند چهارنیروی متوازی راکه بزرگی آنها ۷+، ۴+، ۵−، و ۲+ نیوتون است و فاصله‌های میان‌آنها به‌ترتیب ۱، ۰/۵ و ۱/۲ متر است، به‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید.

۴ ـ وزنه‌هایی به‌جرم ۲، ۳، ۵ کیلوگرم برتیری‌که طول آن $۳\ \mathrm{m}$ است در فاصله‌های ۰/۳، ۰/۹ و ۱/۵ مترازیك انتها قراردارند. راستای برایند را به‌طریقهٔ‌نموداری تعیین کنید.

۵ ـ تیری افقی به‌طول $۲۰\ \mathrm{m}$ بردوانتهای خود تکیه‌کرده است ووزنه‌های ۲، ۳، ۶ و ۴ کیلوگرمی به‌ترتیب در فاصله‌های ۳، ۶، ۱۲ و ۱۵ متر ازیك انتهای آن قرار دارند. عکس‌العملهای تکیه‌گاهها را به‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید.

۶ ـ وزنه‌های ۸، ۳، ۲ و۶ کیلوگرمی از فاصله‌های ۲، ۳، ۶ و ۸ متری ازیك انتهای میله‌ای سبك به‌طول $۱۰\ \mathrm{m}$، که بردوانتهای خود تکیه‌کرده است، آویزان‌شده‌اند. عکس‌العملهای تکیه‌گاهها را به‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید.

۷ ـ نیروهای متوازی وهمسوی۲، ۴، ۶، ۸ و۱۰ نیوتون به‌فاصلهٔ یك متری‌ازیکدیگر وارد می‌شوند. وضع راستای برایند آنها را به‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید.

۸ - برچرخهای یك لوکوموتیو بارهایی که وارد می‌شوند به ترتیب ۱۰، ۱۰، ۱۸، ۱۶ و ۸ مگاگرم است و فاصلهٔ آنها به ترتیب ۱/۲، ۳، ۲/۴، ۱/۸، و ۱/۲ متراست. بزرگی ووضع برایند عکس‌العملهایی راکه ازطرف ریلها وارد می‌شود تعیین‌کنید ودرستی نتیجه را با محاسبه تحقیق‌کنید.

۹ - تیری افقی به‌طول ۱۰ m وزنه‌هایی به‌جرم ۴، ۵، ۶ و ۷ کیلوگرم راکه به‌ترتیب در فاصله‌های ۲، ۵، ۷ و ۹ متری ازیك انتهای آن وارد می‌شود حمل می‌کند. ترسیمات نموداری را درموارد زیرتهیه کنید: (الف) برای برایند وزنه‌ها؛ (ب) برای عکس‌العملهای تکیه‌گاهها، هنگامی که تیر از دوانتها بردو پایه قراردارد، از وزن خود تیرصرف‌نظر کنید.

۱۰- فاصله‌های میان بارهایی که براکسلهای یك لوکوموتیو وارد می‌شوند به‌شرح زیر است،که به‌ترتیب از جلوبه‌عقب است.

فاصله‌ها	۲/۷	۳	۲/۴	۳	متر
بارها	۱۲	۱۲	۲۵	۲۵	۵ واحد

با ترسیم نموداری، فاصلهٔ مرکز ثقل لوکوموتیو را از اکسل جلویی پیدا کنید.

۱۱- تیر یکنواخت AB به‌جرم ۵۰ kg وطول ۶ m درنقطهٔ A ونقطه‌ای‌که در ۱/۲ متری B است تکیه دارد. در ۱/۵ متری و ۲/۴ متری از A وزنه‌هایی به‌جرم ۳۰ kg و در B وزنه‌ای به‌جرم ۴۰ kg حمل می‌کند. به‌طریقهٔ برداری نیروهایی راکه برتکیه‌گاهها فشارمی‌آورند تعیین کنید.

۱۲- نخ سبکی به‌نقطهٔ ثابت A بسته شده است و از روی قرقرهٔ صیقلی Dکه همتراز با A است می‌گذرد وبه‌انتهای آن وزنه‌ای برابر W بسته شده است. اگربه‌نقطه‌های B و C از نخ میان A و D به‌ترتیب وزنه‌های W_1 و W_2 بسته شود، نشان‌دهید که چگونه می‌توان از روی جهتهای قسمتهای AB، BC و CD از نخ‌که‌درحال تعادل است، W_1 و W_2 را پیداکرد.

۱۳- ABCD نخی سبك است. دوانتهای A و D ازاین نخ به‌نقطه‌های ثابتی‌که بریك خط افقی هستند بسته شده است. وزنه‌هایی به جرم ۲/۵ kg و P kg به B و C متصل شده‌اند. به‌طریقهٔ نموداری وزن P وکششهای قسمتهای AB، BC، CD را تعیین‌کنید، درصورتی‌که می‌دانیم AB و CD با افق به‌ترتیب زاویه‌های °۶۰ و °۴۵ می‌سازند وزاویهٔ BCD برابر °۱۴۰ است.

۱۴- نیروهای ۱، ۳، ۴ — نیوتون به‌ترتیب برگرد اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع

ABC که طول ضلع آن ۵ cm است وارد می‌شوند. این مثلث از یك تیغهٔ صلب بریده شده است. برای تعیین بزرگی، جهت ووضع برایند این نیروها، ترسیمی نموداری ارائه دهید.

۱۵- نیروهای ۳ N، ۲ N، ۳/۵ N — به‌ترتیب برگرد سه‌ضلع متوالی یك‌شش‌ضلعی منتظم که طول‌ضلع آن ۵ cm است و ازیك‌تیغهٔ‌صلب بریده شده‌است واردمی‌شوند. برای تعیین بزرگی، جهت ووضع برایند این نیروها، ترسیمی نموداری ارائه دهید.

۷-۱۳. داربستها

دربسیاری ازحالتهاکه درآنها از روش نموداری استفاده می‌شود، نیروها درحال تعادلند. نیروها بیشتراوقات برنوعی داربست وارد می‌شوند، ومسئله‌عبارت از پیداکردن نیروهایی است که برقسمتهای مختلف یا «قطعه‌های» این داربست فشار می‌آورند. روشهای تغییر ترسیمات که در بندهای قبلی به‌این منظور بیان شدند در مثالهای زیرتشریح می‌شوند.

با درنظر گرفتن تعادل یك میلهٔ سبك آشکار است که، اگر تنها نیروهایی که برمیله اثر می‌کنند همانهایی هستندکه بردوسرمیله وارد شوند، این نیروها می‌بایستی درامتداد میله باشند، در غیراین‌صورت نمی‌توانند با یکدیگرتعادل داشته باشند. البته باید مساوی و ناهمسو نیز باشند. بنابراین میله‌ای سبك، که فقط تحت تأثیر نیروهایی است که بردوسر آن وارد می‌شوند، درامتداد طول خود یا فشرده می‌شود یاکشیده می‌شود.

میله‌ای‌را که‌تحت‌فشارقرارداردستون ومیله‌ای‌را که تحت کشش‌قراردارد قیدمی‌نامند.

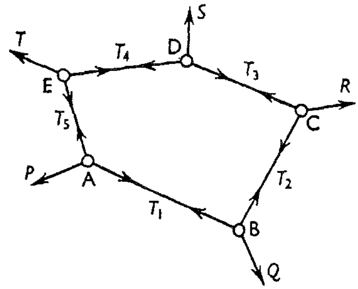
۸-۱۳. چند ضلعی بسته‌ای‌که ازچند میلهٔ سبك تشکیل شده است وانتهای میله‌ها آزادانه به یکدیگرمفصل شده‌اند، تحت اثرمجموعهٔ معلومی ازنیروهایی که بر مفصلها وارد می‌شود به حال تعادل است. می‌خواهیم نیروهایی را تعیین کنیم که میله‌ها تحت فشار آن نیروها قرار گرفته‌اند.

فرض می‌کنیم میله‌های مفروض عبارت از AB، BC، CD، DE، EA باشند، که آزادانه از انتهای خود به یکدیگر مفصل شده‌اند. و فرض می‌کنیم نیروهای P، Q، R، S و T برمفصلها مطابق شکل ۱۳-۷ الف وارد شوند.

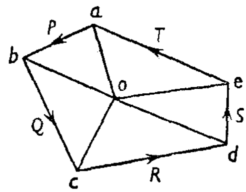
فرض‌می‌کنیم نیروهایی که‌درنتیجه برمفصلهادرامتداد میله‌ها وارد می‌شوندبه‌ترتیب T_1، T_2، T_3، T_4، T_5 باشند. نیروهایی‌که برمیله‌هاوارد می‌شوند مساوی ومخالف‌این نیروها هستند.

چند ضلعی نیرو، $abcde$ ، را رسم می‌کنیم (شکل ۱۳-۷ ب). اضلاع این چند

ضلعی به‌ترتیب متوازی و متناسب با P، Q، R، S و T است. چون نیروها درحال تعادل هستند، این چندضلعی می‌بایستی بسته باشد. از a خط ao را به‌موازات AE رسم می‌کنیم،



شکل ۱۳-۷ الف



شکل ۱۳-۷ ب

و از b خط bo را به‌موازات AB رسم می‌کنیم. اضلاع مثلث boa موازی با نیروهای P، T_1 و T_5 است که این نیروها برمفصل A وارد می‌شوند. بنابراین اضلاع مثلث متناسب با این نیروها است، و اضلاع bo و oa می‌بایستی معرف T_1 و T_5 باشندکه با همان مقیاس‌که ab نشان‌دهندهٔ P است معین می‌شوند.

oc، od و oe را وصل می‌کنیم.

اضلاع ob، bc از مثلث obc نشان‌دهندهٔ دونیروی T_1 و Q است که بر B وارد می‌شوند پس co نشان دهندهٔ نیروی سوم است که بر B وارد می‌شود، یعنی معرف‌نیروی T_2 است، و بنابراین می‌بایستی موازی با BC باشد.

به‌همین طریق‌معلوم می‌شودکه do نشان‌دهندهٔ T_3 و eo نشان‌دهندهٔ T_4است.

بنابراین خطوط oa، ob، oc، od، oe ازنظر بزرگی وجهت نشان‌دهندهٔ نیروهایی هستندکه براضلاع این داربست وارد می‌شوند.

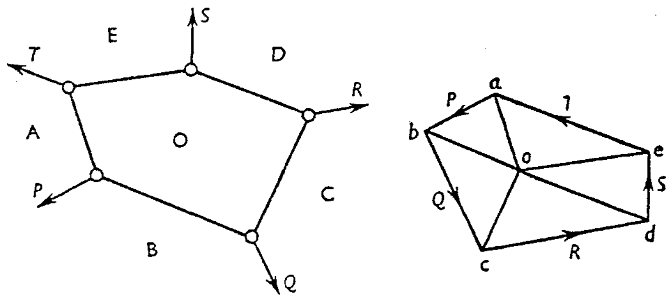
۹.۱۳ بدیهی است‌که در شکلهای بند قبلی، $abcde$ چندضلعی نیرو و ABCDE چند ضلعی رابط برای مجموعهٔ نیروهای P، Q، S، T است.

نیز اگر $abcde$ معرف یك داربست مفصل‌دار باشد که برآن نیروهای oa، ob، co، od، oe وارد می‌شوند، در این صورت ABCDE معرف چندضلعی نیرو برای این مجموعه نیروهاست و $abcde$ معرف چندضلعی رابط است.

پس یکی از این چندضلعیها ممکن است داربست یا چندضلعی رابط، ودراین‌صورت چندضلعی دیگر، عبارت از چندضلعی نیروی مربوطه است. به‌این دلیل چنین شکلهایی را دو جانبه گویند.

۱۰.۱۳. نشانه‌گذاری بوو

همان‌طور که در بند ۵.۱۳ توضیح دادیم روش دیگری برای حرف‌گذاری شکلها وجود دارد که ممکن‌است ازآن‌استفاده‌کرد. این روش به نشانه‌گذاری بوو موسوم است. داربست بند ۸.۱۳ را درنظر بگیرید.



شکل ۱۳-۸

داربست را رسم می‌کنیم و نیروها را مطابق شکل۱۳-۸ مشخص می‌کنیم، وبه‌جای آنکه رئوس داربست را حرف‌گذاری کنیم، فضاها یا منطقه‌های میان نیروها ومیله‌ها را حرف‌گذاری می‌کنیم، مثلاً فضای میان T و P را A می‌نامیم ومیان P و Q را B می‌نامیم ومیان Q و R را C می‌نامیم وهمین‌طور بقیه را.

راستای P میان فضاهای A و B محدود است، ودرچندضلعی نیرو، خطی که‌معرف P است ab نامیده‌می‌شود وخطی که‌معرف Q است bc نامیده می‌شود وهمین‌طورالی‌آخر.

بنابراین چندضلعی نیرو عبارت است از $abcde$.

اگرقطب چندضلعی نیرورا o بنامیم، فضای داخل چندضلعی رابط را باید O نامید.

هرحرف کوچك که به‌رأس چندضلعی نیرو مربوط است، متعلق به‌حرف بزرگی است که فضایی از چندضلعی رابط را مشخص می‌کند.

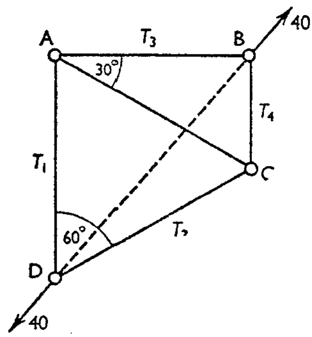
مثال ۱: ABCD یك چهارضلعی است که ازچهارمیلهٔ سبك تشکیل شده است و میله‌ها، درانتها، آزادانه به‌یکدیگر مفصل شده‌اند. زاویه‌های A و B قائمه‌اند، زاویهٔ ADC برابر °۶۰ است و AD = CD. این چهارضلعی به‌کمك میلهٔ AC محکم شده است. در B و D نیروهایی برابر ۴۰ N طوری وارد می‌شوندکه داربست به‌حال تعادل است. نیروهایی را پیداکنیدکه میله را می‌کشند یا می‌فشارند.

حل : چون AD = DC و °۶۰ = ADC است، مثلث ADC متساوی‌الاضلاع است

و $CAB = ۳۰^\circ$.

AB را مطابق شکل۱۳-۹ رسم می‌کنیم،وAC را به‌طوری‌رسم‌می‌کنیم که $BAC = ۳۰^\circ$ باشد وعمودی راکه از B بر AB رسم شده است در C قطع کند. سپس مثلث ACD را برروی AC می‌سازیم.

چون دو نیروی N ۴۰ با یکدیگر متعادلند، می‌بایستی بریك راستا،یعنی درامتداد BD، و درجهتهای مختلف وارد شده باشند، فرض می‌کنیم کـه این‌دو نیرو به‌طرف خارج وارد می‌شوند.



شکل ۱۳-۹

روش الف. برای‌رأس D، مثلث نیروها را رسم می‌کنیم، وکششهایی راکه در AD و DC هست، و با $T_۱$ و $T_۲$ نمایش می‌دهیم، به دست می‌آوریم ($T_۱ = ۱۵/۱$، $T_۲ = ۳۰/۲$).

برای رأس B، مثلث نیروها را رسم‌می‌کنیم، وکششهایی راکه در AB و BC هست، و با $T_۳$ و $T_۴$ نمایش می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم ($T_۳ = ۲۶/۲$، $T_۴ = ۳۰/۲$). نیرویی‌که برAC فشار وارد می‌آورد با رسم مثلث نیروهابرای A یا C به‌دست می‌آید (این نیرو برابر ۳۰/۲ است).

مثلثهای نیروها را برای هرمفصل می‌توان در یـك نمودار، مطابق شرح زیر، درکنار یکدیگر قرارداد.

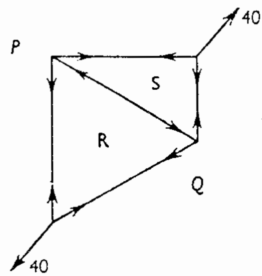
روش ب. بـا استفاده از نشانه‌گذاری بوو، منطقه‌هـای نمـودار را مطابـق شکل ۱۳-۱۰ الف باحروف P، Q، R، S نمایش می‌دهیم.

برای رسم چندضلعی نیرو، از یکی از رئوس،که یکی از نیروهای‌خارجی شناخته شده برآن رأس وارد می‌شود، مثلاً B، شروع می‌کنیم و pq رابرای

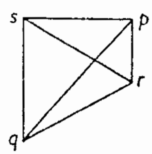
نشان دادن بزرگی و جهت نیروی ۴۰ N رسم می‌کنیم. سپس ps را به‌موازات میله (AB) میان مناطق P و S رسم می‌کنیم، نیز qs را به‌موازات میله (BC) میان مناطق Q و S رسم می‌کنیم. در این صورت psq مثلث نیروها برای نیروهایی است که برمفصل B وارد می‌شوند، وچون نیروی ۴۰ N در جهت q به p است، جهت نیروهای دیگر که بر B وارد می‌شوند باید مطابق جهتهایی باشدکه در شکل ۱۳-۱۰ الف نمایش داده‌ایم.

برای مفصل A، خط pr را به‌موازات میله (AD) میان مناطق P و R رسم می کنیم، وsr را به‌موازات میله (AC) میان مناطق S و R رسم‌می کنیم. دراین صورت prs مثلث نیروها برای نیروهایی است که برمفصل A وارد می‌شوند، وچون جهت نیروی ps معلوم است، جهت نیروهای دیگررامی‌توان پیداکرد وآنها مطابق جهتهایی هستندکه درشکل ۱۳-۱۰ الف نمایش داده‌ایم.

اکنون‌اگر qr راوصل‌کنیم، مثلث pqr مثلث‌نیروها برای‌نیروهایی است که برمفصلD وارد می‌شوند، وجهتهای نیروها مطابق شکل ۱۳-۱۰ الف هستند.



شکل ۱۳-۱۰ الف



شکل ۱۳-۱۰ ب

نیروهایی که‌برمفصلC وارد می‌شوند به‌وسیلهٔ مثلث rqs مشخص‌می‌شوند وجهتهای این نیروها همانهایی است‌که نشان داده شده است. آشکار است که‌این مثلث متساوی‌الاضلاع است، وبنابراین سه‌نیرویی‌که برمفصل C وارد می‌شوند متساوی هستند.

بزرگیهای همهٔ نیروها را می‌توان با اندازه‌گیری اضلاع شکل $pqrs$ وبا استفاده از مقیاس pq که معرف ۴۰ N است به‌دست آورد.

نیروهایی‌که برمیله‌ها وارد می‌شوند مساوی و در خلاف جهت نیروهایی هستندکه برلولاهای انتهای میله‌ها وارد می‌شوند. درنتیجه (با تغییرجهتهایی‌که

در شکل ۱۳-۱۰ الف نشان داده شده است) میله‌های AB، BC، CD، DA درحال کشش هستند ومیلهٔ AC تحت فشار است.

مثال ۲: ABC داربستی است به‌شکل مثلث که از میله‌های سبکی تشکیل شده است که به‌یکدیگر مفصل شده‌اند. این داربست بر A و B تکیه دارد، به‌طوری که AB افقی است و C بالای AB است وصفحهٔ مثلث ABC قائم است.

$$AB = ۶\ m \text{، } CA = ۵/۴\ m \text{، } BC = ۶/۶\ m$$

وزنه‌ای به جرم ۲۰۰ kg از C آویزان است. با روشهای نموداری نیروهایی را پیداکنیدکه این میله‌ها را می‌کشند یا می‌فشارند.

حل: داربست را با مقیاس معین مطابق شکل ۱۳-۱۱ رسم می‌کنیم ودرآن‌راستاهای نیروهای خارجی را در بیرون‌از داربست نشان می‌دهیم. نیروهای خارجی‌عبارتند از نیروی ۲۰۰ g N، عکس‌العملهای قائم P و Q درنقطه‌های A و B.

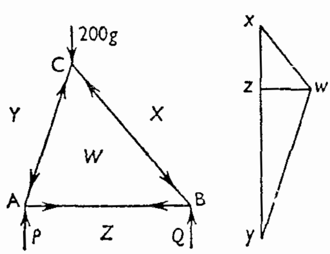
عکس‌العملهای قائم P و Q را ممکن است به روش نموداری مطابق بند ۱۳-۶ پیداکنیم.

اما دراین حالت ساده لازم نیست که P و Q را در آغاز پیدا کنیم: این نیروها را می‌توان مطابق شرح زیر از روی مثلث نیروها برای هرمفصل به‌دست آورد.

فضاهایی راکه با راستاهای نیروهای خارجی و میله‌های داربست تشکیل می‌شود، همان‌طورکه نشان داده شده است به X، Y، Z، W نمایش می‌دهیم.

فضای Y ازسمت چپ تا بینهایت کشیده شده است و به‌کمک نیروی ۲۰۰ g N، میلهٔ AC، ونیروی P از فضاهای دیگر جدا شده است.

فضای X نیز از سمت راست تا بینهایت کشیده شده است.



شکل ۱۳-۱۱

از مفصل C شروع می‌کنیم. این مفصل تحت تأثیر نیروی $200\,g$ N و نیروهایی است که درامتدادهای AC و CB فشارمی‌آورد. اکنون xy رابه‌طور قائم به سوی پایین رسم می‌کنیم تا نیروی $200\,g$ N را نشان دهد. با رسم yw به‌موازات AC و xw به‌موازات CB مثلث نیروها را برای C کامل می‌کنیم. چون نیروی $200\,g$ N که با xy نشان داده شده است به‌طور قائم به‌طرف پایین‌است، جهتهای نیروهایی‌که برمفصل C وارد می‌شوند مطابق‌شکل خواهند بود.

اکنون مفصل B را درنظر می گیریم و با رسم wz به‌موازات BA، مثلث نیروها راکه xwz است کامل می‌کنیم. دراین صورت zx می‌بایستی نشان‌دهندهٔ عکس‌العمل Q و wz نشان‌دهندهٔ نیرویی باشدکه در امتداد AB فشار می‌آورد.

به‌همین طریق، yzw مثلث نیروها برای‌مفصل A است و yz نشان‌دهندهٔ عکس‌العمل P است. چون نیروی P که با yz نشان داده می‌شود روبه‌سوی بالاست، جهتهای نیروهایی راکه برمفصل A وارد می‌شوند می‌توان یافت.

چون جهتهای نیروهایی‌که برمفصلها وارد می‌شوند به‌همان صورتند که‌در شکل نشان داده شده‌اند، میلهٔ AB تحت تأثیرنیروی کشش است ومیله‌های BC و CA تحت تأثیر نیروهای فشار دهنده‌اند.

نیروهای کششی وفشاری را می‌توان، همان‌طورکه نشان داده شده‌اند، با پیکان نمایش داد ومی‌توان علامت − برای نیروی کششی وعلامت + برای نیروی فشاری به‌کاربرد. گاهی آنها را با قراردادن یك یا دوخط تیره برروی میله تشخیص می‌دهند. دقت بسیار بایدکرد و به‌یاد داشت که، برای به‌دست آوردن جهتهای نیروها از روی مثلث نیروها، باید برگرد مثلث به‌ترتیب‌حرکت کرد. مثلاً درمورد A، چون yz نشان دهندهٔ P است، zw نشان‌دهندهٔ نیرویی است‌که برمفصل A در امتداد AB، یعنی از A به‌سمت راست، وارد می‌شود. برای یافتن ماهیت نیروهایی که برمیله فشار می‌آورند پیکانها را ممکن است وارونه‌کرد.

مثال ۳: داربستی با هفت میله‌به‌شکل سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، BCD، CDE ساخته شده است. در A و E برتکیه‌گاههای قائم صیقلی قراردارد، به‌طوری‌که BD و ACE افقی هستند و BD بالای ACE است، و در B وزنهٔ ۵ واحدی و در C وزنهٔ ۵ واحدی و در D وزنهٔ ۱۰واحدی را تحمل می‌کند. باصرف‌نظر کردن از وزن میله‌ها، عکس‌العملها را درA و E به‌دست آورید. با رسم‌نمودار

نیروهایی راکه برهرمیله فشار می‌آورد تعیین کنید و نشان دهیدکه کدام میله‌تحت تأثیرفشار است و کدام میله تحت تأثیر کشش.

حل : داربست را رسم می‌کنیم و نیروهـای خـارجی را مطابـق شکل ۱۳-۱۲ نشان می‌دهیم.

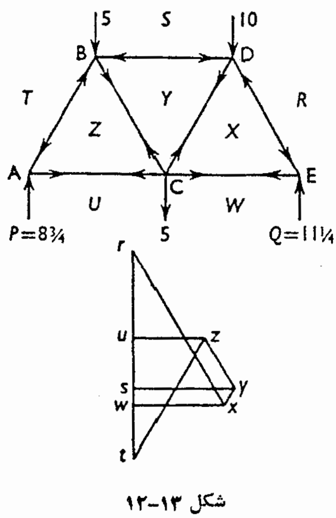
عکس‌العملهای P و Q را، کـه در A و E بـرداربست وارد مـی‌شود، می‌توان از راه نمودار پیداکرد، اما دراین حالت ساده‌ترآن است‌کـه آنها را از راه‌گرفتن گشتاور به‌دست آوریم.

باگرفتن گشتاور حول A خواهیم داشت

$$۴Q=۵\times۱+۵\times۲+۱۰\times۳=۴۵$$

$$\therefore \qquad Q=۱۱\frac{۱}{۴} \quad \text{و} \quad P=۸\frac{۳}{۴}$$

اکنون فضاها رامطابق شکل۱۳-۱۲ نشانه‌گذاری‌می‌کنیم (همهٔ‌نیروهای خارجی را در بیرون از داربست رسم می‌کنیم)، وچندضلعی نیرو را به شرح زیر رسم می‌کنیم.



شکل ۱۳-۱۲

برراستایی قائم با مقیاس ۵ واحد=۲سانتیمتر، rs را برابر ۱۰ و st را برابر ۵ اختیار می‌کنیم وسپس tu را برابر$۸\frac{۳}{۴}$ به‌سوی‌بالاوبرای نمایش Pاختیار می‌کنیم. اکنون uw را برابر ۵ و برای نشان دادن وزن ۵ واحدی در Cاختیار

می‌کنیم. wr نشان‌دهندهٔ Q یعنی عکس‌العمل در E است.

با رسم uz به‌موازات AC و tz به‌موازات AB مثلث نیروها را برای نیروهایی که برمفصل A وارد می‌شوند رسم می‌کنیم. uz نشان‌دهنده نیرویی است که درامتداد AC فشار می‌آورد و zt نشان‌دهندهٔ نیرویی است که درامتداد AB فشار می‌آورد. جهتهای نیروهایی که برمفصل A وارد می‌شوند مطابق آنهایی هستندکه درشکل نشان داده شده‌اند. AC درحال کشش و AB در حال فشردگی است.

ازچندضلعی نیروی مربوط به B تاکنون st و tz را داریم، وبرای کامل کردن آن zy را به‌موازات BC و sy را به‌موازات BD رسم می‌کنیم.

zy نشان‌دهندهٔ نیرویی است که در امتداد BC فشار می‌آورد (نیروی کششی)، و ys نشان‌دهندهٔ نیرویی است که درامتداد BD فشار می‌آورد (نیروی فشاری).

ازچندضلعی نیروی مربوط به D تاکنون rs و sy را داریم، و برای کامل کردن آن yx را به‌موازات DC و rx را به‌موازات DE رسم می‌کنیم.

yx نشان‌دهندهٔ نیرویی است که در امتداد CD فشار می‌آورد (نیروی کششی)، و xr نشان‌دهندهٔ نیرویی است که در امتداد DE فشار می‌آورد(نیروی فشاری).

چون wr نشان‌دهندهٔ Q و rx نیروی فشاری در E ناشی از DE است، wx باید ضلع سوم مثلث نیرو برای E باشد، یعنی wx باید موازی CE باشد و xw نشان‌دهندهٔ نیرویی باشدکه درامتداد CE فشار می‌آورد (نیروی کششی).

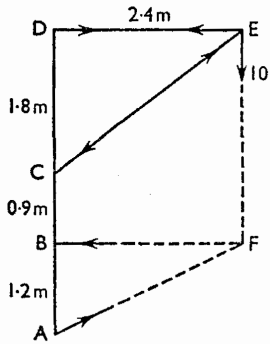
به‌یاد داشته باشیم که‌برای مفصل C چندضلعی بستهٔ $yzuwx$ رانیزداریم. چون نیروی uw به‌سوی پایین است، جهتهای نیروهایی راکه برمفصل C وارد می‌شوند می‌توان‌تحقیق کرد.

با اندازه‌گیری اضلاع مربوطهٔ نمودار نیرو می‌توان نیروهایی را که برمیله‌های گوناگون فشار می‌آورند پیداکرد. این نیروها تقریباً به‌اندازه‌های زیر هستند. علامت مثبت نشان‌دهندهٔ نیروی فشاری و علامت منفی نشان‌دهندهٔ نیروی کششی است:

$$\mathrm{AB}=+۱۰\ ،\mathrm{AC}=-۵\ ،\mathrm{BC}=-۴\tfrac{۱}{۴}\ ،\mathrm{BD}=+۵\ ،$$

$$\mathrm{CD}=-۱\tfrac{۳}{۴}\ ،\mathrm{CE}=-۶\tfrac{۱}{۴}\ ،\ \mathrm{DE}=+۱۳$$

مثال ۴: جرثقیلی، مطابق شکل ۱۳-۱۳، به‌نقطهٔ A متصل شده است و با نیرویی‌افقی که بر B فشار می‌آورد به‌حال قائم است.



شکل ۱۳-۱۳

اگر وزنه‌ای به‌جرم ۱۰ Mg از E آویزان باشد، نشان دهیدکه چگونه می‌توان عکس‌العملها را در A و B، و نیروها را در CE و DE به‌طور نموداری پیدا کرد. عکس‌العملها و نیروها را نیز محاسبه کنید.

حل : روش (الف). شکل را با مقیاسی معین، مثلاً ۱ cm = ۱ m رسم می‌کنیم.

چون نیروهایی که برمیلهٔ AD وارد می‌شوند برنقطه‌هایی جز دوسرآن وارد می‌شوند، این نیروها به‌صورت کششی یا فشاری ساده نیستند. برای‌آنکه عکس‌العملها را در A و B پیداکنیم همهٔ نیروهای خارجی‌راکه برجرثقیل وارد می‌شوند، یعنی این دوعکس‌العمل ووزن ۱۰واحد را، درنظر می‌گیریم. هرواحد برابر وزن ۱ Mg است.

BF را به‌طور افقی رسم می‌کنیم تا قائمی راکه از E می‌گذرد در Fقطع کند. دراین صورت عکس‌العمل در A باید از F بگذرد.

AF را وصل می‌کنیم. مثلث ABF می‌تواند، برای نیروهای‌عکس‌العمل ووزنه،مثلث نیروهاباشد. طولهای BA، AF، FB برابرند با ۱/۲، $۱/۲\sqrt{۵}$، و ۲/۴ سانتیمتر، که به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ ۱۰ واحد، عکس‌العمل در A و عکس‌العمل در B هستند.

بنابراین عکس‌العمل در A برابر $۱۰\sqrt{۵}$ واحد و عکس‌العمل در B برابر ۲۰ واحد است.

مثلث DCE مثلث نیروها برای رأس E است.

طولهای ED ،CE ،DC برابرند با ۱/۸، ۳ و ۲/۴ سانتیمتر، که به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ این کمیتها هستند: ۱۰ واحد، نیرویی که بر CE فشار می‌آورد، و نیرویی که بر ED فشار می‌آورد. بنابراین نیرویی که در امتداد CE فشار می‌آورد $\frac{۵۰}{۳}$ واحد (نیروی فشاری)، و نیرویی که در امتداد ED فشار می‌آورد $\frac{۴۰}{۳}$ واحد (نیروی کششی) است.

روش (ب). برای محاسبهٔ عکس‌العمل در B و A.

فرض می‌کنیم عکس‌العمل در B برابر P واحد باشد، در این صورت اگر برای کل چهارچوب حول A گشتاور بگیریم،

$$۱/۲P = ۲/۴ \times ۱۰$$

$$\therefore \qquad P = ۲۰$$

فرض می‌کنیم مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل در A برابر X و Y واحد باشند. دراین صورت

$$X = P = ۲۰$$

و

$$Y = ۱۰$$

اگر R عکس‌العمل برایند باشد.

$$R = \sqrt{[۲۰^۲ + ۱۰^۲]} = ۱۰\sqrt{۵}$$ واحد

R نسبت به‌افق شیب دارد و زاویهٔ آن $Arc\ tg\frac{۱}{۲}$ است.

برای محاسبهٔ نیروهایی که در CE و ED فشار می‌آورند، نیروی‌فشاری در CE را $T_۱$ واحد می‌گیریم.

مؤلفهٔ قائم آن را برای رأس E تعیین می‌کنیم،

$$T_۱ \sin \mathrm{CED} = ۱۰$$

$$\therefore \qquad T_۱ = \frac{۵۰}{۳} \quad \text{یا} \quad \frac{۳}{۵}T_۱ = ۱۰$$

نیروی کششی در ED را $T_۲$ واحد می‌گیریم.

مؤلفهٔ افقی آن را برای رأس E تعیین می‌کنیم،

$$T_۲ = T_۱ \cos \mathrm{CED} = \frac{۵۰}{۳} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۴۰}{۳}$$

تمرین ۲۰۱۳

۱ - داربستی از میله‌های $AB = AD =$ ۰/۶ m، و $BC = CD =$ ۳۷/۵ cm تشکیل شده است که به‌طور صیقلی به هم لولا شده‌اند. این داربست برروی میزی افقی طوری قرار می‌گیرد که زاویهٔ $BAD =$ ۶۰°، و A و C در دو طرف BD هستند. B و D با ریسمانی که می‌تواند وزنه‌ای به‌جرم ۱۴ kg را تحمل می‌کند به‌هم متصل شده‌اند. بزرگترین نیرویی را پیدا کنید که می‌تواند برA و C وارد شود، به‌طوری که داربست دروضعی معین به‌حال تعادل باشد و ریسمان سالم بماند. درقطعه‌های داربست نیروهای مربوطه‌ای راکه فشار می‌آورند پیدا کنید و بیان کنید که آیا این نیروها فشاری هستند یا کششی.

۲ - میلهٔ AB به‌طول ۳ m درنقطهٔ B به‌دیواری لولا شده است و وزنه‌ای به‌جرم ۵۰ kg را در A نگه داشته است. این میله به‌کمك نخی که به‌نقطهٔ C وسط میلهٔ AB بسته شده است وطرف دیگرآن به D که روی دیوار و در ۲/۱ m بالای B است بسته شده است. نموداری بامقیاس مناسب رسم کنید و ازروی مثلث نیروها، کشش نخ وبزرگی وجهت عکس‌العمل را در لولای B تخمین بزنید.

۳ - تیر یکنواخت AB به‌جرم ۵۰kg به‌وسیلهٔ دو ریسمان AC وBD نگه‌داشته شده است. ریسمان BD قائم است وزاویه‌های CAB و ABD هرکدام ۱۰۵° است. برای‌آنکه تیر به‌همین حالت بماند نیرویی افقی برابر F برB وارد می‌شود. نشان دهید که اندازهٔ F درحدود ۱۲۲ N است.

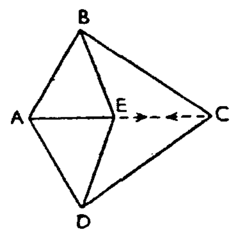
۴ - پنج میلهٔ سبك همطول آزادانه در سرهای خود به‌هم متصل شده‌اند و پنج‌ضلعی ABCDE را تشکیل داده‌اند. این دستگاه از مفصل A آویزان است. وزنهٔ w از مفصل C آویزان‌است. برای آنکه پنج ضلعی‌به‌صورتی منتظم باقی بماند، میله‌های BE و BD به‌کاربرده شده‌اند. نموداری رسم کنید که بزرگیهای نیروهایی راکه برمیله‌های گوناگون فشار می‌آورند به‌صورت نموداری نشان دهد ومعلوم کنید که کدام میله درحال فشردگی است و کدام درحال‌کشیدگی.

۵ - مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از سه‌میلهٔ سبك تشکیل شده است که هریك ۰/۶ m طول دارد و از دوسربه‌میله‌های دیگرمفصل شده است. این مثلث ازنقطه‌ای واقع برAC که در ۳۷/۵ سانتیمتری A است آویزان شده است و وزنه‌ای به‌جرم ۶/۵ kg از نقطه‌ای واقع برAB که در ۱۷/۵ سانتیمتری A است آویزان‌است. نیروی‌کششی را درمیلهٔ BC، وعکس‌العمل میان دومیلهٔ دیگر را در A (به روش نموداری یا هرروش دیگر) پیداکنید.

۶ ـ سه‌میلهٔ سبك طوری به‌هم مفصل شده‌اندکه تشکیل داربستی به‌شکل مثلث ABC داده‌اندکه درآن A و C هریك 30° است. این داربست می‌تواند حول نقطهٔ B در صفحه‌ای قائم بچرخد. در همه‌حال AB افقی است ووزنه‌ای به‌جرم ۵۰ kg از C آویزان است و برA نیرویی قائم برابر P وارد می‌شود. از راه نمودار یا ازهرراه دیگر، بزرگیهای نیروی P و نیروهایی را کـه برمیله‌ها فشار می‌آورند پیدا کنید.

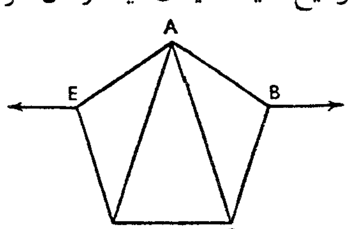
۷ ـ با پنج میلـهٔ سبك متوازی‌الاضـلاع ABCD و قطـرآن BD را تشکیل داده‌ایم. اضلاع AD وBC ازمتوازی‌الاضلاع هریك دوبرابر دوضلع دیگراست وزاویه‌های A و C هریك 60° است. دونیروی مساوی ومختلف‌الجهت به‌بزرگی F درامتداد قطر AC بـرA و C وارد می‌شود، به‌طوری‌کـه متوازی‌الاضلاع به‌حـال تعادل می‌ماند. نیروهایی راکه برمیله‌ها فشار می‌آورند پیداکنید.

۸ ـ داربستی مطابق شکل ۱۳ـ۱۴ از میله‌هایی تشکیل شده است‌که به‌یکدیگر مفصل شده‌اند. طـول AB و AD برابر ۰/۹ m، طـول BC و DC برابر ۱/۲ m، فاصلهٔ AC برابر ۱/۵ m، و E نقطهٔ وسط A و C است. نیروهای ۴۰ N بر C و E مطابق شکل وارد شده‌اند. نیروهای‌کششی یا فشاری را درهریك از میله‌های داربست تعیین کنید.



شکل ۱۳ـ۱۴

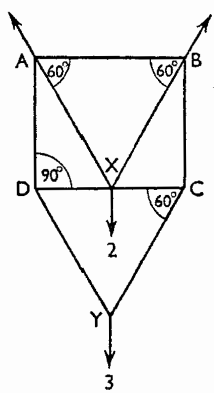
۹ ـ پنج‌ضلعی منتظم ABCDE (شکل ۱۳ـ۱۵)که رئوس آن مفصل شده‌اند با دومیلهٔ AC و AD که آنها نیزمفصل شده‌اند محکم شده است. دونیروی‌برابر وناهمسو، هریك برابر ۱۵ N برB و E وارد می‌شوند، نیرویی راکه برهرمیلهٔ داربست‌وارد می‌شود پیداکنید وتوضیح دهیدکه‌آیاآن میله‌درحال‌فشردگی‌است‌یادرحال‌کشیدگی.



شکل ۱۳ـ۱۵

۱۰- مستطیل ABCD که درآن اضلاع AB و BC به‌ترتیب ۸ و ۱۲ سانتیمتراست از میله‌هایی تشکیل شده است که به‌طور صیقلی به‌هم مفصل شده‌اند وچارچوب‌حاصل با قطر BD محکم شده است. این داربست از A آویزان است و وزنه‌ای به‌جرم ۱۰ kg به C محکم شده است. نموداری رسم‌کنیدکه نیروهایی را که برمیله‌ها فشار می‌آورند نشان دهد (میله‌ها سبك هستند)، وسپس این نیروها را پیدا کنید و معلوم‌کنیدکه آیا فشار نده‌اند یاکشنده.

۱۱- شکل ۱۳-۱۶ نشان‌دهندهٔ داربستی است که ازنه میله‌که به‌طور صیقلی به‌هم‌مفصل شده‌اند تشکیل شده است. دو وزنه مطابق شکل در X و Y به‌داربست متصل‌شده است و داربست با ریسمانهایی که به A و B بسته شده‌اند نگاهداری می‌شود. جهت ریسمانها همان است‌که درشکل نشان داده شده است. نیروهایی را که برهر میله فشار می‌آورد به‌طور نموداری پیدا کنید و (با صرف‌نظر کردن از وزن میله‌ها) نتیجه‌ها را با رقم به‌دست آورید ونشان دهیدکه کدام نیروی کششی است وکدام نیروی فشاری.



شکل ۱۳-۱۶

۱۲- در داربست ABCDE چهار میلهٔ AB، BC، CD و DE اضلاع یك شش‌ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند. این داربست با میله‌های اتصالی AC، AE و CE محکم شده است. برمفصلهای B و D نیروهایی برابر ۲۰ واحد و به ترتیب در امتدادهای عمود بر AC و CE وارد می‌شوند و داربست به‌کمك نیروهایی که بر A و E به‌ترتیب درامتدادهای AB و ED وارد می‌شوند به‌حال تعادل است.

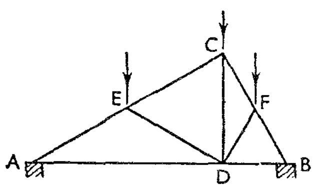
بزرگی این نیروها و نیروهایی راکه برقطعه‌های گوناگون داربست وارد می‌شود پیدا کنید.

۱۳- سه تکه ریسمان همطول که وزن آنها ناچیز است به‌هم گره خورده‌اند و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC راتشکیل داده‌اند. وزنه‌ای به‌جرم ۳۰واحد از Aآویزان است. این مثلث ووزنه با ریسمانهایی که به B و C متصل شده‌اند نگاهداری می‌شود به‌طوری‌که BC افقی است. اگر ریسمانهای حامل هریك با امتداد BC زاویهٔ °۱۳۵ بسازد، نیروی‌کشش را دراین ریسمانها با روش نموداری پیدا کنید.

۱۴- شکل ۱۳-۱۷ داربست سقفی را نشان می‌دهد که ممکن است تصورشود وزن آن مطابق شکل توزیع شده است. نیرویی راکه برهریك از نه‌قطعهٔ این داربست‌فشار می‌آورد پیدا کنید وماهیت آن را بیان‌کنید.

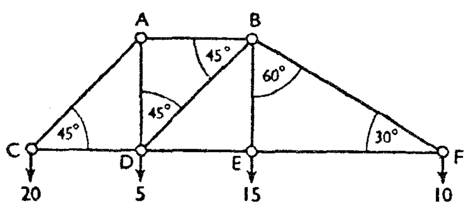
$$AE = EC = ED = ۲CF = ۲FD = ۲FB$$

وزنی‌که در E است ۲۰۰ واحد و درF برابر ۱۰۰ واحد و در C برابر ۱۵۰واحد است و ACB مثلثی قائم‌الزاویه است.



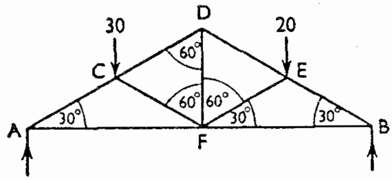
شکل ۱۳-۱۷

۱۵- داربست ABCDEF (شکل۱۳-۱۸) ازمیله‌های سبکی تشکیل شده است‌که به‌هم متصل شده‌اند. این داربست از میخهای صاف A و B آویزان است ووزنه‌هایی را مطابق شکل تحمل می‌کند. نیروهایی را که برهمهٔ میله‌ها فشار می‌آورد پیدا کنید و میله‌هایی راکه تحت‌تأثیر نیروی‌فشارنده است با دوخط‌کوتاه علامت‌بزنید.



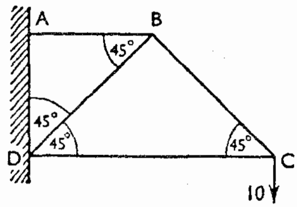
شکل ۱۳-۱۸

۱۶- شکل ۱۳-۱۹ داربستی را که از نه میلهٔ سبك تشکیل شده است نشان می‌دهد. بارهایی که براین داربست وارد می‌شوند درشکل نشان داده‌شده‌است. این‌داربست برروی پایه‌های قائم A و B گذاشته شده است. AB افقی است. عکس‌العملهای در A و B وهمچنین نیروهایی راکه برهمهٔ میله‌ها فشار می‌آورند پیدا کنید.



شکل ۱۳-۱۹

۱۷- داربست شکل ۱۳-۲۰ ازچهارمیلهٔ سبك AB، BC، CD و DB تشکیل شده است که آزادانه در B، C و D مفصل شده‌اند. این داربست درA و D به‌دیواری قائم متصل شده‌است. وزنهٔ ۱۰ واحدی ازC آویزان‌است. نیروهایی راکه‌برمیله‌ها فشار می‌آورند و عکس‌العملهای در A و D را پیدا کنید. ستونها را با دو خط کوتاه علامت بزنید.

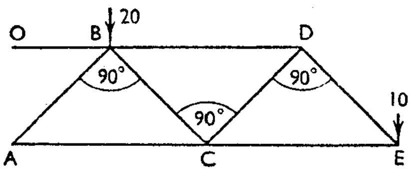


شکل ۱۳-۲۰

۱۸- داربستی از نه میلهٔ سبك متساوی تشکیل شده است که چنان به‌هم متصل شده‌اند که تشکیل چهارمثلث متساوی‌الاضلاع ABC، CBD، CDE، EDF را داده‌اند وکل داربست تشکیل متوازی‌الاضلاع ABFE را داده است. این داربست در صفحه‌ای قائم طوری قراردارد که پایینترین میلهٔ آن AB افقی است، و وزنه‌ای به‌جرم ۲۰ واحد ازF آویزان است وبا نیروهای قائمی که برA و B واردمی‌شوند به‌حال تعادل مانده است. نمودار نیروها را رسم‌کنید و نیروهایی راکه برمیله‌ها فشار می‌آورند نشان دهید.

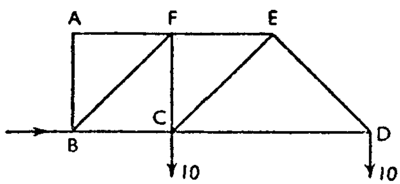
۱۹- شکل ۱۳-۲۱ داربستی را نشان می‌دهدکه از میله‌های سبکی تشکیل شده است که

آزادانه به‌هم مفصل شده‌اند و تشکیل سه مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را داده‌اند. این داربست در A به‌نقطه‌ای ثابت لولا شده است. میلهٔ افقی سبك OB که در B به‌داربست لولا شده است به‌نقطهٔ ثابت O متصل شده است. بارهایی که برداربست وارد می‌شوند در شکل نشان داده شده است. عکس‌العمل را در A و نیروی کششی را در OB، پیدا کنید و با رسم نمودار نیروهایی راکه برمیله‌ها فشار می‌آورند پیدا کنید.



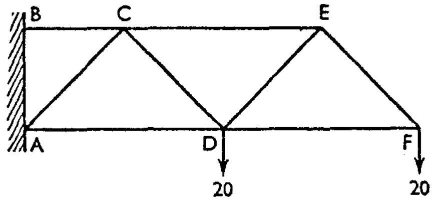
شکل ۱۳-۲۱

۲۰- شکل ۱۳-۲۲ داربستی را نشان می‌دهد که از نه میلهٔ سبك که به‌طور صیقلی مفصل شده‌اند تشکیل شده است. داربست به‌طور صیقلی به‌نقطهٔ ثابت A لولا شده است و با عکس‌العمل افقی که برB وارد می‌شود به‌وضعی ثابت مانده است. باری به‌جرم ۱۰ واحد درهریك از مفصلهای C و D قراردارد و زاویه‌های شکل همگی °۴۵ یا °۹۰اند. نیروهایی راکه برمیله‌ها فشار می‌آورند پیداکنید وستونها را با دوخط کوتاه علامت بزنید.



شکل ۱۳-۲۲

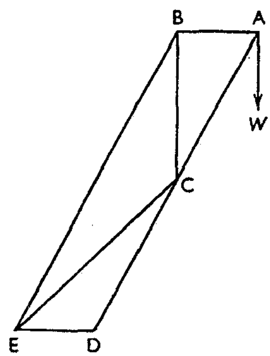
۲۱- شکل ۱۳-۲۳ داربستی را نشان می‌دهدکه از میله‌های سبك تشکیل شده است و در A و B به‌دیواری قائم متصل است. ADF و BCE افقی است وهمهٔ زاویه‌ها °۴۵ یا °۹۰اند. بارهایی مطابق شکل برداربست وارد می‌شوند. به‌فرض آنکه عکس‌العمل در B به‌طور کامل در امتداد BC است، بزرگی وجهت عکس‌العمل را در A، وهمچنین نیروهایی راکه برمیله‌ها فشار می‌آورند تعیین‌کنید و نشان دهید که کدام میله درحال کشش است وکدام درحال فشردگی. اندازه‌گیریها برروی نمودار



شکل ۱۳-۲۳

نیرو کافی است.

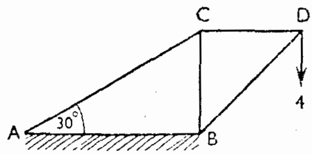
۲۲- ABCDE (شکل ۱۳-۲۴) داربستی است قائم که از میله‌های سبکی تشکیل شده است که به‌طور صیقلی به‌هم مفصل شده‌اند. ED افقی است. زاویه‌ها و طولها به‌شرح زیرند. ABED متوازی‌الاضلاع است که‌درآن $AB = ۲\ m$ ، $BC = ۴\ m$ است. ABC مثلثی قائم‌الزاویه است و $AC = CD$. وزنهٔ W از A آویزان است. نیروهایی راکه برشش میله فشار می‌آورند پیداکنید وماهیت هرکدام رابیان کنید.



شکل ۱۳-۲۴

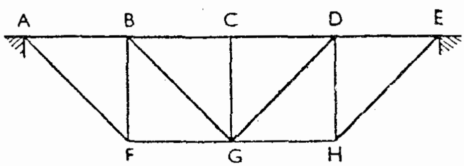
۲۳- مثلث AET را که در آن $AT = AE$ رسم کنید. فرض می‌کنیم که AE ، با مقیاسی معین، نشان‌دهندهٔ قسمت افقی و AT نشان‌دهندهٔ قسمت قائم یک سازه باشدکه درآن $AT = ۱۲\ m$. AE رابه‌چهاربخش برابرتقسیم می‌کنیم ونقطه‌های جدایی را B، C و D می‌نامیم. TB، TC و TD را متصل می‌کنیم، و فرض می‌کنیم که این‌خطوط وهمچنین TE میله‌های قید باشند. فرض می‌کنیم AB، BC، CD، و DE میله‌هایی صلب و بیوزنند وبارهای یك واحدی از نقطه‌های B، C، D و E آویـزان است. به‌طریق نموداری یا به‌هـر راه دیگرنیروهای کششی را در میله‌های قید به‌دست آورید.

۲۴ـ شکل ۱۳ـ۲۵ جرثقیلی را نشان می‌دهدکه از چهارمیلهٔ سبك تشکیل شده است‌که آزادانه به‌هم مفصل شده‌اند. میله‌ها AC، BC، BD، CD درصفحه‌ای قائمند و وزنه‌ای ۴ واحدی را در D نگاه می‌دارند. AB و CD افقـی هستند و BC قائم است. از راه نموداری یـا از هرراه دیگر نیروهایی راکـه در امتداد هرمیله وارد می‌شود پیدا کنید.



شکل ۱۳-۲۵

۲۵ـ شکل ۱۳ـ۲۶ تیرحمال پلی است‌که آزادانه برپایه‌هـای A و E تکیه دارد. CF



شکل ۱۳-۲۶

و CH مربعند و AB = BF = DE. بارهای ۱۰، ۱۵، و ۱۲ واحد بر B، C و D وارد می‌شوند. نیروهایی راکه بر AB، BF، BG، FG و CG فشار می‌آورند پیدا کنید.

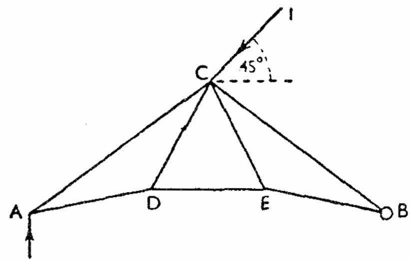
۲۶ـ مستطیل ABCD را که درآن AB = DC = ۱۵ cm و AD = BC = ۵ cm است رسم‌کنید. وسط DC را E می‌نامیم و AB را به‌سه قسمت می‌کنیم و محـل تقسیم را F و G می‌نامیم به‌طوری‌که F به A نزدیکتر است تا به B. اکنون DF، EG، FE، CG را وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم‌که شکل حاصل خرپای پلی رابا مقیاس مناسب نشان می‌دهد. اگر این خـرپا در A و B تکیه داشته باشد و AB تراز باشد و وزنه‌ای برابر ۱ واحد در F قرارداشته باشد نیروهایی راکه‌برقطعه‌های این خرپا وارد می‌شوند پیداکنید.

۲۷- در داربست ABCDE (شکل ۱۳-۲۷) میله‌ها آزادانه به‌هم مفصل شده‌اند.

$$AD = DC = CE = EB = DE,$$

و

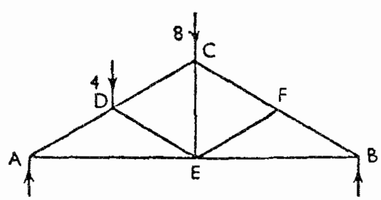
$$AC = CB = ۱/۸\ AD$$



شکل ۱۳-۲۷

این داربست آزادانه در A تکیه دارد ودر B به‌تکیه گاهی که همتراز A است‌لولا شده است. نیروی یك واحدی مطابق شکل برC وارد می‌شود. عکس‌العملها رادر A و B پیدا کنید و نشان دهیدکه چگونه می‌توان نمودار نیروها را برای‌نیروهایی که میله‌ها را فشار می‌دهند رسم‌کرد.

۲۸- داربستی مطابق شکل ۱۳-۲۸ ازمیله‌هایی تشکیل‌شده است‌که آزادانه به‌هم‌مفصل شده‌اند. این داربست در A و B تکیه دارد و AB افقی است. وزنه‌های ۸ و ۴ واحد از C و D آویزانند. زاویه‌های حادهٔ شکل $۳۰°$ یا $۶۰°$ هستند. برای نیروهایی‌که برقطعه‌های این داربست فشار می‌آورند نمودار نیرو رسم‌کنید.

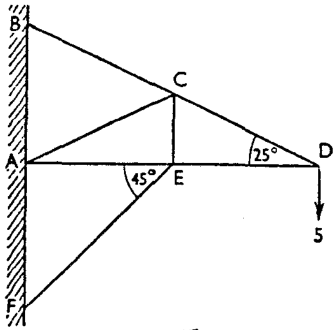


شکل ۱۳-۲۸

۲۹- سه‌میلهٔ سبك وهمطول به‌هم طوری مفصل شده‌اند که تشکیل داربست مثلث شکل ABC را داده‌اند. این داربست از A آویزان است، و وزنه‌های ۴ واحدی و ۵ واحدی به B و C متصل است. از راه نمودار یا از هرراه دیگر، زاویه‌ای راکه AB با قائم می‌سازد و نیرویی راکه درامتداد BC وارد می‌شود پیدا کنید.

۳۰- جرثقیلی‌دیواری‌مطابق شکل ۱۳-۲۹ ازمیله‌هایی تشکیل شده‌است. اگربه‌زنجیری

که در D است وزنهٔ ۵ واحدی آویزان شود، نیروهایی را که برمیله‌های جرثقیل فشار می‌آورند پیدا کنید. زنجیر از روی قرقره‌هایی که در D و E است عبور کرده است و در F به‌دیوار محکم شده است و $AE = ED$.



شکل ۱۳-۲۹

۱۴

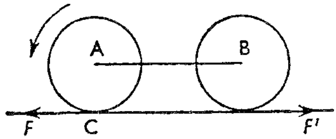
اصطکاک

۱۰۱۴. قوانین اصطکاک وکاربرد آنها دربارهٔ تعادل یک نقطهٔ مادی بریک سطح ناصاف در بخش ۱۰ مورد توجه قرارگرفت. اکنون حالتهایی را درنظر می‌گیریم که اجسامی جز نقطه‌های مادی تحت تأثیر نیروهای اصطکاک ونیروهای دیگر درحال تعادلند.

پیش ازآنکه به‌بحث دربارهٔ مسئله‌های ویژه‌ای بپردازیم، بهتراست به‌یك یادونکتهٔ کلی دربارهٔ اصطکاک اشاره کنیم.

۲۰۱۴. اصطکاک در مکانیك هرروزی نقش مهمی دارد. وقتی که کسی قدم می‌زند پاهای او گرایش به‌لغزش به‌سوی عقب دارند. از این کار به کمك اصطکاک میان پا و زمین، که درجهت جلو عمل می‌کند، جلوگیری می‌شود. درواقع نیروی اصطکاک نیرویی جلوبرنده است. بدون اصطکاک راه رفتن امکان‌ناپذیر است.

لوکوموتیو قطار نمی‌تواند به‌سوی جلو حرکت‌کند، حتی اگر قطار واگونها را هم به‌دنبال نداشته باشد، مگرآنکه نیرویی‌خارجی در جهت جلـو برآن وارد شود. موتور لوکوموتیو تنها می‌تواند چرخهای خود را بچرخاند. اگـراین چرخها برروی خطوط‌آهن صیقلی قرارگرفته باشند، بی‌آنکه سبب حرکتی به‌سوی جلو بشوند به‌دور خودمی‌گردند. درعمل، اصطکاك میان چرخ لوکوموتیو وخط آهن ازگردش یا از لغـزش درنقطهٔ تماس C جلوگیری می‌کند (شکل ۱۴-۱). به‌ایـن ترتیب چرخ درامتداد خط‌آهـن می‌غلتد، و



شکل ۱۴-۱

نیروی اصطکاك F درجهتی روبه‌جلو وارد عمل می‌شود. بزرگی قدرت‌کشش موتور بستگی به‌این نیروی‌اصطکاك دارد. چرخهای‌دیگرلوکوموتیو یا چرخهای واگونهای‌قطار با نیرویی که برمحور آنها مثلاً بر B وارد می‌شود به‌سوی جلوکشیده می‌شوند. چنین چرخهایی برخطوط آهن صیقلی بی‌آنکه بچرخند به‌سوی‌جلوسرمی‌خورند. اما اثراصطکاك که درجهت عقب وارد می‌شود، مانند F' درشکل ۱۴-۱، سبب می‌شودکه چرخهابغلتند.

۳۰۱۴. اثر ترمز

ترمز در اتومبیل چرخها را از چرخش بازمی‌دارد. وقتی که ترمزگرفته می‌شود چرخها قفل می‌شوند (یعنی از چرخش آنها جلوگیری می‌شود). در این هنگام اصطکاك لغزشی در نقطه‌های تماس با زمین وارد عمل می‌شود و از سرعت اتومبیل می‌کاهد تا اتومبیل بایستد.

اما در بسیاری از حالتها، ترمزفقط چرخش چرخها راکنترل می‌کند، به‌طوری که چرخها بازهم به‌غلتش خود ادامه می‌دهند. دراین حالت شاید درست روشن نباشد که نیرویی‌که سبب توقف اتومبیل می‌شود چگونه تولید می‌شود.

روشن است که‌کنترل چرخش چرخ نمی‌تواند، به‌تنهایی، تولید نیروی کندکننده در اتومبیل بکند. اگرزمین صیقلی بود، دراین صورت قفل‌کردن چرخها چنین اثری نداشت.

چرخ، هنگامی‌که مرکزش A (شکل ۱۴-۱) و نقطهٔ تماسش با زمین C است، آزادانه درحال غلتش است و درنقطهٔ C لغزش ندارد. تندی پسروی C نسبت به A برابر است با تندی پیشروی A، به‌طوری‌که C به‌طور لحظه‌ای درحال سکون است. بنابراین اگرچرخش چرخ‌کنترل شود تندی پسروی C کاهش پیدا می‌کند، **به‌طوری‌که** C مایل است که همراه A به‌پیش برود. این‌پدیده سبب می‌شودکه درC نیروی اصطکاك درجهت‌عقب وارد عمل شود، وهمین نیروست‌که حرکت چرخ را به‌سمت جلوکند **می‌کند**.

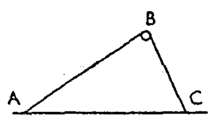
۴۰۱۴. مسئله‌هایی‌راکه شامل اصطکاك هستندتقریباً می‌توان به‌شرح زیر دسته‌بندی‌کرد:

۱ـ مسئله‌هایی‌که درآن جسم صلب است وتعادل را می‌توان تنها با لغزش ازمیان برد وجهت حرکت روشن است. مثلاً نردبانی‌که برزمینی ناصاف قراردارد و به‌دیواری

ناصاف، درصفحه‌ای قائم وعمود بردیوار، تکیه دارد. اگرنیروهای دیگری درکار نباشند واگرحرکتی درصفحهٔ قائم روی دهد، آن حرکت چنان خواهد بود کـه لبهٔ پایینی نردبان می‌لغزد واز دیـوار دور می‌شود و در همان زمـان لبـهٔ بالایی نردبان رو به‌سمت پایین می‌لغزد. هیچ لبه‌ای نمی‌تواند بدون لغزش لبهٔ دیگر بلغزد.

۲ـ مسئله‌هایی که درآن تعادل یا براثر لغـزش یا براثرکج شدن از میان می‌رود. مثلاً بلوك یا استوانه‌ای کـه برصفحه‌ای ناصاف قرار دارد و آهسته آهسته کـج می‌شود. اگرقائمی که از مرکزثقل می‌گذرد، پیش از شروع لغـزش جسم، بیرون از قاعـدهٔ جسم بیفتد، جسم پیش ازآنکه بلغزد به‌یك‌سو می‌افتد.

۳ـ مسئله‌هایی که درآن یك جسم غیرصلب نیز وجـود دارد مانند دومیلهٔ AB و BC کـه آزادانه درنقطهٔ B به‌هـم مفصل شده‌اند (شکل ۱۴-۲) و در A و C برصفحهٔ افقی ناصافی قرار دارند. در این حالت لازم نیست که لغزش هم در A روی دهد و هم در C. اصطکاك ممکن است در A یا در C اصطکاك حد باشد بی‌آنکه درهردوجا باشد. البته ممکن است اصطکاك حد در هردوجا پیدا شود. اگر نیروهای خارجی جـزنیروهای وزن میله‌ها ووزنه‌هایی که برآنها قرار دارند وجود نداشته‌باشند، دراین‌صورت، درحالت‌تعادل، اصطکاکهای در A و C باید برابر و ناهمسو باشند، زیرا آنها تنها نیروهای افقی هستند که وارد می‌شوند. با این‌همه ، بـاید دقت‌کرد که هیچ‌یك ازآنها اصطکاك حد، یعنی برابر μR به‌شمار نیاید.



شکل ۱۴-۲

۴ـ مسئله‌هایی‌دشوارترهم هستند که‌درآنهاجهت‌حرکت روشن نیست، یامسئله‌هایی که تعادل درآنها ممکن است براثرلغزش یا غلتش از میان برود. مثلاً نردبانی که برزمینی ناصاف قرار دارد و بردیواری ناصاف تکیه کرده است، اما درصفحهٔ قائـم عمود بردیوار نیست؛ یا استوانهٔ ناصاف که برروی دو استوانهٔ دیگـر قراردارد وآنها نیـز به‌نوبهٔ خود برصفحهٔ افقی ناصافی قراردارند.

دربندهای بعدی مثالهایی از انواع گوناگون آورده شده است.

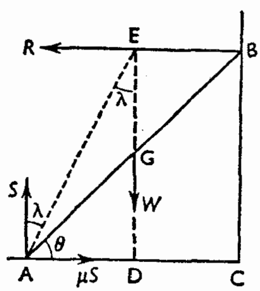
۵.۱۴. مثال ۱: یك طرف نردبانی یکنواخت، به‌وزن W، بردیواری صیقلی تکیه دارد، وطرف دیگرآن برزمین افقی ناصافی قراردارد. ضریب اصطکاك μ است. انحراف

نردبان را نسبت به افق هنگامی پیدا کنید که نردبان در حال لغزش است. عکس العملهای دیوار وزمین را نیز پیدا کنید.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۳) نردبان، G مرکز ثقل آن، C محل تلاقی دیوار بازمین باشد. چون دیوار صیقلی است، عکس‌العمل آن R در B باید عمود بردیوار باشد.

اگر S عکس‌العمل قائم نسبت به نردبان درنقطهٔ A باشد، دراین صورت، چون نردبان درحال لغزیدن است، اصطکاك در A برابر μS و به‌سمت دیوار خواهد بود.

روش (الف). برطبق آنچه در مسئله آمده است چهار نیرو بر نردبان اثر می‌کنندکه، با تجزیهٔ آنها در راستاهای قائم و افقی و گرفتن گشتاورها حول C یا A، سه معادله به‌دست خواهد آمد که به‌کمك آنها عکس‌العملهای نامعلوم R، S و زاویهٔ θ پیدا خواهد شد.



شکل ۱۴-۳

از تجزیه در راستای افقی، (۱) $\quad R=\mu S$

از تجزیه در راستای قائم، (۲) $\quad S=W$

با گرفتن گشتاور حول C،

$$Rl\sin\theta+W\frac{l}{2}\cos\theta=Sl\cos\theta \quad (3)$$

که درآن l طول نردبان است.

از (۱) و (۲) نتیجه‌می‌شود که $R=\mu W=W\,tg\lambda$، که درآن λ زاویهٔ اصطکاك است.

از (۳) نتیجه می‌شود که

$$W\,tg\lambda\sin\theta+\frac{1}{2}W\cos\theta=W\cos\theta$$

$$\therefore \qquad W\,tg\lambda\,tg\theta=\frac{1}{2}W$$

$$\therefore \qquad tg\theta=\frac{1}{2}cotg\lambda$$

عکس‌العمل برایند از زمین برابر است با $\sqrt{S^2+\mu^2S^2}$

$$=S\sqrt{1+tg^2\lambda}$$

$$=\frac{W}{\cos\lambda}$$

روش (ب). زاویهٔ انحراف نردبان را می‌توان به‌جای در نظر گرفتن مؤلفه‌های S و μS عکس‌العمل زمین، با در نظر گرفتن عکس‌العمل برایند زمین در A پیدا کرد. این کار سبب می‌شود که‌عدهٔ نیروهایی که برنردبان وارد می‌شوند به‌سه نیرو کاهش پیدا کند، که می‌بایستی درنقطه‌ای، مثلاً نقطهٔ E، تلاقی کنند. این نقطه‌درمحلی است که خط قائمی که از G می‌گذرد، راستای R را قطع می‌کند.

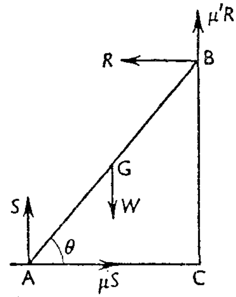
همچنین چون نردبان درحال لغزش است، عکس‌العمل برایند در A باخط قائم A، زاویهٔ λ، زاویهٔ اصطکاك، می‌سازد.

اگر (شکل ۱۴-۳) خط قائم EG خط AC را در D قطع کند خواهیم داشت:

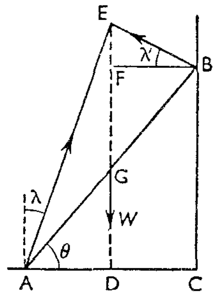
$$tg\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{ED}{2AD}=\frac{1}{2}cotg\lambda$$

روش هندسی به‌ویژه هنگامی مفید است که تنها مکان جسم درحالت‌تعادل حد مورد نیاز باشد، که دراین صورت نتیجه را بی‌آنکه از عکس‌العملها استفاده کنیم وبدون حل کردن معادله‌ها می‌توان به‌دست آورد. حتی وقتی که بخواهیم عکس‌العملها را به‌دست آوریم، استفاده از روش و پیدا کردن مکان جسم‌می‌تواند مفید باشد، زیرا عکس‌العملها را با تجزیه یا گرفتن گشتاورها می‌توان پیدا کرد.

مثال ۲: یك طرف نردبانی یکنواخت، به‌وزن W، بردیواری ناصاف تکیه دارد، و طرف دیگر آن برزمین افقی ناصافی قرار دارد. ضریب اصطکاك با زمین و با دیوار به‌ترتیب μ و μ' است. زاویهٔ انحراف نردبان را با افق، هنگامی که نردبان در حال شروع به‌لغزش است پیدا کنید و دراین هنگام عکس‌العملهای زمین و دیوار را به‌دست آورید.



شکل ۴-۱۴ الف



شکل ۴-۱۴ ب

فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۴ الف) نردبان، G مرکز ثقل آن، R و S عکس‌العملهای قائم دیوار و زمین برنردبان باشد. چون هردو طرف نردبان درحال شروع به‌لغزش است، در نقطهٔ B نیروی اصطکاك $\mu' R$ راکه به‌سمت بالا وارد می‌شود و درنقطهٔ A نیروی اصطکاك μS راکه به‌سمت دیوار واردمی‌شود خواهیم داشت.

روش (الف). فرض می‌کنیم θ زاویهٔ انحراف نردبان با زمین و $۲l$ طول آن باشد.

با تجزیه در راستای افقی،

$$\mu S = R \qquad (۱)$$

با تجزیه در راستای قائم،

$$S + \mu' R = W \qquad (۲)$$

باگرفتن گشتاور حول C،

$$W l \cos\theta = S \times ۲l\cos\theta - R \times ۲l\sin\theta$$

یا

$$W\cos\theta = ۲S\cos\theta - ۲R\sin\theta \quad (۳)$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود

$$S(۱ + \mu\mu') = W$$

$$\therefore \qquad S = \frac{W}{۱+\mu\mu'} \quad \text{و} \quad R = \frac{\mu W}{۱+\mu\mu'}$$

اگر در معادلهٔ (۳) به‌جای R برابرآن μS بگذاریم:

$$W\cos\theta = ۲S(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

$$= \frac{۲W}{۱+\mu\mu'}(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

$$\therefore \qquad ۱ = \frac{۲}{۱+\mu\mu'}(۱ - \mu tg\theta)$$

$$\therefore \qquad \frac{1+\mu\mu'}{2}=1-\mu tg\theta$$

یا
$$\mu tg\theta=\frac{1-\mu\mu'}{2}$$

یا
$$tg\theta=\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}$$

روش (ب). دراین حالت اندازهٔ θ را می‌توان به‌آسانی بـا استفاده از عکس‌العملهای براینده در A و B پیداکرد. مانند مثال (۱)، نتیجه‌را می‌توان با استفاده‌ازهندسه به‌دست آورد.

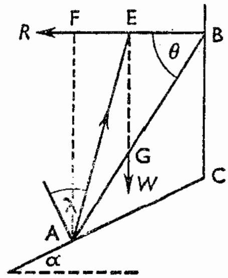
این‌عکس‌العملها باید با خطوط قائم در A و B زاویه‌های λ و λ'بسازند (که درآن $tg\lambda=\mu$ و $tg\lambda'=\mu'$)، و همان‌طورکـه درشکل ۱۴-۴ ب نشان داده شده است، خط قائمی راکه از G می‌گذرد درنقطه‌ای، مثلاً E، قطع کند.

بنابراین
$$tg\theta=\frac{BC}{AC}$$
$$=\frac{ED-EF}{AC}$$
$$=\frac{ED}{2AD}-\frac{EF}{2FB}$$
$$=\frac{1}{2}(cotg\lambda-tg\lambda')$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}-\mu'\right)$$
$$=\frac{(1-\mu\mu')}{2\mu}$$

پس ازآن می‌توانیم R و S را با تجزیه مطابق شرح بالا پیداکنیم.

مثال ۳. یك انتهای نردبانی یکنواخت، به‌وزن W، بردیواری صاف تکیه دارد وانتهای دیگرآن برزمینی ناصاف قراردارد که نسبت به‌دیوار شیبی داردکه زاویهٔ آن بـا افق α است. انحراف نردبان را نسبت‌به‌افق هنگامی پیداکنیدکه نردبان‌درحالت شروع به‌لغزش است، ونشان دهیدکه دراین هنگام عکس‌العمل دیوار برابراست با $W\,tg(\lambda-\alpha)$که درآن λ زاویهٔ اصطکاك است.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۵) نردبان، G مرکزثقل‌آن، و θ زاویهٔ انحراف



شکل ۱۴-۵

آن با افق باشد.

چون دیوار صیقلی است، عکس‌العمل R در B عمود بردیوار است.

وقتی که نردبان درحالت‌شروع به‌لغزش‌است‌عکس‌العمل‌برایند در Aزاویهٔ λ باخط‌عمود برA می‌سازد،واز E، محل‌تلاقی‌راستای R وخط قائمG می‌گذرد.

AF را عمود بر BE رسم می‌کنیم.

دراین صورت
$$tg\theta=\frac{EG}{EB}=\frac{\frac{۱}{۲}AF}{FE}$$
$$=\frac{۱}{۲}cotg\,FAE$$
$$=\frac{۱}{۲}cotg(\lambda-\alpha)$$

که ازآن θ، زاویهٔ انحراف نردبان با افق به‌دست می‌آید.

اگـر طول نردبان $۲l$ باشد، دراین صورت باگـرفتن گشتاورها حـول A خواهیم داشت:

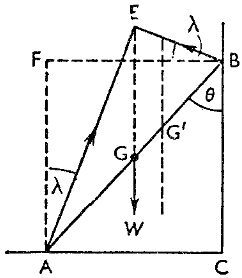
$$R\times ۲l\sin\theta=Wl\cos\theta$$
$$\therefore \qquad R=\frac{W}{۲}cotg\,\theta=\frac{W}{۲}\times ۲\,tg(\lambda-\alpha)$$
$$=W\,tg(\lambda-\alpha)$$

مثال ۴: یك طرف نردبانی یکنواخت برروی زمین افقی ناصافی قراردارد وطرف دیگرآن به‌دیوار قائم ناصافـی تکیه دارد. ناصافی زمین و دیـوار همسان است و زاویهٔ اصطکاك برابر λ است. نشان دهید کـه بیشترین انحـراف نردبان نسبت به‌قائم برابر ۲λ است.

وقتی‌که نردبان درچنین وضعی هست‌آیا می‌توان بی‌آنکه نردبان بلغزد از

آن بالا رفت؟

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۶) نردبان، G مرکز ثقل آن، θ زاویهٔ انحراف آن نسبت به قائم باشد. هنگامی که نردبان درحالت شروع به لغزش است عکس‌العملهای برایند در A و B زاویه‌های برابر λ با عمودهای برآن نقاط می‌سازند و باید همدیگررا در نقطه‌ای مانند E واقع برقائمی که از G می‌گذرد



شکل ۱۴-۶

تلاقی کنند. از روی شکل دانسته می‌شودکه

$$\angle AEG=\lambda,\ \ \angle GEB=۹۰^\circ-\lambda,\ \ \angle AEB=۹۰^\circ$$

وبنابراین مرکز شبه دایرهٔ AFEB نقطهٔ G است.

$$\therefore\qquad \theta=\angle EGB$$

وچون $AG=GE$ است $=۲\angle AEG$

$$\therefore\qquad \theta=۲\lambda$$

اگر وزنی اضافی در هرجای نردبان میان A و G قرار گیرد، مرکز ثقل نردبان و وزنهٔ اضافی به‌نقطه‌ای زیر G تغییرجا می‌دهد. دراین صورت‌خط‌قائمی که از این مرکزثقل جدید می‌گذرد درسمت چپ‌خط قائمی خواهد بودکه‌درشکل نشان داده شده است، و روشن است‌که دراین حالت هم عکس‌العملهای A و B می‌توانند برروی این‌خط‌قائم تلاقی‌کنند، بی‌آنکه‌انحراف‌آنها نسبت‌به‌عمودهایی که بر A و B رسم می‌شوند بزرگتر از λ باشد. درواقع این انحرافها از λ کمترند و بنابراین تعادل دیگر درحالت حد نیست.

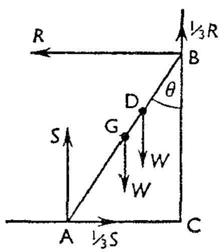
وقتی‌که وزنهٔ اضافی به G می‌رسد بازهم تعادل به‌حالت حد می‌رسد.

وقتی‌که وزنهٔ اضافی به‌بالای G می‌رسد مرکز ثقل نردبان ووزنهٔ اضافی به‌بالای G (مثلاً G') می‌رسد وعکس‌العملهای A وB نمی‌توانند برروی‌قائمی

که از G' می‌گذرد بـا یکدیگر برخوردکنند، زیـرا برای‌آنکه چنین چیزی پیش آید لازم است که یکی از زاویه‌های انحراف نسبت به‌عمودی که درآن نقطه‌رسم می‌شود بزرگتر از λ باشد. بنابراین ازاین نردبان فقط تا مرکزآن می‌توان بالا رفت.

اگروزنهٔ اضافی به‌پای نردبان‌اضافه شود (مثلاً کسی برپلهٔ پایینی‌بایستد) مرکز ثقل به‌زیرG تغییرجا می‌دهد. درایـن صورت، شخص دیگری می‌تواند از نردبان بالا برود و به‌نقطه‌ای بالاتر ازG برسد، اما تنها تا ارتفاعی می‌تواندبالا برود که مرکزثقل نردبان و دو وزنهٔ اضافی به G برگردد.

مثال ۵: انتهای بالایی نردبانی یکنواخت بردیوار قائم ناصافی تکیه دارد وانتهای‌پایینی آن برروی سطح افقی ناصافی قـرار دارد. ضریب اصطـکاك در هردوجا برابر $\frac{۱}{۳}$ است. ثابت کنیدکه اگر زاویهٔ انحراف نردبان نسبت به‌قائم به‌اندازه‌ای باشدکه تانژانت آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است، وزنه‌ای هموزن نردبان را نمی‌توان به‌نقطه‌ای‌بالاتر از $\frac{۹}{۱۰}$ طول نردبان از پای آن متصل‌کرد بی‌آنکه تعادل به‌هم بخورد.



شکل ۱۴-۷

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۷) نردبان، G مرکـز ثقل آن، W وزن آن، و D نقطه‌ای باشدکه وزنهٔ اضافـی W به‌نردبان متصل شده است و نردبان در حالت شروع به‌لغزش باشد.

روش (الف). اگـر R و S عکس‌العملهای قائم دیـوار وزمین باشند اصطکاك دراین نقطه‌ها $\frac{۱}{۳}R$ و $\frac{۱}{۳}S$ خواهد بود.

با تجزیه درامتداد افقی $\qquad R=\frac{۱}{۳}S \qquad (۱)$

با تجزیه در امتداد قائم (۲) $S+\frac{۱}{۳}R=۲W$

$$\therefore \quad S+\frac{۱}{۹}S=۲W$$

$$\therefore \quad S=\frac{۹}{۵}W$$

و $R=\frac{۳}{۵}W$

درصورتی‌که طول نردبان $۲l$ و $AD=x$، و $\angle ABC=\theta$ باشدکه $tg\theta=\frac{۱}{۲}$ است، با گرفتن گشتاور حول A خواهیم‌داشت:

$$\therefore \quad Wl\sin\theta+Wx\sin\theta=R\times ۲l\cos\theta+\frac{۱}{۳}R\times ۲l\sin\theta$$

$$\therefore \quad W\sin\theta+W\frac{x}{l}\sin\theta=\frac{۶}{۵}W\cos\theta+\frac{۲}{۵}W\sin\theta$$

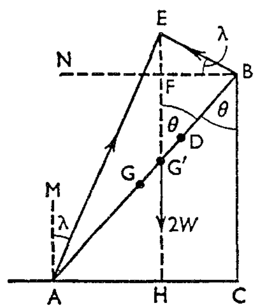
$$\therefore \quad \frac{x}{l}=\frac{۶}{۵}\cot g\theta+\frac{۲}{۵}-۱$$

$$=\frac{۱۲}{۵}-\frac{۳}{۵}=\frac{۹}{۵}$$

$$\therefore \quad x=\frac{۹}{۵}l=\frac{۹}{۱۰}$$ طول نردبان

روش (ب). این مسئله را نیز می‌توان به‌شیوهٔ هندسی حل کرد.

برای‌آنکه تعادل پابرجا باشد لازم است که عکس‌العملهای برایند در A و B با یکدیگر برروی قائمی‌که از مرکز ثقل نردبان ووزنهٔ اضافی می‌گذرد برخورد کنند.



شکل ۱۴-۸

اگر G (شکل ۱۴-۸) مرکزثقل نردبان تنها و G′ مرکزثقل نردبان و

وزنهٔ اضافی درحالت حد باشد، دراین صورت عکس‌العملهای در A و B با یکدیگربرروی قائمی‌که از G' می‌گذرد، مثلاً درE، برخورد می‌کنندبه‌طوری‌که

$$tg\,AEG' = cotg\,G'EB = \frac{۱}{۳}$$

$$\therefore \qquad AH = \frac{۱}{۳}EH \quad و \quad EF = \frac{۱}{۳}FB$$

بنابراین
$$BC = EH - EF$$
$$= ۳AH - \frac{۱}{۳}FB$$

اما چون $tg\theta = \frac{۱}{۲}$ است
$$BC = ۲AC$$

$$\therefore \qquad ۲AC = ۳AH - \frac{۱}{۳}FB$$

$$\therefore \qquad ۲(AH + HC) = ۳AH - \frac{۱}{۳}HC$$

$$\therefore \qquad ۳AH = ۷HC$$

$$\therefore \qquad AH = \frac{۷}{۱۰}AC$$

بنابراین
$$AG' = \frac{۷}{۱۰}AB = \frac{۷l}{۵}$$

نیز اگر فاصلهٔ وزنهٔ افزوده شدهٔ W از بالای A برابر x باشد، چون مرکز ثقل این وزنه ونردبان در G' است، باگرفتن گشتاورها حول A خواهیم داشت:

$$Wx + Wl = ۲W \times \frac{۷}{۵}l$$

$$\therefore \qquad x = \frac{۹}{۵}\,l = \frac{۹}{۱۰}$$ طول نردبان

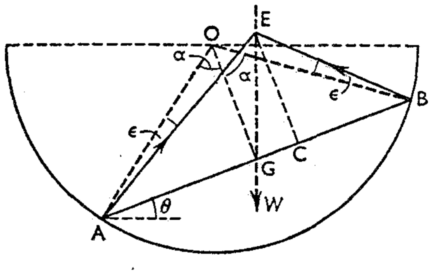
مثال ۶: میله‌ای یکنواخت درون کره‌ای توخالی وناصاف به‌حالت تعادل حد قراردارد. میله در صفحه‌ای قائم که از مرکزکره می‌گذرد قراردارد. نشان دهید که میله با افق زاویه‌ای می‌سازدکه تانژانت آن

$$\frac{sin\,۲\epsilon}{cos\,۲\alpha + cos\,۲\epsilon}$$

است‌که ϵ زاویهٔ اصطکاك و ۲α زاویه‌ای است که میله با آن از مرکزکره دیده می‌شود.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۹) میله، G مرکزثقل آن و O مرکزکره باشد.

دراین صورت عکس‌العملهای در A و B با یکدیگر در نقطه‌ای مانند E واقع برخط قائمی که از G می‌گذرد برخورد می‌کنند وچون در A و B عمودبر کره‌اند با شعاعهای OA و OB زاویه‌هایی برابر ϵ می‌سازند.



شکل ۱۴-۹

خط EC را عمود بـر AB رسم می‌کنیم. در این صورت اگـر θ زاویهٔ انحراف AB نسبت به‌افق باشد، خواهیم داشت:

$$tg\theta=\frac{GC}{EC}=\frac{\frac{1}{2}(AC-CB)}{EC}$$

$$=\frac{1}{2}(tg AEC-tg CEB)$$

اما $\angle AEC=\alpha+\epsilon$ و $\angle CEB=\alpha-\epsilon$

$$\therefore \quad 2tg\theta=tg(\alpha+\epsilon)-tg(\alpha-\epsilon)$$

$$=\frac{sin(\alpha+\epsilon)}{cos(\alpha+\epsilon)}-\frac{sin(\alpha-\epsilon)}{cos(\alpha-\epsilon)}$$

$$=\frac{sin 2\epsilon}{cos(\alpha+\epsilon)cos(\alpha-\epsilon)}$$

$$\therefore \quad tg\theta=\frac{sin 2\epsilon}{cos 2\alpha+cos 2\epsilon}$$

تمرین ۱۰۱۴

۱ ـ یك انتهای نردبانی یکنواخت برزمینی افقی قراردارد وانتهای دیگرآن بردیواری قائم تکیه دارد. ضریبهای اصطکاك به‌ترتیب $\frac{3}{8}$ و $\frac{1}{3}$ است. زاویهٔ انحـراف نردبان

را نسبت به‌خط قائم هنگامی‌که نردبان درحالت شروع به‌لغزیدن است پیدا کنید.

۲ ـ یك سرنردبانی یکنواخت برزمینی افقی و ناصاف که ضریب اصطکاك آن $\frac{۵}{۸}$ است قراردارد. سردیگرنردبان بردیوار قائم صیقلی تکیه دارد. اگرزاویهٔ انحراف‌نردبان °۴۵ باشد، نشان دهیدکه شخصی‌که وزنش برابروزن نردبان است فقط تاسه‌چهارم طول نردبان می‌تواند از نردبان بالا برود.

۳ ـ درحالتی مشابه مسئلهٔ قبل، چه وزنه‌ای باید به‌انتهای پایینی نردبان متصل‌کرد تا شخص مذکور بتواند تا بالای نردبان برود؟

۴ ـ نردبانی یکنواخت به‌وزن W بردیوار قائم صیقلی تکیه دارد. پای نردبان برزمینی ناصاف قراردارد‌که نسبت به‌دیوار شیبی دارد که زاویهٔ آن با افـق α است. ثابت کنیدکه، اگر نردبان درحالت تعادل حد باشد، زاویهٔ انحراف نردبان نسبت‌به‌دیوار به‌اندازه‌ای است‌که تانژانت آن برابراست با

$$۲tg(\epsilon - \alpha)$$

که درآن ϵ زاویهٔ اصطکاك است. همچنین ثابت‌کنیدکـه در این حالت عکس‌العمل برایند بازمین برابراست با $\frac{W}{cos(\epsilon - \alpha)}$.

۵ ـ عصایی یکنواخت به‌طول l درحلقهٔ ناصاف یك جاچتری‌که درارتفاع h بالای‌زمین است قرارگرفته است. این عصا برکف صیقلی اتاق نیـزتکیه دارد. نشان دهیدکـه اگرضریب اصطکاك‌کمتر از

$$\frac{h}{\sqrt{l^۲ - h^۲}}$$

باشد، تعادل ناممکن است مگرآنکه عصا قائم باشد.

۶ ـ میله‌ای یکنواخت به‌طول l در صفحه‌ای قائـم بر (و بالای) تیرافقی صافی‌کـه در ارتفاع h است تکیه دارد. انتهای پایینی میله برسطح زمین قرار دارد. نشان دهید که اگر میله درحالت شروع به‌لغزش باشد وزاویهٔ انحراف آن نسبت به‌افق برابر θ باشد، دراین صورت ضریب اصطکاك میان میله وسطح زمین برابراست با

$$\frac{l sin ۲\theta sin\theta}{۴h - l sin ۲\theta cos\theta}$$

۷ ـ میلهٔ سنگین نازك یکنواخت AB میان دوصفحهٔ OA و OB قراردارد‌که با خـط قائم زاویهٔ °۴۵ می‌سازند و با یکدیگر در خطی افقی برخورد می‌کنند. انتهای A از میله وصفحهٔ OA ناصافند. انتهای B از میله و صفحـه OB صیقلی‌اند. نشان

دهیدکه میله در هروضعی که زاویهٔ θ با صفحهٔ صیقلی بسازد قرار خـواهدگرفت، به‌شرط‌آنکه $tg\theta$ میان $۲\mu - ۱$ و $۲\mu + ۱$ باشد.

۸ ـ دومیلهٔ یکنواخت AB و BC هریك به‌طول $۲l$ در B محکم به‌هم متصل‌شده‌اند، به‌طوری‌که ABC زاویه‌ای قائمه است. ثابت‌کنیدکه اگر میله‌ها درتماس با حلقهٔ گرد ثابتی به شعاع a به‌حالت تعادل حـد باشند، و AB افقی و BC قائمی مماس بردایره باشد، دراین صورت

$$۲a(۱-\mu)=l(۱+\mu^۲)$$

که درآن μ ضریب اصطکاك میان میله‌ها وحلقه است.

۹ ـ نردبانی است یکنواخت کـه یك سرآن به‌زمین و سردیگرآن به‌دیواری قائـم تکیه دارد. نردبان درصفحه‌ای عمود برخط تلاقی دیواربا زمین است. ضریبهای‌اصطکاك با دیوار وزمین هردو برابر $tg۱۵^\circ$ است. نشان دهیدکه زاویهٔ انحـراف نردبان با زمین نمی‌توانـدکمتر از ۶۰° باشد. نشان دهیدکه اگـر بخواهیم زاویهٔ انحـراف نردبان ۳۰° باشد، فقـط درصورتی ممکن است کـه وزنه‌ای به‌وزن $(۱+\sqrt{۳})\frac{۱}{۲}$ برابروزن نردبان به‌پای نردبان بسته شود.

۱۰ـ میله‌ای است یکنواخت‌که میان دوصفحه به‌حال تعادل حد قراردارد وزاویهٔ‌انحراف آن با هردوصفحه یکسان است. یکی از دوصفحه افقی است ودیگری ۱۲۰° نسبت به‌آن شیب دارد. اگـر زاویهٔ اصطکاك میان میله وسطح شیبدار برابر ۳۰° باشد، نشان دهیدکه ضریب اصطکاك میان میله وصفحهٔ افقی برابر $\frac{۱}{۵}\sqrt{۳}$ است.

۱۱ـ الوار یکنواخت AB به‌طول ۲/۴ m و به‌جرم ۱۰ kg در A روی زمین‌ناصافی قراردارد. انتهای دیگرآن به‌لبهٔ میزصافی تکیه داردکه ارتفاع آن ۱/۲ متراست و با افق زاویه‌ای می‌سازدکه تانژانت آن برابر $\frac{۴}{۳}$ است. نشان دهید کـه μ، ضریب اصطکاك میان الوار وزمین، بزرگتراز $\frac{۴۸}{۸۹}$ است. اگـر $\mu=\frac{۳}{۴}$ باشد، چه وزنی‌باید در B به‌الوارآویزان‌کرد تا الوار نلغزد؟

۱۲ـ میله‌ای است یکنواخت و سنگین به‌وزن Wکه با افـق زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. یـك سرآن برروی زمین وسردیگرآن به‌دیواری قائم تکیه دارد. صفحهٔ قائمی‌که ازمیله می‌گذرد عمود بردیوار است. ناصافی زمین ودیوار یکسان است وضریب اصطکاك میان هریك ازآنها ومیله برابر $\frac{۱}{۲}$ است. نشان دهیدکـه اصطکاك درانتهـای پایینی

میله می‌تواند هر مقداری میان $\frac{1}{2}W$ و $\frac{1}{3}W$ داشته باشد. مقادیر مربوطهٔ اصطکاك را برای انتهای بالایی میله پیداکنید. حالتی را بحث‌کنیدکه ضریب اصطکاك برابر $\sqrt{2}-1$ است.

۱۳- نردبانی است یکنواخت به‌جرم ۵۰ kg که یك‌سرآن برزمینی ناصاف وسردیگرآن به‌دیوار صیقلی قائمی تکیه دارد. اگر زاویهٔ انحراف نردبان با افق °۶۰ باشد، نیروی اصطکاك لازم را برای‌آنکه نردبان درجای خود بماند پیداکنید. اگرضریب اصطکاك میان نردبان وزمین برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، بزرگترین وزنی را پیدا کنید که می‌توان به‌بالای نردبان آویزان‌کرد بی‌آنکه نردبان بلغزد.

۱۴- میله‌ای یکنواخت درون بشکهٔ استوانه‌ای شکل ناصافی قراردارد که به‌زمین‌محکم شده است و محورآن افقی است. اگرمیله درصفحه‌ای قائم عمود برمحور بشکه قرار داشته باشد، نشان دهیدکه حداقل ممکن برای زاویهٔ انحراف آن نسبت‌به‌قائم به‌اندازه‌ای است‌که تانژانت آن برابراست با $cotg\,2\lambda+\frac{\cos\gamma}{\sin 2\lambda}$ که درآن λ زاویهٔ اصطکاك میان میله وبشکه، و γ زاویهٔ مرکزی میله از نزدیکترین نقطهٔ واقع برمحور بشکه است.

۱۵- پای نردبانی، به‌طول ۹ m وجرم ۲۵ kg، درسطح افقی ناصافی قراردارد، و انتهای بالایی نردبان با دیوار قائم ناصافی درتماس است. نردبان درصفحه‌ای‌قائم عمود بردیوار قراردارد. نخستین پلهٔ نردبان درفاصلهٔ ۳۰ cm ازپای نردبان‌است وبقیهٔ پله‌ها نیز به‌فاصلهٔ ۳۰ cm از یکدیگرند. هنگامی‌که زاویهٔ شیب نردبان نسبت به‌افق °۶۰ است وضریب اصطکاك هردوسرنردبان ۰/۲۵ است، بالاترین پله‌ای را پیداکنید که شخصی به‌جرم ۷۵ kg می‌تواند تا آن بالا برود بی‌آنکه نردبان بلغزد.

۱۶- نردبانی یکنواخت به‌طول $2a$ برصفحه‌ای افقی وناصاف درنقطهٔ O قراردارد. ریسمانی به‌بالای این نردبان بسته شده است و از روی قرقرهٔ ثابتی که به‌فاصلهٔ $2a$ بالای قائم O است عبورکرده است. به‌این‌ترتیب نردبان زاویهٔ α نسبت‌به‌قائم ساخته است. ثابت‌کنیدکه تعادل فقط هنگامی ممکن است برقرار شود که ضریب اصطکاك میان نردبان وصفحهٔ افقی بزرگتر از $tg\frac{1}{2}\alpha$ باشد.

۱۷- ثابت‌کنیدکه اگر ضریب اصطکاك با دیوار قائم و زمین افقی به‌ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ باشد،

کمترین اندازهٔ زاویهٔ انحراف یك نردبان با افق که درصفحه‌ای قائم قراردارد ویك سرآن برزمین وسردیگرآن به‌دیوار تکیه دارد درحدود $51°20'$ است

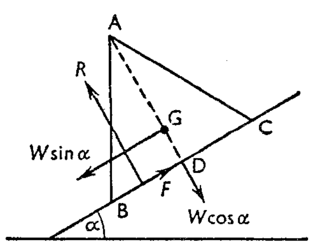
۱۸- میله‌ای یکنواخت به‌حالت تعادل حد قراردارد. ایـن میله میان دوصفحه قراردارد که یکی افقی است ودیگری باآن زاویه $135°$ می‌سازد. شیب میله نسبت به‌هردو صفحه یکسان است. اگـرزاویهٔ اصطکاك میان میله وسطح شیبدار $22/5°$ باشد، ثابت کنیدکه ضریب اصطکاك میان میله وصفحهٔ افقـی $\frac{1}{17}(3\sqrt{2}+1)$ است.

۱۹- A، یك سرمیلهٔ یکنواخت AB، در تماس با صفحه‌ای شیبدار است که زاویهٔ $30°$ با افق می‌سازد. میله با جهت روبه‌بالای صفحه زاویهٔ $30°$ می‌سازد و درصفحه‌ای قائم است که ازخط بزرگترین شیب صفحه می‌گذرد. این میله به‌کمك ریسمانی کـه به‌سردیگرآن متصل است وبه‌موازات صفحه نگاهداری شده است به‌حال تعادل‌قرار دارد. ثابت کنیدکه زاویهٔ اصطکاك در A باید دست‌کم به‌اندازه‌ای باشدکه‌تانژانت آن $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ است.

۲۰- به‌یك سرA ازسیم سنگین یکنواخت AB حلقه‌ای سبك‌متصل است که می‌تواند در راستای میلهٔ افقی ناصافی بلغزد. B سردیگـرسیم به‌کمك نـخ انعطاف‌ناپذیر سبکی به‌نقطهٔ C از میله متصل است. اگرسیم، هنگامی کـه زاویهٔ α با قائـم می‌سازد و $\angle ABC = 90°$ است، درحالت تعادل حد باشد، ثابت کنیدکه μ، ضریب اصطکاك میان حلقه ومیله، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu(1+\cos^2\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$$

۶.۱۴. مثال ۱: مخروطی، به‌شعاع r وارتفاع h، برصفحه‌ای ناصاف قراردارد‌که زاویهٔ انحراف آن نسبت به‌افق کم‌کم زیاد می‌شود. نشان دهیدکه اگـرضریب‌اصطکاك کمتر از $\frac{4r}{h}$ باشد، مخروط پیش ازآنکه واژگون شود می‌لغزد.



شکل ۱۴-۱۰

حل: فرض می‌کنیم W وزن مخروط، G (شکل ۱۴-۱۰) مرکز ثقـل آن، α زاویهٔ انحراف صفحه باشد. فـرض می‌کنیم R عکس‌العمل قائم و F نیـروی اصطکاك وارد برمخروط باشد. اگرمخروط بلغزد $F=\mu R$ است و اگـرمخروط حول B واژگون شود عکس‌العمل R بایستی برB وارد شود.

اگر $W\sin\alpha>\mu W\cos\alpha$، یعنی $tg\alpha>\mu$، باشد، مخروط می‌لغزد.
باگرفتن گشتاورها حول B، مخروط هنگامی واژگون خواهد شدکه

$$W\sin\alpha\times\frac{h}{۴}>W\cos\alpha\times r$$

یعنی هنگامی‌که $tg\alpha>\frac{۴r}{h}$

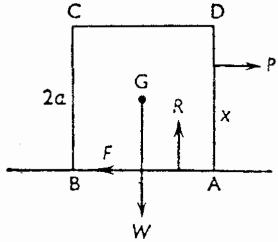
اگر μ کمتر از $\frac{۴r}{h}$ باشد، و α به‌تدریج بزرگ شود، $tg\alpha$ پیش از آنکـه به‌مقدار $\frac{۴r}{h}$ برسد مقداری برابر μ پیدا خواهدکـرد و مخـروط شروع به‌لغـزش می‌کند.

اگر μ بزرگتر از $\frac{۴r}{h}$ باشد، $tg\alpha$ نخست مقـدار $\frac{۴r}{h}$ را پیـدا مـی‌کنـد و مخروط واژگون خواهد شد.

اگر μ برابر $\frac{۴r}{h}$ باشد، مخروط، همزمان، شروع به‌لغزش وواژگون **شدن** می‌کند.

مثال ۲: بلوکی به‌شکل مکعب که هرضلع آن $۲a$ است برصفحه‌ای افقی قراردارد. ضریب اصطکاك میان بلوك وصفحه برابر μ است. نیرویی افقی که به‌تدریج زیادمی‌شود بروجه قائم‌مکعب و عمود بـرآن ودر صفحه‌ای قائم کـه از مرکـز ثقل مکعب می‌گذرد وارد می‌شود. نشان دهید که اگر نقطهٔ اثر نیرو در ارتفاعی بالاتر از $\frac{a}{\mu}$ باشد، درصورتی‌که $\mu<\frac{۱}{۲}$ باشد مکعب بی آنکه یك‌بر شود شروع به لغزش خواهدکرد، و درصورتی که $\mu>\frac{۱}{۲}$ باشد مکعب بی آنکـه بلغزد یك برخواهد شد.

حل: فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۴-۱۱) برش قائم مکعب باشدکه ازمرکزثقل



شکل ۱۴-۱۱

آن، G، می‌گذرد و نیروی P برآن‌وارد می‌شود،وفرض می‌کنیم‌که P درارتفاع x ازبالای صفحه باشد. عکس‌العمل قائم را R و نیروی اصطکاك را F می‌نامیم.

برای لغزش $P>\mu W$ است، زیرا $F=\mu R$ و $R=W$

برای یك‌بر شدن، R باید بر A وارد شود و

$$Px>Wa \quad \text{یا} \quad P>W\frac{a}{x}$$

چون کمترین اندازهٔ $\frac{a}{x}$ برابر $\frac{a}{2a}$ یعنی $\frac{1}{2}$ است، در صورتی که $\mu<\frac{1}{2}$ باشد، P با افزایش خود ابتدا به‌اندازهٔ μW می‌رسد، به‌طوری‌کـه دراین‌حالت مکعب بی‌آنکه یك‌بر شود می‌لغزد.

اگر $\mu>\frac{1}{2}$ باشد، بسته به‌اینکـه $\mu>\frac{a}{x}$ یا $\mu<\frac{a}{x}$ باشد، یعنـی بسته به اینکه $x>\frac{a}{\mu}$ یا $x<\frac{a}{\mu}$ باشد، مکعب یك‌بر می‌شود یا می‌لغزد.

بنابراین اگر $x>\frac{a}{\mu}$ باشد مکعب بی‌آنکه بلغزد سرنگون می‌شود.

تمرین ۲۰۱۴

۱ ـ قاعدهٔ استوانه‌ای یکنواخت، به‌شعاع r وارتفاع h، برصفحه‌ای ناصاف قـرار دارد که شیب آن نسبت به‌افق به‌تدریج زیاد می‌شود. نشان دهید که اگـر $\frac{2r}{h}$ کمتراز ضریب اصطکاك باشد، استوانه پیش ازآنکه بلغزد سرنگون خواهد شد.

۲ ـ مخروطی قائم را از قاعده برصفحهٔ شیبدار ناصافی می‌گذارند. اگرضریب اصطکاك برابر ۰/۲۵ باشد، و اگـرمخروط همزمان درحال لغزش و سرنگونی باشد، زاویهٔ

مخروط را پیدا کنید.

۳ ـ مثلثی متساوی‌الاضلاع درصفحه‌ای قائم طوری قراردارد که یك ضلع آن برروی صفحه‌ای افقی و ناصاف تکیه دارد. نیرویی افقی که به‌تدریج اضافه می‌شود، بربالاترین رأس‌مثلث درصفحهٔ مثلث‌وارد می‌شود. ثابت کنیدکه اگرضریب‌اصطکاك کمتر از $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$ باشد، مثلث پیش ازآنکه سرنگون شود می‌لغزد.

۴ ـ مستطیلی با اضلاع a و h درصفحه‌ای قائم طوری قراردارد‌که یك ضلع آن‌به‌طول a برمیزافقی ناصافی تکیه دارد. نیرویی افقی که به‌تدریج افزوده می‌شود در صفحهٔ مستطیل بربالاترین ضلع وارد می‌شود. شرط آن راکه مستطیل پیش از لغزیدن سرنگون شود پیدا کنید.

۵ ـ مخروطی قائم برصفحهٔ افقی ناصافی قراردارد و برأس آن نیرویی افقی وارد می‌شودکه به‌تدریج افزایش می‌یابد. اگر r شعاع و h ارتفاع مخروط باشد، نشان دهیدکه بسته به‌اینکه ضریب اصطکاك بزرگتر یاکوچکتر از $\frac{r}{h}$ باشد مخروط سرنگون خواهد شد یا می‌لغزد.

۶ ـ ضلع BC، از تیغهٔ مثلث شکل ABC که در رأس C قائمه است، برصفحهٔ افقی ناصافی قراردارد. اگراین صفحه حول محوری که درخودش وعمود بر BC است کج‌شود، به‌طوری که C از B پایینتر بیاید، نشان دهیدکه تیغه، بسته به‌اینکه ضریب اصطکاك‌کمتر یا بیشتر از$tg\mathrm{A}$ باشد شروع به‌لغزش یا یك‌برشدن‌خواهدکرد.

۷ ـ بلوك مکعبی شکل‌یکنواختی برروی سطح‌شیبدار ناصافی گذاشته شده است. ریسمانی به‌نقطهٔ وسط لبهٔ بالایی مکعب‌که افقی است متصل است. این ریسمان به موازات خط بزرگترین شیب سطح است. نشان دهیدکه زاویهٔ شیب سطح باید کمتر از اندازه‌ای باشدکه تانژانت آن $(۱+۲\mu)$ است، که درآن μ ضریب اصطکاك است.

۸ ـ برروی سطح شیبدار ناصافی‌که زاویهٔ شیب آن α است $\left(\alpha<\frac{۱}{۴}\pi\right)$، مکعبی‌قرار گرفته است. دولبهٔ بالایی و دولبهٔ پایینی مکعب افقی هستند. ریسمانی به‌نقطهٔ وسط بالاترین لبهٔ این مکعب متصل است ومکعب را به‌موازات خط بزرگترین شیب سطح می‌کشد. نشان‌دهیدکه، اگرضریب اصطکاك میان سطح شیبدار ومکعب از $\frac{۱}{۲}(۱-tg\alpha)$ تجاوز کند، امکان نداردکه بدون سرنگون شدن مکعب، آن را از جایش کشاند.

۹ ـ مکعبی یکنواخت بالبهٔ $۴a$ برصفحهٔ افقی‌ناصافی قراردارد. نیرویی افقی که‌به‌تدریج

زیاد می‌شود بریکی‌ازوجوه قائم‌مکعب ودرارتفاع a بالای‌مرکزوجه واردمی‌شود. نشان دهیدکه درهریك از حالتهای زیرتعادل چگونه به‌هم می‌خورد.

(الف) هنگامی که ضریب اصطکاك میان صفحهٔ شیبدار و مکعب برابر ۰/۵ است.

(ب) هنگامی که ضریب اصطکاك برابر ۰/۷ است.

۱۰- مثلث ABC، که درآن BC افقی است و AB و AC با هم برابرو بزرگتراز BC هستند، برش منشور مثلث‌القاعده‌ای را نشان می‌دهد که یکی از وجوه مستطیل آن برروی سطح افقی ناصافی قرارگرفته است، ووجه دیگرآن که با AB نشان داده می‌شود تحت تأثیر فشار باد است. α زاویهٔ انحراف هریك از وجوه شیبدار نسبت به‌قاعده است وباد عمود برAB می‌وزد. نشان دهیدکه اگرفشار باد به‌اندازهٔ کافی زیاد شود، بسته به‌اینکه زاویهٔ اصطکاك بزرگتریاکوچکتراز $\pi - 2\alpha$ باشد، منشور سرنگون‌خواهد شد یا می‌لغزد.

۱۱- جعبه‌ای مکعبی شکل، که طول هرضلع آن a ووزن آن W است، برسطح افقی ناصافی قراردارد. میله‌ای سنگین به‌طول b ووزن w طوری قرارگرفته است که‌یك سرآن روی سطح افقی وبا آن زاویهٔ 45° می‌سازد وسردیگرآن بروجه قائم‌جعبه تکیه دارد. صفحهٔ قائمی که میله درآن است از مرکزجعبه می‌گذرد. اگر از لغزش انتهای پایینی میله جلوگیری کنیم، حداقل ضریب اصطکاك میان جعبه وسطح‌افقی را برای‌آنکه جعبه نلغزد پیداکنید. ازاصطکاك میان میله وجعبه صرف‌نظرمی‌کنیم. همچنین اگرجعبه درحال افتادن باشد، نسبت میان وزن میله ووزن جعبه راپیدا کنید.

۱۲- مکعبی یکنواخت که طول هرضلع آن $4a$ ووزن آن W است برسطح افقی ناصافی تکیه دارد. نیروی P که به‌تدریج زیاد می‌شود عمود بروجه F وبه طرف داخل مکعب، در نقطه‌ای وارد می‌شود که برروی خط قائمی است که از مرکز این وجه می‌گذرد وبه‌فاصلهٔ a ازاین مرکزاست. ثابت کنیدکه، بسته به‌اینکه ضریب اصطکاك میان مکعب وسطح افقی کمتریا بیشتر ازمقدار معینی باشد، تعادل با لغزش یایك‌بر شدن مکعب به‌هم می‌خورد. این مقدار را پیداکنید.

اگر P به‌اندازه‌ای نرسدکه تعادل به‌هم بخورد و $P = \frac{1}{2}W$ باشد، پیدا کنیدکه عکس‌العمل قائم درچه‌فاصله‌ای ازوجه F مکعب وارد می‌شود.

۷۰۱۴ مثال: دومیلهٔ همطول AB و BC، که در B آزادانه به‌هم مفصل شده‌اند، در

صفحه‌ای قائم به‌حال تعادل هستند و دوانتهای A و C برسطح ناصاف افقی‌قرار دارند. اگروزن AB دوبرابروزن BC باشد، نشان‌دهیدکه اصطکاك حدنمی‌تواند هم درA وهم در C باشد، واگراصطکاك حد دریکی ازاین دو نقطه برقرار باشد آن نقطه C است. همچنین اگر بزرگترین زاویه‌ای که میله‌ها می‌توانند با هم بسازند قائمه باشد، ضریب اصطکاك را پیداکنید.

حل: نیروهای اصطکاك در A و C (شکل ۱۴-۱۲) باید برابر باشند، زیرا آنهاتنها نیروهای خارجی افقی هستند که برمیله‌ها اثر می‌کنند. اگر $\angle ABC = ۲\theta$ و عکس‌العملهای در A و C برابر R و S باشند، درصورتی‌که حول A گشتاورها را برای هردو میله بگیریم خواهیم داشت

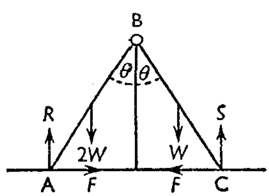
$$S \times ۴l\sin\theta = W \times ۳l\sin\theta + ۲Wl\sin\theta$$

که درآن $۲l$ طول AB یا BC است.

$$\therefore \qquad S = \frac{۵}{۴}W$$

$$\therefore \qquad R = \frac{۷}{۴}W$$

حال اگر اصطکاك در A برابر حد باشد اندازهٔ آن باید μR یا $\frac{۷}{۴}\mu W$ باشد، وحال‌آنکه اگر در C برابرحد باشد اندازهٔ آن باید μS یا $\frac{۵}{۴}\mu W$ باشد. اما نیروی اصطکاك در A و C باید یك اندازه باشد، وبنابراین نمی‌تواند درهر دونقطه برابرحد باشد، زیرا $\frac{۵}{۴}\mu W$ نمی‌تواند برابر $\frac{۷}{۴}\mu W$ باشد.



شکل ۱۴-۱۲

همچنین روشن است که F پیش ازآنکه برابر $\frac{۷}{۴}\mu W$ شود برابر $\frac{۵}{۴}\mu W$ خواهد شد، بنابراین اگربخواهد دریکی‌ازدو نقطه حدباشدآن نقطه C خواهدبود. وقتی‌که $۲\theta = ۹۰^\circ$ است نقطهٔ C درحالت‌شروع به‌لغزش‌است‌وحال‌آنکه

A چنین نیست ونیروی اصطکاکی در A و C هردو برابر $\frac{۵}{۴}\mu W$ است.

بنابراین با گرفتن گشتاور حول B برای میلهٔ BC خواهیم داشت:

$$\frac{۵}{۴}\mu W \times ۲l\cos\theta = S \times ۲l\sin\theta - W \times l\sin\theta$$

$$\therefore \qquad \frac{۵}{۲}\mu W = ۲S\,tg\theta - W\,tg\theta$$

$$\therefore \qquad \frac{۵}{۲}\mu W = ۲ \times \frac{۵}{۴}W - W = \frac{۳}{۲}W$$

$$\therefore \qquad \mu = \frac{۳}{۵}$$

تمرین ۳۰۱۴

۱ ـ دومیلهٔ AB و BC، کـه کلفتی وجنس آنهـا یکسان است، به‌ترتیب ۰/۹ m و ۰/۶ m طول‌دارند وآزادانه به‌هم مفصل شده‌اند. دستگاه درصفحه‌ای قائم‌طوری قراردارد‌که دوانتهای A وC برروی سطح افقی ناصافی‌تکیه دارند. اگربزرگترین اندازهٔ ممکن برای زاویهٔ ABC درشرایط تعادل برابر °۹۰ باشد، ضریب‌اصطکاك میان میله‌ها وسطح افقی را پیداکنید، وهمچنین تعیین کنیدکه، اگر زاویهٔ میان دو میله اندك‌اندك از °۹۰ بیشترشود، تعادل چگونه به‌هم‌می‌خورد.

۲ ـ دومیلهٔ یکنواخت، هموزن وهمطول AB و BC درنقطهٔ B آزادانه به‌هم مفصل شده‌اند ودرصفحه‌ای قائم طوری قرار دارندکـه دو انتهای A و C برروی سطح افقی‌ناصافی تکیه‌دارند. اگرتعادل فقط هنگامی ممکن‌باشدکه $\angle ABC$ کوچکتر از زاویهٔ قائمه باشد، ضریب اصطکاك میان میله‌ها وسطح افقی راپیداکنید.

۳ ـ دونردبان یکنواختAB وBC، باطولهای برابرووزنهای W و $W'$$(W > W')$، ازبالای خود، B، به‌یکدیگـرلولا شده‌اند وهنگامی‌که با هـم زاویهٔ ۲θ می‌سازند برزمینی ناصاف ایستاده‌اند. نشان دهیدکه زاویهٔ عکس‌العمل‌کل در A با خط قائم کوچکتر از زاویهٔ عکس‌العمل‌کل در C با خط قائم است. به‌فرض آن‌که ضریبهای اصطکاك در A و C هریك برابر μ است، نشان دهیدکه بـا زیاد شدن θ، سرانجام در C لغزش روی می‌دهد و دراین صورت

$$\mu = \left(\frac{W + W'}{W + ۳W'}\right) tg\alpha$$

که درآن α اندازه‌ای از θ است‌که برای آن لغزش روی می‌دهد.

۴ - AB و BC دومیلهٔ یکنواخت و همطولند که وزن هرکدام برابر W است و درB آزادانه به‌هم متصل شده‌اند. دوانتهای A و C درتماس با سطحی ناصافند که‌شیب آن α است. ABC درصفحه‌ای قائم واقع است وخطی‌که A و C را به‌هم وصل می‌کند برروی خط بزرگترین شیب صفحه است ومیلهٔ BC به‌طور افقی قرار گرفته است. پیدا کنیدکه در نقطه‌های A و C چه فشارهایی برسطح وارد می‌شود، و اصطکاك دراین نقطه‌ها چقدر است. نشان دهیدکه $cos^{2}\alpha$ باید بزرگتر از $\frac{1}{3}$ باشد، و درنقطهٔ C، بسته به‌آنکه $cos^{2}\alpha$ کوچکتر یا بزرگتر از $\frac{2}{3}$ باشد، اصطکاك به سوی بالا یا پایین سطح وارد می‌شود. اگر $\alpha = 30°$ باشد، ودریکی از نقطه‌های A و C اصطکاك درحالت حد باشد، آن نقطه کدام است، وضریب اصطکاك را تعیین کنید.

۵ - دومیلهٔ یکنواخت وهمطول AB و BC به‌طور صیقلی درنقطهٔ B به‌هم متصل شده‌اندکه انتهای C برروی سطح افقی ناصافی قراردارد و انتهای A بالای این سطح نگاهداری شده است ومجموعهٔ دومیله به‌حال تعادلند. ثابت کنیدکه اگر α و β زاویه‌های شیب CB و BA نسبت به‌افق باشند، ضریب اصطکاك باید ازمقدار زیر بیشتر باشد.

$$\frac{2}{tg\beta - 3\,tg\alpha}$$

۶ - یك جفت پله، که طول آنها یکسان اما وزن آنها برابر است، از بالا به هم به‌طور آزاد مفصل شده‌اند. دو طرف دیگر پله‌ها برروی سطح افقی ناصافی تکیه دارند و مجموعه درصفحه‌ای قائم قراردارد. پله‌ها به‌تدریج ازهم بازمی‌شوند. ثابت کنیدکه ابتدا پله سبکتر آغاز به‌لغزش می‌کند، وآن هنگامی روی خواهد داد که تانژانت زاویهٔ انحراف هریك از پله‌ها با قائم برابرمقدار زیراست:

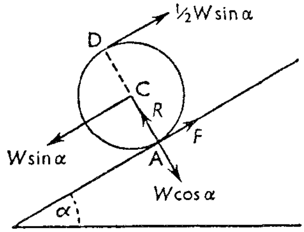
$$\frac{3W_1 + W_2}{W_1 + W_2}\mu$$

که درآن W_1 و W_2 وزن پله‌ها $(W_1 < W_2)$، و μ ضریب اصطکاك هریك ازپله‌ها با سطح افقی است.

۸.۱۴. مثال ۱: برروی سطح شیبدار ناصافی که زاویهٔ آن با افق برابر α است، کره‌ای یکنواخت با نیرویی به‌بزرگی $\frac{1}{2}W\sin\alpha$ که مماس برمحیط کره وارد می‌شود به‌حال تعادل است (W وزن کره است). ثابت کنیدکه نیرو باید به‌موازات سطح

شیبدار وارد شود وضریب اصطکاك نبایدکمتر از $\frac{1}{2}tg\alpha$ باشد.

حل : فرض می‌کنیم A (شکل ۱۴-۱۳) نقطهٔ تماس کره، C مرکزآن و a شعاع آن باشد. دراین صورت اگرکره حول A نغلتدگشتاور نیروی $\frac{1}{2}W\,sin\alpha$ حـول A باید برابرگشتاور نیروی وزن حول A، یعنی برابر $W\,a\,sin\alpha$ باشد.



شکل ۱۴-۱۳

بنابراین نیروی $\frac{1}{2}W\,sin\alpha$ باید به‌فاصلهٔ $2a$ از A باشد، و بنابراین باید به‌موازات سطح شیبدار برD، انتهای دیگرقطری‌که A می‌گذرد، وارد شود.

اگرلغزش وجود نداشته باشد، با تجزیه به‌موازات سطح شیبدار خواهیم داشت:

$$F+\frac{1}{2}W\,sin\alpha=W\,sin\alpha$$

که درآن $F\leqslant\mu R$ و $R=W\,cos\alpha$.

$$\therefore \qquad \frac{1}{2}W\,sin\alpha\leqslant\mu W\,cos\alpha$$

$$\therefore \qquad \mu\geqslant\frac{1}{2}tg\alpha$$

مثال ۲: زنجیری سنگین برروی سطح شیبدار ناصافی کـه با افق زاویهٔ α می‌سازد قرار گرفته است. بخشی از زنجیربه‌طول a متر درامتداد خط بزرگترین شیب صفحه است‌وبخش باتیمانده به‌طول b متر از بالای سطح به‌طورقائم‌آویزان است. اگر زنجیر درحالت شروع به‌لغزش باشد، نشان دهیدکه b یا صفریا $2a\,sin\alpha$است.

حل : فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱۴-۱۴) نشان‌دهندهٔ زنجیرباشد. وزن واحد طـول زنجیر را w فرض می‌کنیم. نیروی اصطکاك که برAB اثرمی‌کند $\mu a w\,cos\alpha$است

که چون $\mu = tg\alpha$ است، این مقدار برابر $awsin\alpha$ است.

اگر A درحالت شروع به‌حرکت به‌سوی پایین باشد

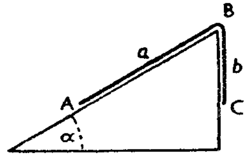
$$wasin\alpha - wasin\alpha = bw$$

$$\therefore \qquad b = 0$$

اگر A درحالت شروع به‌حرکت به‌طرف بالاباشد

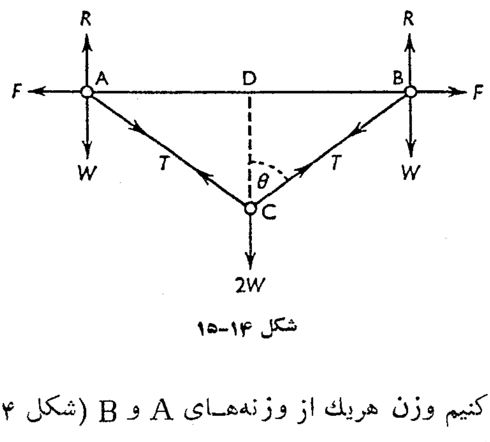
$$bw = wasin\alpha + wasin\alpha$$

$$\therefore \qquad b = 2asin\alpha$$



شکل ۱۴-۱۴

مثال ۳: دوحلقه با وزنهای برابرآزادانه درامتداد میلهٔ افقی ناصافی حرکت می‌کنند که ضریب اصطکاك حد برابر μ است. این دوحلقه با ریسمانی صیقلی به‌طول l به‌هم وصل شده‌اند. حلقه‌ای هموزن مجموع دوحلقهٔ دیگر در این ریسمان می‌تواند آزادانه حرکت کند. ثابت کنید هنگامی که دستگاه درحالت تعادل است دوحلقه‌ای که درمیله‌اند نمی‌توانند دورتر از $2\mu(1+4\mu^2)^{-1/2}l$ ازیکدیگر بروند.



شکل ۱۴-۱۵

حل : فرض می‌کنیم وزن هریك از وزنه‌های A و B (شکل ۱۴-۱۵) برابر W و وزن C برابر $2W$ باشد.

دراین صورت چون C آزادانه در ریسمان حرکت می‌کند، کشش ریسمان

درسراسرآن یکسان است وخطقائم CD که از C می‌گذرد نیمساز زاویهٔ ACB است. فرض می‌کنیم $\angle DCB=\theta$.

با تجزیه درامتداد قائم برای C خواهیم داشت:

$$۲T\cos\theta=۲W$$

عکس‌العمل R میان A ومیله برابراست با

$$W+T\cos\theta=۲W$$

وبنابراین حداکثراصطکاك در A برابراست با $۲\mu W$.

درحالت تعادل $T\sin\theta=F\not>۲\mu W$

یا $W\,tg\theta\not>۲\mu W$

یا $tg\theta\not>۲\mu$

اگر $DB=x$ باشد $DC^۲=\frac{l^۲}{۴}-x^۲$ و $tg\theta=\frac{x}{DC}$ خواهد بود.

$$\therefore\quad \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}l^۲-x^۲}\not>۴\mu^۲$$

$$\therefore\quad x^۲\not>\mu^۲l^۲-۴x^۲\mu^۲$$

$$\therefore\quad x^۲(۱+۴\mu^۲)\not>\mu^۲l^۲$$

$$\therefore\quad x\not>\frac{\mu l}{\sqrt{۱+۴\mu^۲}}$$

تمرین ۴.۱۴

۱ ــ الواری سنگین به‌طول a برروی سطح افقی ناصافی افتاده است. به‌یك انتهای آن ریسمانی متصل است‌که باافق زاویهٔ α می‌سازد. به‌کمك این ریسمان انتهای‌الوار به‌آرامی بلند می‌شود. نشان دهیدکه اگر μ، ضریب اصطکاك، کوچکتر از $cotg\alpha$ باشد، انتهای دیگرالوار، ناگهان می‌لغزد. اگر، هنگامی‌که لغزش شروع می‌شود، $\mu tg\alpha$ از یك بیشتر شود، نسبت‌کشش ریسمان را به‌وزن الوار پیداکنید.

۲ ــ جسمی به‌وزن W برسطحی افقی قراردارد‌که ضریب اصطکاك آن μ است. نیرویی افقی برابر nW، که‌کوچکتر از μW است، بر W وارد می‌شود. نیروی افقی دیگر P، نیـز عمود بر W وارد می‌شود. حداقل اندازهٔ P راکـه سبب حرکت W شود پیداکنید وزاویهٔ انحراف جهت حرکت را نسبت به‌جهت P پیداکنید.

۳ ــ داربست مربع شکل صلبی ازسیم سنگین یکنواخت تشکیل شده است ودرصفحه‌ای

قائم برروی استوانه‌ای افقی و ناصاف به‌شعاع a طوری قرارگرفته است که دوضلع آن درتماس بـا استوانه است. نشان دهیدکه درحالت حـد θ، زاویهٔ انحراف قطر داربست نسبت به‌افق، از معادلهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$b\sin\theta = a\sqrt{۲}\sin\epsilon\cos(\theta+\epsilon)$$

که درآن ϵ زاویهٔ اصطکاك و b فاصلهٔ میان مرکزمربع ازمحور استوانه است.

۴ ـ بامقداری سیم مثلثی متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. این مثلث درصفحه‌ای‌قائم طوری قرار گرفته است کـه یك ضلع آن افقی است. به‌هرضلع مثلث دانـهٔ تسبیحی به‌وزن W کشیده شده است واین دانه‌ها با ریسمان درازی‌که درحالت کشش است به‌هم متصل شده‌اند. ریسمان از حلقه‌های صیقلی‌کوچکی کـه درگوشه‌های مثلث نصب شده‌اند عبور کرده است. ثابت کنیدکـه اگر نیروی افقی که به‌تدریج زیاد می‌شود بـردانهٔ ضلع افقـی وارد شود، هنگامی‌کـه اندازهٔ نیـرو به $۲\mu W$ برسد، کـه در آن μ ضریب اصطکاك میان دانه‌ها وسیم است، دستگاه شروع به حـرکت خواهدکرد.

۵ ـ دومیلهٔ یکنواخت وهمطـول AB و CD هـریك به‌وزن W آزادانه ازوسط به‌هم مفصل شده‌اند ودرصفحه‌ای قائم طوری قرارگرفته‌اندکه دوانتهای A وC برسطح افقی ناصافی به‌ضریب اصطکاك μ تکیه کرده‌اند. نخی‌که به‌دوسرآن وزنه‌هایی‌هریك به‌وزن W متصل است از B و D می‌گذرد. ثابت‌کنیدکه درحالت تعادل حدمیله‌ها با افق زاویه‌ای می‌سازندکه تانژانت آن برابر است با

$$\frac{۳}{۱+۲\mu}$$

۶ ـ گوه‌ای به‌وزن W برزمینی ناصاف قراردارد. انتهای نازك آن به دیواری قائـم و صیقلی فشارمی‌آورد. وجه شیبدارگوه زاویه‌ای برابر۲θ با دیوارمی‌سازد. استوانهٔ قائم مدوری‌که صیقلی و به‌وزن $W_۱$ است میان‌گوه و دیوار قراردارد. هنگامی‌که گوه درحالت شروع به‌لغزش است وضریب اصطکاك میان زمین وگوه برابرμاست، رابطهٔ میان W و $W_۱$ را پیدا کنید.

۷ ـ میلهٔ سبك AD درنقطهٔ B از روی میخی ناصاف ودرنقطهٔ C از زیر میخی‌ناصاف که درهمان خط افقی قراردارد می‌گذرد. به‌دوسرA وD به‌ترتیب وزنه‌هایی‌به‌وزن ۱۵ N و ۹ N متصل است. طـولهای AB، BC و CD به‌تـرتیب برابرند بـا ۰/۹ m، ۰/۶ m، و ۰/۳ m. اگـرکمترین نیروی افقی کـه میله را به‌حرکت

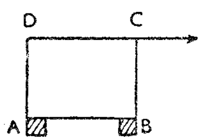
وامی‌دارد N ۶ باشد، به‌شرط آنکه ناصافی میخها یکسان باشد، ضریب اصطکاک را پیدا کنید.

۸ ـ گوه‌ای به‌جرم M که وجوه آن با هم زاویهٔ α می‌سازند از یک وجه با سطحی افقی در تماس است. جسمی کوچک به‌جرم m در تماس با وجه دیگر قرار دارد و به‌کمک نیرویی افقی از لغزش آن به‌سمت پایین جلوگیری می‌شود. اگر $\mu(<tg\alpha)$ ضریب اصطکاک جسم و گوه باشد، کوچکترین مقدار اصطکاک میان گوه و سطح افقی چقدر باید باشد تا گوه به‌حالت سکون باقی بماند؟

۹ ـ استوانهٔ مدور ناصافی به‌قطر d برسطح افقی ناصافی قرار دارد، ناصافی هردو یکسان است. میله‌ای یکنواخت به‌طول $۲l$ مماس براستوانه، درصفحه‌ای قائم که عمود برمحور استوانه است، قرار دارد. سردیگر میله برروی سطح افقی است. اگر اصطکاک درهردوسرمیله به‌حالت حد باشد، هنگامی که میله زاویهٔ ۳۰° با قائم می‌سازد، ثابت کنید که زاویهٔ اصطکاک $\frac{۱}{۲}\text{Arc}sin\frac{l}{d}$ است.

۱۰ـ دونقطهٔ مادی یکسان، هریک به‌وزن W، برروی میزافقی ناصافی گذاشته شده‌اند وبا ریسمان محکم انعطاف‌ناپذیری به‌هم متصل‌شده‌اند. ثابت کنید که حداقل نیروی افقی که می‌تواند بریکی ازآنها، درجهتی که با ریسمان زاویهٔ θ می‌سازد، اثر کند و سبب شود که نقطه‌های مادی به‌حال شروع به‌حرکت درآیند $۲\mu W\cos\theta$ است، که درآن μ ضریب اصطکاک میان هریک از نقطه‌های مادی و میز است.

۱۱ـ شکل ۱۴-۱۶ برش مرکزی ABCD از جعبه‌ای را نشان می‌دهد که پر از شن است و با نیرویی افقی که برC وارد می‌شود به‌سوی جلو کشانده می‌شود. جعبه‌در A و B بردو میلهٔ عرضی متصل است وکل دستگاه برروی سطح زمین، که ضریب



شکل ۱۴-۱۶

اصطکاک آن با میله‌ها در A و B برابر μ است، کشانده می‌شود. اگر $AB=l$، $BC=h$ ووزن جعبه وشن برابر W باشد، ثابت کنید که عکس‌العملهای قائم در A وB به‌ترتیب برابرند با $\frac{l-۲\mu h}{۲l}W$ و $\frac{l+۲\mu h}{۲l}W$.

۱۲- میلهٔ یکنواخت سنگینی درA برروی یك میخ ناصاف ودرB در زیریك میخ ناصاف درصفحه‌ای قائم قرار دارد. B بالاتر از A واقع است. نشان دهید که کوتاهترین میله‌ای که می‌تواند در این وضع به حال سکون بماند به طول $a(1+tg\,\alpha\,cotg\lambda)$ است، که درآن a فاصلهٔ میان میخها، α زاویهٔ انحراف خط میان‌میخها نسبت‌به‌افق، و λ زاویهٔ اصطکاك است.

۱۳- تیغهٔ مدور یکنواختی به‌شعاع a ووزن W، برروی دوسطح ثابت ناصاف که هریك با افق زاویهٔ 45° می‌سازد، درصفحه‌ای قائم قرارگرفته است، به‌طوری که خط تلاقی این دوسطح عمود برصفحهٔ قائم تیغه است. اگرضریب اصطکاك درهرمحل تماس برابر $\frac{1}{2}$ باشد، ثابت کنیدکه کمترین زوج لازم برای‌آنکه تیغه را درصفحهٔ خودش حول مرکز آن بچرخاند دارای گشتاوری برابر $\frac{2\sqrt{2}Wa}{5}$ خواهد بود.

۱۴- کره‌ای برروی‌سطح شیبدارناصافی که باافق زاویهٔ α می‌سازد قراردارد. درنقطه‌ای ازمحیط کره ودرصفحه‌ای قائم که ازمرکزکره وخط بزرگترین شیب سطح عبور می‌کند نیرویی به‌طور مماس برکره وارد می‌شود. جهت این نیرو با افق زاویه‌ای برابرβ (درهمان جهت α) می‌سازد. اگرضریب اصطکاك برابرμ باشد، ثابت کنیدکه

$$\mu \geqslant \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha + cos\,\beta}$$

اگرβ تغییرپذیرباشد، ثابت کنیدکه کمترین مقدار μ برای‌آنکه تعادل امکانپذیر باشد برابراست با $tg\frac{1}{2}\alpha$.

اما اگرنیرویی که وارد می‌شود حداقل مقدار را داشته باشد، ثابت کنید که این کمترین مقدار μ برابراست با $\frac{1}{2}tg\,\alpha$.

۱۵- چرخی در صفحه‌ای قائم طوری قرار گرفته است که می‌تواند آزادانه حول مرکز خودش، C، بچرخد. میلهٔ یکنواخت AB به‌وزن W به‌طور صیقلی درA لولاشده است وA همتراز با C است. میله درنقطهٔ D با چرخ تماس دارد. ثابت کنیدکه برای چرخاندن چرخ زوجی لازم است که گشتاورآن بزرگتراست از

$$\frac{\mu W \times AB \times CD}{2AC}$$

که درآن μ ضریب اصطکاك میان میله وچرخ است. همچنین ثابت‌کنید که هنگامی

که چرخ آن چنان می‌چرخدکه نقطهٔ تماس D با میله به طرف B حرکت می‌کند، درصورتی‌که زاویهٔ انحراف میله با افق $\mathrm{Arc}\,tg\mu$ باشد، عکس‌العمل در A قائم خواهد بود.

۱۶- استوانه‌ای مدور به‌وزن W با دیوار ناصاف قائمی در تماس است. نخی‌که یك سر آن به بخشی از دور استوانه پیچیده شده است و سر دیگرآن به‌نقطه‌ای از دیوار متصل است و با دیوار زاویه‌ای برابر α می‌سازد استوانه را طوری نگه می‌دارد که محور آن افقی است . نشان‌دهید که ضریب اصطکاك نباید کمتر از $\frac{1}{\sin\alpha}$ باشد، وفشار قائم بردیوار برابر است با $W tg\frac{1}{2}\alpha$.

۱۷- کره‌ای به‌وزن W برسطح شیبدار ناصافی‌که با افق زاویهٔ 45° می‌سازد، درصورت امکان با نیروی افقی P که بربالاترین نقطهٔ کره وارد می‌شود، به حال تعادل می‌ماند.

(۱) نشان دهید که اگر μ، ضریب اصطکاك میان سطح شیبدار وکره، کمتر از $\sqrt{2}-1$ باشد، تعادل ناممکن است.

(۲) نشان دهید که اگر μ برابر یا بزرگتر از $\sqrt{2}-1$ باشد، تعادل امکانپذیراست. بزرگی P را به‌دست‌آورید وتعیین کنیدکه هنگامی‌که μ بزرگتر از $\sqrt{2}-1$ است تعادل به‌حال حد است یا خیر.

۱۸- صدف نیمکره‌ای شکل نازکی است‌که سطح انحنادارآن از یك طرف برروی سطح افقی ناصافی با ضریب اصطکاك μ قراردارد واز یك طرف با دیوار قائم ناصافی با ضریب اصطکاك μ' درتماس‌است. اگرهنگامی‌که لبهٔآن باافق زاویهٔ 30° می‌سازد، صدف در حال لغزش باشد، رابطهٔ میان μ و μ' را پیدا کنید و ثابت کنید که اگر $\mu'<\frac{1}{3}$ باشد، μ باید اندازه‌ای‌میان $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$ داشته باشد (مرکزثقل صدف‌نیمکره‌ای شکل نازك، شعاع را نصف می‌کند.)

۱۹- جام نیمکره‌ای شکل‌نازکی ازسمت انحنادارآن‌برروی سطح افقی ناصافی قراردارد که ضریب اصطکاك آن μ است. جام به‌یك دیوارقائم صیقلی تکیه دارد. ثابت کنید که هنگامی‌که جام درحال شروع به‌لغزش است، زاویهٔ انحراف محور جام با قائم به‌اندازه‌ای است‌که سینوس آن برابر 2μ است.

۲۰- A، یك سرمیلهٔ یکنواخت AB، با سطح شیبدار ناصافی‌که زاویهٔ آن با افق برابر 30° است در تماس است. میله باجهت روبه‌بالای سطح شیبدار زاویهٔ 45°می‌سازد

و درصفحه‌ای قائم قراردارد که ازخط بزرگترین شیب صفحه می‌گذرد. به‌کمك نخی که به B، انتهای دیگر میله، بسته شده است، و به موازات سطح کشیده می‌شود، میله به‌حال تعادل مانده است. ثابت‌کنید که زاویهٔ اصطکاك در A باید دست‌کم به‌اندازه‌ای باشد که تانژانت آن برابر است با $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲\sqrt{۳}}$.

۱۵

ماشینها

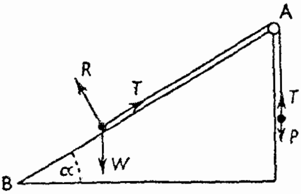
۱۵.۱. دراین بخش چندمثال ساده از ماشینها را درنظر می‌گیریم. ماشین وسیله‌ای است که درآن، دریک بخش از ماشین با واردآوردن نیرویی به‌نام نیروی محرك، کار انجام می‌شود ودر بخش دیگر، ماشین با غلبه برنیرویی خارجی به‌نام نیروی مقاوم، کار انجام می‌دهد.

دربسیاری از حالتها ماشین طوری تنظیم شده است که نیرویی کوچك برنیرویی بزرگتر غلبه می‌کند.

۱۵.۲. سطح شیبدار را می‌توان ماشینی ساده درنظر گرفت.

فرض می‌کنیم که وزنهٔ W برسطح صاف شیبدار AB قرارگرفته است. به‌این وزنه نخی متصل است که از شیار قرقرهٔ صافی که بالای سطح شیبدار نصب شده است عبورکرده است وبه‌آن وزنهٔ P آزادانه آویزان است(شکل ۱۵-۱). دراین‌مثال P رامی‌توان نیروی محرك دانست که برای بالابردن نیروی مقاوم W به‌کاربرده می‌شود.

اگر W برسطح شیبدار به‌حال تعادل باقی بماند، T، یعنی نیروی کشش نخ برابر خواهد بود با $W\sin\alpha$. اما $T = P$ است. بنابراین $P = W\sin\alpha$. هرنیروی P که اندکی از $W\sin\alpha$ بزرگتر باشد سبب خواهد شد که W به‌سوی بالای سطح حرکت‌کند. به‌این



شکل ۱۵-۱

ترتیب وزن W بـا نیرویی کمتر از W بالابـرده می‌شود. از این‌رو، سطح شیبدار ماشین مفیدی خواهد بود. درواقع، ازجنبهٔ تاریخی، سطح شیبدار ازکهنترین ماشینهایی است که آدمی به‌کاربرده است.

درنظرداشته باشیم کـه هرگاه P مسافتی برابر x به‌طـرف پایین بیاید، W مسافتی برابر x در راستای سطح شیبدار بالا می‌رود، یعنـی مسافتی برابر $x\sin\alpha$ به‌طور قائم بالا می‌رود. پس کاری که P انجام می‌دهد برابر Px است وآن برابر کاری است که Wدریافت می‌کند، یعنی برابر $Wx\sin\alpha$ است. (اگر سطح شیبدار اصطکاك داشته باشد، Pxبزرگتر از $Wx\sin\alpha$ خواهد بود،زیرا $P=W\sin\alpha+F$ است که F نیروی‌اصطکاك است.)البته این نتیجه را می‌توانستیم از قانـون بقای انرژی به‌دست آوریم. در یـك ماشین ایده‌آل (مطلوب) انرژی به‌هدر نمی‌رود، وکاری که به‌وسیلهٔ P انجام می‌گیرد برابر است باکاری که W دریافت می‌کند. به‌عبارت دیگرمجموع کاری کـه به‌وسیلهٔ P و W انجـام می گیرد برابرصفراست. این مفهوم راگاهـی اصل کار می‌نامند. بـا این‌همه، در عمل،کاری که P انجام می‌دهد بیشترازکاری است که W دریافت می کند. به‌گفتهٔ دیگر، با استفاده ازماشین کاری که انجام می‌شود بیشتر از کاری است که دریافت می‌شود (زیرا باید براصطکاك و حرکت بعضی از اجـزای ماشین غلبه‌کرد). بزرگترین فایدهٔ ماشین ایـن است‌که غالباً P کمتر از W است.

تعریفهای زیر بسیار مهمند:

۳۰۱۵. اگرنیروی P برماشینی وارد شود وسبب شودکه ماشین نیرویی برابر W اعمال کند، نسبت $\frac{W}{P}$ را مزیت‌مکانیکی ماشین‌نامند. نسبت‌مسافتی که نیروی محرك Pمی‌پیماید به‌مسافتی که Wمی‌پیماید نسبت سرعتها نامیده‌می‌شود. به‌طوری که هم‌اکنون نشان‌خواهیم داد، این‌دو نسبت به‌یکدیگر مربوطند.

اگر اصطکاك نباشد، واجزای ماشین بیوزن باشند، دراین صورت برطبق اصل کار،

$$\text{مسافتی که } P \text{ می‌پیماید} \times P = \text{مسافتی که } W \text{ می‌پیماید} \times W$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{\text{مسافتی که } P \text{ می‌پیماید}}{\text{مسافتی که } W \text{ می‌پیماید}}$$

$$= \text{نسبت سرعتها}$$

یعنی دریك ماشین ایده‌آل که اجزای آن بیوزن هستند، ودرآن اصطکاك وجود ندارد،

$$\text{مزیت مکانیکی} = \text{نسبت سرعتها}$$

بنابراین درهمهٔ حالتهایی که نیروی محرك کمتر از نیروی مقاوم است، مسافتی که نیروی محرك می‌پیماید بیشتر از مسافتی است که نیروی مقاوم می‌پیماید.

گاهی ماشین را طوری تنظیم کرده‌اندکه به کمك آن بتوانند مسافتی راکه نیروی مقاوم می‌پیماید افزایش دهند. دراین حالت نیروی محرك باید بیشتراز نیروی مقاوم‌باشد.

در ماشینهای واقعی که درآنها اصطکاك وجود دارد مزیت مکانیکی کمتر از نسبت سرعتهاست.

۴.۱۵ بازده یك ماشین ساده از نسبت زیربه‌دست می‌آید:

$$\frac{\text{کار مفیدی که ماشین انجام می‌دهد}}{\text{کاری که به‌ماشین داده می‌شود}}$$

بنابراین دریك ماشین ایده‌آل بازده برابر واحد است. نسبتی که بازده ماشین‌رابیان می‌کند غالباً به‌صورت درصد بیان می‌شود. بنابراین بازده یك ماشین ایده‌آل ۱۰۰ درصد است.

بازده را ممکن است به‌طور تجربی تعیین کرد: با اندازه‌گیری نیروی P که برای غلبه بر W لازم است ونیز با اندازه‌گیری مسافتهای x و y که به‌ترتیب به‌وسیلهٔ P و W پیموده می‌شوند.

$$\text{بازده} = \frac{Wy}{Px} = \frac{\frac{W}{P}}{\frac{x}{y}}$$

$$= \frac{\text{مزیت مکانیکی}}{\text{نسبت سرعتها}}$$

دربسیاری از حالتها بازده با تغییر نیروی مقاوم (بار) تغییر می‌کند.

باید توجه داشت که تنها کمیت مربوط به‌ماشین که می‌توان آن را از روی ابعادش

محاسبه‌کرد نسبت سرعتهاست.

در یك ماشین‌واقعی، اغلب رابطهٔ میان P و W رابطه‌ای خطی به‌شکل زیراست:

$$P = a + bW$$

که درآن a و b مقدارهایی ثابتند.

این رابطه را اغلب قانون ماشین می‌نامند.

آشکار است‌که در این رابطه b همواره مثبت است، اما a هرمقداری را می‌تواند داشته باشد. اگر a برابرصفرباشد، دراین صورت $P = bW$ یا $\frac{W}{P} = \frac{1}{b}$ است، **یعنی** مزیت مکانیکی، وبنابراین بازده ماشین با تغییر W تغییرنمی‌کند. این حالتی **ایده‌آل‌است،** و b عکس نسبت سرعتهاست.

اگر a مثبت باشد،که معمولاً هست (زیرا حتی وقتی‌که $W = 0$ است، P به‌سبب وجوداصطکاك مثبت‌است)، دراین‌صورت مزیت مکانیکی باافزایش W افزایش‌می‌یابد.**زیرا**

$$\frac{W}{P} = \frac{W}{a+bW} = \frac{1}{\frac{a}{W}+b}$$

اگر a مثبت باشد، نسبت $\frac{W}{P}$ با افزایش W افزایش می‌یابد و همیشه کوچکتراز $\frac{1}{b}$ است. بنابراین بازده ماشین با افزایش نیروی مقاوم (بار) W افزایش می‌یابد وپیوسته کوچکتر از $\frac{1}{br}$ است، که درآن r برابر نسبت سرعتهاست.

اگر a منفی باشد، با افزایش W و P نسبت $\frac{W}{P}$ کاهش می‌یابد، یعنی بازده ماشین با افزایش بار (نیروی مقاوم) کاهش می‌یابد. این‌نتیجه‌را می‌توان به‌کمك‌این واقعیت توضیح دادکه هرچه بارماشین زیادتر شود، اصطکاك میان اجزای ماشین افزایش می‌یابد.

مثال: در ماشینی که برای برداشتن وزنه به‌کار می‌رود، نسبت سرعتها ۱۶ است. با این ماشین برای برداشتن وزنه‌های N ۵۶ و N ۱۱۲ به‌ترتیب نیروهای N ۱۱ و N ۱۹ لازم است. بازده در هر حالت چقدر است؟ اگرنمودار بار به نیروی **محرك** را خطی مستقیم فرض کنیم، نیروی لازم برای بلند کردن وزنهٔ N ۲۲۴ را پیدا کنید.

حل: در حالت اول مزیت مکانیکی $\frac{56}{11}$، و درحالت دوم $\frac{112}{19}$ است.

چون
$$\text{بازده} = \frac{\text{مزیت مکانیکی}}{\text{نسبت سرعتها}}$$

بازده ماشین درحالت اول $\frac{۵۶}{۱۱ \times ۱۶}$ و در حالت دوم $\frac{۱۱۲}{۱۹ \times ۱۶}$ یعنی $\frac{۷}{۲۲}$ و $\frac{۷}{۱۹}$ است.

اگرآنها را بخواهیم به‌صورت درصد نشان دهیم ۳۱/۸ درصد و ۳۶/۸ درصد خواهند بود.

چون، بنابه‌فرض، رابطهٔ میان W و P رابطه‌ای خطی است،

$$P = a + bW$$

که درآن a و b مقدارهایی ثابتند، خواهیم داشت:

$$۱۱ = a + ۵۶b$$

و
$$۱۹ = a + ۱۱۲b$$

در نتیجه
$$b = \frac{۱}{۷} \quad \text{و} \quad a = ۳$$

$$\therefore \quad P = ۳ + \frac{۱}{۷}W$$

وقتی‌که $W = ۲۲۴$ است، خواهیم داشت:

$$P = ۳ + ۳۲$$

$$\therefore \quad \text{نیروی محرك} = ۳۵\ \mathrm{N}$$

۵.۱۵ دستگاه چند قرقره با یك نخ

چنین دستگاهی از دوقطعه یا قاب تشکیل شده است‌که هرقاب شامل چند قرقره است. قاب بالایی به‌جایی ثابت شده است وقاب پایینی، که وزنه به‌آن متصل می‌شود، متحرك است.

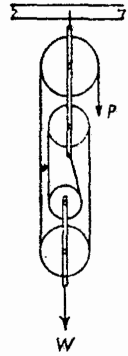
شکل ۱۵-۲ الف، چنین دستگاهی راکه عدهٔ قرقره‌ها در دوقاب یکسان است نشان می‌دهد. شکل ۱۵-۲ ب، دستگاهی را نشان می‌دهد که عدهٔ قرقره‌ها درقاب بالایی بیشتر از عدهٔ آنها درقاب پایینی است.

درحالت اول یك سرنخ باید به قاب بالایی متصل شود ودرحالت دوم باید به‌قاب پایینی متصل شود.

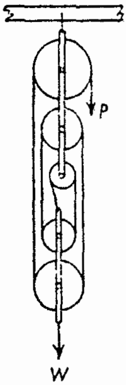
رابطهٔ میان P و W از دوراه ممکن است به‌دست آید:

(۱) با درنظر گرفتن تعادل یا حرکت یکنواخت قاب پایینی، یا

(۲) با درنظر گرفتن اصل کار.



شکل ۱۵-۲ الف



شکل ۱۵-۲ ب

فرض می‌کنیم وزن قاب پایینی برابر w باشد، و از اصطکاك صرف‌نظر می‌کنیم.

(۱) چون قرقره‌ها صافندکشش نخ درسراسرآن یکسان و برابر P است.

اگر n تکه نخ به‌قاب پایینی متصل باشد،کل نیروی رو به‌بالا براین قاب برابر nP است. بنابراین درحالت تعادل یا درحالت حرکت با سرعت یکنواخت می‌توان نوشت:

$$W+w=nP$$

باید توجه داشت‌که این رابطه به‌شکل رابطهٔ $P=a+bW$ است، که درآن a و b مقدارهای ثابت مثبتند. ازاین گذشته، $\frac{W}{P}=n-\frac{w}{P}$، که پیوسته‌کوچکتر از n، نسبت سرعتهای دستگاه، است.

فرض این است‌که همهٔ بخشهای نخ، جزجاهایی‌که با قرقره‌ها درتماس است، قائـم است. اگرچنین نباشد برایند دوکشش P که بردو تکه نخ دوسر یـك قرقره وارد می‌شوند $۲P$ نیست بلکه بستگی به‌زاویهٔ میان این دوتکه نخ دارد. درعمل نخها کامـلاً موازی نیستند، اما معمولاً می‌توان آنها را موازی دانست.

(۲) اگر وزنهٔ W همراه با قاب پایینی به‌اندازهٔ x بالابرود، هریـك ازقطعه نخها باید به‌اندازهٔ x بالا بروند، در نتیجه درشکل ۱۵-۲ الف، نیروی P باید به‌اندازهٔ $۴x$ و درشکل ۱۵-۲ ب به‌اندازهٔ $۵x$ پایین‌بیاید. به‌طورکلی‌اگرقاب پایینی به n تکه نخ‌مربوط باشد، نیروی P باید به‌اندازهٔ nx پایین بیاید. برطبق اصل‌کار:

$$(W+w)x=Pnx$$

$$\therefore \qquad W+w=nP$$

واین همان رابطه‌ای است‌که قبلاً پیداکردیم.

پس اگرعدهٔ قرقره‌های هرقاب مساوی وبرابر q باشد

$$P=\frac{W+w}{n}=\frac{W+w}{۲q}$$

خواهد بود.

اگرعدهٔ قرقره‌های قاب پایینی q وعدهٔ قرقره‌های قاب بالایی $q+۱$ باشد،

$$P=\frac{W+w}{n}=\frac{W+w}{۲q+۱}$$

خواهد بود.

مثال: یك دستگاه قرقره داریم که ازشش قرقره تشکیل شده است وتنها یك نخ از دورهمهٔ آنها می‌گذرد. یك انتهای نخ به‌قاب بالایی متصل است. در لحظهٔ حرکت، کشش نخ ازحول هرقرقره که می‌گذرد ۲۵درصد اضافه می‌شود. اگر از وزن قاب پایینی صرف‌نظر کنیم، برای‌اینکه وزنهٔ N ۳۰۰ را به‌حرکت درآوریم چه‌نیرویی لازم خواهد بود؟ نیزنشان دهیدکه کار مفیدی که به‌وسیلهٔ دستگاه انجام می‌گیرد تقریباً نصف کاری است که دستگاه گرفته است.

حل : دستگاه مطابق شکل ۱۵-۳ سوارشده است.

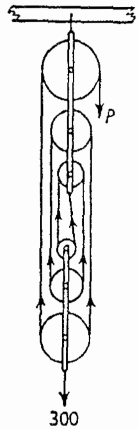
فرض می‌کنیم T کشش نخ درانتهای نخ که به‌قاب بالایی متصل است باشد. کشش نخ پس از عبور از زیر اولین قرقرهٔ قاب پایینی به‌اندازهٔ ۲۵ درصد، یعنی $\frac{۱}{۴}T$، افزوده می‌شود وبنابراین برابر $\frac{۵}{۴}T$ خواهد شد. وقتی‌که نخ ازحول اولین قرقرهٔ قاب بالایی می‌گذردکشش بازهم $\frac{۵}{۴}$ برابرکشش قبلی، یعنی $\frac{۵}{۴}T\times\frac{۵}{۴}$ یا $\frac{۵^۲}{۴^۲}T$ خواهد شد. سرانجام‌کشش نخ درانتهای آزاد نخ $\frac{۵^۶}{۴^۶}T$ خواهد شد.

$$\therefore \qquad \frac{۵^۶}{۴^۶}T=P$$

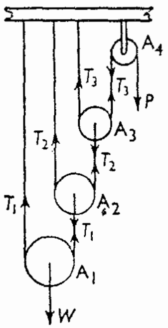
برای‌آنکه وزنهٔ N ۳۰۰ به‌حال‌تعادل باشد بایدوزن‌آن با مجموع‌نیروهای کشش که به‌طرف بالاست برابرباشد. یعنی

$$T\left(۱+\frac{۵}{۴}+\frac{۵^۲}{۴^۲}+\frac{۵^۳}{۴^۳}+\frac{۵^۴}{۴^۴}+\frac{۵^۵}{۴^۵}\right)=۳۰۰$$

$$\therefore \qquad T\frac{\frac{۵^۶}{۴^۶}-۱}{\frac{۱}{۴}}=۳۰۰$$



شکل ۱۵-۳



شکل ۱۵-۴

$$\therefore \qquad \frac{۴^۶}{۵^۶}\left(\frac{۵^۶}{۴^۶}-۱\right)P=۷۵$$

$$\therefore \qquad \left(۱-\frac{۴^۶}{۵^۶}\right)P=۷۵$$

$$\therefore \qquad P=\frac{۵^۶\times ۷۵}{۶۱\times ۱۸۹}=۱۰۱/۶\ \mathrm{N}$$

اگر قاب پایینی مسافتی برابر x متر بپیماید، P مسافتی برابر $۶x$ متر می‌پیماید.

$\therefore$ کاری که دستگاه گرفته است $= ۱۰۱/۶ \times ۶x = ۶۰۹/۶x\,\mathrm{J}$

و کار مفید $= ۳۰۰x\,\mathrm{J}$

به‌طوری که معلوم است کارمفید دستگاه تقریباً نصف کاری است که دستگاه گرفته است.

۶.۱۵ دستگاه چند قرقره که هرنخ به‌تکیه‌گاه متصل است.

این دستگاه مطابق شکل ۱۵-۴ سوارشده است. وزنه به‌پایینترین قرقره متصل می‌شود.

قرقرهٔ ثابت $A_۴$ اغلب به‌این منظور اضافه می‌شود که جهت نیروی محرك P به‌طرف پایین بشود وهیچ گونه مزیت مکانیکی ندارد.

همان‌طور که قبلاً فرض کردیم، همهٔ اجزای نخ، جزقسمتهایی که با قرقره‌هادرتماسند، قائم هستند ونیزاصطکاك وجود ندارد. از وزن قرقره‌ها هم‌صرف نظرمی کنیم.

(۱) فرض‌می کنیم $T_۱$، $T_۲$، ... کشش نخهایی باشند که ازحول قرقره‌های $A_۱$، $A_۲$، ... می گذرند.

از تعادل قرقره‌های A_1، A_2، ... نتیجه می‌شود:

$$W = 2T_1$$

و

$$T_1 = 2T_2$$

و

$$T_2 = 2T_3$$

$$\therefore \quad W = 2^3 T_3 = 2^3 P$$

وواضح است که اگر عدهٔ قرقره‌های متحرك برابر n باشد:

$$W = 2^n P$$

(۲) اگر P مسافتی برابر x پایین بیاید، بالاترین قرقرهٔ متحرك $\frac{x}{2}$ بالا خواهد آمد. قرقرهٔ بعدی $\frac{x}{2^2}$ وبه‌همین شیوه بقیهٔ قرقره‌ها بالا خواهند آمد. اگرعدهٔ قرقره‌های متحرك برابر n باشد، پایینترین قرقره مسافتی برابر $\frac{x}{2^n}$ بالاخواهد آمد.

برطبق اصل کار

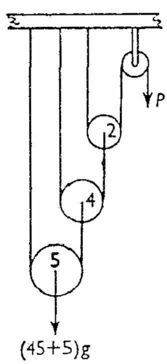
$$W \times \left(\frac{x}{2^n}\right) = Px$$

یا

$$W = 2^n P$$

واین همان رابطه‌ای است که قبلاً به‌دست آوردیم.

مثال: شخصی به‌جرم ۷۰ kg وزنه‌ای به‌جرم ۴۵ kg را به‌کمك سه قرقرهٔ متحرك حمل می‌کند. قرقره‌ها مطابق شکل ۱۵-۵ سوار شده‌اند. جرم قرقره‌ها به‌ترتیب ۲، ۴ و ۵ کیلوگرم است. تعیین کنید که این شخص با چه نیرویی برزمین فشارمی‌آورد.



شکل ۱۵-۵

حل : فرض می‌کنیم که انتهای نخی که این شخص می‌کشد مطابق شکـل ۱۵-۵ از دور قرقرهٔ ثابتی می‌گذرد. بنابراین او نخ را به‌طرف پایین می‌کشد. نیرویی که این شخص با آن برزمین فشار می‌آورد برابراست با اختلاف وزن این شخص و کششی که اعمال می‌کند.

اگر P مسافتی برابر x بپیماید، قرقرهٔ متحرك بالایی مسافتی برابر $\frac{x}{۲}$ می‌پیماید و کاری که انجام می‌دهد برابر $۲g\times\frac{x}{۲}$ خواهد بود.

قرقرهٔ بعدی مسافتی برابر $\frac{x}{۴}$ می‌پیماید و کاری که انجام می‌دهد $۴g\times\frac{x}{۴}$ خواهد بود.

قرقـرهٔ پایینی مسافتی برابر $\frac{x}{۸}$ می‌پیماید و کاری که انجام می‌دهد $۵۰g\times\frac{x}{۸}$ خواهد بود.

بنابراین برطبق اصل کار،

$$Px=\left(۱+۱+\frac{۵۰}{۸}\right)g\,x=۸/۲۵g\,x$$

$$\therefore \qquad P=۸/۲۵\,g\,\mathrm{N}$$

بنابراین نیرویی که این شخص برزمین فشار می‌آورد $۶۱/۷۵\,g\,\mathrm{N}$ است.

تمرین ۱۵.۱

۱ ـ چهار قرقرهٔ متحرك داریم که جرم آنها از پایینترین به‌بالاترین قرقره به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ کیلوگرم است. با این دستگاه وزنه‌ای به‌جرم ۵۰۰ kg را با چه نیرویی می‌توان نگاه داشت.

۲ ـ اگرسه‌قرقرهٔ متحرك داشته باشیم که جرم آنها از پایینترین به‌بالاترین قرقره‌به‌ترتیب ۴، ۴ و ۲ کیلوگرم باشد، با چه نیرویی می‌توان وزنه‌ای به‌جرم ۵۶ kg را نگاه داشت؟

۳ ـ اگرچهارقرقرهٔ متحرك داشته باشیم که وزن هرکدام w باشد و نیروی محـرك برابر P باشد، نشان دهیدکه کششی که برمیلهٔ تکیه‌گاه وارد می‌شود $۱۵P-۱۱w$ است. (فرض آن است که P رو به‌بالا اثرمی‌کند، یعنی نخی که این نیرو برآن واردمی‌شود از دوریك قرقرهٔ ثابت نمی‌گذرد.)

۴ ـ اگرسه قرقرهٔ متحرك داشته باشیم، با صرف‌نظر کردن از وزن قرقره‌ها، نیروی لازم

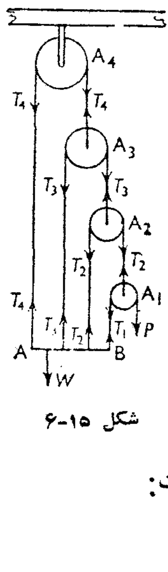
برای نگاه‌داشتن وزنه‌ای به‌جرم ۴۰۰ kg را تعیین کنید. نیز کششی را که هر نخ برمیلهٔ تکیه گاه وارد می‌کند پیدا کنید. اگر مجموع این کششها برابر وزنه نباشد، اختلاف را توضیح دهید.

۷.۱۵ دستگاه چند قرقره که هر نخ به‌وزنه متصل است.

این دستگاه مطابق شکل ۱۵-۶ سوار می‌شود. انتهای همهٔ نخها به میلهٔ AB بسته شده است ووزنه به‌میلهٔ AB متصل است.

بنابه‌فرض، نخها جز در قسمتهایی که با قرقره‌ها در تماسند به‌موازات یکدیگرهستند ووزن قرقره‌ها قابل صرف‌نظر کردن است.

(۱) فرض می‌کنیم $T_۱$، $T_۲$، ... کشش نخهایی باشد که از دور قرقره های $A_۱$، $A_۲$، ... می گذرند.



شکل ۱۵-۶

چون $A_۱$ بدون اصطکاك است: $T_۱ = P$

وچون $A_۱$ درحال تعادل است: $T_۲ = ۲T_۱ = ۲P$

وچون $A_۲$ درحال تعادل است: $T_۳ = ۲T_۲ = ۲^۲P$

وهمچنین $T_۴ = ۲T_۳ = ۲^۳P$

اگرعدهٔ قرقره‌ها n باشد:

$$W = T_۱ + T_۲ + \dots + T_n$$
$$= P(۱ + ۲ + ۲^۲ + \dots + ۲^{n-۱})$$
$$= P\frac{۲^n - ۱}{۲ - ۱} = P(۲^n - ۱)$$

(۲) اگر AB به‌اندازهٔ x بالابیاید، نخ به‌اندازهٔ x ازدورقرقرهٔ بالایی $A_۴$می گذرد و سبب می‌شود که قرقرهٔ بعدی یعنی $A_۳$ به‌اندازهٔ x پایین بیاید. اگر قرقرهٔ $A_۳$ به‌اندازهٔ x پایین بیاید ومیله به‌اندازهٔ x بالا برود، نخ باید به‌اندازهٔ $۲x$ از دور این قرقره‌بگذرد. درنتیجه قرقرهٔبعدی، یعنی $A_۲$، به‌اندازهٔ $۳x = ۲x + x$ پایین‌می‌آید. چون میله‌به‌اندازهٔ x بالاآمده است، نخی که حول این قرقره، یعنی $A_۲$ است، باید به‌اندازهٔ $۳x + x$ ازدور این قرقره بگذرد. پس نخ‌میان $A_۲$ ومیله به‌اندازهٔ $۴x$ کوتاه می‌شود، وقرقرهٔ بعدی،یعنی $A_۱$، به‌اندازهٔ $۷x = ۴x + ۳x$ پایین می‌آید.

بنابراین نخ میان $A_۱$ و میله به‌اندازهٔ $۸x$ کوتاه می‌شود و وزنهٔ P به اندازهٔ $۱۵x = ۸x + ۷x$ پایین می‌آید.

دراین حالت که مثال زدیم چهارقرقره به‌کار رفته بود، و مسافتی که P پیمود برابر $x(۲^۴ - ۱)$ بود. اگر n قرقره به کار رود، مسافتی که به وسیلهٔ P پیموده می‌شود $x(۲^n - ۱)$ خواهد شد. برطبق اصل کار

$$Wx = P(۲^n - ۱)x$$

یا

$$W = P(۲^n - ۱)$$

چنین دستگاههایی عملاً برای بالابردن وزنه مفید نیستند. معمولاً ازاین‌دستگاهها برای به‌دست‌آوردن کششهای کمتر برروی میلهٔ AB استفاده می‌شود، که یك سراین میله به‌نخی متصل است که ازروی بالاترین قرقره می‌گذرد واین قرقره به‌جسمی مانند بالای‌یك دکل متصل است که لازم است درآنجا کشش اعمال شود. واضح است که کشش نخهایی که به‌میله متصل است با هم برابر نیستند، یعنی اگر میله، آن‌طور که درشکل نشان داده‌شده است،آزاد باشد، افقی نخواهد ایستاد مگراینکه وزنه به‌نقطهٔ معینی از میله متصل‌باشد.

اگر قرقره‌ها به‌یك اندازه باشند فاصله‌های میان نقطه‌های اتصال نخ و میله برابر خواهند بود، وشرط افقی ایستادن میله را می‌توان با تعیین گشتاور نسبت به‌یکی ازدوسر میله به‌دست آورد.

درحالتی که درشکل نشان‌داده‌ایم $T_۴ = ۸P$، $T_۳ = ۴P$، $T_۲ = ۲P$، و $W = ۱۵P$.

اگر a فاصلهٔ میان نخها باشد مجموع جبری گشتاورهای کششها نسبت به‌نقطهٔ B برابراست با

$$۲۴Pa + ۸Pa + ۲Pa = ۳۴Pa$$

بنابراین برای‌اینکه میله افقی باشد، W باید به‌نقطه‌ای از میله متصل شود که

فاصلهٔ آن از B برابر x باشد، به‌طوری‌که

$$۱۵Px = ۳۴Pa$$

یا
$$x = \frac{۳۴}{۱۵}a$$

مثال: یك دستگاه قرقرهٔ مرکب از n قرقرهٔ هم‌اندازه وبیوزن تشکیل شده است. یك‌سرنخی که از دور هرقرقره می‌گذرد به میلهٔ بیوزن AB متصل شده است. $(n - ۱)$ قرقره متحرك ویك قرقره ثابت است. یك سرنخی که از دور قرقرهٔ ثابت می‌گذرد در نقطهٔ A به‌میلهٔ AB متصل‌است. یك‌سرنخی که ازآخرین‌قرقرهٔ متحرك می‌گذردبه‌انتهای دیگرمیله یعنی B متصل است. با آویزان‌کردن وزنهٔ W به A ووزنهٔ دیگری‌بهB، میلهٔ AB افقی وبه‌حال تعادل قرارگرفته است. ثابت‌کنیدکه

$$W = \frac{(n - ۲)۲^{n} + ۲}{n - ۱}P$$

حل : دستگاه مطابق شکل۱۵ـ۷ سوارشده است.

چون قرقره‌ها هم‌اندازه هستند، فاصلهٔ نقطه‌های اتصال نخها برروی میلهٔ AB برابرند. این فاصله را به a نمایش می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $T_{۱}$، $T_{۲}$، ...، T_{n} کشش نخها باشند، بنابراین فاصلهٔ نیروها ازنقطهٔ B به‌ترتیب ۰، a، $۲a$، ...، $(n - ۱)a$ است.

نیز
$$T_{۲} = ۲T_{۱} = ۲P$$

و
$$T_{۳} = ۲T_{۲} = ۲^{۲}T_{۱} = ۲^{۲}P$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

و
$$T_{n} = ۲^{n-۱}P$$

اکنون نسبت به B گشتاور می‌گیریم:

$$W(n - ۱)a = ۲P \times a + ۲^{۲}P \times ۲a + ۲^{۳}P \times ۳a \ldots + ۲^{n-۱}P(n - ۱)a$$

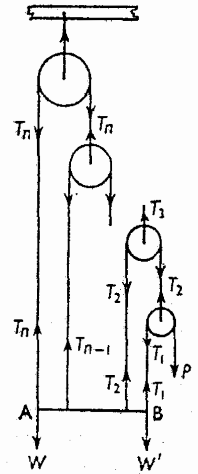
$$= Pa[۲ + ۲^{۲} \times ۲ + ۲^{۳} \times ۳ + \ldots + ۲^{n-۱}(n - ۱)]$$

مجموع مقادیر داخل کروشه را S فرض می‌کنیم. پس:

$$S = ۲ + ۲^{۲} \times ۲ + ۲^{۳} \times ۳ + \ldots + ۲^{n-۱}(n - ۱)$$

$$\therefore \quad ۲S = \quad ۲^{۲} \times ۱ + ۲^{۳} \times ۲ + \quad + ۲^{n-۱}(n - ۲) + ۲^{n}(n - ۱)$$

$$\therefore \ -S = ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \ldots + ۲^{n-۱} - ۲^{n}(n - ۱)$$



شکل ۱۷-۵

$$= \frac{۲(۲^{n-۱}-۱)}{۱} - ۲^n(n-۱)$$

$$\therefore \quad S = ۲^n(n-۲)+۲$$

$$\therefore \quad W = \frac{۲^n(n-۲)+۲}{n-۱}P$$

۸۰۱۵ قرقرهٔ دیفرانسیل وستون

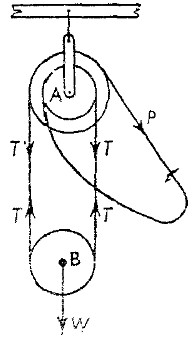
این دستگاه از دو قطعه تشکیل شده است. قطعهٔ بالایی A (مطابق شکل ۱۵-۸) دارای دوشیار است که مجاور یکدیگرند وقطریکی ازآنها اندکی بیشتر ازقطردیگری است.

وزنه به‌قرقرهٔ پایینی B متصل می‌شود. زنجیربسته‌ای پس‌ازگذشتن از شیاربزرگتر قطعهٔ بالایی ازشیار قرقرهٔپایینی می‌گذرد وسپس به‌دور شیارکوچکترقطعهٔ بالایی‌می‌چرخد. بقیهٔ زنجیر به‌شلی آویزان است.

زنجیررا طوری می‌سازندکه ضمن حرکت در داخل شیار متوقف نشود و نیز لغزش نداشته باشد وحرکت آن به‌ملایمت انجام‌گیرد.

نیروی محرك مطابق شکل برابر P است.

(۱) اگر T کشش قسمتهایی اززنجیر باشدکه قرقرهٔ پایینی را نگاه داشته‌اند و W نیروی مقاوم باشد (به‌فرض‌آنکه اجزای زنجیرکه قرقرهٔ B را نگاه داشته‌اند قائم باشد و از وزن زنجیر وقرقرهٔ پایینی صرف‌نظرکنیم)، خواهیم داشت:



شکل ۱۵-۸

$$۲T = W$$

اگر R و r به‌ترتیب شعاعهای شیارهای بزرگتروکوچکتر باشند وگشتاورها را نسبت به‌مرکز قطعهٔ بالایی بگیریم، خواهیم داشت:

$$P \times R + T \times r = T \times R$$

$$\therefore \quad P = T\frac{R-r}{R} = W\frac{R-r}{۲R}$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{۲R}{R-r}$$

اگر طولهای R و r خیلی به‌هم نزدیك باشند، مزیت مکانیکی زیادی برای دستگاه به‌دست خواهیم آورد.

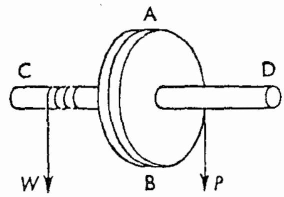
(۲) فرض می‌کنیم که قطعهٔ بالایی به‌اندازهٔ زاویه‌ای برابر θ به‌طرف راست‌بچرخد. بنابراین P مسافتی برابر $R\theta$ می‌پیماید. زنجیری که‌درقسمت چپ B قراردارد به‌اندازهٔ $R\theta$ کوتاه می‌شود، اما زنجیر به‌اندازهٔ $r\theta$ از سمت راست قرقرهٔ B پایین می‌آید. بنابراین W مسافتی برابر $\frac{۱}{۲}(R\theta - r\theta)$ بالا می‌رود. با توجه به‌اصل کار

$$\frac{W}{۲}(R-r)\theta = PR\theta$$

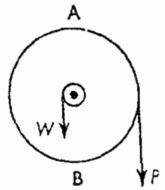
$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{۲R}{R-r}$$

۰۹.۱۵ چرخ و محور

این دستگاه تشکیل شده است از چرخ AB ومحور CD که مطابق شکل ۱۵-۹ الف با



شکل ۱۵-۹ الف



شکل ۱۵-۹ ب

هم حول یك محور می‌چرخند. شکل ۱۵-۹ ب مقطع این دستگاه را نشان می‌دهد.

نیروی محرك P به نخی اثر می‌کندکه به‌دورچرخ پیچیده شده است ونیروی مقاوم W به نخی اثرمی‌کندکه درجهت مخالف به‌دور محور پیچیده شده است.

فرض می‌کنیم که a و b به‌ترتیب شعاعهای چرخ ومحور باشند.

(۱) نسبت به‌محور مشترك گشتاور می گیریم:

$$Pa = Wb$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{a}{b}$$

(۲) اگرچرخ و محور به‌اندازهٔ زاویهٔ θ بچرخند (برحسب رادیان) و P پایین بیاید، P مسافتی برابر $a\theta$ می‌پیماید، وحال‌آنکه W مسافتی برابر $b\theta$ بالا خواهد آمد.

بنابراصل کار:

$$Wb\theta = Pa\theta$$

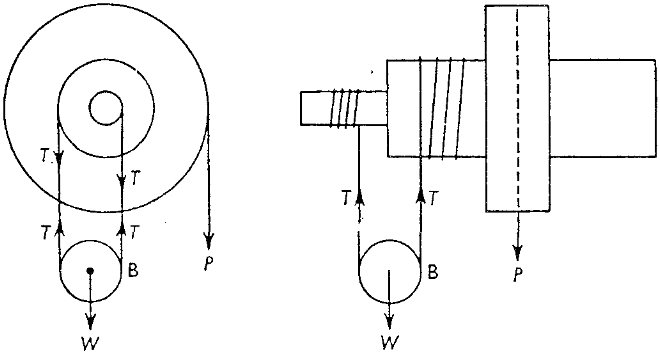
$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{a}{b}$$

بازده مکانیکی دستگاه عملاً محدود است، زیرا اگرچرخ خیلی بزرگ باشد،دستگاه سنگین خواهد شد واگرمحور خیلی باریك باشد، زود می‌شکنند.

عمل چرخ لنگروچرخ چاه شبیه عمل چرخ ومحور است. دراین دستگاهها فقط یك استوانه وجود دارد که منطبق برمحور است. نیروی مؤثر به‌انتهای میله‌ها یا به‌انتهای دستهٔ بلندی‌که عمود برمحور است وارد می‌شود.

۱۰۰۱۵ چرخ و محور دیفرانسیل

دراین نوع چرخ ومحور، محور ازدوقسمت تشکیل شده است‌که دارای شعاعهای‌مختلف هستند. نیروی‌مقاوم به‌یك قرقره‌متصل است ودوانتهای نخی‌که این قرقره را نگاه‌می‌دارد در دوجهت متفاوت به‌دو قسمت محور پیچیده شده است. قرقره مطابق شکل ۱۵-۱۰ میان



شکل ۱۵-۱۰

این دوقسمت آویزان است.

اگر P پایین بیاید، نخی که دور قرقرهٔ B است بالا می‌آید و دور محور بزرگتر پیچیده می‌شود ودراین ضمن نخ از دور محور کوچکترباز می‌شود.

فرض می‌کنیم a، b و c به ترتیب شعاعهای چرخ ومحور بزرگتر ومحور کوچکتر باشند و T کشش نخی باشدکه دورقرقرهٔ B است. فرض می‌کنیم که دوجزء نخ که در دوطرف قرقرهٔ B قائم باشند، و از وزن نخ وقرقره صرف‌نظرمی‌کنیم.

(۱) چون W درحالت تعادل است:

$$۲T = W, \quad \text{یا} \quad T = \frac{۱}{۲}W$$

نسبت به‌محور مشترك گشتاور می‌گیریم:

$$P \times a + T \times c = T \times b$$

$$\therefore \qquad P = T\frac{b-c}{a} = W\frac{b-c}{۲a}$$

$$\therefore \qquad \frac{W}{P} = \frac{۲a}{b-c}$$

اگر b و c را خیلی نزدیك به‌هم بگیریم، بدون‌آنکه لازم باشد شعاع چرخ راخیلی زیادکنیم یا محور را خیلی باریك انتخاب‌کنیم، مزیت مکانیکی قابل ملاحظه‌ای به‌دست می‌آوریم.

(۲) اگرچرخ به‌سبب پایین‌آمدن P زاویه‌ای به‌اندازهٔ θ بچرخد، در این صورت P مسافتی برابر $a\theta$ پایین خواهدآمد.

درحالی‌که مقداری نخ به‌اندازهٔ $c\theta$ از دورمحور کوچکتر بازمی‌شود، مقداری نخ

به‌طول $b\theta$ دور محور بزرگتر پیچیده می‌شود.

بنابراین وزنه مسافتی به اندازهٔ $\frac{1}{2}(b-c)\theta$ بالا می‌رود. برطبق اصل بقای کار:

$$\frac{W}{2}(b-c)\theta = Pa\theta$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{2a}{b-c}$$

۰۱۱۰۱۵ کشش اضافی

در بسیاری از حالتها (مثلاً هنگام بلندکردن وزنه‌های سنگین) لازم است که وقتی که نیروی محرك ازمیان برداشته می‌شود، وزنه، یعنی نیروی مقاوم، به‌طرف عقب برنگردد. هرگاه چنین اتفاقی بیفتد می‌گویند که ماشین دچار کشش اضافی شده است و نیاز به‌تعمیر دارد.

واضح است که برای جلوگیری از کشش اضافی، باید اصطکاك درقسمتهای مختلف ماشین به‌قدری زیاد باشد که از برگشتن وزنه جلوگیری کند. به‌عبارت دیگر بازده ماشین نباید زیاد باشد.

فرض می‌کنیم که P وزنهٔ W را بالا می‌برد، ووقتی که P حذف می‌شود، W ساکن می‌ماند.

وقتی که P وزنهٔ W را بالا می‌برد، اصطکاك برخلاف P عمل می‌کند، ووقتی که P حذف می‌شود، اصطکاك سبب نگهداری W می‌شود.

برای تغییرمکانهای کوچك x و y که به‌ترتیب P و W انجام می‌دهند، کاری راکه به‌وسیلهٔ اصطکاك انجام می‌گیرد به F نشان می‌دهیم. بنابراین وقتی که ماشین کار می‌کند:

$$Px = Wy + F$$

اکنون اگروقتی که F تنها وجود دارد همین اندازه تغییرمکان به W بدهد:

$$Wy = F$$

بنابراین F نبایدکمتر از Wy باشد. بنابراین Px نبایدکوچکتر از $2Wy$ باشد. درنتیجه نسبت $\frac{Wy}{Px}$ نباید بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد؛ یعنی بازده نبایستی بزرگتر از $\frac{1}{2}$ یا ۵۰ درصد باشد.

هرماشینی که بازده‌آن کمتراز ۵۰ درصد است دچار کشش اضافی نخواهد شد. سودمندی قرقره وستون، صرف‌نظر از نسبت سرعتهای قابل‌ملاحظهٔ آن، به‌سبب این است که بازده‌آن

عموماً کمتر از ۵۰درصد است.

تمرین ۲۰۱۵

۱ ـ قطراستوانهٔ چرخ چاهی ۱۰ cm است. نیروی محرك در ۶۰ cm محـور بردسته وارد می‌شود. نیروی لازم برای نگاهداری وزنه‌ای به‌جرم ۱۲۰ kg را پیداکنید.

۲ ـ ازیك چرخ ومحور برای بلندکردن وزنه‌ای به‌جرم ۵۰ kg استفاده می‌شود، شعاع چرخcm ۵۰ است وهنگامی‌که هفت‌دور می‌زند وزنه ۳/۳ m بالا می‌آید. کمترین نیرویی‌که برای نگاهداری وزنه لازم است چقدر است؟

۳ ـ لنگری‌به‌جرم ۱ Mg، به‌کمك زنجیری‌که به‌آن بسته شده‌است وبه‌دورچرخ‌لنگری به‌قطر ۲۲/۵ cm پیچیده می‌شود، بالابرده می‌شود. این چرخ لنگررا شش مردکه در سرمیله‌های چرخ‌کار می‌کنند می‌چرخانند، به‌طوری‌کـه طول مؤثر را می‌توان ۱/۵ m دانست. به‌فرض‌آنکه هرکدام نیرویی برابردیگری اعمال‌کند، ودرصورتی که بازده ۵۶درصد باشد، نیرویی راکه هرکدام ازاین شش مرد اعمال می‌کنند پیدا کنید (از وزن زنجیر صرف‌نظرکنید.)

۴ ـ قرقره دیفرانسیلی داریم‌که دوجزء آن به‌ترتیب ۲۴ و ۲۵ دندانه دارد وبرای‌بلند کردن وزنه‌ای به‌جرم ۵۰۰ kg به‌کاربرده می‌شود. با نمودار نشان دهید کـه این دستگاه چگونه‌کار می‌کند و نسبت سرعتها را درآن پیداکنید. همچنین تعیین کنیدکه اگربازده ۶۰درصد باشد، چه نیرویی باید اعمال شود.

۰۱۲۰۱۵ پیچ

پیچ از میله‌ای‌کـه برش آن مـدور است تشکیل شده است‌کـه برروی آن برجستگیهایی به‌شکل مارپیچ به‌وجود آمده است. شیب این برجستگی نسبت به‌صفحهٔ عمـود برمحور میله درهمهٔ نقاط آن یکسان است.

فاصلهٔ میان دوبرجستگی متوالی،که نسبت به‌محور میله موازیند، پای‌پیچ نامیده می‌شود.

پیچ می‌تواند درون مهره‌ای‌که شیاری توخالی وشبیه برجستگیهای پیـچ دارد در راستای برجستگیها بلغزد.

تنها حرکت ممکن برای پیچ، حرکت چرخشی حول محورآن است ودرهمان‌زمان، به‌سبب لغزش برجستگیها در داخل شیار، حرکتی به‌موازات محور انجـام می‌دهد. پیچ، با یك دور چرخش، مسافتی به‌اندازهٔ پای‌پیچ جلومی‌رود.

اگر برجستگی وشیار صیقلی باشند ومحـور پیچ نسبت به‌افـق شیب داشته باشد، وزن پیچ تمایل به‌حرکتی چرخشی و روبه‌پایین دارد. البته، درعمـل، به‌سبب اصطکاك، این حرکت روی نمی‌دهد.

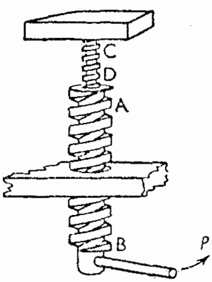
دریك جك پیچی یا درپرس پیچی یـك سرپیچ برجسمی قرار می‌گیرد کـه باید برآن نیرو اعمال شود. وپیچ به‌کمك میله‌ای که به‌سردیگرآن متصل است به‌جلو رانده می‌شود (شکل ۱۵-۱۱).

فرض می‌کنیم‌که a طول بازویی باشد که نیروی محرك P برآن وارد می‌شود، و p پای پیچ باشد.

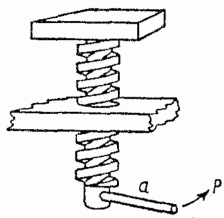
وقتی‌که پیچ یك دور می‌زند P مسافتی به‌اندازهٔ $2\pi a$ می‌پیماید، وحال‌آنکـه پیچ مسافتی برابر p می‌پیماید.

$$\therefore \qquad \text{نسبت سرعتها} = \frac{2\pi a}{p}$$

اگرپیچ صیقلی باشد، این رابطه مزیت مکانیکی پیچ را نیز به‌دست می‌دهد. نسبت سرعتها را با بسیاربزرگ‌کـردن a وبسیارکوچك‌کردن p، به‌طـور تئوری می‌توان‌بسیار بزرگ‌کرد. با بسیار بزرگ‌کردن a ماشین بسیار سنگین وبدقواره می‌شود، وحال‌آنکه با بسیار کوچك کـردن p، برجستگیهای پیچ نازك می‌شوند و در نتیجـه پیچ بسیار ضعیف خواهد شد.



شکل ۱۵-۱۲



شکل ۱۵-۱۱

۱۵‑۰۱۳ پیچ دیفرانسیل

این ماشین، بی‌آنکه لازم باشد بازویی بسیار بلند یا پای پیچی بسیار اندك داشته باشد، دارای نسبت سرعتهای بسیار بزرگ است.

دراین ماشین پیچ AB (شکل ۱۵-۱۲) دریك قطعهٔ ثابت عمل می‌کند.

درون این پیچ سوراخ است و پیچ دیگرDC که پای‌آن کوچکتراست قراردارد. پیچ

کوچکتر درنقطهٔ C به‌قطعه‌ای ثابت محکم شده است، به‌طوری‌که نمی‌تواند بچرخد، اما می‌تواند در راستای طول خود حرکت کند.

وقتی‌که بازوی محرك یك دور کامل می‌زند پیچ AB مسافتی برابر p_1، پـای این پیچ، به‌جلو می‌رود، وحال‌آنکه پیچ کوچکتر مسافتی برابر p_2، پای خـود، درون AB می‌رود.

بنابراین پیچ کوچکتر، ودرنتیجه وزنه، مسافتی برابر $p_1 - p_2$ به‌جلو می‌رود.

اگر a طول بازوی محرك باشد نسبت سرعتها برابرخواهد بود با

$$\frac{2\pi a}{p_1 - p_2}$$

اگر p_1 و p_2 را تقریباً مساوی یکدیگربسازیم رابطهٔ بالا بسیاربزرگ خواهد شد.

تمرین ۳۰۱۵

۱ ـ دریك دستگاه قرقره‌کـه فقط یك نخ وجود دارد، معلـوم شده است‌کـه اگر به‌قاب پایین به‌ترتیب‌وزنه‌های ۱۸ و۲۲واحد بیاویزیم باوزنه‌های ۵و۶ واحد می‌توانیم تعادل برقرارکنیم. عدهٔ تکه‌های نخ ووزن قاب پایینی را تعیین کنید.

۲ ـ در دستگاهی ازچند قرقره‌که درآن تنها یك نخ وجود دارد وزنهٔ ۳واحدی با وزنهٔ ۱۵واحدی و وزنهٔ ۵واحدی بـا وزنهٔ ۲۷واحدی تعادل برقرار می‌کند. وزن قاب پایینی را پیدا کنید. نیز اگر وزن قاب پایینی را ناچیز بگیریم مزیت مکانیکی ایـن دستگاه را تعیین کنید.

۳ ـ در دستگاهی ازچند قرقره که فقط یـك نـخ وجود دارد پنج تکه نـخ از قاب پایینی گذشته است. نسبت سرعتها دراین دستگاه چقدر است؟ اگربازده دستگاه ۵۰درصد باشد، نیروی لازم برای‌آنکه وزنهٔ ۶۰ N را نگاه دارد چقدر است؟

۴ ـ با ماشینی‌که نسبت سرعتها درآن برابر ۶۰ است برای بلندکردن وزنه‌های ۴۰۰، ۸۰۰، و ۱۲۰۰واحد به‌ترتیب نیروهای محرك ۲۱، ۳۵ و ۴۹ واحـد لازم بوده است. ازراه نمودار، یا از هرراه دیگر، نیروی احتمالی لازم برای بلندکردن وزنهٔ ۲۲۴۰ واحد را تعیین کنید وبازده ماشین را برای هروزنه به‌دست آورید.

۵ ـ دستگاهی ازچند قرقره داریم‌که درآن هرنخ به‌میله‌ای متصل است‌که وزنه را نگاه می‌دارد. فرض می‌کنیم عدهٔ قرقره‌های متحرك ۳ و وزن هرقرقره w باشد و نیروی محرك P وارد شود و وزن میله (همراه با وزنه‌ای‌که به‌آن متصل است)که به‌آن چهارنخ متصل شده است W باشد. شرط تعادل را دراین دستگاه بیابید. اگرشعاع

هرقرقره، ازجمله قرقرهٔ ثابت، برابر a باشد نشان دهید که برای‌آنکه میله افقی و نخها قائم بمانند، فاصله افقی مرکز ثقل میله تـا نقطهٔ اتصال بلندترین نخ به‌میله برابر $a\dfrac{11P+5w}{W}$ است.

۶ ـ اگریك دستگاه شامل چهارقرقره باشد و در آن هـرتکه نخ به‌وزنه متصل باشد، و وزن هرقرقره N ۲ باشد، با نیروی N ۲۰ چه وزنه‌ای را می‌توان بلندکرد؟

۷ ـ دریك دستگاه قرقره، که درآن ۳ قرقرهٔ متحرك هـریك به‌جرم kg ۱ وجـود دارد، هرنخ به‌تکیه‌گاه متصل است. نیروی لازم برای نگاهداری وزنه‌ای معین دوبرابر هنگامی است که اگراین قرقره‌ها بیوزن بودند. وزن این وزنه را بیابید.

۸ ـ شرط تعادل را در یك دستگاه قرقره بیابید که درآن هرقرقره با حلقه نخی جداگانه آویزان است ونخها همگی موازیند و هـرنخ به‌میله متصل است. وزن قرقره‌ها را به‌حساب بیاورید. اگردراین دستگاه پنج قرقره وجـرم هرکدام kg ۱ باشد با چـه وزنه‌ای می‌توان نیروی g N ۵۰ را نگاه داشت. دراین صورت نیرویی‌که برمیله فشار می‌آورد چقدر است؟

۹ ـ دستگاهی از n قرقره تشکیل شده است وتنها یك نخ از دور همهٔ قرقره‌ها می‌گذرد. نشان دهیدکه‌اگروزن قرقره‌ها قابل‌صرف‌نظرکردن باشد، مزیت مکانیکی این‌دستگاه برابرn است. مردی‌به‌جرم kg ۸۰ باچنین دستگاهی‌که از هفت قرقره، هریك‌به‌جرم kg ۱/۵، تشکیل شده است، وزنه‌ای به‌جـرم kg ۲۰۰ را بالا می‌برد. اگـر او به‌طورقائم روبه‌پایین فشارآورد، نیرویی‌که برزمین اعمال می‌کند چقدرخواهدبود؟

۱۰ـ نخی‌که یـك سرآن به‌نقطهٔ ثابت A متصل است از زیرقرقرهٔ سنگین P می‌گـذرد، سپس از روی قرقرهٔ ثابت B، وپس ازآن اززیرقرقرهٔ سنگین Q می‌گذرد و سردیگر آن به‌مرکز قرقرهٔ P متصل می‌شود. همهٔ اجزای آویزان نـخ به‌طور قائم هستند. به‌کمك اصل‌کار مجازی، یا هرراه دیگـر، نسبت وزنهای P و Q را، هنگامی‌کـه دستگاه درحال تعادل است، بیابید.

۱۱ـ قرقرهٔ دیفرانسیلی وستون ازدوقطعهٔ پایینی وبالایی تشکیل شده است. قطعهٔ بالایی دارای دوشیار دندانه‌دار است‌کـه شعاع آنها به‌ترتیب cm ۱۰ و cm ۹ است. بازده ماشین ۴۰ درصد است. نیروی لازم برای بلندکـردن وزنه N ۱۵۰۰ چقدر است؟

۱۲ـ دریك چرخ ومحور دیفرانسیلی، شعاع چرخ cm ۳۰ وشعاعهای محور cm ۵ و cm ۷/۵ است. برای‌بلندکردن وزنه‌ای‌به‌جرم Mg ۱ نیرویی برابرN ۶۰۰ لازم

است. بازده ماشین را برای این وزنه تعیین کنید.

۱۳- مردی به‌جرم ۶۵ kg دریك صندلی به‌جرم ۷ kg نشسته است. این صندلی از یك قرقرهٔ صیقلی آویزان است که قرقره خود به‌کمك دو تکه طناب موازی نگاهداری می‌شود. این دوتکه طناب در دوجهت متفاوت، به‌دور دواستوانهٔ یك‌چرخ ومحور دیفرانسیلی که شعاع آنهـا ۳۸ cm و ۳۰ cm است، پیچیده می‌شوند. این مـرد خود را باکشیدن یك طرف طناب بالا می‌کشد. توضیح دهیدکه‌کدام طرف طناب را می‌کشد و نیز نشان دهیدکه برای‌آنکه بتواند خود را بالابکشد باید نیرویی متجاوز از ۸/۵ g N اعمال کند.

۱۴- یك دستگاه قرقره داریم که ازسه‌قرقرهٔ متحرك، هریك به‌وزن W، تشکیل شده‌است، ودرآن هرقرقرهٔ متحرك با یك حلقه نخ‌جداگانه آویزان است وهمهٔ اجزای آویزان نـخ قائمند، و یـك سرهمهٔ نخها به‌نقطه‌ای ثابت متصل است. نیـروی لازم برای نگاهداری این سه قرقرهٔ متحرك را پیداکنید. دوعدد از این قرقره‌های متحرك A و B هستند که وزن هرکدام W است. قرقرهٔ سوم نیز به‌وزن W است، امـا درحلقه نخی قرار داردکه یك‌سرآن به‌محور A و سردیگرآن به‌محور B متصل است. اگر B بالاتر از A قرارگرفته باشد، چه نیرویی باید برسر آزاد نخ که از زیر B گذشته است واردکرد تا دستگاه به‌حال تعادل باشد؟

۱۵- اگـر قرقره‌های ثابت قطعـهٔ دیفرانسیلی وستون به‌ترتیب ده ویازده دندانه داشته باشند، و اثراصطکاك درماشین طوری باشدکه نسبت ثابتی بـا افزایش وزن داشته باشد، هنگامی‌که بازده ماشین $\frac{۱}{۳}$ است این نسبت ثابت را تعیین کنید.

۱۶- زوج نیرویی برابر ۳۵ N cm برپیچی‌که در هـرسانتیمتر دوبرجستگی دارد وارد می‌شود ونیرویی برابر ۱۰۰ N تولید می‌کند. بازده پیچ چقدراست؟

۱۷- دریك‌پرس‌پیچی‌مرکزاهرمی‌به‌طول ۵۰ cm به‌پیچی‌متصل‌شده است‌که‌برجستگیهای آن طوری است‌کـه با هردوازده دورکامل ۱۰ cm جلـومی‌رود. نیروهایی برابر ۴۸ N (در دوجهت متفاوت) بردوسراهرم وارد می‌آیند. به‌کمك اصل کارمجازی، یا هرراه دیگر، نیرویی راکه پیچ اعمال می‌کند پیداکنید.

۱۸- اگرنیروی محـرك ۵۰ N برسربازویی به‌طول ۰/۶ m وارد شود و در یك پرس پیچی نیرویی برابر $۱۰^۴$ N تولیدکند، پای پیچ را تعیین کنید.

۱۹- اگرپای پیچ درپیچهای یك پیچ دیفرانسیلی به‌ترتیب ۰/۸ cm و ۱/۲ cm باشد وگشتاور زوجی‌که‌برپیچ بزرگتراعمال‌می‌شود ۳۰۰۰ N cm باشد وتولیدنیرویی

کندکه برابروزن وزنه‌ای به‌جرم ۵۰۰ kg است، بازده ماشین راحساب کنید.

۲۰ـ به کمك يك چرخ‌چاه ويك قرقره سطلی را به‌درون چاهی می‌برند. سرطناب چرخ‌چاه (کـه معمولاً به‌سطل متصل می‌شود) دراینجا به‌چارچوب چرخ‌چاه متصل است و قرقره کـه سطل به آن متصل است درحلقهٔ طناب می‌لغزد. اجـزای آویزان طناب قائم هستند. با صرف‌نظر کردن از اصطکاك ووزن طناب، به‌کمك اصل کار مجازی، یا هرراه دیگر، نیرویی راکه باید بربازوی چرخ چاه واردکرد تا سطل به‌حال‌تعادل باشد تعیین کنید. فرض آن است‌که وزن سطل واشیای درون آن W وقطرچرخ‌چاه b وطول‌بازوی محرك a است. درماشینهای واقعی ازاصطکاك نمی‌توان چشمپوشی کرد. اگرنیرویی کـه سبب بالاآوردن سطل می‌شود nW باشد بازده ماشین را پیدا کنید.

۲۱ـ دوقطعه قرقره داریم‌که درهرکدام سه‌قرقره وجود دارد. جرم هرقطعه ۱۲ kg است. وزنه‌ای به‌جـرم ۱۳۲ kg به‌قطعهٔ پایینی آویزان است. بازده دستگاه ۶۰ درصد است. نیـروی لازم برای بالابردن وزنه وعکس‌العمل قـلابی راکـه دستگاه ازآن آویزان است تعیین‌کنید. از وزن طناب صرف‌نظر کنید.

۲۲ـ دوچـرخ با شعاعهای a وb $(a>b)$ به‌محـور مشترکی متصل هستندکـه به‌کمك میله‌ای به‌طول c که عمود برمحور است می‌چرخد. یـك سرطنابی سبك به‌نقطه‌ای ازمحیط چرخ بزرگتر وسر دیگر طناب به‌نقطه‌ای ازمحور چرخ‌کوچکتر متصل شده است، به‌طوری‌که وقتی‌میله محور را می‌چرخاند طناب به‌دور یکی‌می‌پیچد وازدور دیگری باز می‌شود. طناب از زیرقرقرهٔ صاف وسبکی می‌گذردکه وزنه‌ای برابر W به‌آن آویزان است.

با نیروی P کـه عمود برمیله و در صفحهٔ حرکت میله وارد می‌شود تعادل برقرار می‌شود. به‌فرض آنکه اصطکاك وجود نداشته باشد و اجزای آویزان طناب قائم باشند، رابطهٔ میان P و W را پیداکنید.

اگر اصطکاك وجود داشته باشد و بازده ماشین ۴۵ درصد باشد، با نیروی $P=$ ۱۲۰ N وزنهٔ Wکـه می‌تـوان بلندکـرد چقدر است؟ a، b و c به‌تـرتیب ۱۵ cm، ۱۰ cm، و ۴۰ cm هستند.

۱۶

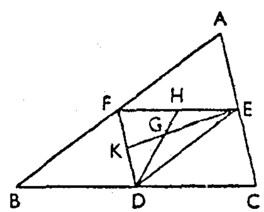
مرکز ثقل

۱.۱۶ دربخش ۱۱ جای مرکزثقل بعضی از اجسام راکه شکلی ساده دارند بیان کردیم. اکنون نشان می‌دهیم که جای این نقطه را دربعضی از موارد دیگرچگونه تعیین می‌کنند، وسپس نشان می‌دهیم که‌چگونه فرمولهای کلی را به‌دست می‌آورند تادرحالتهای دشوارتر جای مرکز ثقل را بیابند.

۲.۱۶ سه‌میله که تشکیل یك مثلث می‌دهند

فرض می‌کنیم AB، BC، CA سه‌میلهٔ یکنواخت باکلفتی ومصالح‌یکسان باشند وتشکیل مثلث ABC را بدهند (شکل ۱۶-۱).

فرض می‌کنیم D، E، F وسطهای اضلاع BC، CA و AB باشند. DE، EF و FD را وصل می‌کنیم.



شکل ۱۶-۱

سه مرکزثقل میله‌ها در D، E و F هستند، ووزن میله‌ها متناسب با طولهای آنها یعنی a، b و c است که می‌توان فرض کرد براین نقطه‌ها اعمال می‌شوند.

بنابراین مرکزثقل میله‌های AB و AC درنقطه‌ای مانند H واقع بر EF است، به طوری که

$$c\times FH=b\times HE$$

یا

$$\frac{FH}{HE}=\frac{b}{c}$$

اما

$$c=۲DE \quad و \quad b=۲DF$$

$$\therefore \quad \frac{FH}{HE}=\frac{DF}{DE}$$

درنتیجه می‌توان گفت که DH نیمساز زاویهٔ FDE است.

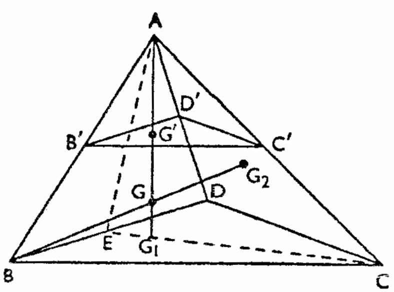
نیزمرکزثقل وزن a که در D اعمال می‌شود ووزن $b+c$ که در H اعمال می‌شود باید برروی DH باشد.

بنابراین مرکزثقل سه‌میله بایدبرروی DH باشد. با همین شیوه درمی‌یابیم که‌مرکز ثقل سه‌میله باید برروی EK باشدکه نیمساز زاویهٔ DEF است.

بنابراین مرکزثقل باید در G باشدکه این دو نیمساز یکدیگر را درآن قطع‌می‌کنند، واین نقطه مرکز دایره‌ای است که درمثلث DEF محاط می‌شود.

۳.۱۶ چهاروجهی

فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۶-۲) یك چهاروجهی باشدکه از جنسی یکنواخت‌ساخته شده است. E را نقطهٔ وسط BD و G_1 را مرکز ثقل قاعدهٔ BCD می‌گیریم.



شکل ۱۶-۲

فرض می‌کنیم B′C′D′ مقطعی از این چهاروجهی به‌موازات قاعدهٔ BCD باشد.

دراین صورت، برطبق نتایج به‌دست‌آمده درهندسه، می‌دانیم که AE از نقطهٔ وسط $B'D'$ می‌گذرد و AG_1 ازمحل برخورد میانه‌های مثلث $B'C'D'$، یعنی از مرکز ثقل G'، می‌گذرد.

دراین صورت، اگربپذیریم که چهاروجهی ازورقه‌های مثلث شکل نازکی به‌موازات BCD تشکیل شده است، نتیجه خواهیم گرفت که، چون مرکزثقل هرورقه برروی AG_1 قرار می‌گیرد، مرکزثقل کل چهاروجهی برروی AG_1 است.

با همین شیوه می‌توان نشان دادکه مرکز ثقل چهاروجهی برروی خطی است که رأس B را به‌مرکزثقل G_2، یعنی‌مرکزثقل وجه ACD، که مقابل B است، وصل‌می‌کند.

همچنین معلوم است که این خطوط درنقطه‌ای مانند G یکدیگر را قطع می‌کنند، به‌طوری که

$$G_1G = \frac{1}{4}G_1A$$

و

$$G_2G = \frac{1}{4}G_2B$$

بنابراین مرکزثقل چهاروجهی برخطی قرار می‌گیرد که مرکزثقل هروجه را به‌رأس مقابل وصل می‌کند وفاصله‌اش ازاین‌وجه، برابریک‌چهارم فاصلهٔ این‌وجه تا رأس است.

یادداشت. مرکزثقل یک چهاروجهی بامرکزثقل چهارنقطهٔ مادی همسان که در رأس آن چهاروجهی قرارگیرند دریک مکان هستند.

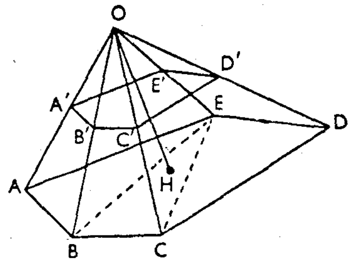
زیرا اگر درسه رأس یک‌مثلث BCD وزنه‌هایی برابر w قراردهیم معادل‌باوزنه‌ای برابر $3w$ هستندکه در G_1، مرکزثقل BCD قراردهیم. نیز $3w$ در G_1 و w در A معادل با وزنهٔ $4w$ هستندکه در G_1 قراردهیم، به‌طوری که $G_1G = \frac{1}{4}G_1A$.

۴.۱۶. هرم چندوجهی و مخروط توپر

فرض می‌کنیم OABCDE (شکل۱۶-۳) هرمی یکنواخت باقاعدهٔ چندضلعی ABCDE باشد. فرض می‌کنیم H مرکزثقل قاعده، و h ارتفاع هرم باشد.

هرصفحه به‌موازات قاعده، سطحی مانند $A'B'C'D'E'$ مشابه قاعده از مخروط جدا می‌کند، به‌طوری‌که مرکزثقل‌آن نیزدرنقطهٔ مشابه‌آن وبرروی خط OH خواهدبود.

با درنظرگرفتن این موضوع که هرم از ورقه‌های نازکی به‌موازات قاعده تشکیل شده است وبا توجه به‌این مطلب که مرکزهای ثقل این ورقه‌ها برروی‌خط OH واقعند، نتیجه می‌شودکه مرکزثقل‌کل هرم نیزبرخط OH واقع است.



شکل ۱۶-۳

اگرقاعدهٔ هـرم را به‌مثلثهایی مانند ABE، BEC، CED، تقسیم‌کنیم، هـرم را می‌توانیم به‌چند چهاروجهی تقسیم‌کنیم.

مرکزثقل هریك ازاینها درارتفاع $\frac{h}{۴}$ بالای قاعده است. در نتیجه مرکزثقل کل هرم در ارتفاع $\frac{h}{۴}$ بالای قاعده است.

بنابراین مرکـز ثقل برروی خطی است کـه رأس هرم را به‌مرکزثقل قاعده وصـل می‌کند ودریك چهارم فاصلهٔ میان این دونقطه است.

چون مخروط قائم مـدور را می‌توان حد هرمی دانست کـه چندضلعی قاعدهٔ آن از بینهایت ضلع تشکیل شده است، نتیجه‌ای راکه دربالا برای هرم به‌دست آوردیم درمورد مخروط نیز می‌توانیم به‌کارببریم.

مرکزثقل مخروط قائم مدور توپر برروی خطی است که رأس مخروط را به‌مرکـز قاعده وصل می‌کند وفاصلهٔ آن تا قاعدهٔ مخروط برابریك چهارم ارتفاع مخروط است.

در مورد **هر** مخروط توپر مرکزثقل برروی خطی است‌که رأس مخروط را به‌مرکز ثقل قاعده وصل می‌کند وفاصله‌اش تا قاعده برابریك چهارم فاصلهٔ رأس تا قاعده است.

۵.۱۶. سطح جانبی مخروط مدور قائم

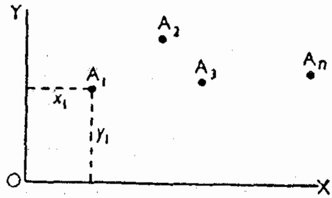
اگراز رأس مخروط خطوطی به‌نقاط‌کنارهٔ قاعدهٔ‌مخروط وصل‌کنیم، می‌توانیم بینهایت‌ورقهٔ مثلث شکل به‌دست آوریم‌که قاعدهٔ آنها بسیارکوچکند. مرکزثقل همهٔ این مثلثها برروی صفحه‌ای قرار می‌گیرندکه به‌موازات قاعدهٔ مخروط است وفاصله‌اش از رأس مخروط‌برابر دوسوم ارتفاع مخروط است. بنابراین مرکزثقل کل سطح جانبی مخروط باید براین صفحه باشد.

ازراه تقارن، نتیجه می‌شودکه مرکزثقل باید برروی محور مخروط باشد.

بنابراین مرکزثقل سطح جانبی مخروط برروی نقطه‌ای واقع برمحور مخروط ودر دوسوم ارتفاع از رأس است.

۶.۱۶. مرکز ثقل چند نقطهٔ مادی

فرض می‌کنیم در نقاط A_1، A_2، A_3، ...، A_n واقع دریك صفحه (شکل ۱۶-۴)،



شکل ۱۶-۴

نقاطی مادی به‌وزنهای w_1، w_2، w_3، ...، w_n قرارگرفته باشند، و فرض می‌کنیم که مختصات این نقاط‌نسبت به‌دومحورمتعامد OX و OY به‌ترتیب (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، ....، (x_n, y_n) باشند.

فرض می‌کنیم‌که صفحه افقی است، به‌طوری که وزنها به‌طور قائم عمل می‌کنند، یعنی شکلی‌که این نیروها عمل می‌کنند عمود برصفحهٔ‌کاغذ است.

برایند این وزنها، وزنی است برابر $w_1+w_2+w_3+ \dots +w_n$ یا برابر Σw.

می‌دانیم‌که گشتاوراین برایندنسبت به‌محور OX یا OY برابراست با مجموع‌گشتاورهای اوزان جداگانه حول این محورها.

مجموع‌گشتاورهای اوزان جداگانه حول محور OY برابراست با

$$w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+ \dots +w_nx_n$$

یا

$$\Sigma wx$$

بنابراین اگر $\bar{x}$ فاصلهٔ راستای برایند از OY باشد،

$$\bar{x}\Sigma w=\Sigma wx$$

$$\therefore \quad \bar{x}=\frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

با همین شیوه، اگر $\bar{y}$ فاصلهٔ برایند از OX باشد،

$$\bar{y}=\frac{\Sigma wy}{\Sigma w}$$

بنابراین راستای‌وزن برایند ازنقطه‌ای مانند G واقع‌درصفحه می‌گذردکه مختصات

آن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ است، واین نقطه باید مرکزثقل نقاط مادی باشد که می‌دانیم نقطه‌ای واقع‌در صفحه است.

واضح است که این‌فرمول درهنگامی‌که w_1، w_2، w_3، ...، w_n وزن اجسامی‌باشند که مرکزثقل آنها A_1، A_2، A_3، ...، A_n است نیز به‌کاربرده می‌شود.

چون $w = mg$، که‌درآن m جرم نقطهٔ مادی است، فرمول بالا را می‌توان‌به‌صورت زیر نیزنوشت:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \quad و \quad \bar{y} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}$$

نقطه‌ای که به‌این ترتیب با درنظر گرفتن جرم نقاط مادی به جای وزن آنها، به‌دست می‌آید مرکز جرم نامیده می‌شود. مرکزجرم و مرکزثقل را معمولاً یکی می‌دانند (واین به‌ویژه درحالتی‌که اجسام درمقایسه با زمین بسیار کوچکند درست است). مکان مرکزجرم جسمی‌که چگالی یکنواخت دارد بستگی به‌شکل آن دارد، یعنی صرفاً بااستفاده ازهندسه به‌دست می‌آید.

۷۰۱۶. وقتی‌که تعداد محدودی نقطهٔ مادی‌با وزن معین وجای معین داشته باشیم برای یافتن مقادیر Σwx و Σwy از راه‌جمع معمولی عمل می‌کنیم.

درمورد جسم صلب عدهٔ ذرات نامعین است. دراین صورت می‌توانیم تصورکنیم که جسم از ورقه‌های نازکی تشکیل شده است، که محل مراکزثقل آنها معلوم است. در حالتهای‌ساده‌تر، مثلاً شبیه‌حالتهایی که‌پیش‌ازاین‌درنظر گرفتیم، می‌توانیم باانتخاب‌ورقه‌های نازك در دوجهت متفاوت نشان دهیم که مرکز ثقل کل جسم باید درنقطهٔ برخورد دو خط مستقیم باشد.

اما دربسیاری از موارد، گرچه شناختن خطی که مرکزثقل باید برروی آن باشد آسان است، باید محل مرکزثقل را برروی این‌خط با استفاده ازفرمول زیربه‌دست‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

که درآن اکنون w وزن ورقهٔ نازك و x فاصلهٔ مرکزثقل این ورقه ازنقطهٔ ثابتی است‌که بر روی خط واقع است. اندازهٔ Σwx را باید از راه انتگرال‌گیری به‌دست آوریم، زیرا دراین حالت با تعداد بیشماری ورقهٔ نازك سروکار داریم.

درحالتی‌که با صفحه‌ای مسطح به‌مساحت A سروکار داریم، اگر x و y فاصله‌های هرعنصر سطح δA ازاین صفحه از دومحور ثابت باشد، دراین صورت فرمولهای

$$\bar{y}=\frac{\Sigma y\delta A}{A} \quad و \quad \bar{x}=\frac{\Sigma x\delta A}{A}$$

محل شبه مرکز صفحه را به‌دست می‌دهند.

درحالتی‌که با تیغه‌ای یکنواخت (که درآن جرم متناسب با مساحت است) سروکار داریم، شبه مرکزتیغه همان مرکزجرم تیغه است. اگرتیغه یکنواخت نباشد این دو مرکز یکسان نخواهند بود.

مرکز ثقل، مرکز جرم، و شبه مرکز معمولاً برهم منطبق هستند، و اگرچنین باشد اغلب هرسه واژه را به‌یك معنی به‌کار می‌برند. اما باید به‌خاطر داشت‌که این حالت، جز در موردی‌که اجسام یکنواخت هستند، یعنی جزدرموردی‌که جهتهای اوزان نقطه‌های مادی متوازی هستند، درست نیست.

تمرین ۱۰۱۶

۱ ـ نقطه‌هایی‌مادی به‌جرمهای ۲، ۳، ۶ و ۹ کیلوگرم‌برخط AB به‌ترتیب به‌فاصله‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ سانتیمتر از A قراردارند. فاصلهٔ مرکزثقل آنها را از A بیابید.

۲ ـ میلهٔ‌یکنواخت AB به‌طول ۴ m وجرم ۶ kg است.درنقطهٔ A جرمی‌برابر ۱kg، ودر فاصلهٔ ۱ m از A جرمی برابر ۲ kg و درفاصلهٔ ۲ m از A جرمی برابر ۳ kg ودرفاصلهٔ ۳ m از A جرمی برابر ۴ kg و درنقطهٔ B جرمی برابر ۵ kg متصل شده است. فاصلهٔ نقطهٔ A را ازمرکزثقل دستگاه بیابید.

۳ ـ وزنه‌هایی به جرم ۳ kg، ۴ kg و ۵ kg به‌ترتیب درگوشه‌های مثلث‌متساوی‌الساقین ABC، که درآن AB = AC = ۱۲ cm و BC = ۸ cm است، قرار داده شده‌اند. فاصلهٔ مرکزثقل وزنه‌ها را از BC واز AD و نیزاز خطی‌که از A بر BC عمود می‌شود بیابید.

۴ ـ وزنه‌هایی به‌جرم ۱، ۲، ۳ و ۴ کیلوگرم به‌ترتیب دررئوس A، B، C و D ازمربع ABCD قرارداده شده‌اند. طول‌هرضلع‌مربع ۸ cm است. فاصلهٔ مرکزثقل‌دستگاه را از AB و AD بیابید.

۵ ـ وزنه‌هایی به‌جرم ۱ kg، ۲ kg و ۳ kg در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی که طول هرضلع‌آن ۹ cm است قرارداده شده‌اند. فاصلهٔ مرکزثقل را از وزنهٔ کوچکتر بیابید.

۶ ـ وزنه‌هایی به‌جرم ۵، ۶، ۹ و ۷ کیلوگرم در رئوس A، B، C، و D از مربعی به‌ضلع ۲۷ cm قرارداده شده‌اند. فاصلهٔ مرکزثقل‌آنها را از A پیدا کنید.

۷ - ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌طول ۴ m است. وزنه‌هایی به جرم ۵، ۱، و ۳ کیلوگرم به‌ترتیب در رئوس A، B و C قرارداده شده‌اند. درنقاط وسط BC، CA و AB به‌ترتیب وزنه‌هایی به جرم ۲، ۴ و ۶ کیلوگرم قرارداده شده است. فاصلهٔ مرکزثقل دستگاه را از B بیابید.

۸ - وزنه‌هایی به‌جرم ۱، ۵، ۳، ۴، ۲ و ۶ کیلوگرم به‌ترتیب در رئوس متوالی یك شش‌ضلعی منتظم قرارگرفته‌اند. ثابت کنیدکه مرکزثقل این وزنه‌ها مرکز شش‌ضلعی است.

۹ - وزنه‌هایی به‌جرم ۵، ۱، ۳، ۲، ۴ و ۱۵ کیلوگرم به‌ترتیب دررئوس متوالی یك‌شش ضلعی منتظم قرارگرفته‌اند. فاصلهٔ مرکزثقل آنها را از وزنهٔ ۱۵ کیلوگرمی بیابید.

۱۰ - وزنه‌هایی به‌جرم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ کیلوگرم به‌ترتیب در رئوس متوالی یك شش‌ضلعی منتظم قرارگرفته‌اند. فاصلهٔ مرکزثقل‌آنها را ازمرکز شش‌ضلعی بیابید. طول هرضلع را ۱۴ cm بگیرید.

۱۱- ABC تیغه‌ای‌است‌به‌شکل‌مثلث‌متساوی‌الساقین که‌درآن $AB = AC =$ ۱۵ cm و $BC =$ ۲۴ cm. جرم تیغه ۰/۲۴ kg است. وزنه‌هایی‌به‌جرم ۰/۰۶، ۰/۰۶، و ۰/۰۴ کیلوگرم به‌ترتیب در رئوس A، B و C قرار می‌دهیم. فاصلهٔ مرکز ثقل دستگاه را از BC بیابید.

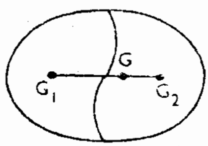
۱۲- جرمهای ۱، ۲، ۳، ۴ کیلوگرم به‌ترتیب دررئوس A، B، C و D ازیك مستطیل قرارگرفته‌اند. $AB =$ ۶ m، $BC =$ ۱۲ m. فاصله‌های قائم مرکزثقل را از AB و BC بیابید.

۸.۱۶. مرکزثقل یك‌جسم مرکب

اگروزن ومرکزهای ثقل دوبخش ازیك جسم را بدانیم می‌توانیم به‌ترتیب زیرمرکزثقل کل جسم را پیدا کنیم.

فرض می‌کنیم G_1 و G_2 مرکزهای ثقل دو بخش ازیك جسم و W_1 و W_2 وزنهای این دوبخش باشند (شکل ۱۶-۵).

این وزنها نیروهای همسو ومتوازی هستندکه بر G_1 و G_2 اثرمی‌کنند. برایندآنها



شکل ۱۶-۵

برابراست با W_1+W_2 که برنقطهٔ G واقع بر G_1G_2 اثرمی‌کند وطوری است که

$$W_1 \times G_1G = W_2 \times GG_2$$

$$\therefore \quad \frac{G_1G}{W_2}=\frac{GG_2}{W_1}=\frac{G_1G_2}{W_1+W_2}$$

$$\therefore \quad G_1G=\frac{W_2}{W_1+W_2}G_1G_2 \quad \text{و} \quad GG_2=\frac{W_1}{W_1+W_2}G_1G_2$$

این نتیجه را ممکن بود با استفاده از فرمول کلی، یا با استفاده ازشیوه‌ای که برای اثبات فرمول به‌کار بردیم، که درواقع کاربرد اصل گشتاورهاست، به‌دست آوریم.

می‌دانیم که برایند W_1 که در G_1 وارد می‌شود و W_2 که در G_2 وارد می‌شود W_1+W_2 است که درنقطه‌ای مانند G واقع بر G_1G_2 وارد می‌شود.

G_1 را به‌عنوان مبدأ می‌پذیریم و گشتاورها را حول این نقطه می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$(W_1+W_2)G_1G=W_2\times G_1G_2$$

$$\therefore \quad G_1G=\frac{W_2}{W_1+W_2}G_1G_2$$

۹.۱۶ مرکزثقل جزء باقیمانده ازبرش

اگروزن ومرکزثقل جسمی را بدانیم ومرکزثقل و وزن جزئی را که ازآن می‌بریم نیز بدانیم، مرکزثقل جزء باقیمانده ازبرش را می‌توانیم به‌شرح زیربه‌دست آوریم.

درشکل بند قبلی فرض می‌کنیم که G مرکزثقل کل جسم، W وزن‌آن، و G_2 و W_2 مرکزثقل ووزن جزء بریده شده باشد.

واضح است که مرکزثقل جزء باقیمانده ازبرش باید برروی همان خطی باشدکه G_2 و G برروی آنند.

نیز مجموع گشتاورهای وزنهای دوجزء این جسم حول هرنقطه‌ای واقع براین خط باید برابر گشتاور وزن‌کل جسم حول‌آن نقطه باشد.

بنابراین گشتاور جزء باقیمانده ازبرش برابراست با گشتاورکل منهای گشتاورجزء بریده شده.

اگر G_1 مرکزثقل جزء باقیمانده ازبرش باشد باگرفتن گشتاور حول نقطهٔ G_2 خواهیم داشت:

$$(W-W_2)G_2G_1=W\times G_2G$$

$$\therefore \qquad G_۲G_۱ = \frac{W}{W - W_۲} G_۲G$$

۱۰.۱۶. اگرجسم مرکبی ازچند جزء تشکیل شده باشد، یا آنکه برشهای متعددی ازیك جسم برداشته شده باشد، دومحور درنظر می‌گیریم وهمان شیوه‌ای را دنبال می‌کنیم که با آن فرمول کلی را به‌دست آوردیم.

بهتراست به‌جای آنکه از فرمول استفاده کنیم مستقیماً اصل گشتاورها را به‌کار ببریم.

برای جسمی که ازچند جزء تشکیل شده است، حول هرمحور خواهیم داشت:

مجموع گشتاورهای اجزا = گشتاور کل

به‌همین شیوه برای جزء باقیمانده ازبرش، پس از بریدن اجزاء متعدد می‌توانیم بنویسیم:

مجموع گشتاورهای اجزاء بریده شده ــ گشتاور کل = گشتاور جزء باقیمانده از برش

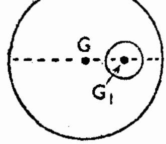
این روشها را درمثالهای زیرروشن کرده‌ایم.

باید توجه داشت که محل مرکزثقل تنها بستگی به‌مقادیر نسبی وزنها دارد. اغلب بهتراست که به‌جای آنکه ازخود وزنها استفاده کنیم کمیتهای متناسب باآنها را به‌کارببریم.

۱۱.۱۶. **مثال ۱:** دریك قرص مدوربه‌قطر ۱۸ cm سوراخی مدور به‌قطر ۶ cm ایجاد می‌کنیم. مرکز سوراخ در فاصلهٔ ۴ cm ازمرکزقرص است. مکان مرکزثقل جزء باقیمانده را پیداکنید.

حل: فرض می‌کنیم G، $G_۱$ (شکل ۱۶-۶) مرکزهای قرص وسوراخ باشد. آشکار است که مرکز ثقل جزء باقیمانده باید برروی $G_۱G$ ودر مقایسه با $G_۱$ درطرف دیگرِ G باشد.

دراینجا بهتراست که گشتاورها را حول G بگیریم. دراین صورت گشتاور کل



شکل ۱۶-۶

قرص برابر صفر است. گشتاورهای اجـزاء بریده شده و باقیمانده برابر و مخـالف یکدیگرند.

با جدولبندی وزنها وفاصله‌ها خواهیم داشت:

	وزن	فاصلهٔ مرکزثقل از G
قرص	۸۱	۰
جزء بریده شده	۹	۴ cm
جزء باقیمانده	۷۲	x cm

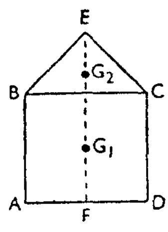
اگرحول G گشتاور بگیریم، خواهیم داشت:

$$۷۲x = ۳۶$$

$$\therefore \quad x = \frac{۱}{۲}$$

یادداشت. دراین مثال مجـذور شعاعهـا را به‌عنـوان وزن اختیارکردیم. ایـن سبب می‌شودکه از وارد شدن π ووزن حجمی قرص درمحاسبه‌ها جلوگیری کنیم.

مثال ۲: ورقه‌ای است فلزی به‌شکل مربع ABCD که به‌ضلع BC آن مثلثی متساوی‌ـ الساقین با قاعدهٔ BC متصل شده است. اگرهرضلع مربع ۱۲ cm وارتفاع‌مثلث ۹ cm باشد، فاصلهٔ مرکزثقل ورقه را ازخط AD بیابید.



شکل ۱۶-۷

حل : فرض می‌کنیم ABECD (شکل۱۶-۷) ورقهٔفلزی باشد. EF را عمود برAD رسم می‌کنیم. مرکزثقل مربع در $G_۱$ است، به‌طوری‌که $FG_۱ = ۶$ cm. مرکز ثقل مثلث در $G_۲$ واقع برEF است، به‌طوری‌کـه $EG_۲ = \frac{۲}{۳} \times ۹ = ۶$ cm . بنابراین $FG_۲ = ۱۵$ cm. وزنها متناسب با مساحتها، یعنی متناسب با ۱۴۴و ۵۴ هستند. با جدولبندی وزنها وفاصله‌های مرکزهای ثقل از محورها، خواهیم داشت:

	وزن	فاصلهٔ مرکزثقل از AD
مربع	۱۴۴	۶ cm
مثلث	۵۴	۱۵ cm
کل ورقه	۱۹۸	x cm

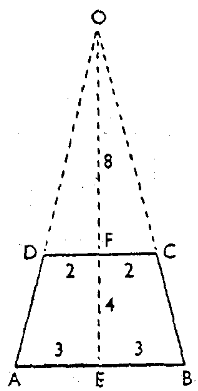
حول AD گشتاور می‌گیریم:

$$۱۹۸x = ۱۴۴ \times ۶ + ۵۴ \times ۱۵$$
$$= ۹۳ \times ۱۸$$
$$\therefore \quad x = ۸\frac{۵}{۱۱}$$

مثال ۳: شعاعهای وجوه یك مخروط ناقص m ۲ و m ۳ است، و ضخامت این مخروط m ۴ است. فاصلهٔ مرکزثقل را ازوجه بزرگتر بیابید.

حل : فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۶-۸) مقطع این مخروط ناقص را از محور EF آن نشان دهد.

AD، BC، و EF را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. O رأس مخروطی بوده است که این مخروط ناقص ازآن بریده شده است.



شکل ۱۶-۸

با استفاده از مثلثهای متشابه OFC و OEB خواهیم داشت:

$$\frac{OE}{OF} = \frac{EB}{FC} = \frac{۳}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{OF + ۴}{OF} = \frac{۳}{۲}$$

$$\therefore \qquad \frac{۴}{OF}=\frac{۱}{۲} \text{ یا } OF=۸\ m$$

اما حجم اجسام توپرمتشابه متناسب با مکعب ابعاد مربوطهٔ آنهاست. بنابراین

$$\therefore \qquad \frac{\text{حجم مخروط } ODC}{\text{حجم مخروط } OAB}=\frac{۸^۳}{۱۲^۳}=\frac{۸}{۲۷}$$

بنابراین وزنهای مخروط کل، مخروط بریده شدهٔ بالایی و مخروط ناقص به‌ترتیب متناسب با ۲۷، ۸ و ۱۹ است.

مرکزهای ثقل هرسه مخروط برروی خط OE است.

با جدولبندی وزنها وفاصله‌های مرکزهای ثقل از O خواهیم داشت:

	وزن	فاصلهٔ مرکز ثقل از O
مخروط کل	۲۷	۹ m
مخروط بریده شده	۸	۶ m
مخروط ناقص	۱۹	x m

با گرفتن گشتاور حول O خواهیم داشت:

$$۱۹x=۲۷\times ۹-۴۸=۱۹۵$$

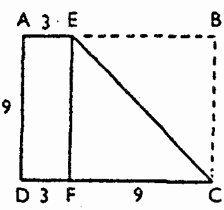
$$\therefore \qquad x=\frac{۱۹۵}{۱۹}$$

بنابراین فاصلهٔ مرکزثقل ازE برابراست با

$$۱۲-\frac{۱۹۵}{۱۹}=\frac{۳۳}{۱۹}m$$

مثال ۴: ورقه‌ای است ازکاغذ به‌شکل مستطیل که عرض آن ۹ cm وطول‌آن ۱۲ cm است. کاغذ را از یك گوشه طوری تا می‌کنیم که یکی از دوضلع کوچکتر کاملاً برروی ضلع بزرگتر بخوابد. اکنون مرکزثقل کل ورقه راکه تا شده است‌بیابید.

حل: فرض می‌کنیم AECFD (شکل ۱۶-۹) ورقهٔ تاشده را نشان دهد،به‌طوری که جزءِ مثلث شکل‌آن یعنی EFC دولایه است.



شکل ۱۶-۹

بهتراست DC و DA را به‌عنوان محورهای x و y انتخاب کنیم.

جرم ADFE متناسب با ۲۷ وجرم EFC متناسب با ۸۱ است.

با جدولبندی جرمها وفاصله‌های مرکزهای ثقل ازمحورها خواهیم‌داشت:

	جرم	فاصلهٔ مرکزثقل از DA	فاصلهٔ مرکزثقل از DC
ADFE	۲۷	$\frac{۳}{۲}$ cm	$\frac{۹}{۲}$ cm
EFC	۸۱	$۳+۳=۶$ cm	۳ cm
کل‌شیء	۱۰۸	x cm	y cm

حول DA گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$۱۰۸x=۴۸۶+\frac{۸۱}{۲}=\frac{۱۰۵۳}{۲}$$

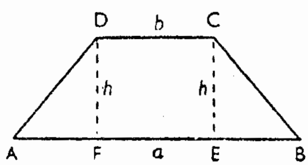
$$\therefore \qquad x=\frac{۱۰۵۳}{۲۱۶}=۴\frac{۷}{۸}$$

حول DC گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$۱۰۸y=۲۴۳+\frac{۲۴۳}{۲}=\frac{۷۲۹}{۲}$$

$$\therefore \qquad y=\frac{۷۲۹}{۲۱۶}=۳\frac{۳}{۸}$$

مثال ۵: ABCD ذوزنقه‌ای است‌که درآن اضلاع AB و CD موازیند وطـول آنها a و b است. ثابت‌کنیدکه فاصلهٔ مرکزثقل از AB برابر است با $\frac{۱}{۳}h\,\frac{a+۲b}{a+b}$، که درآن h فاصلهٔ میان AB و CD است.



شکل ۱۶-۱۰

حل : روش (الف). CE و DF را عمود برAB رسم می‌کنیم (شکل ۱۶-۱۰).

دراین صورت خواهیم داشت:

	مساحت	فاصلهٔ مرکز ثقل از AB
ABCD	$\frac{۱}{۲}(a+b)h$	x
DCEF	bh	$\frac{۱}{۲}h$
ADF	$\frac{۱}{۲}\mathrm{AF}\times h$	$\frac{۱}{۳}h$
CEB	$\frac{۱}{۲}\mathrm{EB}\times h$	$\frac{۱}{۳}h$

بنابراین با گرفتن گشتاور حول AB خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}(a+b)hx=b\times\frac{h^{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\times \mathrm{AF}\times\frac{h^{۲}}{۳}+\frac{۱}{۲}\times \mathrm{EB}\times\frac{h^{۲}}{۳}$$

$$=\frac{h^{۲}}{۲}\left(b+\frac{\mathrm{AF}+\mathrm{EB}}{۳}\right)$$

اما
$$\mathrm{AF}+\mathrm{EB}=a-b$$

$$\therefore \qquad \frac{۱}{۲}(a+b)hx=\frac{h^{۲}}{۲}\left(b+\frac{a-b}{۳}\right)=\frac{h^{۲}}{۲}\times\frac{۲b+a}{۳}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{۱}{۳}h\,\frac{a+۲b}{a+b}$$

روش (ب). محل‌مرکز جرم‌را می‌توان بادرنظر گرفتن‌این‌واقعیت به‌دست‌آورد که‌ذوزنقه از دو مثلث ADC و ACB تشکیل شده است که مساحتهای آنها به‌ترتیب $\frac{۱}{۲}bh$ و $\frac{۱}{۲}ah$ است. سپس باید به‌جای هرمثلث سه‌نقطهٔ مادی تصور کرد که در رئوس آنها قراردارد. دررئوس ADC سه‌نقطهٔ مادی هریك به‌جرم $\frac{۱}{۶}bh$ و در رئوس ACB سه‌نقطهٔ مادی هریك به‌جرم $\frac{۱}{۶}ah$.

نتیجه این می‌شودکه دررأس A وC جرم $\frac{۱}{۶}(a+b)h$ ودررأس B جرم $\frac{۱}{۶}ah$و در رأس D جرم $\frac{۱}{۶}bh$قرار می‌گیرد.

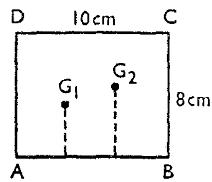
با گرفتن گشتاورحول AB خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}(a+b)hx=\left[\frac{۱}{۶}bh+\frac{۱}{۶}(a+b)h\right]h$$

$$=\frac{۱}{۶}[a+۲b]h^{۲}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{۱}{۳}h\frac{a+۲b}{a+b}$$

مثال ۶: تخته‌ای است یکنواخت به‌شکل مستطیل ABCD که درآن $AB=۱۰$ cm و $AD=۸$ cm. دوسوراخ مربع‌شکل هریك به‌ضلع ۲ cm درایـن تخته ایجاد شده است. این دوسوراخ با همان ضخامت اولیه ازفلزی پرشده است کـه وزن مخصوص آن ۹ برابروزن مخصوص تخته است. اگر AB و AD را به‌عنوان محورهای x و y اختیارکنیم و اگرمختصات مرکزهای‌ثقل این دوسوراخ نسبت به‌این دومحور به‌ترتیب (۴, ۳) و (۷, ۴) باشد، مختصات مرکز ثقل تخته را پس ازپرکردن سوراخها بیابید.



شکل ۱۶-۱۱

حل : فرض می‌کنیم $G_۱$ و $G_۲$ (شکل ۱۶-۱۱) مرکزهای سوراخها باشند.

مساحت هـرسوراخ ۴ cm^۲ است و وزن نسبی آن ۳۶ است. بهتـرآن است‌که تخته‌ای را کـه سوراخهای آن پرشده است تخته‌ای یکنواخت درنظـر بگیریم‌کـه درنقاط $G_۱$ و $G_۲$ وزنه‌هـای ۳۲ افزوده شده است. در ایـن صورت خواهیم داشت:

	وزن	فاصلهٔ مرکزثقل	
		از AD	از AB
تختهٔ اصلی	۸۰	۵ cm	۴ cm
وزنه در $G_۱$	۳۲	۴ cm	۳ cm
وزنه در $G_۲$	۳۲	۷ cm	۴ cm
تختهٔ پرشده	۱۴۴	x cm	y cm

باگرفتن گشتاورحول AD خواهیم داشت:

$$۱۴۴x=۴۰۰+۱۲۸+۲۲۴=۷۵۲$$

$$\therefore \qquad x=\frac{۷۵۲}{۱۴۴}=۵\frac{۲}{۹}$$

با گرفتن گشتاور حول AB خواهیم داشت:

$$۱۴۴y=۳۲۰+۹۶+۱۲۸=۵۴۴$$

$$\therefore \qquad y=\frac{۵۴۴}{۱۴۴}=۳\frac{۷}{۹}$$

تمرین ۲.۱۶

۱ - ورقه‌ای است از کاغذ که به‌شکل مستطیل ABCD بوده است که از آن مثلثی متساوی‌الساقین به‌قاعدهٔ BC برداشته‌اند. اگر AB = ۱۲ cm، AD = ۸ cm، و ارتفاع مثلث ۱۲ cm باشد، فاصلهٔ مرکز ثقل ورقه را از AD پیدا کنید.

۲ - درقرص مدوری به‌شعاع ۱۲ cm سوراخی به‌قطر ۲ cm ایجاد شده است، مرکز سوراخ از مرکز قرص ۶ cm فاصله دارد. محل مرکز ثقل باقیماندهٔ قرص را پیدا کنید.

۳ - دریك قرص مدور به‌شعاع ۱۲ cm دو سوراخ گرد هریك به‌شعاع ۲ cm ایجاد کرده‌اند. مرکز سوراخها بردوقطر متعامد قرص به‌فاصلهٔ ۶ cm از مرکز قرص قرار دارند. محل مرکز ثقل باقیماندهٔ قرص را پیدا کنید.

۴ - ورقه‌ای است از کاغذ به‌شکل مربع مستطیل ABCD که درآن AB = ۱۲ cm، و AD = ۸ cm است. E نقطهٔ وسط AD است. از این ورقه مثلث CED را می‌بریم. فاصلهٔ مرکز ثقل باقیماندهٔ ورقه را از AD و AB بیابید.

۵ - ABCD تخته‌ای است مربعی شکل که هر ضلع آن ۱۲ cm است. E نقطه‌ای است بر AD، به‌طوری که DE = ۳ cm. مثلث CED را می‌بریم. محل مرکز ثقل باقیماندهٔ تخته را از AB و AD بیابید.

۶ - درمثلث ABC نقطهٔ D وسط BC است. از مرکز جرم این مثلث خطی به‌موازات BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به‌ترتیب در نقطه‌های E و F قطع کند. ثابت کنید که مرکز جرم چهارضلعی BEFC برروی خط AD و به‌فاصلهٔ $\frac{۷}{۴۵}$AD از نقطهٔ D قراردارد.

۷ - ABCD تیغه‌ای است مربعی‌شکل که طول هرضلع آن ۹ cm است. E و F به‌ترتیب نقطه‌هایی واقع بر BC و CD هستند به‌طوری که EC و CF هریك برابر ۳ cm است. مرکز جرم جزء ABEFDA تیغه را بیابید.

۸ - ABCDEF ورقه‌ای است نازك از مقوا به‌شکل شش‌ضلعی منتظم. ثابت کنید که

اگر مثلث ABC از آن بریده شود و برروی مثلث DEF قرارداده شود، مرکز ثقل کل به اندازهٔ $\frac{۲}{۹}a$ جابه‌جا می‌شود که a طول ضلع شش‌ضلعی است.

۹ - ABCD ورقه‌ای است به‌شکل مستطیل که‌درآن AB = ۸ cm و BC = ۱۲ cm است. E نقطهٔ وسط BC است. اگر جزء مثلثی‌شکل ABE از ورقه بریده شود و باقیماندهٔ ورقه را از نقطهٔ A آویزان کنیم، زاویهٔ انحراف ضلع AD را نسبت به‌قائم مکان پیدا کنید.

۱۰- ABCD تیغه‌ای است به شکل مستطیل که در آن $AB = CD = ۲a$ و $AD = BC = ۲b$ است. P و Q به‌ترتیب نقطه‌های وسط BC و CD هستند. جزء مثلثی شکل PCQ را از تیغه می‌بریم. ثابت کنید که فاصله‌های قائم مرکز ثقل باقیماندهٔ تیغه از اضلاع AD و AB به‌ترتیب $\frac{۱۹}{۲۱}a$ و $\frac{۱۹}{۲۱}b$ است.

۱۱- تیغه‌ای است مثلثی‌شکل که ازدوفلزساخته شده است. این دو فلز به‌وسیلهٔ خطی از هم جدا شده‌اندکه موازی یکی از اضلاع مثلث است و ازیک‌سوم فاصلهٔ میانهٔ وارد برآن ضلع می‌گذرد. نسبت چگالیهای بخشهای مثلثی وذوزنقه‌ای این تیغه ۵ به ۴ است. مکان مرکزجرم این تیغه را پیدا کنید.

۱۲- سه‌ورقهٔ مستطیل شکل به‌ابعاد ۶۰ cm در ۵ cm، و ۹۰ cm در ۵ cm، و ۳۰ cm در ۴ cm به‌هم متصل شده‌اند و شکلی مانند ⊤ به‌وجود آورده‌اند. درازترین ورقه وکوتاهترین ورقه، تکه‌های بالایی وپایینی را تشکیل داده‌اند. فاصلهٔ مرکزجرم را ازکنارهٔ خارجی کوتاهترین ورقه پیدا کنید.

۱۲- ورقه‌ای است یکنواخت به‌شکل مربع که هرضلع آن ۳۰ cm است. دوسوراخ گرد درآن پدیدآمده است که یکی به‌شعاع ۲ cm است ودیگری به‌شعاع ۱ cm. اگر دوضلع متقاطع این ورقه را محورهای مختصات فرض‌کنیم، مختصات مرکزسوراخ بزرگتر (۱۰ , ۱۳) cm ومختصات مرکزسوراخ کوچکتر (۲۰ , ۳) cm است. مختصات مرکزجرم جسم باقیمانده را پیدا کنید.

۱۴- ثابت کنید که، اگر ABCD ذوزنقه‌ای باشدکه درآن اضلاع AB و CD با هم موازیند، مرکزثقل ذوزنقه خط واصل میان نقطه‌های وسط AB وCD رابه‌نسبت $\frac{AB + ۲CD}{۲AB + CD}$ تقسیم می‌کند.

۱۵- ABC مثلثی است که درآن AB = AC است. D، E، F به‌ترتیب نقطه‌های وسط BC، CA، وAB است، و G مرکز ثقل مثلث است. اگربخش AFGE از

مثلث برداشته شود، به‌شرط آنکه $AD = 0/9\ m$ باشد، فاصلهٔ A را ازمرکزثقل باقیمانده پیداکنید.

۱۶- ورقه‌ای است یکنواخت به‌شکل مستطیل ABCD. خط میان نقطه‌های وسط CB و CDرا برش‌می‌زنیم و بخش مثلث شکل را ازمستطیل جدا می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه مرکزثقل‌جسم باقیمانده درفاصلهٔ $\frac{1}{21}AC$ ازمرکزمستطیل است.

۱۷- دومخروط مدور قائم دارای قاعده‌های یکسان هستند ومحورهایشان دردوجهت متفاوت است. اگر این دومخروط توپررا ازقاعده به‌هم بچسبانیم‌که جسمی دوکی شکل درست‌کنند، ثابت‌کنیدکه مرکزثقل آنها دروسط خطی است‌که دورأس دو مخروط را به‌هم وصل می‌کند وازمرکزقاعدهٔ مشترك این دومخروط می‌گذرد.

۱۸- ABC تیغه‌ای است یکنواخت به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع که طول هرضلع آن $20\ cm$ وجرم‌آن $240\ g$ است. درگوشه‌های A، B، و C ازاین تیغه، به‌ترتیب جرمهای ۳۰، ۴۰، و۵۰ گرم قرار می‌دهیم. فاصلهٔ مرکزثقل مجموعه را از ضلع BC بیابید.

۱۹- شعاعهای دوانتهای مدوریك مخروط ناقص توپر به‌نسبت ۲ به ۳ هستند. ثابت کنیدکه فاصله‌های مرکزجرم این مخروط ناقص ازدوانتهای آن به‌نسبت ۴۳ به‌۳۳ هستند.

۲۰- قطعه‌ای مقوا به‌شکل مستطیل ABCD است، که درآن $AB = 5\ cm$ و $BC = 8\ cm$ است. تکه‌ای ازاین مقوا را به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع ABE به‌قاعدهٔ AB می‌بریم. فاصلهٔ مرکزثقل باقیمانده را از DC حساب‌کنید.

۲۱- جسمی است به‌شکل یك مخروط مدورقائم‌که برروی استوانه‌ای قراردارد. قطر قاعده $10\ m$، ارتفاع استوانه $4/8\ m$، و طول شیب مخروط $6\ m$ است. اگر مخروط واستوانه توپر و ازیك جنس باشند، ارتفاع مرکزثقل را اززمین حساب کنید.

۲۲- چهاروجهی منظم بسته‌ای داریم‌که از ورقه‌های نازك فلزساخته شده است. محل مرکزثقل‌آن را در دوحالت زیر پیداکنید: ۱) هنگامی‌که خالی است، ۲) هنگامی که پرازمایعی است‌که وزن‌آن سه برابروزن چهاروجهی است.

۲۳- مخروط ناقصی است‌که شعاعهای دوقاعدهٔ آن r_1 و r_2 وفاصلهٔ میان دوقاعدهٔ آن h است. بخش منحنی آن با مادهٔ یکنواخت نازکی پوشانده شده است. ثابت‌کنیدکه ارتفاع مرکزثقل این لایه ازقاعده‌ای‌که شعاع آن r_2 است برابراست با

$$\frac{h(2r_1+r_2)}{3(r_1+r_2)}$$

۲۴ـ تخته‌ای چوبی و یکنواخت به‌شکل مثلث متساوی‌الساقین به‌اضلاع ۱۲، ۸ و ۱۲ سانتیمتر. دو روی این تخته را با لایهٔ فلزی نازکی پوشانده‌اند. اگروزن این لایهٔ فلزی دوبرابروزن تختهٔ‌چوبی باشد، محل مرکزثقل تختهٔ لایه‌دار را پیدا کنید.

۲۵ـ سیمی است یکنواخت که خم شده است و به‌شکل مثلث ABC درآمـده است. این جسم را ازA آویزان می‌کنیم. ثابت کنید که اگرشاقولی را نیزاز A آویزان کنیم، امتداد شاقول BC را درنقطه‌ای مانند D قطع می‌کند، به‌طوری که

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{a+b}{a+c}$$

که درآن a، b و c طول اضلاع مثلث است.

۲۶ـ مخروط ناقصی داریم که قطر دوسرآن به‌ترتیب ۳۰ cm و ۹۰ cm است. ارتفاع آن ۶۵ cm است. ثابت کنید که مرکزثقل در ۲۲/۵ cm ازقاعدهٔ بزرگتر است.

۲۷ـ ازمـرکزثقل یك مثلث خطـی به‌موازات یکی از اضلاع مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنیدکه مرکزثقل بخش‌چهارضلعی باقیمانده میانهٔ مثلث را به‌نسبت ۷ به ۳۸تقسیم می‌کند.

۲۸ـ یك قوطی حلبی به‌شکل مخروط قائم است که سطح جانبی وقاعدهٔ آن، همه ازیـك ورقهٔ نازك یکنواخت فلزی تشکیل شده است. نیم زاویهٔ قائـم رأس مخروط 30° است. این قوطی را بامایعی پرمی‌کنیم که وزن‌آن دوبرابروزن قوطی است.ارتفاع مرکزثقل مجموعه را ازبالای قاعدهٔ مخروط نسبت به‌ارتفاع مخروط پیدا کنید.

۲۹ـ مخروط ناقص توپری است که ازماده‌ای یکنواخت تشکیل شده است. ارتفـاع آن h وشعاعهای دوقاعـدهٔ آن a و b است $(a>b)$. سوراخـی استوانه‌ای شکل در این مخروط‌ناقص پدید می‌آوریم. محورسوراخ منطبق برمحورمخروط است‌وشعاع آن برابرشعاع قاعدهٔ کوچکترمخروط ناقص‌است. ثابت کنید که فاصلهٔ مرکزثقل‌جسم باقیمانده ازقاعدهٔ بزرگتربرابراست با

$$\frac{h(a+3b)}{4(a+2b)}$$

۳۰ـ ثابت کنید که اگرشعاع قاعدهٔ یك مخروط ناقص قائم n برابرشعاع قاعدهٔ دیگرباشد، مرکزثقل این مخروط محورمخروط را به‌نسبت

$$3n^2+2n+1 \quad \text{به} \quad n^2+2n+3$$

تقسیم می‌کند.

۳۱- مرکزثقل مخروط توخالی قائمی را بیابیدکه جنس قاعدهٔآن ازجنس سطح جانبیآن است. اگرارتفاع مخروط وقطرقاعدهٔ آن برابرباشند، هنگامی که مخروط ازنقطه‌ای واقع برمحیط قاعده آویزان می‌شود، زاویه‌ای که محورآن باخط قائم مکان‌می‌سازد چقدراست؟

۳۲- ظرف مخروطی شکل توخالی ازیك ورقهٔ فلزی تشکیل شده است. قاعدهٔ مخروط بسته است. اگراین مخروط به‌وسیلهٔ صفحه‌ای به‌موازات‌قاعده وازوسط ارتفاع‌قائم مخروط بریده شود، ومخروط بالایی برداشته شود، ثابت‌کنیدکه مرکزثقل ظرف باقیمانده برابراست با

$$\frac{۲lh}{۳(۳l+۴r)}$$

که درآن h ارتفاع قائم ظرف اصلی، l طول یال جانبی، وr شعاع قاعده است.

۳۳- مرکز ثقل تیغهٔ یکنواختی به‌شکل L را پیداکنیدکه درآن طول و عرض خارجی بازوی قائم به‌ترتیب ۱۰ cm و ۱ cm وطول و عرض خارجی بازوی افقی به‌ترتیب ۶ cm و ۲ cm است.

۳۴- گوشه‌ای ازیك‌مکعب توپرچوبی، را باره طوری می‌بریم که سطح برش‌ازنقطه‌های وسط لبه‌هایی که به‌آن‌گوشه متصل است می‌گذرد. فاصله‌های مرکزثقل جسم باقیمانده را از سه‌وجه بریده نشده پیدا کنید.

۳۵- هرمی مثلث‌القاعده‌که طول هروجه آن برابر a است با یك صفحه به‌موازات قاعده بریده می‌شود. ارتفاع صفحهٔ برش نصف ارتفاع هرم است. محل مرکز ثقل هرم ناقص باقیمانده را پیدا کنید.

۳۶- تیغه‌ای است به‌شکل مستطیل ABCD که به‌آن مثلث BEC طوری افزوده شده است که BE درامتداد AB است. اگرطولهای AB، AD، و BE به‌ترتیب a، b، و c باشند، پیدا کنیدکه مرکز ثقل تیغه درچه فاصله‌ای از AB و AD قرار دارد. همچنین ثابت‌کنیدکه اگر $c=a\sqrt{۳}$ باشد مرکزثقل برروی BC خواهدبود.

۳۷- چهار الوارمشابه، هریك به‌طول ۳/۶ m است. الوار دومی طوری برروی‌الوار اولی قرارگرفته است که‌سرآن ۰/۶ m بیرون زده‌است. الوارسومی طوری‌برروی الوار دومی قرارگرفته است که سرآن ۰/۹ m ازاین الوار بیرون زده است.الوار چهارمی نیزطوری برروی الوارسومی قرارگرفته است‌که سرآن ۱/۸ m ازاین الواربیرون زده است. الوارها محکم به‌هم بسته شده‌اند. مکان مرکز ثقل را پیدا کنید.

۳۸- بشکه‌ای است به‌شکل مکعب که از ورقه‌ای فلزی تشکیل شده است. طول‌هرضلع آن برابر a است. درمرکزقاعدهٔ آن سوراخی مدور به‌قطر $\frac{a}{4}$ پدید می‌آوریم. ازهمان ورقه‌ای که مکعب را ساخته‌ایم لوله‌ای به‌شکل استوانه با قطرقاعدهٔ $\frac{a}{4}$ و به‌ارتفاع $\frac{a}{4}$ می‌سازیم. لبهٔ استوانه را به‌لبهٔ سوراخ لحیم می‌کنیم وسردیگراستوانه را با یك ورقهٔ گرد ازهمان جنس می‌بندیم. مرکزجرم مجموعه را پیدا کنید.

۳۹- استوانه‌ای است توپربه‌جرم M وشعاع a. به‌دوسرآن دوقرص مدورکوچك، هریك به‌جرم m، طوری لحیم شده است که خط واصل میان مرکزهای دوقرص به‌موازات محـوراستوانه وبه‌فاصلهٔ c از آن است. دراین استوانه سوراخی استوانه‌ای شکل به‌موازات محورآن وبه‌شعاع b پدید می‌آوریم. تعیین کنید فاصلهٔ محوراین سوراخ تا محوراستوانه چقدرباشد تامرکزثقل‌جسم باقیمانده وقرصها برروی محوراستوانه باشد. بیشترین مقدارنسبت $\frac{m}{M}$ چقدرباید باشد تا پاسخ مسئله امکانپذیرباشد؟

۴۰- داربستی است به‌شکل یك چهاروجهی که ازشش میلهٔ یکنواخت تشکیل شده‌است. هرمیله بامیلهٔ مقابل‌خود برابراست. ثابت کنیدکه مرکزثقل این چهاروجهی‌درجایی است که مرکزثقل چهاروجهی توپرقراردارد.

۱۲۰۱۶. تیغهٔ چهارضلعی

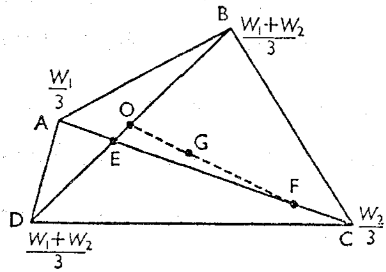
جای مرکزثقل یك چهارضلعی را می‌توان به‌آسانی تعیین کرد. یکی ازقطرهای چهارضلعی را رسم می‌کنیم وچهارضلعی را به‌صورت دو مثلث درمی‌آوریم. سپس هریك ازاین مثلثها را باسه نقطهٔ مادی درسه رأس مثلث جانشین می‌کنیم که جرم هرکدام یك‌سوم جرم مثلث است.

برای تعیین جای مرکزثقل راههای گوناگون وجود دارد، کـه دراینجا یکی از آن راهها را بیان می‌کنیم.

فـرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۶-۱۲) تیغهٔ چهارضلعی باشدکـه قطرهای آن، AC و BD، همدیگررا درنقطهٔ E قطع می‌کنند.

وزن کـل چهارضلعی را W ووزن مثلثهـای ABD و BCD را به‌ترتیب W_1 و W_2 می‌گیریم.

چون مساحتهای ABD و BCD به‌نسبتهای AE به EC است.



شکل ۱۶-۱۲

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{AE}{EC}$$

به‌جای مثلث ABD سه‌نقطهٔ مادی، هریك به‌جرم $\frac{1}{3}W_1$ در نقاط A، B، و D در نظرمی‌گیریم. به‌جای مثلث BCD نیز سه‌نقطهٔ مادی، هریك به‌جرم $\frac{1}{3}W_2$ در نقاط B، C، وD درنظرمی‌گیریم. دراین صورت در نقطهٔ A جرم $\frac{1}{3}W_1$، ودرنقطهٔ C جرم $\frac{1}{3}W_2$ ودرهریك از نقاط B وD جرمی برابر $\frac{1}{3}(W_1+W_2)$ داریم.

اما مرکزثقل $\frac{1}{3}W_1$ درA و $\frac{1}{3}W_2$ درC نقطه‌ای‌است مانند F واقع برروی AC، به‌طوری که

$$W_1\times AF=W_2\times CF$$

$$\therefore \quad \frac{CF}{AF}=\frac{W_1}{W_2}=\frac{AE}{EC}$$

بنابراین $\quad CF=AE$

وزنه‌هایی که درA وC هستند معادلند با وزنهٔ $\frac{1}{3}W$ درF.

وزنه‌هایی که در B وD هستند معادلند با وزنهٔ $\frac{2}{3}W$ در O، که O نقطهٔ وسط BD است. بنابراین مرکزثقل کل‌چهارضلعی درنقطه‌ای مانند G واقع برOF است، به‌طوری که $2OG=GF$

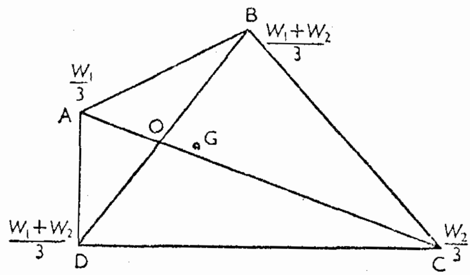
مثال: G مرکزثقل یك چهارضلعی مسطح یکنواخت است. G' مرکزثقل چهارنقطهٔ مادی

یکسان است که درچهار گوشهٔ این چهارضلعی قرار داده‌اند. O محل تلاقی قطرهاست. ثابت کنید که O، G، و G′ بریك راستا قراردارند و $OG' = ۳GG'$.

حل : فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۶-۱۳) چهارضلعی مذکور باشد.

وزن مثلثهای ABD و BCD را به‌ترتیب برابر $W_۱$ و $W_۲$ می‌گیریم.

به‌جای ABD سه‌نقطهٔ مادی، هریك به‌جرم $\frac{۱}{۳}W_۱$ در A، B و D می‌گذاریم و به‌جای BCD سه‌نقطهٔ مادی، هریك به‌جرم $\frac{۱}{۳}W_۲$ در B، C وD می‌گذاریم.



شکل ۱۶-۱۳

G مرکزثقل این نقطه‌های مادی است وبنابراین وزن کل یعنی $W_۱ + W_۲$ براین نقطه وارد می‌شود.

اما G′مرکز ثقل این نقطه‌های مادی بعلاوهٔ نقطه‌های مادی $\frac{۱}{۳}W_۲$ در A و $\frac{۱}{۳}W_۱$ در C است که معادل است با $\frac{۱}{۳}(W_۱ + W_۲)$ در O (زیرا $\frac{W_۱}{W_۲} = \frac{AO}{OC}$).

چون G′ مرکزثقل $W_۱ + W_۲$ در G و $\frac{۱}{۳}(W_۱ + W_۲)$ در O است ، باید برراستای OG قرار گیرد و $OG' = ۳GG'$ باشد.

تمرین ۳.۱۶

۱ ـ ثابت کنید که مرکزثقل یك چهارضلعی ABCD درهمان جایی است که اگر سه نقطهٔ مادی به‌جرمهایی متناسب با AO، OC و ۲AC به‌ترتیب درA، C ونقطهٔ وسط BD قرارمی‌دادیم. O محل تلاقی AC وBD است.

۲ - $ABCD$ چهار ضلعی مسطح یکنواختی است که محل تلاقی قطرهای آن L است. برقطرهای AC و BD به‌ترتیب نقطه‌های M و N را طوری انتخاب می‌کنیم که $AM=CL$ و $BN=DL$ باشد. ثابت کنید که مرکزجرم چهارضلعی $ABCD$ برمرکزجرم مثلث LMN منطبق است.

۳ - $ABCD$ تیغه‌ای است مسطح و یکنواخت به‌شکل چهارضلعی $ABCD$، که در آن AB موازی DC است. طول AB برابر a و طول DC برابر b است. ثابت کنید که مرکز ثقل این تیغه منطبق برمرکزثقل چهار نقطهٔ مادی است که وزن آنها متناسب با a، $a+b$، b، $a+b$ است که به‌ترتیب درنقاط A، B، C و D قرار گرفته‌اند. اگر $AD=BC=c$، و $b>a$ باشد، درصورتی که محورهای مختصات، یکی DA ودیگری خط عمود بر DA درنقطهٔ D باشد، مختصات مرکزثقل را پیدا کنید.

۴ - مختصات مرکز ثقل تیغهٔ یکنواختی به‌شکل چهارضلعی را تا دورقم اعشار به‌دست آورید. مختصات رئوس این چهارضلعی عبارتند از $(۵, ۰)$، $(۳, ۷)$، $(-۲, ۵)$، و $(-۵, ۰)$.

۵ - الف- ثابت کنید که مرکزثقل صفحهٔ یکنواخت مثلث شکل ABC منطبق برمرکز ثقل سه نقطهٔ مادی یکسان است که درنقاط X، Y، و Z قرار گرفته‌اند که به‌ترتیب براضلاع BC، CA، و AB طوری واقعند که $\frac{BX}{XC}=\frac{CY}{YA}=\frac{AZ}{ZB}$.

ب- $ABCD$ ذوزنقه‌ای است که طول اضلاع متوازی آن، AB و DC، به‌ترتیب a و b است. E و F نقطه‌های وسط AB و DC است. H نقطهٔ وسط EF است. ثابت کنید که مرکزجرم این ذوزنقه منطبق برمرکزجرم اجرامی متناسب با a، b، $۲a+۲b$ است که به‌ترتیب در E، F، و H قراردارند.

۶ - صفحه‌ای یکنواخت به‌شکل چهارضلعی $ABCD$ که قطرهای AC و BD درنقطهٔ O برهم عمودند، به‌طوری که $AO=۵\ cm$، $OC=۱۰\ cm$، $BO=۲/۵\ cm$، و $OD=۷/۵\ cm$. فاصلهٔ مرکزثقل چهارضلعی را ازهریك ازقطرها پیدا کنید.

۷ - AD، BE، و CF میانه‌های مثلث ABC هستند و G نقطهٔ تلاقی آنهاست. اگر بخش $AFGE$ را ازمثلث ببریم، ثابت کنید که مرکزثقل جسم باقیمانده برروی GD و به‌فاصلهٔ $\frac{۷}{۱۲}GD$ از D است.

۸ - $ABCD$، صفحه‌ای است به‌شکل چهارضلعی که به‌مثلث ABX با مساحت یکسان تبدیل شده‌است (C برروی BX است). ثابت کنید که مرکزثقل $ABCD$ و ABX از AC به‌یك فاصله‌اند.

۹ - ABCD تیغهٔ چهارضلعی مسطحی است که قطرهای آن در O تلاقی می‌کنند. AO کوچکتر از OC و DO کوچکتر از OB است. S نقطهٔ وسط BD است. T نقطهٔ وسط AC است، و OSKT یک متوازی‌الاضلاع است. ثابت کنید که مرکز ثقل تیغهٔ ABCD بر مرکز ثقل سه نقطهٔ مادی یکسان که در S، T، و K قرار گیرند منطبق است.

۱۰- X و Y نقطه‌های وسط دو ضلع متوازی یک چهارضلعی هستند که طول آنها به‌ترتیب a و b است. ثابت کنید که G، مرکز جرم چهارضلعی، XY را به نسبت $\frac{۲b+a}{۲a+b}$ تقسیم می‌کنند.

دریک شش‌ضلعی منتظم یکنواخت، که طول هرضلع آن برابر a است، برشی به‌موازات یکی از اضلاع و به‌فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}ka\sqrt{۳}$ ازاین ضلع می‌دهیم، به‌طوری که $k<۱$ است. ثابت کنید که فاصلهٔ مرکز ثقل جسم باقیمانده از مرکز شش‌ضلعی برابر است با

$$\frac{k(۳-k^{۲})}{۳(۶-۲k-k^{۲})}a\sqrt{۳}$$

۱۱- مرکز ثقل صفحهٔ یکنواخت مثلثی شکل ABC در نقطهٔ G است. خطوطی به‌موازات BC، CA و AB طوری رسم می‌کنیم تا GA، GB و GC را به یک نسبت قطع کند. مثلثهای حاصل را می‌بریم. ثابت کنید که مرکز ثقل شش‌ضلعی باقیمانده منطبق برمرکز جرم مثلث است.

۱۲- تیغه‌ای سنگین به‌شکل یک چهارضلعی است و وزن آن $۳W$ است. نقطه‌ای مادی به‌وزن W را برمحل تلاقی قطرها قرار می‌دهیم. ثابت کنید که اگر برچهار گوشهٔ این چهارضلعی چهار نیروی قائم یکسان از پایین به‌بالا وارد شود، تیغه به‌صورت افقی و درحال تعادل باقی خواهد ماند.

۱۳۰۱۶. هرگاه جسمی را از قاعده در تماس با صفحه‌ای قرار دهیم (و صفحه به‌اندازه‌ای ناصاف باشد که اگر شیبدار باشد، جسم نلغزد)، درصورتی که خط قائم‌مکانی که از مرکز ثقل جسم می‌گذرد از درون صفحهٔ قاعده بگذرد، جسم درحال تعادل خواهد بود.

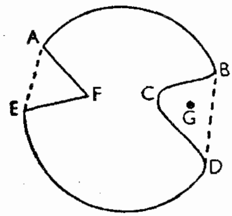
نیروهایی که برجسم اثرمی‌کنند یکی وزن آن است که به‌طور قائم وارد می‌شود و از مرکز ثقل می‌گذرد، دیگری نیروی عکس‌العمل صفحه است. اگر صفحه افقی باشد

عکس‌العملهای صفحه براجزای گوناگون قاعده‌نیروهای موازی همراستایی هستند و برایند آنها آشکارا باید ازنقطه‌ای واقع در درون صفحهٔ قاعده بگذرد.

اگرصفحه شیبدار باشد برایندنیروهای اصطکاك برنقاط مختلف قاعده وعکس‌العملهای قائم صفحه نیزباید برایندی داشته باشندکه ازنقطه‌ای واقع در درون قاعده بگذرد.

بنابراین، درهردوحالت، اگر عکس‌العمل برایند صفحه با وزن جسم تعادل داشته باشد، خط قائم مکان‌که ازمرکزثقل می‌گذرد، باید در درون صفحهٔ قاعده باشد.

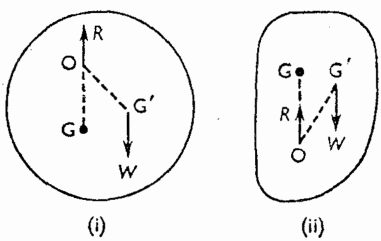
باید توجه داشت‌که اگر قاعده دارای زاویه‌هایی مقعرمانند شکل ۱۶-۱۴ باشد، سطح قاعده را سطح شکلی درنظرگرفت‌که از بستن نخی به‌دورجسم حاصل می‌شود. بنابراین نقطه‌ای مانند G را باید درون سطح قاعده پنداشت.



شکل ۱۶-۱۴

۱۶.۱۴. پایداری تعادل

اگرجسمی‌که فقط یك نقطهٔ آن ثابت است درحالت تعادل باشد، آشکاراست‌که مرکز ثقل جسم باید برراستای خط قائم مکانی باشدکه ازآن نقطهٔ ثابت می‌گذرد.



شکل ۱۶-۱۵

فرض می‌کنیم O (شکل ۱۶-۱۵) نقطهٔ ثابت جسم، وG مرکزثقل جسم باشد.

تنها نیروهایی‌که برجسم وارد می‌شوند عبارتند از وزن جسم‌که به‌طور قائم وارد می‌شود وازG می‌گذرد، ونیروی عکس‌العمل R که برنقطهٔ O وارد می‌شود.

اگر این نیروها درحالت تعادل باشند باید همراستا باشند، یعنی G باید در راستای قائمی باشدکه از O می‌گذرد.

این شرط در دوحالت زیر برقرار است: (۱) هنگامی‌که G درامتداد قائم درزیر O است. (۲) هنگامی‌که G درامتداد قائم دربالای O است.

این هردوشرط ازحالتهای تعادلند، اما تفاوتی میان این دوحالت وجود دارد.

درحالت‌نخست، اگرجسم‌اندکی تغییرمکان دهد، به‌وضع‌تعادل خود برخواهدگشت. وزن جسم‌که اکنون ازمرکز ثقل جابه‌جا شده می‌گذرد نسبت به O دارای گشتاوری می‌شودکه مایل است جسم را به‌وضع اولیه برگرداند. در این حالت، تعادل را پایدار می‌گویند.

درحالت دوم، اگر جسم اندکی جابه‌جا شود، وزن جسم‌که اکنون از مرکزثقل جابه‌جا شده می‌گذرد نسبت به O دارای گشتاوری می‌شودکه مایل است جابه‌جایی‌جسم را افزایش دهد، وجسم مایل نیست‌که به‌وضع اولیه برگردد. در این حالت، تعادل را ناپایدار می‌گویند.

جسمی را درحالت تعادل پایدارمی‌گوییم‌که اگراندکی جابه‌جا شود، به‌وضع‌اولیهٔ خود برگردد. دامنه‌ای که می‌توان جسمی را تا آن اندازه جابه‌جا کرد بی‌آنکه جسم واژگون شود اندازه یا درجهٔ پایداری نامیده می‌شود. در اینجا به درجهٔ پایداری کاری نداریم.

۱۵۰۱۶. مخروط مدور قائم‌که ازقاعده برروی یك صفحهٔ افقی قراردارد، به‌حالت تعادل است. اگراندکی جابه‌جا شود، مایل است‌که به‌وضع اولیه برگردد.

اگررأس مخروط با صفحهٔ افقی درتماس باشد و محور مخروط قائم باشد، تعادل ناپایدار خواهد بود. اگراندکی جابه‌جا شود سقوط خواهدکرد.

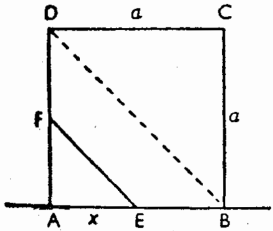
استوانهٔ مدور قائم‌که سطح یك قاعدهٔ آن در تماس باصفحهٔ افقی است، به‌حالت تعادل پایدار است. اما اگرسطح منحنی‌آن را درتماس با صفحهٔ افقی قراردهیم به‌هروضعی می‌تواند قرارگیرد.

دراین حالت تعادل را بی‌تفاوت می‌گوییم.

کره‌ای نیزکه برسطحی افقی قراردارد به‌حالت تعادل بی‌تفاوت است.

دربسیاری ازموارد، تشخیص پایدار بودن یا پایدار نبودن حالت تعادل‌آسان‌است. اما دربعضی از موارد، تشخیص آن دشوار است وباید تعیین‌کردکه اگرجسم اندکی از حالت تعادل خود جابه‌جا شود به‌وضع اولیه برخواهدگشت یا خیر.

۱۶.۱۶. مثال ۱: جسمی مکعب شکل که طول هرلبهٔ آن برابر a است برصفحه‌ای افقی قراردارد. با صفحاتی که نسبت به‌افق زاویهٔ ۴۵° دارند و به‌موازات یکی از لبه‌های افقی مکعب هستند، به‌تدریج برشهایی ازمکعب برمی‌داریم. وقتی که ازهریك ازچهارلبهٔ مکعب طولی برابر x بریده می‌شود، مرکزجرم جسم‌باقیمانده را پیدا کنید، ونشان دهیدکه وقتی‌که تقریباً $۹x = ۵a$ است این‌جسم می‌افتد.



شکل ۱۶-۱۶

حل : فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۶-۱۶) مقطع قائم مکعب ازمرکز آن باشد. بنابراین صفحات بریده شده به‌موازات DB خواهد بود.

فرض می‌کنیم EF خط‌تلاقی صفحهٔ برش با ABCD، و $AE = x$ باشد. مرکزثقل منشور باقیمانده درمرکزثقل مثلث AEF خواهد بود.

وزن مکعب و وزن جسم باقیمانده متناسب با مساحتهای مقاطع آنها، یعنی $a^۲$ و $\frac{۱}{۲}x^۲$ است.

جدولی از وزنها وفاصله‌های مراکزثقل ازBC وAB تنظیم می‌کنیم:

	وزن	فاصلهٔ مرکزثقل از BC	فاصلهٔ مرکزثقل از AB
مکعب	$a^۲$	$\frac{۱}{۲}a$	$\frac{۱}{۲}a$
منشور AFE	$\frac{۱}{۲}x^۲$	$a-\frac{۱}{۳}x$	$\frac{۱}{۳}x$
جسم باقیمانده	$a^۲-\frac{۱}{۲}x^۲$	X	Y

نسبت به BC گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\left(a^۲-\frac{۱}{۲}x^۲\right)X=\frac{۱}{۲}a^۳-\frac{۱}{۲}x^۲\left(a-\frac{۱}{۳}x\right)$$

$$\therefore \qquad X=\frac{a^3-x^2\left(a-\frac{1}{3}x\right)}{2a^2-x^2}$$

نسبت به AB گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\left(a^2-\frac{1}{2}x^2\right)Y=\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{6}x^3$$

$$\therefore \qquad Y=\frac{a^3-\frac{1}{3}x^3}{2a^2-x^2}$$

جسم هنگامی می‌افتدکه مرکزثقل آن به‌سمت چپ E برود، یعنی‌هنگامی که $X>a-x$ باشد. بنابراین هنگامی درحال افتادن است‌که

$$a^3-x^2\left(a-\frac{1}{3}x\right)=(2a^2-x^2)(a-x)$$

یا $$a^3-ax^2+\frac{1}{3}x^3=2a^3-2a^2x-ax^2+x^3$$

یا $$\frac{2}{3}x^3-2a^2x+a^3=0$$

اگر $x=\frac{5}{9}a$ را درسمت چپ این معادله قراردهیم:

$$\frac{250}{2187}a^3-\frac{10}{9}a^3+a^3=\frac{250}{2187}a^3-\frac{1}{9}a^3$$

که تقریباً برابرصفراست.

به‌همین ترتیب می‌توانیم بنویسیم:

$$x=\frac{1}{2}a+\frac{x^3}{3a^2}$$

بنابراین با تقریب اول، $x=\frac{1}{2}a$

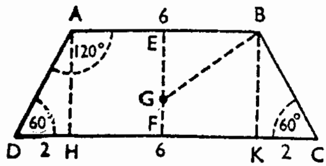
وبا تقریب دوم

$$x=\frac{1}{2}a+\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^3}{3a^2}=\frac{13}{24}a=0/54a$$

مثال ۲: مرکزثقل منشور یکنواخت صلبی را بیابیدکه مقطع اصلی آن در شکل ۱۶-۱۷

داده شده است. تعیین کنید که اگر وجه BC در این منشور در تماس با صفحه‌ای افقی باشد، آیا منشور می‌تواند به‌حال تعادل بماند؟

حل : مرکزثقل منشور درون مقطع آن است (زیرا آن را مقطع اصلی نامیده بودیم). از راه تقارن آشکار است که این مرکز ثقل برروی خط EF خواهد بود، که نقطه‌های وسط AB و DC را به‌هم وصل کرده است.



شکل ۱۶-۱۷

خطوط AH و BK را عمود بر DC رسم می‌کنیم.

دراین صورت $DH=۲$، و $AH=۲tg۶۰^\circ=۲\sqrt{۳}$ است.

این منشور را ممکن است متشکل ازسه منشور بدانیم که مقاطع اصلی آنها دومثلث و یك مستطیل باشد که درشکل دیده‌می‌شوند. وزن کل و وزن اجزا متناسب با مساحت ABCD ومثلثها ومستطیل است.

مساحتها و فاصله‌های مرکزهای ثقل را از DC در یك جدول تنظیم می‌کنیم.

	مساحت	فاصلهٔ مرکزثقل از DC
ABCD	$۱۶\sqrt{۳}$	x
ABKH	$۱۲\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$
ADH	$۲\sqrt{۳}$	$\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$
BCK	$۲\sqrt{۳}$	$\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$

نسبت به DC گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$۱۶\sqrt{۳}x=۳۶+۴+۴=۴۴$$

$$\therefore \quad x=\frac{۴۴}{۱۶\sqrt{۳}}=\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۱۲}$$

بنابراین مرکزثقل درG واقع برEF است، به‌طوری که $FG=\frac{۱۱}{۱۲}\sqrt{۳}$.

$$\therefore \qquad EG = ۲\sqrt{۳} - \frac{۱۱}{۱۲}\sqrt{۳} = \frac{۱۳}{۱۲}\sqrt{۳}$$

بنابراین منشور می‌تواند بروجه BC به‌حال تعادل باشد به‌شرط آنکه زاویهٔ CBG کوچکتر از قائمه، یعنی به‌شرط آنکه زاویهٔ EBG بزرگتر از ۳۰° باشد.

اما
$$tg EBG = \frac{EG}{EB} = \frac{۱۳\sqrt{۳}}{۳۶}$$

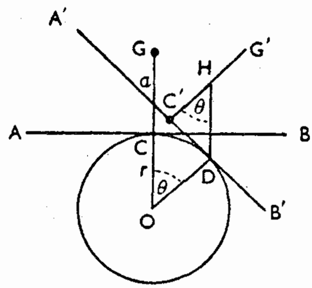
و
$$tg ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳۶}$$

$$\therefore \qquad \angle EBG > ۳۰°$$

بنابراین منشور می‌تواند بروجه BC به‌حال تعادل بماند.

مثال ۳: مکعبی یکنواخت ازیك وجه برروی بالاترین نقطهٔ کره‌ای ثابت وناصاف قرار دارد. ازراه اصول اساسی ثابت کنیدکه اگرطول هرضلع مکعب از قطرکره کمتر باشد، تعادل پایدار خواهد بود.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۶-۱۸) مقطع قائمی را نشان دهد که از G، مرکز ثقل مکعب، C، نقطهٔ تماس مکعب و کره، و O، مرکز کره (به‌شعاع r)، می‌گذرد.



شکل ۱۶-۱۸

فرض این است که کره به‌اندازه‌ای ناصاف است که نمی‌لغزد، وما پایداری را فقط برای یك برشدن مکعب درنظرمی‌گیریم.

فرض می‌کنیم طول یال مکعب $۲a$ باشد، و اوضاع نقاط A، C، B و G، پس از یك برشدن مکعب به‌اندازهٔ زاویهٔ کوچك θ، به‌ترتیب A'، C'، B'

و G' باشد. نقطهٔ تماس جدید را D می‌گیریم.

حال اگر G' درسمت چپ قائمی باشدکه از D می‌گذرد، مکعب مایل خواهد بودکه به‌وضع اولیهٔ خود برگردد.

فرض می‌کنیم $C'G'$ خط قائم مکان D را در H قطع کند.

چون لغزش وجود ندارد،

$$C'D = \widehat{CD} = r\theta$$

نیز زاویهٔ $C'HD$ برابر θ است، و

$$C'H = C'D\cot g\theta = r\frac{\theta}{tg\theta}$$

بنابراین تعادل درصورتی پایدار خواهد بودکه

$$r\frac{\theta}{tg\theta} > C'G'$$

اما وقتی‌که θ خیلی کوچك است نسبت θ به $tg\theta$ تقریباً برابریك است، وچون $C'G' = a$ است، تعادل هنگامی پایدار خواهد بودکه

$$r > a$$

یعنی هنگامی‌که طول یال مکعب کوچکتر ازقطر کره است.

تمرین ۴۰۱۶

۱ - دریك مربع بـا برشی به‌موازات قطر مربع، تکـه‌ای به‌شکل مثلث می‌بریم. ثابت کنیدکه جسم باقیمانده برروی هـریك ازاضلاع بریده شدهٔ خـود هنگامی می‌تواند به‌حال تعادل‌بماندکه بخش باقیمانده ازآن ضلع ۰/۵ طول ضلع باشد، اما اگربخش باقیمانده ۰/۴ طول ضلع باشد، جسم به‌حال تعادل نخواهد ماند.

۲ - $ABCD$ وجه قائم یك مکعب مستطیل است. وجه افقی این جسم‌که یك ضلع‌آن BC است درتماس با زمین‌است. $BC = ۴۰\ cm$. $CD = ۲۵\ cm$ و E نقطه‌ای است برBC به‌فاصلهٔ $۱۵\ cm$ از B. جای نقطه‌ای مانند F واقع بر CD را چنان بیابیدکه اگرازاین جسم منشوری عمود بروجه $ABCD$ و درراستای EF ببریم، جسم باقیمانده درنقطهٔ شروع یك‌برشدن باشد.

۳ - تیغهٔ یکنواختی است به‌شکل‌چهارضلعی $ABCD$ که درآن AB موازی DCاست. طول AB برابرa وطـول DC برابرb است. ثابت‌کنیدکـه مرکز ثقل تیغه منطبق برمرکزثقل چهارنقطهٔ مادی است که جرم آنها متناسب بـا a، $a+b$، b، $a+b$

است و به‌ترتیب درنقاط A، B، C، و D قراردارند. اگر $AD = BC = c$ و $b > a$ باشد، مختصات مرکز ثقل را پیدا کنید. برای این منظور DA را یکی از محورهای مختصات وخط عمود برآن درنقطهٔ D را محوردیگرمختصات فرض کنید. منشوریکنواختی که این چهارضلعی مقطع آن است، ازوجهی که مربوط به BC یا AD است برسطح افقی قرارمی‌گیرد. ثابت کنیدکه اگر $۲c^۲(a+۲b)$ کوچکتر از $b^۳ - a^۳$ باشد، منشورنمی‌تواند به‌حالت تعادل بماند.

۴ ـ ABC ورقهٔ قائم فلزی است. A قائمه است وAC درتماس با صفحهٔ افقی‌است. D نقطهٔ وسط AC است. مثلث ABD را می‌بریم. ثابت کنیدکه بخش‌باقیماندهٔ این ورقه درنقطهٔ شروع سقوط است.

۵ ـ منشور قائم یکنواختی است‌که مقطع‌آن مثلث متساوی‌الساقین BAC است. AB و AC برابرند. این منشور را ازوجهی که شامل BC است برروی میزی افقی قرارمی‌دهیم. ازمنشوربه‌تدریج برشهایی‌موازی وجهی که‌شامل AB است می‌بریم. این‌کاررا ازلبه‌ای که ازC می‌گذردآغازمی‌کنیم. چه‌بخشی ازکل منشوررامی‌توان برید بی‌آنکه بخش باقیمانده به‌حالت واژگون شدن درآید.

۶ ـ ABCD مقطعی ازیك مکعب است که از مرکزآن می‌گذرد. E نقطهٔ وسط AD است. اگربا صفحه‌ای که ازEC می‌گذرد وعمود برمقطع‌است، بخشی ازاین‌مکعب بریده شود، فاصلهٔ AB و AE را ازمرکزثقل جسم باقیمانده پیدا کنید. اگر این جسم را روی صفحه‌ای افقی قراردهیم، حداقل طول AE را پیدا کنیدکه جسم واژگون نشود.

۷ ـ مقطع منشوری یکنواخت به‌شکل BDECاست، که درآن ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است و D و E نقطه‌های وسط AB و AC هستند. اگراین منشور را از یك‌وجه درتماس با صفحه‌ای قرار دهیم که با افق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد و به‌سبب ناصافی آن ازلغزش جلوگیری می‌کند، تعیین کنیدکه درچه اوضاعی منشور ممکن است به‌حالت تعادل بماند. همهٔ مقطعها درصفحاتی قائمندکه ازخط بزرگترین‌شیب صفحهٔ شیبدار می‌گذرند.

۸ ـ چهاروجهی منتظمی ازیك‌وجه برروی صفحه‌ای قراردارد‌که باافق زاویهٔ αمی‌سازد وبه‌سبب ناصافی‌آن ازلغزش جلوگیری می‌کند. یك یال وجهی‌که درتماس باصفحه است، افقی‌است ودربالای‌رأس‌متقابل‌خودقراردارد. ثابت کنیدکه $tg\alpha < ۲\sqrt{۲}$ است.

۹ ـ نیمکره‌ای صلب واستوانه‌ای صلب دارای‌شعاعهای یکسان هستند وهردوازماده‌ای همگن ساخته شده‌اند. یك سراستوانه به‌قاعدهٔ نیمکره، یعنی صفحهٔ مستوی آن،

لحیم شده است. ارتفاع استوانه $\frac{۲}{۳}$ شعاع آن است. ثابت کنید که فاصلهٔ مرکز ثقل کل جسم از سطح مشترك نیمکره و استوانه $\frac{۱}{۴۸}$ شعاع است.

۱۰- از فلز نازك یکنواختی ظرفی به‌شکل یك مخروط ناقص ساخته شده است. قاعدهٔ ظرف مسطح است و شعاع دهانه دو برابر شعاع قاعده است. اگر زاویهٔ رأس مخروطی که این ظرف از آن ساخته شده است ۳۰° باشد، معلوم کنید که آیا اگر ظرف را از سطح منحنی آن بر صفحه‌ای افقی قرار دهیم به‌حالت تعادل خواهد ماند یا خیر.

۱۱- ارتفاع مخروط صلبی سه‌برابر شعاع قاعدهٔ آن است. نیمکرهٔ صلبی نیز داریم که سطح مستوی آن به‌اندازهٔ قاعدهٔ مخروط است. مخروط را از قاعده به‌این سطح مستوی لحیم می‌کنیم. بخش کروی شکل جسم را برمیزی افقی می‌گذاریم. حداقل نسبت وزن مخصوص مادهٔ نیمکره را به‌وزن مخصوص مادهٔ مخروط بیابید تا این جسم واژگون نشود.

۱۲- ظرفی است توخالی که ضخامت آن درهمه‌جا یکسان است. این ظرف از مخروطی توخالی ساخته شده است که قاعدهٔ آن به نیمکره‌ای توخالی متصل است. نسبت ارتفاع مخروط به‌شعاع قاعدهٔ آن حداکثر چقدر می‌تواند باشد تا اگر ظرف را از طرف سطح نیمکره‌ای آن روی میزی افقی بگذاریم به‌حالت تعادل پایدار بماند. (فاصلهٔ مرکز ثقل نیمکرهٔ توخالی از مرکز آن برابر نصف شعاع است).

۱۳- n مکعب صلب یکنواخت را که یال هر کدام برابر a است روی هم چنان قرار می‌دهیم که هر مکعب نسبت به‌مکعب زیری به‌اندازهٔ طول c در راستای افق به‌سمت چپ جابه‌جا شده باشد. جای مرکز ثقل مجموعه را بیابید و از روی آن نتیجه بگیرید که اگر $(n-۱)c>a$ باشد، این مجموعه واژگون خواهد شد.

۱۴- جسمی است که از یك مادهٔ یکنواخت ساخته شده است و شامل مخروط قائم صلبی است که قاعدهٔ آن به‌شعاع r است و به‌سطح مستوی نیمکره‌ای صلب به‌همین شعاع لحیم شده است. حداکثر ارتفاع مخروط چقدر ممکن است باشد که اگر جسم را بر روی سطحی افقی قرار دهیم و مخروط در بالا قرار گیرد، جسم به‌حالت تعادل باقی بماند.

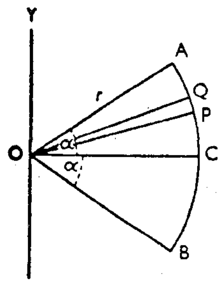
۱۵- تخته‌ای است به‌شکل مربع که طول هر ضلع آن ۶۰ cm و ضخامت آن ۱ cm است. با این تخته میزی می‌سازیم که دارای چهار پایه در چهار گوشهٔ آن است. پایه‌ها از همان جنس رویهٔ میز هستند. هر پایه به‌طول ۶۰ cm و سطح مقطع $۲\ cm^۲$ است. ارتفاع مرکز ثقل را بیابید و معلوم کنید که بزرگترین زاویهٔ انحراف میز برای اینکه

میزروی دوپایه‌اش واژگون نشود چقدراست.

۱۶- ABCD صفحه‌ای است به‌شکل مربع، یکنواخت وسنگین. بخش CBH را ازآن برمی‌داریم. H نقطه‌ای است واقع برAB. بقیه را طوری قرار می‌دهیم که صفحهٔ جسم قائم بماند و $\acute{A}H$ مماس باصفحهٔ افقی صیقلی باشد. ثابت‌کنیدکه تعادل‌ممکن نیست مگرآنکه $\frac{AH}{AB}$ بزرگتر از $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$ باشد.

۱۶·۱۷. مرکزثقل قوس مدور یکنواخت

فرض می‌کنیم ACB (شکل ۱۶-۱۹) قوس‌مدوری به‌شعاع r وزاویهٔ مرکزی ۲α باشد. O را مرکزقوس وC را نقطهٔ وسط قوس فرض می‌کنیم.



شکل ۱۶-۱۹

از راه تقارن آشکاراست که مرکزثقل قوس برروی OC خواهد بود، زیرا قوس یکنواخت است.

OC را به‌عنوان محور xها و OY، خط عمود برOC را به عنوان محور yها اختیار می‌کنیم.

فرض می‌کنیم PQ جزئی از این قوس باشد، به‌طوری که $\angle POC=\theta$، $\angle POQ=\delta\theta$. طول قوس PQ برابراست با $r\delta\theta$، و وزن آن برابر است با $wr\delta\theta$، که درآن w وزن‌واحد طول است.

چون فاصلهٔ PQ از OY برابر $r\cos\theta$ است، گشتاور وزن نسبت به OY برابر است با $r\cos\theta\times wr\delta\theta$ یا $wr^{۲}\cos\theta\times\delta\theta$.

مجموع گشتاورهای همهٔ اجزای قوس برابراست با انتگرال مقداربالا میان دوحد

$\theta=-\alpha$ و $\theta=+\alpha$، یعنی $\int_{-\alpha}^{+\alpha} wr^{2}\cos\theta d\theta$. وزن کل قوس برابراست با $2wr\alpha$، و اگرفاصلهٔ مرکزثقل آن از OY برابر $\bar{x}$ باشد، با گرفتن گشتاورها نسبت به OY، خواهیم داشت:

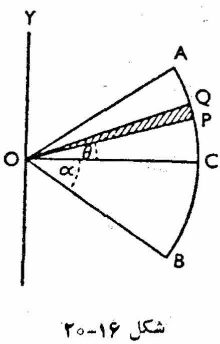
$$2wr\alpha\bar{x}=wr^{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta\ d\theta=wr^{2}[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}$$
$$=2wr^{2}\sin\alpha$$

$$\therefore \qquad \bar{x}=r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

برای قوسی که یك نیمدایره را تشکیل داده است $\alpha=\frac{\pi}{2}$ است و دراین صورت $\bar{x}$ برابر $\frac{2r}{\pi}$ خواهد بود.

۱۸.۱۶. مرکزثقل قطاع دایره

فرض می‌کنیم AOB (شکل ۱۶-۲۰) قطاعی ازیك دایره به‌شعاع r ومرکزO است. نیز فرض می‌کنیم $\angle AOB=2\alpha$. C، نقطهٔ وسط AB، و OC نیمساز زاویهٔ AOB است.



شکل ۱۶-۲۰

ازراه تقارن آشکار است که مرکزثقل برروی خط OC قرارمی‌گیرد.

OC را به‌عنوان محور xها و OY، خط عمود برOC، را به عنوان محور yها می‌پذیریم.

فرض می‌کنیم POQ جزئی از قطاع باشد، به‌طوری که $\angle POC=\theta$ و $\angle POQ=d\theta$.

مساحت این قطاع $\frac{۱}{۲}r^{۲}d\theta$ و وزن آن $\frac{۱}{۲}wr^{۲}d\theta$ است، که‌در‌آن w وزن واحدسطح است و ثابت فرض می‌شود.

چون PQ بسیار کوچك است OPQ خیلی نزدیك به‌مثلث است ومرکزثقل آن‌در فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}r$ از O است.

بنابراین فاصلهٔ این مرکزثقل از OY برابراست با

$$\frac{۲}{۳}r\cos\theta$$

گشتاور وزن POQ نسبت به OY برابراست با

$$\frac{۲}{۳}r\cos\theta\times\frac{۱}{۲}wr^{۲}\delta\theta=\frac{۱}{۳}wr^{۳}\cos\theta\delta\theta$$

مجموع گشتاورهای همهٔ قطاعهای جزئی برابراست با

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{۱}{۳}wr^{۳}\cos\theta\, d\theta=\frac{۱}{۳}wr^{۳}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta d\theta$$

وزن‌کل قطاع $wr^{۲}\alpha$ است و اگر $\bar{x}$ فاصلهٔ مرکزثقل از OY باشد، دراین‌صورت، باگرفتن گشتاورها نسبت به OY، خواهیم داشت:

$$wr^{۲}\alpha\times\bar{x}=\frac{۱}{۳}wr^{۳}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta d\theta=\frac{۲}{۳}wr^{۳}\sin\alpha$$

$$\therefore\qquad \bar{x}=\frac{۲r}{۳}\times\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

برای یك نیمدایرهٔ کامل $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ است وفاصلهٔ مرکزثقل ازقطر نیمدایره برابراست‌با

$$\frac{۴r}{۳\pi}$$

این فرمولها را می‌توانیم با استفاده ازنتیجهٔ بند قبلی نیـز به دست آوریم. فـرض می‌کنیم کـه سطح قطاع را به‌نوارهای هم‌مرکـز وبه‌عرض dx تقسیم کنیم. وزن نواری به‌شعاع x برابر $۲wx\alpha dx$ است، وفاصلهٔ مرکزثقل آن از OY برابراست بـا $\frac{x\sin\alpha}{\alpha}$.

بنابراین باگرفتن گشتاورها نسبت به OY خواهیم داشت:

$$wr^{۲}\alpha\bar{x}=\int_{۰}^{r}۲wx\alpha\times x\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}dx$$

$$=2w\sin\alpha\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$=\frac{2}{3}wr^3\sin\alpha$$

$$\therefore \qquad \bar{x}=\frac{2r}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

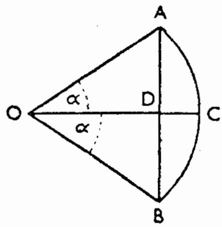
۱۹.۱۶. مرکز ثقل یك قطعه از دایره

مرکزثقل قطعه رامی‌توان با درنظرگرفتن این حقیقت که قطعه تفاوت سطح میان قطاع و مثلث‌است به‌دست‌آورد.

فرض می‌کنیم ABC (شکل۱۶-۲۱) قطعهٔ یکنواختی‌ازدایره‌ای به‌شعاع r ومرکز O باشد.

قطعه تفاوت میان قطاع OAB ومثلث OAB است.

فرض می‌کنیم $\angle AOB = 2\alpha$ و OC نیمسازاین زاویه باشد.



شکل ۱۶-۲۱

ازراه تقارن مشاهده می‌شود که مرکزثقل باید برOC باشد.

اگر wوزن واحد سطح‌باشد وزن‌قطاع $wr^2\alpha$ ووزن‌مثلث $\frac{1}{2}wr^2\sin 2\alpha$ خواهدبود.

جدولی ازمساحتها وفاصله‌های مرکزثقل از O تنظیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

	وزن	فاصلهٔ مرکزثقل از O
قطاع	$wr^2\alpha$	$\frac{2r}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
مثلث	$\frac{1}{2}wr^2\sin 2\alpha$	$\frac{2}{3}r\cos\alpha$
جسم باقیمانده	$wr^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$	x

با گرفتن گشتاورها نسبت به O خواهیم داشت:

$$wr^{۲}\left(\alpha-\frac{۱}{۲}sin\,۲\alpha\right)x=\frac{۲}{۳}wr^{۳}sin\alpha-\frac{۱}{۳}wr^{۳}sin\,۲\alpha cos\alpha$$

$$\therefore \quad x=\frac{۲r}{۳}\frac{sin\alpha-cos^{۲}\alpha sin\alpha}{\alpha-\frac{۱}{۲}sin\,۲\alpha}$$

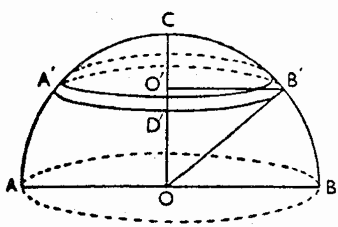
$$=\frac{۴r}{۳}\frac{sin^{۳}\alpha}{۲\alpha-sin\,۲\alpha}$$

اگر شعاع دایره و ارتفاع قطعهٔ CD را داشته باشیم، بهتر است که مانند بالا عمل کنیم، و سپس α، $sin\alpha$ وغیره را برحسب CD و r بیان کنیم.

وقتی که قطعه به‌اندازهٔ نیمدایره است $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ است و پاسخ بالا $\frac{۴r}{۳\pi}$ خواهد شد که در بند قبلی نیز به دست آوردیم.

۲۰.۱۶. مرکزثقل نیمکرهٔ توپر یکنواخت

فرض می‌کنیم ACB (شکل ۱۶-۲۲) مقطع نیمکره‌ای را عمود برصفحهٔ قاعدهٔ آن نشان دهد. AB قطر و O مرکزنیمدایره است.



شکل ۱۶-۲۲

فرض می‌کنیم r شعاع نیمکره، w وزن واحد حجم، و C بالاترین نقطهٔ آن باشد. بنابراین OC عمود برAB است.

فرض می‌کنیم نیمکره را به‌بینهایت برشهای موازی با سطح قاعده تقسیم می‌کنیم. ازراه تقارن آشکار است که مرکزثقل همهٔ این برشها، وبنابراین مرکز ثقل نیمکره، برOC واقع است.

اگر A′D′B′ نمایش یکی از برشها و δx ضخامت و O′ مرکز آن باشد، دراین

صورت، اگر $OO'=x$ باشد،

$$O'B'=\sqrt{(r^2-x^2)}$$

بنابراین حجم این برش برابر است با

$$\pi(r^2-x^2)\delta x$$

و وزن‌آن برابر است با

$$w\pi(r^2-x^2)\delta x$$

می‌توان تصور کرد که این وزن در O' متمرکز است. گشتاور آن نسبت به O برابر است با

$$w\pi x(r^2-x^2)\delta x$$

اگر همهٔ این برشها را به‌همین طریق درنظر بگیریم، مجموع گشتاورهای آنها نسبت به O برابرخواهد بود با

$$\int_0^r w\pi(r^2x-x^3)\,dx=w\pi\left[\frac{1}{2}r^2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^r$$

$$=\frac{1}{4}w\pi r^4$$

وزن کل نیمکره $\frac{2}{3}\pi wr^3$ است و اگر $\bar{x}$ فاصلهٔ مرکز ثقل آن از O باشد،

$$\frac{2}{3}\pi wr^3\bar{x}=\frac{1}{4}w\pi r^4$$

$$\therefore \qquad \bar{x}=\frac{3}{8}r$$

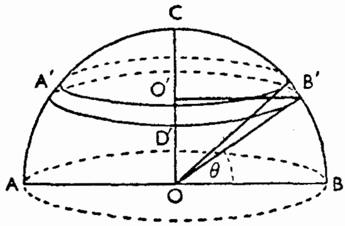
۲۱۰۱۶. مرکز ثقل نیمکرهٔ توخالی نازك

فرض می‌کنیم ACB (شکل ۱۶-۲۳) مقطع نیمکره عمودبرصفحهٔ قاعده باشد. AB قطر و O مرکز نیمکره است.

شعاع نیمکره را r و وزن واحد سطح را w می‌گیریم. بالاترین نقطهٔ نیمکره را C فرض می‌کنیم. بنابراین OC عمود بر AB است.

فرض می‌کنیم جدار نیمکره، به‌وسیلهٔ صفحاتی موازی قاعده، به بینهایت نوارهای باریك مانند $A'D'B'$ تقسیم شده باشد.

اگر O' مرکز $A'D'B'$ و $\angle BOB'=\theta$ باشد، شعاع نوار $O'B'$ برابر است با $r\cos\theta$.



شکل ۱۶-۲۳

از راه تقارن آشکار است که مرکزهای ثقل همهٔ نوارها بر روی OC است.
زاویهٔ دربرگیرندهٔ قوس نوار از O برابر $\delta\theta$ است و بنابراین عرض نوار $r\delta\theta$ است.
بنابراین سطح کل نوار $۲\pi r\cos\theta r\delta\theta$ است و وزن نوار $۲\pi wr^۲\cos\theta\delta\theta$ است.
این وزن بنا به‌فرض بر O' اثر می‌کند، و بنابراین گشتاور آن نسبت به O برابر است با

$$r\sin\theta \times ۲\pi wr^۲\cos\theta\delta\theta$$

مجموع گشتاورهای همهٔ نوارها نسبت به O برابر است با

$$۲\pi wr^۳\int_۰^{\pi/۲}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=۲\pi wr^۳\left[\frac{\sin^۲\theta}{۲}\right]_۰^{\pi/۲}=\pi wr^۳$$

وزن کل سطح برابر است با $۲\pi r^۲w$، و اگر $\bar{x}$ فاصلهٔ مرکز ثقل از O باشد،

$$۲\pi r^۲w\times\bar{x}=\pi wr^۳$$

$$\therefore\qquad \bar{x}=\frac{r}{۲}$$

۲۲.۱۶. مرکز ثقل بخش یا منطقه‌ای از سطح میان دو صفحهٔ موازی با قاعده که برای آنها $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ است از راه تعیین انتگرالهای وزن و گشتاور محاسبه می‌شود که در بند قبلی به‌دست‌آوردیم. اما آنها را به‌جای آنکه میان دو حد صفر و $\frac{\pi}{۲}$ تعیین کنیم باید میان دو حد α و β به‌دست‌آوریم.

وزن یك منطقهٔ جزئی برابر است با $۲\pi wr^۲\cos\theta\delta\theta$.
وزن منطقهٔ میان $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ برابر است با

$$۲\pi wr^۲\int_\alpha^\beta\cos\theta d\theta=۲\pi wr^۲(\sin\beta-\sin\alpha)$$

اما $r(sin\beta - sin\alpha)$ برابـر است با فاصلهٔ میان صفحات برش، یعنی برابر است با h، ارتفاع منطقه.

$$\therefore \qquad \text{وزن} = 2\pi wrh$$

گشتاور وزن یك منطقهٔ جزئی نسبت به O برابر است با $2\pi wr^3 sin\theta cos\theta \delta\theta$.

مجموع این گشتاورها برابر است با

$$2\pi wr^3 \int_{\alpha}^{\beta} sin\theta cos\theta d\theta = \pi wr^3 (sin^2\beta - sin^2\alpha)$$

$$= \pi wr^2 h(sin\beta + sin\alpha)$$

بنابراین اگر x فاصلهٔ مرکز ثقل منطقه از O باشد

$$x = \frac{\pi wr^2 h(sin\beta + sin\alpha)}{2\pi wrh}$$

$$= \frac{1}{2} r(sin\beta + sin\alpha)$$

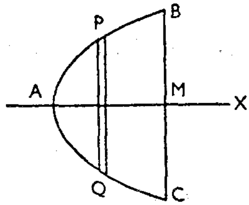
اما $rsin\beta + rsin\alpha$ برابراست بامجموع فاصله‌های‌صفحات برش ازقاعده. بنابراین $\frac{1}{2} r(sin\beta + sin\alpha)$ برابر است با فاصلهٔ میان دو صفحهٔ برش از قاعده.

به‌این ترتیب مرکز ثقل منطقه در وسط دو صفحه‌ای است که کره را برش داده‌اند.

۲۳.۱۶. مرکزهای ثقل سطح عرقچین و منطقهٔ کـروی محدود میان دو صفحهٔ موازی با قاعده را می‌توان با استفاده از این واقعیتِ شناخته شده در هندسه به دست آورد که سطح یك نوار یامنطقهٔ بسیار نازك که به‌وسیلهٔ دوصفحهٔ موازی با قاعده بریده شده است برابر است با سطح نوار مربوطه‌ای کـه از استوانه‌ای محیط برکره بریده شود. بنابراین مرکز ثقل سطوح کروی درهمان ارتفاع مرکز ثقل استوانهٔ محیطی است، یعنی در موردعرقچین در وسط قاعده و رأس و در مورد منطقهٔ کروی در وسط دو صفحهٔ برش است.

۲۴.۱۶. مثال: مرکز ثقل صفحه‌ای سهموی و یکنواخت را تعیین کنیدکـه سطح آن میان منحنی $y^2 = ax$ و خط $x = b$ محدود است. مرکزثقل جسمی صلب را نیزپیدا کنیدکه از دوران این صفحه حول محور xها حاصل می‌شود.

حل : فرض می‌کنیـم ABMC (شکـل ۱۶-۲۴) نشان دهندهٔ صفحهٔ سهموی، AX محور سهمی (همچنین محور xها)، و $AM = b$ باشد.



شکل ۱۶-۲۴

از راه تقارن آشکار است که مرکزثقل بر روی AM واقع است. سطح نوار PQ موازی BC، به‌عرض δx و به‌فاصلهٔ x از A برابر است با $۲y\delta x$ یا $۲a^{۱/۲}x^{۱/۲}\delta x$، و وزن آن برابر است با $۲wa^{۱/۲}x^{۱/۲}\delta x$، که در آن w وزن واحد سطح است.

دراین حالت ما نمی‌توانیم وزن کل صفحه را به‌آسانی بیان کنیم، مگرآنکه مقدار آن از راه انتگرال گرفتن از $۲wa^{۱/۲}x^{۱/۲}\delta x$ میان دو حد $x=۰$ و $x=b$ به‌دست آوریم. اگر W وزن کل صفحه باشد،

$$W=۲wa^{۱/۲}\int_{۰}^{b}x^{۱/۲}dx=\frac{۴}{۳}wa^{۱/۲}\Big[x^{۳/۲}\Big]_{۰}^{b}$$

$$=\frac{۴}{۳}wa^{۱/۲}b^{۳/۲}$$

وزن هر نوار به‌نقطهٔ وسط آن اعمال می‌شود. گشتاور وزن نوار PQ نسبت به A برابر است با

$$۲wa^{۱/۲}x^{۳/۲}\delta x$$

مجموع گشتاورها نسبت به A برابر است با

$$۲wa^{۱/۲}\int_{۰}^{b}x^{۳/۲}dx=\frac{۴}{۵}wa^{۱/۲}\Big[x^{۵/۲}\Big]_{۰}^{b}=\frac{۴}{۵}wa^{۱/۲}b^{۵/۲}$$

اگر $\bar{x}$ فاصلهٔ مرکز ثقل از A باشد

$$\frac{۴}{۳}wa^{۱/۲}b^{۳/۲}\times\bar{x}=\frac{۴}{۵}wa^{۱/۲}b^{۵/۲}$$

$$\therefore\qquad \bar{x}=\frac{۳}{۵}b$$

وقتی که صفحهٔ سهموی حول محور AX دوران کند، مقطع جسم صلب حاصل با صفحهٔ عمود بر AX مدور است. اگر این جسم صلب را با صفحاتی عمود بر AX به‌برشهای دایره‌ای تقسیم کنیم، حجم برشی که به‌فاصلهٔ x از A است برابر خواهد بود با

$$\pi y^2 \delta x = \pi a x \delta x$$

و وزن‌آن برابر است با $\pi w a x \delta x$

W، وزن‌کل جسم صلب، از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$W = \pi w a \int_0^b x dx = \frac{1}{2} \pi w a b^2$$

وزن هر برش در مرکزآن اثر می‌کند. گشتاور وزن برشی که به فاصلهٔ x از A است، نسبت به A برابر است با

$$\pi w a x^2 \delta x$$

بنابراین مجموع گشتاورها نسبت به A برابر است با

$$\pi w a \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} \pi w a b^3$$

اگر $\bar{x}$ فاصلهٔ مرکز ثقل از A باشد،

$$\frac{1}{2} \pi w a b^2 \times \bar{x} = \frac{1}{3} \pi w a b^3$$

$$\therefore \qquad \bar{x} = \frac{2}{3} b$$

تمرین ۵۰۱۶

۱ـ مرکز ثقل قرص نیمدایرهٔ یکنواخت را پیدا کنید.

۲ـ قطعه‌ای فلزی، به‌ضخامت یکنواخت، از دو بخش تشکیل شده‌است: نیمدایرهٔ ABC به قطر AC، و مثلث ACD، که درآن AD = CD است. نسبت ارتفاع مثلث به‌شعاع نیمدایره چقدر باشد تا اگر این قطعه فلز از طرف مدور آن روی صفحهٔ صیقلی افقی طوری قرارگیرد که صفحهٔ ABCD قائم باشد، هر نقطهٔ قوس نیمدایره که با صفحهٔ افقی در تماس باشد، جسم به‌حالت تعادل بماند.

۳ـ مرکزثقل سیم نازکی به‌شکل یك قوس مدور را پیدا کنید. نوارنازك فلزی‌یکنواختی است که بخشی ازآن خمیده شده است و به‌صورت نیم استوانه‌ای به‌شعاع r درآمده است، و بخش دیگربه‌صورت خطی راست، به‌طول l و به‌صورت مماس برنیم‌استوانه دریکی از دو لبه است. ثابت‌کنیدکه اگر بخش خطی را بر روی صفحه‌ای افقی قرار دهیم، به‌شرط‌آنکه $l > 2r$ باشد، جسم می‌تواند به‌حالت تعادل باشد.

۴ـ جسمی است صلب که از نیمکره‌ای صلب تشکیل شده است که به‌آن استوانه‌ای‌صلب با همان شعاع، اما با ارتفاعی سه برابرشعاع قاعده متصل است. وجه مستوی‌جسم

را برروی صفحهٔ ناصافی قرار می‌دهیم و شیب این صفحه را نسبت به افق کم کم زیاد می کنیم. ثابت کنید که اگر ضریب اصطکاك میان جسم و صفحه کمتر از $\frac{۴۴}{۸۱}$ باشد، جسم بدون واژگون شدن بر روی صفحه رو به پایین می‌لغزد.

۵ ـ استوانهٔ مدور صلب یکنواختی را با صفحه‌ای که از محورآن می گذرد به دو بخش می کنیم. یکی از دو نیمه را از سطح منحنی‌آن بر روی سطح شیبداری می گذاریم که به‌سبب ناصافی ازلغزش‌آن جلوگیری می کند. خط‌تماس عمود برخط بزرگترین شیب صفحه است. ثابت کنید که اگـر زاویـهٔ سطح شیبدار با افق زاویـه‌ای میان $Arcsin\,\frac{۴}{۳\pi}$ و $Arctg\frac{۴}{۳\pi}$ باشد دو وضع برای تعادل وجود دارد، اما اگر زاویهٔ سطح شیبدارکوچکتر از $Arctg\frac{۴}{۳\pi}$ باشد فقط یك وضع برای تعادل وجود دارد.

۶ ـ کوره‌ای آجری به‌ضخامت ۴۵ cm طوری ساخته شده است کـه قطر خارجی‌آن در پایین ۳/۹ m ودربالا ۲/۷ m است وارتفاع‌آن ۳۰ m است. ثابت کنید که‌مرکز ثقل کوره در حدود ۱/۰۵ m پایینتر از نقطهٔ وسط محور است.

۷ ـ ثابت کنید که مرکزثقل میلهٔ یکنواختی به‌شکل نیمدایره در فاصلهٔ $\frac{۲}{\pi}$ شعـاع آن از مرکز است. قرص‌مدوری که‌وزن واحد سطح‌آن σr است‌ـ که درآن σ مقداری‌ثابت و r فاصله تا مرکزاست‌ـ ازقطر به‌دو نیم می‌شود. مرکز ثقل هر نیمه را پیدا کنید.

۸ ـ از راه انتگرال گرفتن، مرکز ثقل مخروط مدور قائم صلب یکنواخت را پیدا کنید.

۹ ـ ثابت کنید که مرکز ثقل جامی به شکل نیمکرهٔ نازك به‌شعاع r در فاصلهٔ $\frac{r}{۲}$ ازمرکز است. این جام بر روی پایه‌ای مدور قرار دارد که جنس، ضخامت و شعاع‌آن‌مانند جنس، ضخامت و شعاع جام است. ارتفاع پایهٔ رابط برابر طول شعاع جام و وزن آن یك چهارم وزن جام است. ارتفاع مرکز ثقل را از بالای پایه پیدا کنید.

۱۰ـ ثابت کنید که مرکز ثقل تیغه‌ای به‌شکل نیمدایره به‌شعاع r در فاصلهٔ $\frac{۴r}{۳\pi}$ از مرکز آن است. استوانهٔ مدور قائم صلبی را با صفحه‌ای کـه از محورآن می گذرد به‌دو بخش مساوی تقسیم می کنند. یکی از این دو بخش را از سمت منحنی آن بر روی سطحی ناصاف طوری قرار می‌دهند که با افق زاویهٔ θ می‌سازد و مولدهای‌آن‌افقی هستند. زاویهٔ انحراف سطح مستطیل شکل این جسم با افق هنگامی کـه جسم در

حالت تعادل است چقدر خواهد بود، به‌شرط‌آنکه ناصافی سطح به‌اندازه‌ای است که از لغزش جلوگیری می‌کند.

۱۱- در دایره‌ای که شعاع‌آن a است، اگر مرکزثقل قوس یکنواختی که زاویهٔ مرکزی‌آن 2θ است در فاصلهٔ $\frac{a\sin\theta}{\theta}$ از مرکز باشد، مرکز ثقل قطاع یکنواختی را که میان این‌قوس و دوشعاع کناری‌آن محدود می‌شود پیدا کنید. مرکز ثقل قطعه‌ای را پیدا کنیدکه با وتری برابر شعاع بریده می‌شود.

۱۲- مرکز ثقل سطح یك نیمکره را به‌دست آورید. جامی به‌شکل نیمکره به‌وزن W از قسمت منحنی‌آن بر روی سطحی صیقلی و افقی قرار داده می‌شود. چه وزنه‌ای‌باید بر روی لبهٔ جام قرار داد تا جام طوری قرار گیردکه سطح مستوی‌آن با افق‌زاویهٔ α بسازد؟

۱۳- تیر دکلی چوبی به‌شکل مخروط قائم ناقصی است‌که طول آن ۱۵ m و قطر قاعدهٔ آن ۳۵ cm وقطر بالای‌آن ۲۵ cm است. جرم این‌تیر دکل ومحل مرکز جرم‌آن را به‌فرض‌آنکه جرم حجمی چوب ۷۰۰ kg/m³ باشد تعیین کنید.

۱۴- سیمی یکنواخت را طوری خم می‌کنیم که به شکل یك نیمدایره درمی‌آید.آن را بر روی میخ افقی ناصافی قرار می‌دهیم. هنگامی که خط واصل میان دوسر این جسم با افق زاویهٔ $30°$ می‌سازد جسم در حالت شروع بـه‌لغزش قرار می‌گیرد. ضریب اصطکاك میان سیم و میخ را پیدا کنید.

۱۵- نیمکرهٔ صلب یکنواختی از سمت منحنی آن روی صفحهٔ شیبدار ناصافی قرار دارد. ثابت‌کنیدکه بزرگترین شیب ممکن‌آن با افق زاویه‌ای است‌که سینوس‌آن $\frac{3}{8}$ است.

۱۶- نیمکرهٔ صلب یکنواختی از طرف منحنی‌آن بر سطح شیبدار ناصافی قرار دارد و به حالت تعادل است. سینوس زاویهٔ سطح شیبدار با افق برابراست با $\frac{1}{8}$.زاویهٔ‌انحراف صفحهٔ قاعدهٔ نیمکره را نسبت به‌افق پیدا کنید.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱- ABCDE زنجیری است‌که ازچهار میلهٔ یکنواخت متساوی تشکیل شده است، به‌طوری‌که میله‌ها در B، C، و D آزادانه به‌هم مفصل‌شده‌اند. دو سر A و E زنجیر به‌دو نقطهٔ ثابت‌که در راستای یك خط افقی هستند لولا شده است. بـه‌ایـن ترتیب زنجیرطوری‌آویزان شده است‌که نسبت به C، پایینترین نقطهٔ‌آن، حالت تقارن‌دارد.

اگر در حالت تعادل، θ زاویهٔ انحراف زوج میله‌های بالایی نسبت به افق باشد و φ زاویهٔ انحراف زوج میله‌های پایینی نسبت به‌افق باشد ثابت کنیدکه $tg\theta = ۳tg\varphi$.
اگر به جای آنکه زنجیر در A و E لولا شده باشد، در این نقطه‌ها به حلقه‌های کوچکی متصل شده باشدکه از درون میلهٔ افقی ناصافی عبور کرده‌اند، در صورتی که حالت حد تعادل در $\theta = ۶۰^\circ$ به دست آید، ضریب اصطکاك را به دست آورید.

۲ـ دو میلهٔ متوازی ناصاف به‌طور افقی ثابت شده‌اند. فاصلهٔ میان‌آنها l و شیب صفحهٔ آنها نسبت به‌افق برابر θ است. میلهٔ سنگین یکنواختی درتماس با هر دو میله‌است، به‌طوری‌که از روی میلهٔ بالایی و از زیر میلهٔ پایینی عبورکرده است. اگر این میله بر دو میلهٔ دیگر عمود و در حالت حدی تعادل باشد، با در نظر گرفتن گشتاورهای نیرو یا از هر راه دیگر، ثابت کنیدکه مرکز ثقل میلهٔ سنگین باید از میلهٔ بالایی‌بالاتر باشد. در ضمن، این نتیجه را نیز به‌دست‌آوریدکه طول میلهٔ سنگین دست‌کم برابر است با

$$\frac{l(\mu + tg\theta)}{\mu}$$

که درآن μ ضریب اصطکاك است.

۳ـ از دو حلقهٔ کوچك، هریك به‌جرم m، میلهٔ ناصاف‌مستقیمی عبورکرده است‌که با افق زاویهٔ α می‌سازد. حلقه‌ها به‌وسیلهٔ نخ سبك وناکشسانی به‌یکدیگر متصل هستند و به‌وسط این نخ وزنه‌ای‌کوچك به‌جرم m متصل است. دستگاه به‌حالت تعادل است وزاویهٔ میان دوبخش نخ برابر۲θ است $(\theta > \alpha)$. با درنظر گرفتن حالت تعادل‌حلقهٔ بالایی ووزنه ثابت‌کنیدکه، اگرμ ضریب اصطکاك میان حلقه ومیله باشد،

$$\mu \geqslant \left(\frac{۳tg\alpha + tg\theta}{tg\alpha + ۳tg\theta}\right)tg\theta$$

۴ـ میلهٔ یکنواختی به‌طول $۲l$ ووزن W ازیك‌سر به نقطه‌ای در صفحهٔ افقی لولا شده است. نقطهٔ وسط میله براستوانه‌ای تکیه داردکه شعاع آن r ویك مولد آن در صفحه‌است و با صفحهٔ‌قائمی که ازمیله می‌گذرد زاویهٔ قائمه می‌سازد. ضریب اصطکاك میان استوانه ومیله برابر μ است وصفحهٔ افقی به‌اندازه‌ای ناصاف است‌که از لغزش استوانه جلوگیری می‌کند. ثابت‌کنیدکه اگراستوانه درحالت شروع به‌غلتیدن باشد، $\mu = \frac{r}{l}$ است. عکس‌العمل را درلولا پیداکنید.

۵ـ نردبان یکنواخت AB به‌وزن W به‌دیوار قائم ناصاف BC تکیه دارد ونسبت به‌آن

زاویهٔ α می‌سازد. سردیگر نردبان برزمین افقی ناصاف AC قرار دارد. ضریب اصطکاك درهرنقطهٔ تماس μ است که $\mu < tg\frac{۱}{۲}\alpha$ است. وسط نردبان به‌کمك ریسمان محکمی به‌نقطهٔ C متصل است. اگرنردبان درحالت شروع به‌لغزش باشد، ثابت کنید که کشش ریسمان برابراست با

$$\frac{W}{۲\mu}\left\{(۱-\mu^۲)sin\alpha - ۲\mu cos\alpha\right\}$$

ومؤلفه‌های قائم عکس‌العملهای در A و B را پیدا کنید.

۶ ـ اصطلاح «زاویهٔ اصطکاك» راتوضیح دهید. جسمی به‌شکل مکعب مستطیل به‌حالت تعادل حدی طوری قراردارد که یك لبه‌اش برکف اتاق‌است ولبهٔ دیگرش به‌دیوار قائم تکیه دارد. درهردومحل تماس، ضریب اصطکاك برابرλ است. ثابت کنید که اگرمقطع آن درصفحه‌ای که عمود بردیوار است ABCD باشد و رأس A برکف اتاق و B بردیوار باشد، در این صورت زاویهٔ انحراف AB نسبت به‌قائم، یعنی θ، ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید.

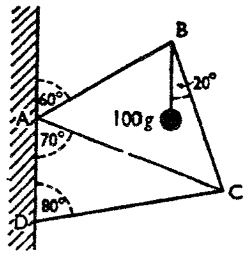
$$tg\theta = tg۲\lambda + \frac{BC}{AB}\times\frac{۱}{cos۲\lambda}$$

۷ ـ اصطلاحهای ضریب اصطکاك حد، زاویهٔ اصطکاك حد، ورابطهٔ میان آنها را بیان کنید. دومیلهٔ هم‌طول AB و BC، هریك به‌طول $۲a$، درB محکم به‌هم مفصل شده‌اند. این‌جسم را به‌صورت دوپای بازبرروی استوانهٔ مدورافقی ناصافی به‌شعاع a قرار می‌دهند، به‌طوری که زاویه‌های هردومیله نسبت به‌قائم برابرند. وزنه‌های w و W، $(W > w)$ رابه‌ترتیب از A و C آویزان می‌کنیم. W را به اندازه‌ای برمی‌گزینیم که جسم درحالت شروع به‌لغزش باشد. عکس‌العملهای قائم استوانه را برمیله‌ها پیدا کنید و ثابت کنید که

$$\frac{W}{w} = \frac{۱+\mu+\mu^۲}{۱-\mu+\mu^۲}$$

که درآن μ (که کوچکتر ازواحد است) ضریب اصطکاك حد است.

۸ ـ شکل ۱۶ـ۲۵ داربستی را نشان می‌دهدکه از میله‌های سبك AB، BC، AC، و CD تشکیل شده است و در A و D با دیوار قائم لولایی صیقلی تشکیل داده‌اند. وزنه‌ای به‌جرم ۱۰۰ g ازBآویزان است ودستگاه درصفحه‌ای قائم به‌حالت‌سکون قراردارد. نیروهایی راکه برهرکدام ازمیله‌ها فشار وارد می‌آورد پیدا کنید ونشان دهید که این نیروهاکشش‌دهندهٔ میله‌ها هستند یا فشاردهنده. نیروهایی را نیزکه در

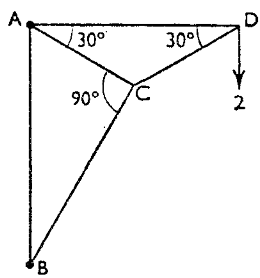


شکل ۱۶-۲۵

A و D بردیوار وارد می‌شوند پیدا کنید.

۹ ـ داربستی که در نمودار (شکل ۱۶-۲۶) نشان داده شده است شامل پنج میلهٔ سبك است که آزادانه در دوسرخود مفصل شده‌اند. وزنهٔ ۲واحدی از نقطهٔ D ازداربست آویزان است و داربست، درحالی که AD افقی وAB قائم است با نیروی افقی که برA ونیرویی که برB وارد می‌شود، به‌حالت تعادل است.

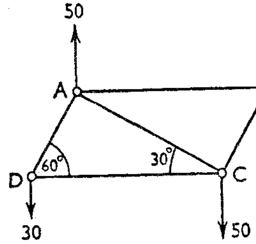
این نیروها را حساب کنید و، ازراه نموداری یا ازهرراه دیگر، نیروهایی را که برمیله‌ها وارد می‌شوند تعیین کنید وتوضیح دهیدکه میله‌ها درحالت کشش‌هستند یا درحالت فشردگی.



شکل ۱۶-۲۶

۱۰ـ نمودار (شکل ۱۶-۲۷) داربستی را نشان می‌دهدکه ازپنج میلهٔ سبك تشکیل شده است که به‌یکدیگرآزادانه مفصل شده‌اند. این میله‌ها AB، BC، CD، DA و AC هستندکه متوازی‌الاضلاع ABCD را درصفحه‌ای قائم تشکیل داده‌اند و در آن AB افقی است. نیروهای قائمی مطابق شکل برچهارگوشهٔ متوازی‌الاضلاع وارد می‌شود. ثابت کنیدکه این داربست درحالت تعادل است. از راه نموداری، نیروهایی راکه برمیله‌ها وارد می‌شوند تعیین کنید و توضیح دهیدکه این نیروها در

میله‌ها حالت کشش به‌وجود می‌آورند یا حالت فشردگی.

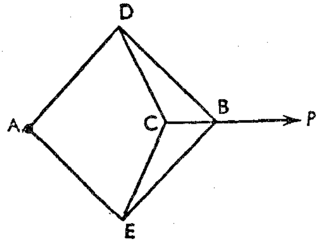


شکل ۱۶-۲۷

۱۱- شش میلهٔ سبک و همطول به‌طور صیقلی به‌هم مفصل شده‌اند و شش‌ضلعی منتظم OABCDE را تشکیل داده‌اند. سه‌میلهٔ سبک دیگر OB، OC و OD را متصل می‌کنند. نقاطی مادی به‌وزن w به A و E متصل است. دستگاه درصفحه‌ای افقی قراردارد، به‌طوری‌که OC افقی است (A در راستای قائم بالای E است). نقطهٔ O به‌میخ ثابتی محکم شده است. دستگاه به‌وسیلهٔ نخی که به B متصل شده است وراستای آن درامتداد CB است به‌این وضعیت قرارگرفته است. کشش نخ راپیدا کنید. نیروهایی راکه بر AO، OB، OC، OD، وOE وارد می‌شوند پیدا کنید وتوضیح دهیدکه میله‌ها به‌حالت ستون هستند یا به‌حالت قید.

۱۲- ABCD داربست لوزی‌شکلی است که از چهارمیلهٔ همطول تشکیل شده است که به‌طور صیقلی به‌هم مفصل شده‌اند. این داربست به وسیلهٔ میلهٔ سبک وقائم OA، که درA به‌طور صیقلی مفصل شده است، و همچنین به‌وسیلهٔ ریسمانهای همطول OB وOD ازنقطهٔ Oآویزان شده‌است،به‌طوری‌که ACقائم و $\angle ABC = ۱۲۰°$ و $\angle BOD = ۳۰°$ است. هنگامی‌که وزنهٔ W از نقطهٔ C آویزان است، به طور نموداری، یا ازراه محاسبه، نیروهای کششی درمیله‌ها ونخها را پیداکنید و نشان دهیدکه کدامیك ازآنها فشارنده هستند.

۱۳- نمودار (شکل ۱۶-۲۸) داربستی را نشان می‌دهدکه ازهفت میلهٔ سبک که به‌طور صیقلی به‌هم‌مفصل شده‌اند تشکیل‌شده‌است. این داربست ازA به‌نقطهٔ ثابتی‌لولاشده است. میله‌های خارجی تشکیل مربع می‌دهند، و A و B و C بریك استقامت هستند و $AC = ۳CB$. هرگاه مطابق شکل، نیرویی مانند P برB وارد شود، ازراه نموداری، یا از هرراه دیگر، نیرویی راکه برهرمیله وارد می‌شود تعیین‌کنید ومعلوم‌کنیدکه این نیرو ازنوع‌کششی است یا فشاری.

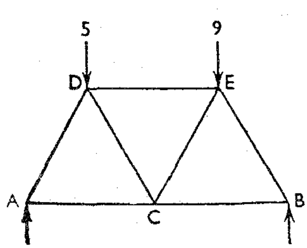


شکل ۱۶-۲۸

۱۴- سه‌میلهٔ سبك وهمطول به‌طور صیقلی از دوسربه‌هم مفصل‌شده‌اند ومثلث متساوی‌الاضلاع ABC راتشکیل داده‌اند. این داربست آزادانه از A آویخته شده‌است. درB وC به‌ترتیب وزنه‌های ۳۰ kg و ۱۰ kg را نگه می‌دارد. داربست‌به‌حالت سکون است. به‌طور نموداری، یا به‌شیوه‌ای دیگر، انحراف BC را نسبت‌به‌افق ونیروهایی راکه برمیله‌ها وارد می‌شوند پیدا کنید.

۱۵- شش میلهٔ سبك، یکنواخت وهمطول AB، BC، CD، DE، EF وFA آزادانه‌از دوسربه‌هم لولا شده‌اند ودستگاه ازA آویخته شده است. میله‌های‌سبك FB، BE و EC، که دارای چنان طولهایی هستند که ABCDEF شش‌ضلعی منتظم است، در دستگاه جاداده می‌شوند واز دوسر به‌میله‌های قبلی آزادانه لولا می‌شوند. از راه ترسیم، هنگامی‌که وزنه‌های ۱۰ kg از C، D و E آویزان باشد، نیرویی را پیدا کنیدکه برهریك از نه‌میله وارد می‌شود.

۱۶- داربستی‌که درنمودار (شکل ۱۶-۲۹) نشان داده شده است شامل هفت میلهٔ سبك همطول است‌که آزادانه به‌هم مفصل شده‌اند. داربست درصفحهٔ قائم به‌حالت‌تعادل است و AB افقی است وA وB برتکیه‌گاههایی قراردارند. نیروهایی مطابق‌شکل به‌طورقائم برD و E وارد می‌شوند.



شکل ۱۶-۲۹

عکس‌العملهایی راکه‌درتکیه‌گاهها وارد می‌شوند ونیروهایی راکه‌برمیله‌های

CD، CE، و DE وارد می‌شوند پیداکنید و توضیح دهیدکه هریك ازاین میله‌ها به‌حالت‌کشیدگی قراردارند یا به‌حالت فشردگی.

۱۷- مرکزثقل هریك ازاجسام زیررا پیداکنید: الف) تیغهٔ مثلثی شکل یکنواخت، ب) مخروط قائم توخالی نازك. مخروط قاعده‌ای دارد که ازجنس مخروط است. اگر مخروط ازنقطهٔ O واقع برمحیط قاعدهٔ آن آویزان شود، قطرقاعده ومولدی که از O می‌گذرد با خط قائمی که ازO می‌گذرد زاویه‌های یکسان می‌سازند. زاویهٔ رأس مخروط را پیداکنید.

۱۸- ثابت کنیدکه مرکزثقل سه نقطهٔ مادی یکسان که درسه‌رأس مثلثی قرار گیرند درمحل تلاقی میانه‌های مثلث است. درورقهٔ مربعی‌شکل ABCD که طول هرضلع آن $۲a$ ومرکزآن O است سه‌سوراخ گرد به‌شعاع b به‌وجود می‌آوریم. مرکزسوراخها در وسط OA، OB، و OD است. مرکزثقل جسم باقیمانده را پیداکنید.

۱۹- تیغه‌ای یکنواخت به‌شکل یك چهارضلعی است. رئوس این چهارضلعی، نسبت به محورهایی متعامد، نقطه‌های (۰, ۴)، (۵, ۰)، (۱۲, ۰)، (۳, ۰) است. مختصات مرکزجرم تیغه را پیداکنید.

همچنین مختصات مرکزجرم سیم یکنواختی راکه به‌شکل محیط چهارضلعی خم شده است پیداکنید.

۲۰- ثابت کنیدکه مرکزثقل تیغهٔ یکنواخت به‌شکل نیمدایره که شعاع آن a است در فاصلهٔ $\frac{۴a}{۳\pi}$ ازمرکزآن است.

AOB قاعدهٔ تیغهٔ نیمدایره‌ای شکل یکنواخت به‌شعاع $۲a$ و O مرکزآن است. تیغهٔ نیمدایره‌ای شکلی به‌شعاع a وقاعدهٔ AO ازتیغهٔ اولی می‌بریم وباقیمانده را آزادانه از A آویزان می‌کنیم. درحالت تعادل، انحراف AOB را نسبت به قائم پیداکنید.

۲۱- ثابت کنیدکه مرکزثقل لایهٔ نیمکره‌ای‌شکل نازك‌یکنواخت‌دروسط شعاع تقارن‌است. جام نازك نیمکره‌ای شکلی به‌وزن W از سطح منحنی آن برروی صفحه‌ای افقی قرار می‌گیرد. به‌نقطه‌ای ازلبهٔ آن وزنه‌ای به‌وزن $\frac{۱}{۲}W$ متصل می‌کنیم. ثابت کنیدکه درحالت تعادل، صفحهٔ لبه با افق زاویه‌ای برابر ۴۵° می‌سازد.

۲۲- الف) ثابت کنیدکه مرکزجرم‌مثلثی که ازمیله‌هایی یکنواخت‌تشکیل‌شده است که‌جرم واحد طول‌آنها یکسان‌است درمرکزمثلثی‌است که رئوس‌آن درنقاط وسط‌میله‌هاست.

ب) اگر تیغه‌ای یکنواخت به‌شکل ذوزنقه‌ای متقارن باشدکه طول یکی‌از

دوضلع متوازی آن دوبرابر طول دیگری باشد، ثابت کنیدکه مرکزجرم آن درفاصلهٔ یك هشتم فاصلهٔ میان دوضلع متوازی ازمرکزجرم چهارنقطهٔ مادی هموزن‌است‌که درچهارگوشهٔ این ذوزنقه قرار گیرند.

۲۳ـ ثابت کنیدکه مرکزثقل نیمکرهٔ توپریکنواختی به‌شعاع a درفاصلهٔ $\frac{3a}{8}$ ازمرکزقاعدهٔ آن است. یکی ازوجوه مکعبی یکنواخت را به‌قاعدهٔ نیمکره می‌چسبانیم، به‌طوری که قطراین‌وجه مکعب همان قطرقاعدهٔ نیمکره باشد. اگر ρ_1 چگالی مادهٔ نیمکره و ρ_2 چگالی مادهٔ مکعب باشد، ثابت کنیدکه مجموعهٔ این دوجسم اگرازطرف‌منحنی نیمکره درتماس با صفحهٔ افقی باشد، هنگامی به‌حالت تعادل است که $\pi\rho_1 = 8\rho_2$.

۲۴ـ مقطع مرکزی منشورقائم توپری ذوزنقهٔ $ABCD$ است که درآن زاویه‌های A و D قائمه‌اند و $AD = CD = a$ و $AB = b$ است. فاصله‌های مرکزجرم جسم را از AB و AD پیدا کنید.

ثابت کنیدکه اگرمنشور بتواند ازوجهی که از AB می‌گذرد برصفحه‌ای‌افقی به‌حالت سکون قرارگیرد، دراین صورت‌کمترین اندازهٔ ممکن $\frac{b}{a}$ برابر $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ است.

۲۵ـ ظرفی توخالی ازماده‌ای یکنواخت تشکیل شده است. ضخامت ظرف‌قابل صرف‌نظر کردن است. این ظرف به‌شکل مخروط قائمی است که چگالی سطحی آن ρ است. مخروط برنیمکره‌ای با چگالی سطحی σ سوارشده است. شعاع نیمکره برابرباشعاع لبهٔ مدور مخروط است. اگریك مولد مخروط درتماس با صفحهٔ صیقلی‌افقی باشد و ظرف به‌حالت سکون درآمده باشد، ثابت کنیدکه α، نیم زاویهٔ رأس مخروط از معادلهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\rho(cotg^2\alpha + 3) = 3\sigma(cos\alpha - 2\,sin\alpha)$$

۲۶ـ ثابت کنیدکه مرکز ثقل لایهٔ نیمکره‌ای شکل نازك دروسط شعاع تقارن آن است. اگر این نیمکره از طرف سطح منحنی آن بـا سطح شیبداری در تماس باشد کـه با صفحهٔ افقی زاویهٔ α می‌سازد وآن‌قدر ناصـاف است کـه ازلغزش جسم جلـوگیری می‌کند. ثابت کنیدکه α بایدکوچکتر یا برابر $30°$ باشد.

۲۷ـ جسمی صلب ازمخروط مدور قائمی تشکیل شده است که چگالی آن ρ، شعاع آن r، وارتفاع آن $4r$ است وبرنیمکره‌ای یکنواخت کـه چگالی آن σ و شعاع آن r است طوری سوارشده است که وجوه سطح آنها برهم منطبق هستند. ثابت کنیدکـه فاصلهٔ مرکزجرم کل جسم ازوجه مشترك برابراست با

$$\frac{r}{8}\left[\frac{16\rho-3\sigma}{2\rho+\sigma}\right]$$

اگر $\sigma=\rho$ باشد وجسم به‌وسیلهٔ نخی‌آویزان باشدکه به‌نقطه‌ای ازلبهٔ‌وجه مشترك متصل است، انحراف محورمخروط را نسبت به‌قائم پیداکنید.

۲۸- جسمی صلب از استوانه‌ای به‌شعاع r وارتفاع r تشکیل شده است‌که نیمکره‌ای به‌شعاع r بریکی ازدوقاعدهٔ آن سوارشده است. مرکز وجه سطح نیمکره بـرمحور استوانه واقع است. وجه مسطح این جسم با صفحهٔ ناصافی درتماس است‌که‌شیب آن آهسته‌آهسته نسبت به‌افق زیاد می‌شود تاآنکه تعادل جسم ازمیان برود.ثابت کنیدکه اگرضریب اصطکاك کوچکتر از $\frac{25}{17}$ باشد جسم برروی سطح شیبدار خـواهد لغزید وازآن سرنگون نخواهد شد.

۲۹- ثابت‌کنید کـه اگرجسمی صلب تحت اثرسه نیروی همصفحه به‌حالت تعادل باشد، دراین صورت راستای این نیروها یا متوازی هستند یا متقاطع.

ظرفی مخروطی شکل وتوخالی‌که ارتفاع داخلی‌آن h وزاویهٔ رأس‌آن 90° است طـوری ثابت شده است‌که محـورآن قائـم ورأس آن روبه‌پایین است. میلهٔ صیقلی یکنواختی را طوری دراین ظرف قرارداده‌ایم‌که یك سرآن در داخل‌ظرف و سردیگرآن خارج ازظرف است. میله به‌حالت تعادل است. اگرانحراف میله نسبت به‌افق‌زاویهٔ θ، $(\theta<45^\circ)$ باشد ثابت‌کنیدکه طول‌آن برابراست با

$$\frac{4h}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)^2}$$

۳۰- مرکزجرم نیمکرهٔ یکنواخت توپری به‌شعاع a را پیداکنید.

ثابت‌کنیدکه مرکزجرم‌لایهٔ یکنواخت‌نیمکره‌ای‌که شعاعهای داخلی وخارجی آن a و b است از مرکزآن برابراست با

$$\frac{3}{8}\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}$$

و ازاین رابطه محل مرکزجرم لایهٔ نازك نیمکره‌ای شکل را به‌دست آورید.

۳۱- کرهٔ صلب یکنواختی را با صفحه‌ای‌کروی‌که‌همان شعاع را دارد به‌دوبخش تقسیم می‌کنیم. مرکز صفحهٔ‌کروی برسطح‌کرهٔ صلب قراردارد. مرکزجرم بخش بزرگتررا که باقی می‌ماند پیداکنید.

ثابت‌کنیدکه اگـراین بخش بزرگتر از نقطه‌ای واقع برلبهٔ مدورآن آویزان باشد، وبه‌حالت تعادل قرارگیرد، محورتقارن‌آن با افق زاویهٔ θ می‌سازد، به‌طوری

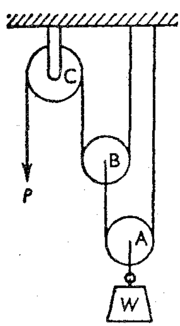
که $.tg\theta = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳۳}$

۳۲- درهرقاب ازیك دستگاه «قاب و قرقره» سه‌قرقره وجود دارد. ریسمان به‌قاب ثابت متصل است و از زیرهرقرقره می‌گذرد وانتهای آزاد ازروی قرقره‌ای از قاب ثابت می‌گذرد. اگروزن قاب متحرك قابل صرف‌نظر کردن باشد و بازده دستگاه ۶۳درصد باشد، معلوم کنیدکه برای بالابردن وزنهٔ $۶۰\ \mathrm{N}$ چه نیرویی باید به‌کار برد.

۳۳- درماشینی ساده‌که نسبت سرعتها r است رابطهٔ میان P، نیروی وارد شده، و W، وزنه، برطبق معادلهٔ $P = a + bW$ به‌دست می‌آیدکه در آن a و b اعداد ثابت مثبتی هستند. ثابت کنیدکه با افزایش وزنه از صفرتاحد $\frac{۱}{br}$ بازده‌افزایش‌پیدامی‌کند. اگر به‌ازای نیرویی مانند $P_۲$ بازده دوبرابرهنگامی باشدکه نیرویی برابر $P_۱$ وارد می‌شود، ثابت کنیدکه

$$\frac{۲}{P_۱} - \frac{۱}{P_۲} = \frac{۱}{a}$$

۳۴- نمودار (شکل ۱۶-۳۰) دستگاهی از قرقره‌های بی‌اصطکاك را نشان می‌دهدکه با آن وزنه‌ای برابر W را با نیرویی برابر P بالامی‌کشند. قرقره‌های A و B متحرکند وجرم آنها به‌ترتیب ۲ و۳ کیلوگرم است. قرقرهٔ C ثابت است. نسبت سرعتها در این دستگاه چقدراست؟ مزیت مکانیکی و بازده را هنگامی‌که جرم $۵۰\ \mathrm{kg}$ بالابرده می‌شود پیداکنید. اگر n قرقرهٔ متحرك موجود می‌بود که جرم هرکدام w بود برای بالابردن وزنهٔ W چه‌نیرویی می‌بایستی به‌کاربرده می‌شد؟



شکل ۱۶-۳۰

۳۵- مزیت مکانیکی ماشینی که وزنه‌ای را بالا می‌برد از فرمول $۴ - \frac{۴w}{W + w}$ به‌دست

می‌آید، که‌درآن w مقداری است ثابت و W وزن وزنه‌ای است که بالابرده‌می‌شود. اگرنسبت سرعتها دراین‌ماشین برابر۵ باشد، برای نیروی محرك وبازده عبارتهایی را برحسب w و W به‌دست‌آورید ونشان دهیدکه با افزایش W عبارتی که برحسب W به‌دست می‌آید به‌مقدار $\frac{۴}{۵}$ نزدیك می‌شود. اگرماشین از دوقاب قرقرهٔ مناسب تشکیل‌شده‌باشد، نمودار روشنی ازآن رسم‌کنیدکه‌آرایش‌قرقره‌ها وچگونگی‌ریسمان را نشان دهد. برای w نیز تفسیری مناسب بیابید.

۳۶- پیچ یك جك‌پیچ را با اهرمی می‌چرخانندکه انتهای آن دایره‌ای به شعاع ۹۰ cm می‌پیماید. با هردور چرخش‌کامل پیچ، وزنه ۰/۶cm بالا می‌آید. آزمایش نشان داده است که برای بلندکردن وزنهٔ ۵۰۰ kg نیروی ۲۰ N باید برانتهای اهرم وارد شود، و حال‌آنکه برای بلندکردن وزنهٔ ۱۰۰۰ kg نیروی ۳۶ N باید وارد شود. به‌فرض‌آنکه قانون ماشین $P = aW + b$ است، که درآن a و b مقادیری ثابت هستند، نیروی P لازم برای بلند کردن وزنهٔ W مساوی ۲۰۰۰ kg را پیدا کنید. هنگامی که W برابر ۱، ۲، ۳ مگاگرم است، بازده جك را پیدا کنید و نشان دهیدکه این بازده همواره کمتر از $\frac{۴۹}{۴۸\pi}$ است. نمودار بازده را نسبت به‌وزنه رسم کنید.

۱۷

بردارها

۱۰۱۷۰ درسراسر کتاب درقلمرومکانیك‌ازمفهوم برداراستفاده‌کردیم و گاهی هم ازشیوه‌های برداری برای اندازه‌گیریهـا استفاده کردیم. اکنون همهٔ جبربرداری را کـه پیش از ایـن آموختید باگسترش مفاهیم آن دراین بخش می‌آوریم.

۲۰۱۷۰ کمیت اسکالر تنها با یك عدد، یعنی با بزرگی آن، به‌طورکامل مشخص‌می‌شود. کمیت اسکالر هیچ ارتباطی به‌جهت آن در فضا ندارد. جـرم، طول، زمان، انرژی، دمـا همگی‌کمیتی اسکالر هستند.

کمیت برداری، دارای بزرگی به‌مفهوم جبری وجهت در فضاست. برای‌آنکه یـك کمیت برداری‌کاملاً مشخص شود باید هم بزرگی آن معلوم باشد، هم جهت آن درفضا. نیرو، تندی، شتاب، مقدارحرکت همگی‌کمیتی برداری هستند.

ساده‌ترین بردار تغییرمکان یك نقطهٔ مادی، یا تغییر مکان انتقالی یك جسم صلب درفضاست. اگرنقطه‌ای مـادی ازنقطهٔ P به‌نقطهٔ P' برود، تغییر مکان آن را بـا بردار $\overrightarrow{PP'}$ (یا $\mathbf{PP'}$) نشان می‌دهند. بزرگی ایـن بردار برابر PP' و جهت آن از P به P' است.

همهٔ بردارها را می‌توان با خطی مانند PP' نشان داد. امـا اغلب بهتر است کـه

بردار را تنها با یك‌حرف مانند $\overrightarrow{a}$ (یا **a**) نشان داد، که دراین صورت بزرگی‌آن را با a نشان می‌دهند.

بزرگی هربردار $\overrightarrow{AB}$ را، که‌گاهی هم مدول یا قدرمطلق آن می‌نامند، با $|\overrightarrow{AB}|$ نیز نشان می‌دهند.

دربرابرجبراعداد اسکالر مثبت ومنفی جبربرداری نیز وجود دارد. دراین مبحث می‌خواهیم جبربرداری را مورد مطالعه قراردهیم.

۳.۱۷. برابری بردارها

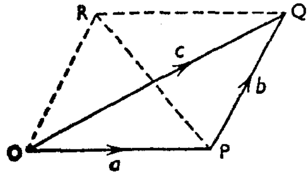
دوبردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ هنگامی با هم برابرندکه بزرگی آنها یکسان باشد وجهت آنها نیزدرفضا یکسان باشد.

وقتی‌که می‌نویسیم: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ بدان‌معنی است‌که $a = b$ و بردارها موازیند و جهت آنها یکسان است. تأکید می‌کنیم‌که این تعریفِ برابری بردارها فقط برای بردارهای‌آزاد صدق می‌کند، نه‌برای بردارهایی‌که دریك خط متمرکز شده‌اند (مانند نیروهایی‌که بریك جسم صلب اثرمی‌کنند).

۴.۱۷. جمع و تفریق بردارها

جمع هردو بردار همنوع که با $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ نمایش داده شده باشند برداری است مانند $\overrightarrow{OQ}$. می‌نویسیم: $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$.

جمع را همواره می‌توان به‌صورت نموداری انجام‌داد وآن ازراه رسم مثلث OPQ (شکل ۱۷-۱) است.



شکل ۱۷-۱

باید توجه داشت‌که $OP + PQ \geqslant OQ$ است.

اگر $\overrightarrow{OP}$ را به $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{PQ}$ رابه $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{OQ}$ را به $\overrightarrow{c}$ نمایش‌دهیم، می‌توانیم‌بنویسیم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

متوازی‌الاضلاع OPQR راکامل می‌کنیم. دراین صورت ازتعریف برابری‌بردارها نتیجه می‌گیریم که

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{PQ}=b$$

و
$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OP}=a$$

اما
$$\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}$$

$$\therefore \quad \vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$$

همچنین
$$\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$$

که بیانگر **قانون تبدیلپذیری** درجمع بردارهاست.

حالت مخصوصی که درآن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چنانندکه Q و O برهم منطبق هستند اهمیت بسیار دارد. دراین حالت OQ برابرصفراست، وبنابراین

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OQ}=0$$

بردار صفردارای بزرگی صفراست. چنین برداری با یك نقطه نشان داده می‌شود و جهت ندارد.

اگر $\vec{a}+\vec{b}=0$ باشد می‌نویسیم $\vec{b}=-\vec{a}$، یعنی $-\vec{a}$، برداری است با بزرگی a، که موازی بردار $\vec{a}$ اما درخلاف جهت آن است.

به‌همین طریق، چون

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PO}=0$$

می‌نویسیم
$$\overrightarrow{PO}=-\overrightarrow{OP}$$

به‌طورکلی
$$\overrightarrow{LM}=-\overrightarrow{ML}$$

از شکل ۱۷-۱ ممکن بود چنین بنویسیم:

$$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RO}+\overrightarrow{OP}$$
$$=-\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OP}$$
$$=-\vec{b}+\vec{a}$$

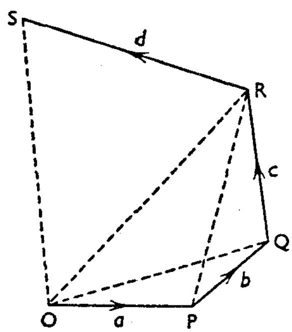
$$=\vec{a}-\vec{b}$$

به‌همین طریق $\overrightarrow{PR}=\vec{b}-\vec{a}$

به‌این ترتیب متوجه می‌شویم که قطرهای متوازی‌الاضلاع نشان‌دهندهٔ مجموع و تفاضل دوبرداری است که با اضلاع مجاور یکدیگرنشان داده می‌شوند.

استواری این قاعده‌های جمع وتفریق را ممکن است به‌راههای گوناگون نشان‌داد. بعدها نشان خواهیم دادکه بعضی از استدلالهای هندسی را نیزممکن است مبتنی براین قواعد بکنیم.

۵۰۱۷. مجموع هرچند بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، $\vec{d}$، ... را ممکن است با تکرارکاربرد قاعدهٔ بالا دربارهٔ جمع بردارها به‌دست آورد. این شیوه درشکل ۱۷ـ۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۷ـ۲

OP، PQ، QR، ... را به‌ترتیب برای نمایش بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، ... رسم می‌کنیم.

دراین‌صورت $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OQ}$

$$\therefore\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}$$

$$=\overrightarrow{OR}$$

واین کار را همچنان ادامه می‌دهیم تا مجموع کل بردارها به‌دست آید.

آشکاراست که

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$$
$$=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

وبنابراین

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

این معادله نشان می‌دهدکه ترتیب جمع شدن بردارها با یکدیگر تفاوتی در نتیجهٔ جمع ندارد وبنابراین پرانتزها ضرورت ندارند. این نتیجه را **قانون شرکتپذیری** می‌نامند.

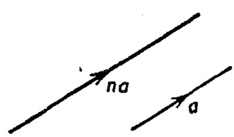
جمع بردارها را به‌آسانی می‌توانیم به‌شکل زیر بنویسیم:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\ldots$$

ازقانون تبدیلپذیری نیزنتیجه می‌شودکه ترتیب نوشتن بردارها اهمیتی نداشته باشد.

۶.۱۷ درحالت ویژه‌که $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{d}=\ldots$ است، خواهیم داشت $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{a}$، که می‌توانیم آن را به‌صورت $2\vec{a}$ بنویسیم. همچنین $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$، که می‌توانیم آن را به‌صورت $3\vec{a}$ بنویسیم.

درواقع $n\vec{a}$، که درآن n کمیتی اسکالر ومثبت است، برداری است همجهت با بردار $\vec{a}$ و به‌بزرگی na (شکل ۱۷-۳).



شکل ۱۷-۳

اگر n منفی باشد، مثلاً برابر $-m$ باشدکه m کمیتی اسکالر ومثبت است، در این صورت $n\vec{a}=-m\vec{a}$ یعنی درجهت مخالف بردار $m\vec{a}$، یعنی برداری درخلاف جهت بردار $\vec{a}$ وبه‌بزرگی ma.

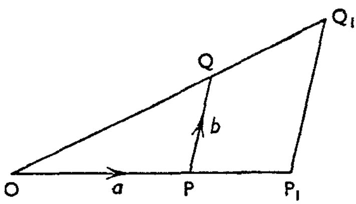
ازگفته‌های بالا نتیجه می‌شودکه بردار واحد درجهت $\vec{a}$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{a}\vec{a}$ نوشت. علامت $\hat{\vec{a}}$ راگاهی برای این بردار واحد به‌کار می‌بریم. بنابراین:

$$\hat{\vec{a}} = \frac{1}{a}\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = a\,\hat{\vec{a}}$$

۰۷۰۱۷ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دوبردار دلخواه و n کمیتی اسکالر باشد، نشان خواهیم داد که

$$n(\vec{a}+\vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$$

اگر OP (شکل ۱۷-۴) بردار $\vec{a}$ را نشان دهد، در این صورت $OP_1 = nOP$ بردار $n\vec{a}$ را نشان خواهد داد. همچنین اگر PQ بردار $\vec{b}$ را نشان دهد و اگر P_1Q_1 به‌موازات PQ چنان رسم شود که $P_1Q_1 = nPQ$ باشد، در این صورت P_1Q_1 بردار $n\vec{b}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱۷-۴

بنابراین $n = \frac{P_1Q_1}{PQ} = \frac{OP_1}{OP}$ و بنابراین Q_1 برامتداد OQ واقع خواهد شد وچنان است که $\frac{OQ_1}{OQ} = n$.

$$\therefore \qquad \overrightarrow{OQ_1} = n\overrightarrow{OQ}$$

$$\therefore \qquad \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1} = n(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ})$$

$$\therefore \qquad n\vec{a} + n\vec{b} = n(\vec{a}+\vec{b})$$

شکل ۱۷-۴ برای حالتی که n مقداری مثبت دارد رسم شده است، اما استدلال را می‌توان به‌ازای مقادیرمنفی n نیزبه‌کاربرد.

۰۸۰۱۷ باید به‌خاطرسپرد که قاعده‌هایی که برای بردارها در جمع، تفریق وضرب درکمیت

اسکالر برقراراست با قاعده‌هایی‌که برای این‌اعمال درجبرمعمولی برقراراست شباهت‌دارد. این قاعده‌ها را به‌آسانی می‌توان دربارهٔ بردارها به‌کاربرد، زیرا لازم نیست‌که شیوه‌های تازه‌ای آموخته شود. این قاعده‌ها در سراسراین‌کتاب، هرجاکه مناسب بوده است، به‌کار رفته است، ومثالهای بسیار ازکاربرد آنها داده شده است. با این همه، دامنهٔ‌کاربرد این قاعده بسیار گسترده است. مثلاً درهندسه، شیوه‌های برداری منجر به‌استدلالهای بسیار کوتاه و عالی می‌شود. مثال ساده‌ای از این‌کاربردها، پیش از این، در بند ۱-۱۲ آمده است. مثالهایی دیگر درزیرآورده می‌شود.

مثال ۱: ثابت‌کنیدکه قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگررا نصف‌می‌کنند.

حل : فرض می‌کنیم‌که S محل‌تلاقی‌قطرهای‌متوازی‌الاضلاع OPQR (شکل ۱۷-۵) باشد. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{b}$ را اختیار می‌کنیم.

دراین صورت

$$\overrightarrow{OS}=k\overrightarrow{OQ}$$
$$=k(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$$

که درآن $k=\frac{OS}{OQ}$ است.

وازآنجا

$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OP}$$
$$=-k(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{a}$$
$$=(۱-k)\overrightarrow{a}-k\overrightarrow{b}$$

اما

$$\overrightarrow{SP}=m\overrightarrow{RP}$$
$$=m(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$$

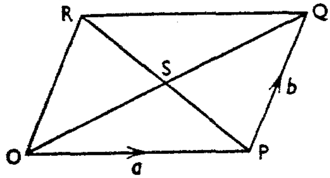
که درآن $m=\frac{SP}{RP}$ است.

از مقایسهٔ این دو عبارت $\overrightarrow{SP}$ نتیجه می‌شودکه

$$۱-k=m=k$$

پس

$$k=m=\frac{۱}{۲}$$

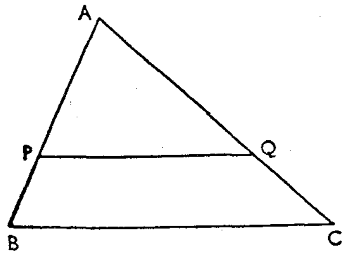


شکل ۱۷-۵

بنابراین $\overrightarrow{OS}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{SP}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{RP}$

یعنی قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگررا نصف می‌کنند.

مثال ۲: ثابت کنیدکه اگر PQ به‌موازات ضلع BC از مثلث ABC رسم شود و AB و AC را به‌ترتیب در P و Q قطع کند، در این صورت $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$.



شکل ۱۷-۶

حل : چون PQ، درشکل ۱۷-۶، به‌موازات BC است، می‌توانیم بنویسیم

$$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{BC}$$

که درآن

$$k=\frac{PQ}{BC}$$

اما

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}$$

و

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PA}-k\overrightarrow{BA}=k\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{PA}{BA}-k\right)\overrightarrow{BA}=\left(k-\frac{AQ}{AC}\right)\overrightarrow{AC}$$

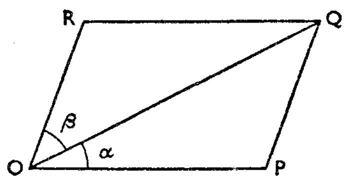
اما BA و AC دو بردار دلخواهند و بنابراین چنین نتیجه‌ای فقط هنگامی ممکن است که ضریبهای $\frac{PA}{BA}-k$ و $\frac{AQ}{AC}-k$ هر دو برابر صفر باشند، یعنی هنگامی که $k=\frac{PA}{BA}=\frac{AQ}{AC}$.

بنابراین
$$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$$

۹۰۱۷. مؤلفه‌های یك بردار

چون دو بردار را می‌توان با هم جمع کرد یا به یك بردار تبدیل کرد، هر بردار را نیز می‌توان به دو بردار تجزیه کرد. بردارهایی که از تجزیهٔ یك بردار به دست می‌آیند مؤلفه‌های آن بردار نامیده می‌شوند.

هر بردار دلخواه $\overrightarrow{OQ}$ را می‌توان به دو بردار، $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ ، تجزیه کرد. یك راه آن است که مثلثی رسم کنیم که OQ یکی از اضلاع آن باشد. راه دیگر، رسم متوازی‌الاضلاع $OPQR$ است که در آن OQ یکی از قطرهاست. این کار را می‌توان به راههای گوناگون انجام داد.



شکل ۱۷-۷

بنابراین اگر بخواهیم که مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{OQ}$ با OQ به ترتیب زاویه‌های α و β بسازند، متوازی‌الاضلاع $OPQR$ (شکل ۱۷-۷) را رسم می‌کنیم که در آن $\angle QOP=\alpha$ و $\angle QOR=\beta$ است.

در این صورت
$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$$

و
$$\frac{OP}{sin\beta}=\frac{PQ}{sin\alpha}=\frac{OQ}{sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad OP=OQ\frac{sin\beta}{sin(\alpha+\beta)}$$

$$PQ = OQ\frac{sin\alpha}{sin(\alpha+\beta)}$$ و

اینها بزرگیهای مؤلفه‌های بردار درجهتهای مطلوب است.

حالت ویژه، که اغلب پیش می‌آید، حالتی است که درآن مؤلفه‌های بردار برهم عمودند. به این حالت باید توجه بیشتری کرد:

اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ باشد، دراین صورت:

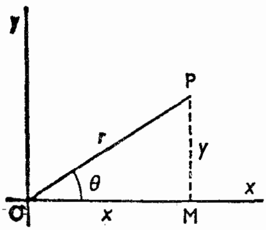
$$OP = OQcos\alpha \quad و \quad PQ = OQsin\alpha$$

۱۰.۱۷ چون هرمؤلفهٔ بردار را می‌توان به نوبهٔ خود به دومؤلفه تجزیه‌کرد، با تکرار کاربرد قانون جمع بردارها، نتیجه می‌شود که هربردار را می‌توان به هرچند مؤلفه که بخواهیم تجزیه کرد.

بنابراین بردار $\overrightarrow{OQ}$ را می‌توان از راه رسم یك چند ضلعی‌که دارای $(n+۱)$ ضلع است ودرآن OQ یکی از ضلعهاست، به n مؤلفه تجزیه‌کرد. از این گذشته، نیازی هم نیست‌که چند ضلعی دریك صفحه باشد. مجموعه‌های بیشماری از این نوع مؤلفه‌ها برای یك بردار وجود دارد.

۱۱.۱۷ اغلب بهتراست‌که مؤلفه‌هایی از برداربه‌کاربرده شوندکه به موازات محورهای مختصات ویژه‌ای باشند.

اگر P نقطه‌ای با مختصات (x,y) (شکل ۱۷-۸) باشد، مکان P را نسبت به‌مبدأ می‌توان با بردار $\overrightarrow{OP}$ نمایش داد. این بردار را بردار مکان P می‌نامند و اغلب آن را با $\overrightarrow{r}$ نمایش می‌دهند.



شکل ۱۷-۸

اگر PM عمود بر Ox رسم شود، خواهیم داشت

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$

اما $\overrightarrow{OM}$ را می‌توان به صورت $x\,\overrightarrow{i}$ نوشت که درآن $\overrightarrow{i}$ برداری به‌بزرگی واحد

و به‌موازات Ox است، و $\overrightarrow{MP}$ را می‌توان به‌صورت $y\ \overrightarrow{j}$ نوشت که در آن $\overrightarrow{j}$ برداری با بزرگی واحد و به‌موازات Oy است.

خواهیم داشت $\overrightarrow{r}=x\ \overrightarrow{i}+y\ \overrightarrow{j}$

اگر زاویهٔ $POM=\theta$ باشد، در این صورت

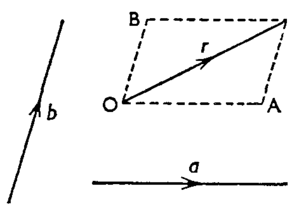
$$x=r\cos\theta \quad \text{و} \quad y=r\sin\theta$$

برای هر بردار $\overrightarrow{r}$ مؤلفه‌های x و y را می‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد. به‌خاطرداشته‌باشید که $r^{2}=x^{2}+y^{2}$ است، یعنی

$$r=|\overrightarrow{r}|=(x^{2}+y^{2})^{\frac{1}{2}}$$

۱۲.۱۷. درحالت کلی، فرض می‌کنیم که $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردارغیر متوازی دریک صفحه‌باشند. دراین صورت هربردار $\overrightarrow{r}$ را که هم‌صفحه با $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ باشد می‌توان به دومؤلفه، به‌ترتیب به‌موازات $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$، تجزیه‌کرد.

اگر OR (شکل ۱۷-۹) بردار $\overrightarrow{r}$ را نشان می‌دهد، متوازی‌الاضلاع OARB را که اضلاع آن به موازات $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ است کامل می‌کنیم.



شکل ۱۷-۹

دراین صورت

$$\overrightarrow{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$
$$=x\ \overrightarrow{a}+y\ \overrightarrow{b}$$

که درآن x و y کمیتهایی اسکالرند. درواقع $x=\dfrac{OA}{a}$ و $y=\dfrac{OB}{b}$ است.

به همین طریق، اگر $\overrightarrow{r_1}$ ، $\overrightarrow{r_2}$ ، $\overrightarrow{r_3}$،... مجموعهٔ دلخواهی از بردارهای هم‌صفحه باشند،آنها را می‌توانیم به‌مؤلفه‌هایی به‌موازات‌بردارهای $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ به‌شرح **زیرتجزیه کنیم:**

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$$
$$\vec{r}_2 = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$
$$\vec{r}_3 = x_3\vec{a} + y_3\vec{b}$$
$$\cdots\cdots$$

بنابراین مجموع برداری آنها چنین است:

$$\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3+\cdots=(x_1+x_2+x_3+\cdots)\vec{a}+(y_1+y_2+y_3+\cdots)\vec{b}$$

نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌های مجموع هر گروه بردار، مجموعهای مؤلفه‌های بردارهای جداگانه است.

از این گذشته، **اگر مجموع بردارها** صفر باشد، دراین صورت

$$x_1+x_2+x_3+\cdots=0$$

و

$$y_1+y_2+y_3+\cdots=0$$

عکس این عبارت نیز درست است.

۱۳.۱۷. اگر بردار $\vec{r}$ درصفحهٔ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (یا در صفحه‌ای موازی این صفحه) نباشد ممکن است آن را به مؤلفه‌ای دراین صفحه ومؤلفه‌ای در صفحهٔ دیگر تجزیه کرد.

نتیجه آن‌که هربردار $\vec{r}$ را می‌توان به مؤلفه‌هایی موازی $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$، سه بردار دلخواه غیر واقع در یك صفحه، تجزیه کرد ومی‌توان نوشت:

$$\vec{r} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b} + z\,\vec{c}$$

که در آن x، y، و z کمیتهایی اسکالرند.

درحالت مخصوص، اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد به موازات محورهای متعامد Ox، Oy، و Oz باشند، بردارمکان $\vec{r}$ هرنقطه‌ای بـه مختصات (x, y, z) را درفضا می‌توان به صورت زیر نوشت:

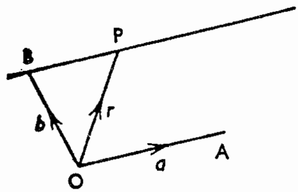
$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

باید در نظر داشت کـه $r = |\vec{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

جهت بردار درفضا از جهتهای کسینوسهای $\frac{x}{r}$، $\frac{y}{r}$، $\frac{z}{r}$ به دست می‌آید.

۱۴.۱۷. معادلهٔ برداری یک خط

اگر OA و OB (شکل ۱۷-۱۰) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نشان‌دهند، و P نقطه‌ای دلخواه برخطی باشدکه از B به موازات OA رسم می‌شود، دراین صورت $\vec{r}$ ، بردار مکان نقطهٔ P، نسبت به O چنین به دست می‌آید:



شکل ۱۷-۱۰

$$\vec{r}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$$
$$=\vec{b}+m\,\vec{a}$$

که درآن $m=\dfrac{BP}{OA}$ کمیتی است اسکالر.

این معادلهٔ $\vec{r}=\vec{b}+m\,\vec{a}$ معادلهٔ برداری خطی است که از نقطهٔ B (که با $\vec{b}$ تعریف می‌شود) به موازات بردار $\vec{a}$ رسم می‌شود.

به‌ازای‌هرمقدار m نقطهٔ ویژه‌ای برروی خط به‌دست‌می‌آید. m می‌تواند هرمقداری از منهای بینهایت تا بعلاوهٔ بینهایت داشته باشد.

به همین طریق، اگر P نقطه‌ای واقع بر خط BA باشد $\vec{r}$ ، بردارمکان‌آن، ازرابطهٔ زیر به دست می‌آید:

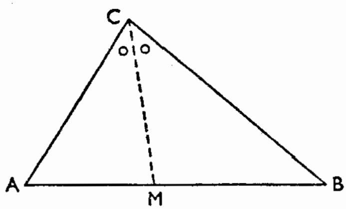
$$\vec{r}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$$
$$=\vec{b}+m\overrightarrow{BA}$$
$$=\vec{b}+m(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=m\,\vec{a}+(۱-m)\,\vec{b}$$

که درآن $m=\dfrac{BP}{BA}$ است.

این معادلهٔبرداری خطی است که ازدو نقطه می گذرد که بردارهای مکان‌آنها $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند.

نقطهٔ A متعلق به $m=1$ و نقطهٔ B متعلق به $m=0$ است. هر نقطهٔ دلخواهی واقع بر AB یا بر امتداد AB متعلق بـه مقدار معینی از m است. نقطهٔ وسط AB متعلق به $m=\frac{1}{2}$ است. برای این نقطه $\vec{r}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ است.

۱۵.۱۷. مثال ۱ : ABC مثلث دلخواهی است که در آن نیمساز زاویهٔ ACB ضلع AB را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. به‌شیوهٔ برداری ثابت کنید که $\frac{AM}{MB}=\frac{CA}{CB}$.



شکل ۱۷-۱۱

حل : برای هر نقطهٔ M واقع بر AB (شکل ۱۷-۱۱) می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$$
$$=\overrightarrow{CA}+\frac{AM}{AB}\times\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{CA}+\frac{AM}{AB}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$$
$$=\left(1-\frac{AM}{AB}\right)\overrightarrow{CA}+\frac{AM}{AB}\overrightarrow{CB}$$
$$=\frac{MB}{AB}\times\overrightarrow{CA}+\frac{AM}{AB}\overrightarrow{CB}$$

که مؤلفه‌های $\overrightarrow{CM}$ رادرامتدادهای CA و CB به دست می‌دهد.

اما اگر CM زاویهٔ ACB را نصف کند بـزرگی مؤلفه‌هـای $\overrightarrow{CM}$ در امتدادهای CA و CB بایستی یکسان باشند.

$$\therefore \quad \frac{MB}{AB}\times CA=\frac{AM}{AB}\times CB$$

$$\therefore \quad \frac{CA}{CB}=\frac{AM}{MB}$$

مثال ۲ : بردار $\vec{r}=10\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ تابع خطی بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، و $\vec{c}$ را توضیح دهید، به شرط آنکه

$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ، $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ ، و $\vec{c}=-\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$

باشد.

حل : $\vec{r}$ هنگامی تابع خطی $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، و $\vec{c}$ است که بتوان‌آن را به‌شکل زیر نوشت:

$$\vec{r}=m_1\vec{a}+m_2\vec{b}+m_3\vec{c}$$

که درآن m_1، m_2، m_3 کمیتهایی اسکالر هستند.

اگر این رابطه برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$10\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}=m_1(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})+m_2(3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k})+$$
$$m_3(-\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})$$

با برابری مؤلفه‌ها خواهیم داشت:

$$2m_1+3m_2-m_3=10$$
$$-m_1+2m_2+3m_3=-3$$
و
$$3m_1-4m_2-2m_3=-1$$

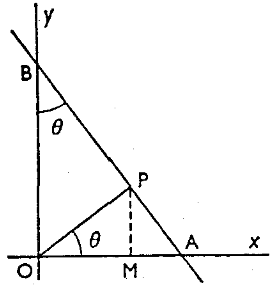
از این معادله‌ها نتیجه می‌شود که $m_1=1$، $m_2=2$ و $m_3=-2$ است.

بنابراین $\vec{r}=\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}$

مثال ۳ : پای عمودی‌را که از مبدأ برخط $\vec{r}=3m\vec{i}+4(1-m)\vec{j}$ رسم‌می‌شود بیابید.

حل : شکل ۱۷-۱۲ خطی با معادلهٔ برداری $\vec{r}=3m\vec{i}+4(1-m)\vec{j}$ را نشان می‌دهد. این خط از نقطهٔ A واقع برمحور x می‌گذرد به‌طوری‌که $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$ است. درضمن از نقطهٔ B واقع برمحور y ها می‌گذرد به‌طوری که $\overrightarrow{OB}=4\vec{j}$

نقطه‌های A و B به ترتیب متعلق به $m=1$ و $m=0$ هستند.



شکل ۱۷-۱۲

اگر P پای عمودی باشدکه از O بر AB فرود می‌آید، دراین صورت زاویهٔ POA ، که با θ نشان داده شده است، برابر زاویهٔ ABO خواهد بود.

اما
$$tg\,POA=\frac{PM}{OM}=\frac{4(1-m)}{3m}$$

و
$$tg\,ABO=\frac{OA}{OB}=\frac{3}{4}$$

به این ترتیب P متعلق به مقداری از m است که برای آن

$$\frac{4(1-m)}{3m}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad 16(1-m)=9m$$

$$\therefore \quad m=\frac{16}{25}$$

پس بردار مکان P چنین است:

$$\frac{48}{25}\vec{i}+\frac{36}{25}\vec{j}$$

یعنی
$$OM=\frac{48}{25} \quad \text{و} \quad MP=\frac{36}{25}$$

توجه داشته باشیدکه طول عمود OP برابر است با

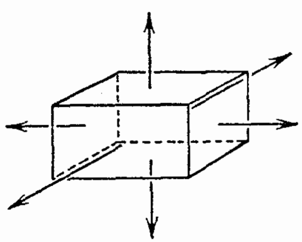
$$\left\{\left(\frac{48}{25}\right)^2+\left(\frac{36}{25}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

یعنی برابر است با $\frac{۱۲}{۵}$.

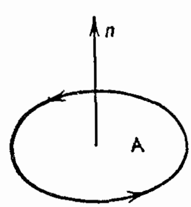
۱۶.۱۷. بردارهای سطحی

هر صفحهٔ مسطح در فضا دارای بزرگی و جهت است. جهت هرصفحه را می‌توان بر اساس جهت عمودبرآن صفحه مشخص کرد. بنابراین هرصفحه را می‌توان با برداری عمود برآن صفحه، یعنی مثلا بردار $A\vec{n}$ ، نشان دادکه درآن A بزرگی سطح و $\vec{n}$ بـردار واحد در جهت عمود بر صفحه است. $A\vec{n}$ را گاهی بـه صورت $\vec{A}$ نشان می‌دهند و چنین برداشت می‌کنند که $\vec{A}$ برداری است عمود بر صفحهٔ A.

دربارهٔ جهت مثبت عمودبرصفحه مشکلاتی وجود دارد. بنابراین بایدبرای هرمورد ویژه به‌دقت تعیین شود. گاهی جهت مثبت عمود برصفحه را باتوجه به جهت مثبت‌حرکت به دور محیط صفحه براساس قاعدهٔ پیچ راستدست (شکل ۱۷-۱۳) می گیرند. حرکت بر محیط‌صفحه‌هنگامی‌مثبت گرفته می‌شود که‌صفحه‌همیشه درسمت‌چپ‌واقع باشد. اما اگرصفحه بخشی ازیك سطح بسته را تشکیل داده باشد، عمود برآن صفحه به طرف بیرون به‌عنوان جهت مثبت انتخاب می‌شود. مثلاً سطوح یك مکعب مستطیل را می‌توان با شش بـردار عمودبرسطوح به طرف بیرون نشان داد (شکل ۱۷-۱۴). این بردارها جفت جفت برابر و در دوجهت مخالف یکدیگرند.



شکل ۱۷-۱۴



شکل ۱۷-۱۳

اگـر سطح S مسطح نباشد، می‌توان آن را بـه اجزای $dS_۱$، $dS_۲$، $dS_۳$، ... تقسیم کردکه هریك آن قدر کوچك است که می‌توان آن را به عنوان سطحی مسطح درنظر گرفت. در این صورت بردار $\vec{S}$ که نشان دهندهٔ کل سطح است مجموع برداری $dS_۱\vec{n_۱}$ ، $dS_۲\vec{n_۲}$ ، ... است که درآن $\vec{n_۱}$ ، $\vec{n_۲}$ ،... بردارهای واحد عمودبرصفحه درنقاط مختلف

بر اجزای آن است.

این مجموع برداری در مورد یك صفحهٔ بسته برابر صفر است، یعنی برداری که صفحه‌ای بسته را نشان می‌دهد برابر صفر است. این موضوع درمثال ویژه‌ای که برای مکعب مستطیل درشکل ۱۷-۱۴ آوردیم به خوبی روشن است. اما آن را درحالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد.

۰۱۷۰۱۷ بردار سطحی را نیز می‌توان مانند بردارهای دیگر به مؤلفه‌هایی تجزیه کرد. می‌توان ثابت کرد که بزرگی مؤلفهٔ یك بردارسطحی درهرجهت دلخواه برابراست بابزرگی تصویر آن سطح برصفحه‌ای عمود برآن جهت دلخواه.

زیرا تصویر قائم مثلث ABC بریك صفحه مثلثی است مانند abc به‌طوری که

$$\text{مساحت}\ \triangle abc = (\text{مساحت}\ \triangle ABC)\cos\theta$$

که درآن θ زاویهٔ میان‌سطوح ABC وabc است. اگر $90^\circ < \theta < 180^\circ$ باشد، دراین صورت $\triangle abc$ منفی است.

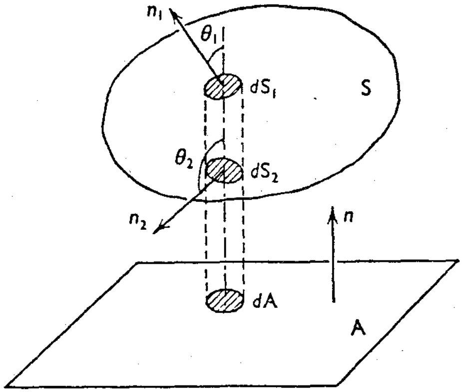
این نتیجه را می‌توان تعمیم داد و برای هر شکل مستوی محدود به خطوط راست به کاربرد، زیرا چنین شکلی از مجموعهٔ چند مثلث تشکیل شده است. به‌همین شیوه، این نتیجه را می‌توان برای شکلهایی نیز که به خطوط منحنی محدود شده‌اند به‌کاربرد، زیرا این‌شکلها حد شکلهایی هستند که به‌خطوط مستقیم‌محدود شده‌اند، و عدهٔ خطوط تا بینهایت افزایش پیدا کرده‌اند.

به‌این‌ترتیب، تصویرقائم هرسطح را برصفحه‌ای دلخواه می‌توان مؤلفهٔ بردار سطح درجهت عمود برصفحهٔ تصویر دانست.

این‌نتیجه بایدبرای هرصفحه‌ای به‌هرصورت که باشددرست باشد، زیرا چنین‌صفحه‌ای را می‌توان به‌عنصرهای سطحی‌مستوی تقسیم کرد که این قضیه دربارهٔ هریك ازآنها صدق می‌کند. از راه جمع برداری این قضیه درحالت کلی نیز ثابت می‌شود.

درحالت مربوط به یك صفحهٔ بسته تصویر **هر**صفحه صفر است، زیرا عدهٔ صفحه‌های مثبت برابر عدهٔ صفحه‌های منفی است.

این موضوع از شکل ۱۷-۱۵ آشکار می‌شود، که درآن dS_1 عنصری دلخواه از صفحهٔ S است. اگر تصویر dS_1 برصفحهٔ دلخواه A با dA، نشان داده شود و اگر $\overrightarrow{n_1}$ بردار واحد عمود بر عنصر dS_1 باشد، که از صفحه روبه بیرون است، دراین صورت dA برابر است با مؤلفهٔ $dS_1\overrightarrow{n_1}$ عمود برصفحهٔ A یعنی درجهت بردار واحدی است که در شکل نشان داده شده است. اکنون استوانه‌ای را که درآن dS_1 و dA دوسر آن هستند



شکل ۱۷-۱۵

درنظرمی گیریم. این استوانه ازصفحهٔ S عنصری مانندسطح $dS_۲$ را می‌برد. اگر $\overrightarrow{n_۲}$ بردار واحد عمود برعنصر $dS_۲$ باشد، که روبه بیرون سطح است، دراین صورت مؤلفهٔ $dS_۲\overrightarrow{n_۲}$ درجهت عمود بر A است، یعنی درجهت بردار واحد $\overrightarrow{n}$ یا dA — است.

این نتیجه برای هر جفت عنصر $dS_۱$ و $dS_۲$ درست است. بنابراین با جمع کردن بردارها برای کل سطح، نتیجه می‌شودکه بردار مربوط به هرصفحهٔ بسته برابر صفر است.

۱۸۰۱۷. کاربرد نتیجه‌هایی که در بالا مورد بحث قرار گرفتند برای مقاطع مستوی برخی از اجسام آشکار است.

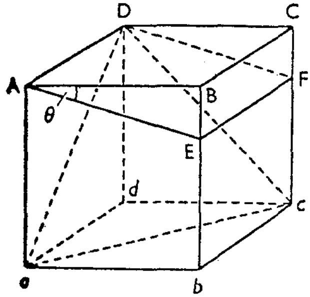
به عنوان مثال، مقطع قائم مکعبی بـه ضلع x مربعی است بـه مساحت $x^۲$. مقطع $\overline{AEFD}$ (شکل ۱۷-۱۶) با صفحه‌ای که زاویهٔ θ با وجه ABCD می‌سازد مستطیلی است به اضلاع x و $\frac{x}{cos\theta}$ ، یعنی به مساحت $\frac{x^۲}{cos\theta}$ است. بنابراین

$$cos\theta \ (\text{مساحت}\ AEFD) = \text{مساحت}\ ABCD$$

و ایـن نتیجه‌ای است کـه با آنچه بـرای حـالت کلی در بند ۱۷-۱۷ دربـالا بیان کردیم تطبیق دارد.

اگر شش‌وجه جسم AEFD abcd با بردارهایی عمود بروجوه ودرجهت رو به بیرون نمایش داده شوند، به آسانی می‌توان ثابت کرد که مجموع برداری آنها صفراست. این نتیجه را می‌توان برای گوهٔ پنج وجهی ADCBEF نیز به دست آورد.

به همین طریق، مقطع Dca از مکعب (شکل ۱۷-۱۶) مثلثی متساوی‌الاضلاع



شکل ۱۷-۱۶

است که طول هرضلع آن $x\sqrt{۲}$ است وبنابراین مساحت آن $\frac{۱}{۲}x^۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}(x\sqrt{۲})^۲ sin ۶۰^\circ$ است. تصویرآن بروجه abcd ازمکعب، مثلث dca به مساحت $\frac{۱}{۲}x^۲$ است. بنابراین اگر زاویهٔ میان مقطع Dca با وجه abcd برابر α باشد خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}x^۲=\left(\frac{۱}{۲}x^۲\sqrt{۳}\right)cos\alpha$$

$$\therefore \qquad cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

این نتیجه را ممکن بود ازاین راه به‌دست‌آورد که مساحتهای وجوه منشور Ddca را با بردارهایی‌عمود برهروجه وروبه‌بیرون نمایش دهیم. بزرگیهای‌این بردارها به‌ترتیب $\frac{۱}{۲}x^۲$ ، $\frac{۱}{۲}x^۲$ ، $\frac{۱}{۲}x^۲$ ، و $\frac{۱}{۲}x^۲\sqrt{۳}$ است، و به شرط آنکه $\frac{۱}{۲}x^۲=\left(\frac{۱}{۲}x^۲\sqrt{۳}\right)cos\alpha$ ، یعنی $cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مجموع این بردارها برابر صفر است. به عکس، می‌توانیم از راه هندسه ثابت‌کنیم که $cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، وسپس تحقیق‌کنیم که مجموع بردارهایی‌که چهار وجه را نشان می‌دهند صفر است.

نیز مقطع قائم استوانه‌ای به‌شعاع a دایره‌ای است به مساحت $\pi a^۲$. مقطعی‌که با مقطع قائم زاویهٔ θ می‌سازد مساحتی برابر A دارد که دربارهٔ آن می‌توان نوشت:

$$A\,cos\theta=\pi a^۲$$

$$\therefore \qquad A=\frac{\pi a^۲}{cos\theta}$$

این مقطع درواقع به‌شکل بیضی است که نیم قطرهـای آن a و $\frac{a}{cos\theta}$ است، وآن رامی‌-

توان با برداری به بزرگی $\frac{\pi a^{2}}{cos\theta}$ نشان داد که با محوراستوانه‌زاویه‌ای برابر θ می‌سازد.

تمرین ۱۰۱۷

۱ - ABCDEF شش ضلعی منتظم است. بردارهایی با بزرگی ۲، $۴\sqrt{۳}$، ۸، $۲\sqrt{۳}$ و ۴ واحد به ترتیب در جهتهای AB، AC، AD، AE و AF رسم شده‌اند. بزرگی مجموع بردارها و زاویهٔ انحراف آن را نسبت به AB پیدا کنید.

۲ - بردارهای مکان نقطه‌های A، B، C به ترتیب $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ هستند که برای آنها $\vec{a}=a_{1}\vec{i}+a_{2}\vec{j}$، $\vec{b}=b_{1}\vec{i}+b_{2}\vec{j}$، $\vec{c}=c_{1}\vec{i}+c_{2}\vec{j}$. اندازهٔ طولهای AB، BC، و CA را بیابید.

۳ - الف) اگر $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$، $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}$ و $\vec{c}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ باشد $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$، $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ و $\vec{a}+2\vec{b}-7\vec{c}$ را تعیین کنید.

ب) اندازه‌های m و n را چنان تعیین کنید که $m\vec{a}+n\vec{b}$ موازی $\vec{c}$ باشد.

پ) بردارهای واحد $\hat{a}$، $\hat{b}$، و $\hat{c}$ را پیدا کنید.

۴ - ثابت کنید که بردارهای $a_{1}\vec{i}+a_{2}\vec{j}$ و $b_{1}\vec{i}+b_{2}\vec{j}$ درصورتی که $a_{1}b_{1}+a_{2}b_{2}=0$ باشد عمود بر یکدیگر ند. بردار عمود بر بردار $3\vec{i}-4\vec{j}$ را پیدا کنید.

۵ - ثابت کنید که $\vec{r}$، بردار مکان نقطهٔ P که AB را به نسبت m به n تقسیم می‌کند از معادلهٔ $(m+n)\vec{r}=n\vec{a}+m\vec{b}$ به‌دست می‌آید که درآن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای مکان A و B هستند.

۶ - ثابت کنید که سه نقطه، که بردارهای مکان آنها $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ هستند، در صورتی همصفحه‌اند که $m_{1}\vec{a}+m_{2}\vec{b}+m_{3}\vec{c}=0$ که درآن $m_{1}+m_{2}+m_{3}=0$ است.

۷ - ثابت کنید که می‌توان مثلثی ساخت که اضلاع آن موازی و برابر میانه‌های یك مثلث دلخواه باشند.

۸ - به‌طور برداری ثابت کنید که اگر میانه‌های AD و BE از مثلث دلخواه ABC در نقطهٔ G یکدیگر را قطع کنند، دراین صورت نقطهٔ G خطهای AD و BE را به

نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. همچنین ثابت کنید که سه میانه دریک نقطه متقاطعند.

۹ ــ ثابت کنید که اگر نقطه‌های وسط اضلاع یک چهارضلعی دلخواه به هم متصل شوند شکلی که به دست می‌آید متوازی‌الاضلاع است.

۱۰ــ قطرهای یک چهار ضلعی معین یکدیگر را نصف می‌کنند. ثابت کنید که این چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۱ــ اگر نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، ....، A_n بردارهای مکان $\vec{r}_۱$، $\vec{r}_۲$، ...، $\vec{r}_n$ نسبت به O باشند، ثابت کنید که بردارمکان نقطهٔ G که بر طبق رابطهٔ زیر بیان می‌شود مستقل از نقطهٔ O است:

$$(m_۱+m_۲+\ldots+m_n)\overrightarrow{OG}=m_۱\vec{r}_۱+m_۲\vec{r}_۲+\ldots+m_n\vec{r}_n$$

دراین رابطه $m_۱$ ، $m_۲$ ، .... ، m_n کمیتهایی اسکالرند.

۱۲ــ به‌طور برداری ثابت کنید که اگرخطی اضلاع BC، CA، و AB مثلث ABC را به ترتیب درنقطه‌های D، E و F قطع کند، دراین صورت

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=-۱$$

۱۳ــ به‌طور برداری ثابت کنید که نیمسازهای داخلی یک مثلث متقاطعند.

۱۴ــ محل تلاقی خطهایی را پیدا کنید که معادله‌های برداری آنها

$\vec{r}=۳(۱-m)\vec{i}-m\vec{j}$ و $\vec{r}=k\vec{i}+۲(۱-k)\vec{j}$ است.

این خطوط را به‌صورت نمودار رسم کنید، وزاویهٔ میان آنها را بیابید. همچنین مساحت شکل مسدود میان این دو خط ومحور x ها را پیدا کنید.

۱۵ــ اگر A و B دارای بردارهای مکان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشند، و متوازی الاضلاع OACB طوری رسم شود که OA و OB اضلاع مجاور یکدیگر باشند، معادلهٔ برداری خطی را که از C به موازات قطر AB رسم می‌شود پیدا کنید. تحقیق کنید که اگر این خط امتداد OA را در D قطع کند، در این صورت $\overrightarrow{OD}=۲\vec{a}$.

۱۶ــ ABCD متوازی‌الاضلاع است و E نقطهٔ وسط BC است. AE قطر BD را در نقطهٔ F قطع می‌کند. تعیین کنید که نقطهٔ F خط BD را به چه نسبتی تقسیم می‌کند.

۱۷ــ ثابت کنید که خطهایی که معادله‌های برداری آنها عبارتند از

$$\vec{r}=k\vec{a}+(۱-k)\vec{b} \quad و \quad \vec{r}=۲(۱+m)\vec{a}-(۱+۲m)\vec{b}$$

بریکدیگر منطبق هستند.

۱۸- بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ اضلاع مجاور یک متوازی‌السطوح را تشکیل می‌دهند. معادله‌های برداری چهارقطرمتوازی‌السطوح را پیدا کنید و نشان دهید که این‌قطرها متقاربند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱۹- اگر بردارهای مکان رئوس یک هرم مثلث‌القاعده $\vec{r}_۱$ ، $\vec{r}_۲$ ، $\vec{r}_۳$ ، $\vec{r}_۴$ باشند ثابت کنید که بردارمکان مرکز جرم هرم مثلث القاعده برابر است با

$$\frac{۱}{۴}\left(\vec{r}_۱+\vec{r}_۲+\vec{r}_۳+\vec{r}_۴\right)$$

۲۰- ثابت کنید که سه‌خط مستقیم که نقاط وسط یالهای مقابل یک هرم مثلث القاعده را به هم وصل می‌کنند با هم متقارب هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

۲۱- معادلهٔ برداری خطی را پیدا کنید که از نقطه‌هایی می‌گذرد که مختصات آنها عبارتند از (۳ ، ۲ ، ۱) و (۵ ، ۱ — ،۴). همچنین معلوم کنید که این خط صفحه (x,y) را در کجا قطع می‌کند.

۲۲- ثابت کنید که چهار نقطهٔ A، B، C، D هنگامی بر یک راستا واقعند که بردارهای مکان آنها $\vec{r}_۱$ ، $\vec{r}_۲$ ، $\vec{r}_۳$ ، $\vec{r}_۴$ چنان است که

$m_۱\vec{r}_۱+m_۲\vec{r}_۲+m_۳\vec{r}_۳+m_۴\vec{r}_۴=۰$ که‌درآن $m_۱+m_۲+m_۳+m_۴=۰$ است. $m_۱$، $m_۲$، $m_۳$، $m_۴$ را در حالتهای زیر پیدا کنید: (۱) ABCD متوازی‌الاضلاع است.(۲) D نقطهٔ وسط BC است. (۳) D مرکزجرم‌مثلث ABC است.

ثابت کنید که معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطه‌هایی می‌گذرد که بردارهای مکان‌آنها $\vec{r}_۱$ ، $\vec{r}_۲$ ، $\vec{r}_۳$ است می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\vec{r}=m_۱\vec{r}_۱+m_۲\vec{r}_۲+(۱-m_۱-m_۲)\vec{r}_۳$$

۲۳- بردارهای مکان A، B، C به ترتیب عبارتند از:

$$۲\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k}\ ،\ ۳\vec{i}+۲\vec{j}-۴\vec{k}\ \text{و}\ -\vec{i}+۳\vec{j}-۲\vec{k}\ .$$

پیدا کنید: (۱) معادلهٔ خطی را که از A به موازات BC رسم می‌شود، (۲) معادلهٔ صفحه‌ای که از A و B ومبدأ O می‌گذرد.

۲۴- اگر

$$\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k}\ ،\ \vec{b}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-۴\vec{k}\ ،\ \vec{c}=-۵\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

باشد، بردارهای واحد $\hat{\vec{a}}$ ، $\hat{\vec{b}}$ ، $\hat{\vec{c}}$ را پیدا کنید.

ثابت‌کنیدکه اگر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ چنان باشند که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ باشد در این صورت در حالت کلی $\hat{\vec{a}}+\hat{\vec{b}}+\hat{\vec{c}}$ برابر صفر نیست. شرایطی را که باید موجود باشد تا $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ و همچنین $\hat{\vec{a}}+\hat{\vec{b}}+\hat{\vec{c}}$ هر دو صفر باشند پیدا کنید.

۲۵ـ اضلاع مجاور مکعبی درراستای محورهای مختصات Ox، Oy، Oz هستند. این مکعب با صفحهٔ قطری‌آن به دوبخش مساوی تقسیم شده است. بردارهایی را پیدا کنیدکه پنج وجه یکی از این دوبخش مکعب را نشان دهد، و سپس تحقیق‌کنید که مجموع برداری آنها صفر است.

۲۶ـ معادلهٔ بردارهایی را بنویسیدکه چهار وجه یک هرم منتظم را نشان می‌دهندوسپس تحقیق‌کنیدکه مجموع برداری آنها صفر است.

۲۷ـ رئوس A، B، C از هرم مثلث القاعدهٔ $OABC$ به ترتیب برمحورهای Ox، Oy، Oz واقعند. به فرض‌آنکه مجموع بردارهایی‌که چهار وجه را نشان می‌دهند صفر باشد، مساحت وجه ABC وجهت عمود برآن را پیداکنید.

۲۸ـ تصویر پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ که طول هر ضلع آن a است به طور قائم بر صفحه‌ای افتاده است‌که از ضلع AB می‌گذرد وبا صفحهٔ $ABCDE$ زاویهٔ θ می‌سازد. اگر تصویر مثلث ADB مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، θ را پیدا کنید. نیز مساحت تصویر مثلث BDC را بیابید.

۲۹ـ مثلث متساوی‌الاضلاعی است که طول هر ضلع آن $6cm$ است. رئوس این مثلث در ارتفاعهای ۷، ۹ ، ۱۱ سانتیمتر از صفحه‌ای افقی است. ابعاد تصویر مثلث را بر صفحهٔ افقی و زاویهٔ انحراف مثلث متساوی الاضلاع را نسبت به افق تعیین کنید.

۳۰ـ شش وجهی منتظم $ABCDEF$ که طول هرضلع آن $2cm$ است به طور قائم بر صفحه‌ای‌که از ضلع AB می‌گذرد و با صفحهٔ شش وجهی زاویهٔ $30°$ می‌سازد تصویر شده است. طولهای اضلاع شکل تصویر شده، و همچنین زاویهٔ میان BC وتصویر آن را پیدا کنید.

پاسخها

تمرین ۱.۱۰ (صفحهٔ ۱۷)

۱ ـ الف) ۱۵؛ ب) ۱۲ ؛ پ) ۱۳ ؛ ت) ۱۰؛ ث) $\text{Arc}\cos\left(-\frac{2}{5}\right)$ ج) $\sqrt{58}$.

۳ ـ الف) °۱۲۰؛ ب) °۶۰.

۴ ـ $Q=\sqrt{3}P$

۵ ـ ۱۵ N، ۹ N، $\text{Arc}\cos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

۶ ـ ۱۰ gN برهرمیخ.

۷ ـ $5\sqrt{3}$ gN برمیخ بالایی؛ ۵ gN برمیخ پایینی.

۸ ـ $\text{Arc}\cos\left(\frac{7}{15}\right)$.

۱۰ـ °۱۲۰.

۱۱ـ ۴ N، $\text{Arc}\cos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

۱۲ـ $\sqrt{76}$N

۱۳ـ ۱۰/۳N

۱۴ـ $4\sqrt{3}$N، با زاویهٔ ۹۰ نسبت به‌نیروی ۴N.

۱۶ـ ۲۰N، $\text{Arc}\,tg\frac{3}{4}$

۱۷ـ $5\sqrt{2}$؛ $3\sqrt{10}$ و $\sqrt{10}$N

۱۸ـ $\text{Arc}\cos\frac{1}{4}$ نسبت به P

۱۹ـ ۸/۸N؛ °۴۳ با ۳N

۲۰ـ ۳۵۳/۵N؛ ۲۳۴/۵N

۲۱ـ ۸/۷، ۲۲/۰gN

تمرین ۲.۱۰ (صفحهٔ ۲۸)

۱ ـ ۱۶ gN و ۱۲ gN

۲ ـ ۷۲ gN و ۵۴ gN

۳ ـ ۲۴ gN و ۱۰ gN

۵ ـ ۷/۸ gN و ۶/۶ gN

۶ ـ ۴/۸ gN و ۱/۴ gN

۷ ـ الف) $5\sqrt{3}$ gN؛ ب) $10\sqrt{3}$ gN

۸ ـ ۸/۱ gN و ۵/۵ gN

۹ ـ $M=3$؛ $3\sqrt{3}$ gN

۱۰- $9/03\ gN$ در AC؛
$7/1\ gN$ در BC.
۱۲- الف) $7/5\ gN$، $6\ gN$؛
ب) $60\ gN$، $36\ gN$؛
پ) $2/89\times10^3\ gN$،
$2/5\times10^3\ gN$.
۱۳- $5\ gN$، $5\sqrt{3}\ gN$.
۱۴- زاویهٔ قائمه نسبت به نخ اول؛
$2/5\sqrt{3}\ gN$ و $2/5\ gN$.

۱۵- $30/1\ gN$
۱۶- $5\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\ gN$ و
$10(\sqrt{3}-1)\ gN$
۱۷- $3/6\ gN$؛ $67^\circ 58'$، $44^\circ 3'$.
۱۸- $5\sqrt{2}$؛ $5\ gN$.
۱۹- $63/9 N$؛ 23°؛ $80\ gN$؛ 54°.
۲۱- $5\sqrt{2}$، $5\sqrt{2}$، ۱۰، $5(\sqrt{2}-1)$.
۲۳- $10g$

تمرین ۳.۱۰ (صفحهٔ ۳۸)

۱ - $7/7\ N$، 29°
۲ - $10\ N$ وبا زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{3}{4}\right)$ نسبت به نیروی $4N$،
۳ - $7\ N$، میان نیروهای ۱۳ و ۱۰ نیوتون و با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{5\sqrt{3}}{11}\right)$ نسبت به نیروی $10\ N$.
۴ - $9/198\ N$
۵ - $64/5\ N$، $13^\circ 57'$ جنوب‌غربی.
۶ - $20\ N$ بازاویهٔ 60° نسبت‌به AB.
۷ - $228/8\ N$، $49^\circ 39'$ جنوب‌شرقی.
۸ - $23/9\ gN$ بر A؛ $10gN$ برB وC؛
$10\sqrt{3}\ gN$ بر D
۹ - $\sqrt{3}\ F$؛ $\mathrm{Arc}tg(3-2\sqrt{2})$.
۱۰- $112/8N$، جنوب شرقی
$\mathrm{Arc}\,tg\,3(\sqrt{2}-1)$

۱۱- $12/17\ N$، $25/25^\circ$
۱۲- $6/3\ N$ وزاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$، بانیروی $2N$.
۱۳- $\sqrt{281}\ N$ وزاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{16}{5}\right)$ با AB.
۱۴- $8\ N$ در راستای GA.
۱۵- $30\ N$، $34N$.
۱۶- $10\ N$ ، $53^\circ 8'$؛ $10N$ ، $36^\circ 52'$ شمال شرقی.
۱۷- $2/91\ N$، $290^\circ 6'$.
۱۸- $2\sqrt{2}\ N$ به موازات DB که از E می‌گذرد.
۱۹- $\sqrt{3}\ N$ عمود برBC ، $7/5cm$ ازB.

تمرین ۴.۱۰ (صفحهٔ ۴۳)

۱ - ۸ N؛ ۱۵ N.

۲ - $12\sqrt{5}$؛ $4\sqrt{2}$.

۳ - $31\frac{1}{4}$ N؛ $P = 25$ N.

۴ - ۰/۰۷۲۶ gN.

۵ - ۱۳ N؛ $\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{12}{5}\right)$ نسبت به BA.

۶ - ۱۶ N درخلاف جهت ۵N.

۷ - ۳/۷۷ N با زاویهٔ ۱۴۲°.

۹ - $\frac{1}{2}\sqrt{3}$، $-\frac{1}{2}$.

تمرین ۵.۱۰ (صفحهٔ ۵۳)

۱ - ۱۰ gN، ۸/۹۶ gN.

۲ - ۰/۲۵.

۳ - ۴/۸۵ gN.

۵ - $\frac{1}{8}$.

۶ - $10\frac{\sqrt{3}}{3}$ gN.

۷ - الف) ۸/۸ gN؛ ب) ۱۵/۲ gN.

۸ - $\frac{1}{\sqrt{39}}$.

۹ - ۱۲ gN، ۲۱۳ gN.

۱۰- ۷۳/۵۷ gN.

۱۳- زاویهٔ $\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{1}{4}\right)$ با سطح شیبدار؛

۵۶ gN.

۱۴- $\sin\alpha = \sin\beta + \mu\cos\beta$ که در آن μ ضریب اصطکاک و α زاویهٔ شیب سطح صیقلی است.

۱۶- الف) ۰/۵۳۶؛ ب) ۱۷۰/۹N.

۱۷- $P = W\dfrac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$؛

$Wl\cos\beta\dfrac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$؛

۶۰۸].

۱۸- $\cos\lambda = \dfrac{PW}{Q\sqrt{P^2 + W^2}}$.

۱۹- $52°30'$، $7°30'$، $\dfrac{W}{\sqrt{2}}$ و $7/5°$ نس
به‌سطح شیبدار.

۲۰- $2R\alpha$ که α بر حسب رادیان است.

۲۱- ۰/۳۵۳۵؛ ۱/۰۹۶ gN.

۲۲- ۱۰ gN، ۱۴/۳۳ gN.

تمرین ۱۰۱۱ (صفحهٔ ۶۵)

۱ - ۱۱۰ N، ۱۴ cm از A؛ ۳۰N ، $۵۱\frac{۱}{۳}$cm از A و درآن سوی B.

۲ - ۲۱N، ۲۴cm از A؛ ۳N، ۱۶۸cm از A و درآن سوی B.

۳ - ۴N، ۲۴cm از A برروی امتداد BA.

۴ - ۱۲N، ۱۰cm از نیروی ۸N.

۵ - ۷۵N ، ۲۵N ، نیروی ۷۵N در یك متری برایند.

۱۱- ۲ واحد؛ قطر BD را درفاصلهٔ $\frac{۱}{۱۰}$ طول قطر از مرکز قطع می‌کند.

۱۲- اگر D برروی CA و چنان است که CD = ۲cm، برایند BD را نصف می‌کند.

تمرین ۲۰۱۱ (صفحهٔ ۷۱)

۱ - ۳۲N cm. ۶۴N cm ، ۱۶N cm، به‌ترتیب حول A، B، C.

۲ - ۱۸۰N cm، ۱۸۰N cm.

۳ - $۵\sqrt{۳}$N m.

۴ - صفر، ۱۸N m.

۵ - ۵N m، ۳N m.

۶ - $۲۱\sqrt{۳}$ N cm ، $۲۱\sqrt{۳}$ N cm

تمرین ۳۰۱۱ (صفحهٔ ۷۵)

۱ - ۷ gN برپایهٔ نزدیکتر به ۳ kg؛ ۶ gN برپایهٔ دیگر.

۲ - ۲۰ gN بر A؛ ۴۰ gN بردیگری.

۳ - ۶۲/۵ gN برنفرنزدیکتر؛ ۳۷/۵ gN برنفردیگر.

۴ - ۳۷/۵ kg.

۵ - $۷\frac{۱}{۳}$ gN بر A؛ $۱۰\frac{۲}{۳}$ gN بر B.

۶ - ۰/۸۶۵ m از همان انتهاکه فاصله‌ها اندازه‌گیری شده‌اند.

۷ - ۵ واحد از ۱۴متری A درامتداد DA.

۸ - ۲/۱ m از A.

۹ - ۰/۶ m

۱۰- ۷/۳۵ gN از C؛ ۴/۶۵ gN از D؛ ۵۱/۵gN cm.

۱۱- $\frac{۹}{۳۴}$ m از یکی از دوطرف مرکز.

۱۳- کمتر از ۱۷/۵ cm از هیچ یك از نخها نیست.

۱۴- زوجی با گشتاور ۳۷ واحد ، ۱۰ gN و

$۳/۷m$ از O.

۱۶- $۴\frac{۲}{۳} gN$ برپایهٔ دورتر از وزنهٔ $۲kg$ ؛

$۷\frac{۱}{۳} gN$ برپایهٔ نزدیکتر.

۱۷- $۲۶\ gN$ و $۱۴\ gN$.

۱۸- $۱۲/۵\ kg$.

۱۹- $p+q$.

۲۰- $AC=۰/۶\ m$ ، $DB=۰/۳\ m$.

۲۱- $۲۰۲\ N$ ، $۱/۷۸\ m$.

۲۲- در B ، $\frac{۴۸+۹M_۱-۳M_۲}{۷}g$ و

در C ، $\frac{۳۶+۱۰M_۲-۲M_۱}{۷}g$ ؛

هریك برابر $۶\ kg$.

۲۳- $۰/۴۶\ m$.

۲۴- ۶۰°.

۲۵- $۲۵\ gN$ در $۲/۴\ m$ از انتهایی که فاصله‌ها ازآنجا اندازه‌گیری می‌شود؛ $۱۵gN$ از این انتها، $۱۰\ gN$ از انتهای دیگر.

تمرین ۴۰۱۱ (صفحهٔ ۸۷)

۱ - $\frac{۱}{۸}$.

۳ - فاصله‌ها را a، ۲a و مانند آنها نشانه‌گذاری می‌کنیم، از M به‌طرف A ، a فاصلهٔ وسط BD از C.

۵ - x نباید کمتر از $۷kg$ باشد،

$x=۷\sqrt{۲}\ kg$

۷ - $۱۴\ gN$ ؛ $\frac{۳}{۱۴}m$ از مرکز.

۹ - $\frac{۱}{۲}cm$ ؛ $W_۰=۴W_۱$.

تمرین ۱۰۱۲ (صفحهٔ ۱۰۳)

۱ - ۴۵°.

۲ - $Arctg\left(\frac{۳}{۲}\right)$؛ $۱\frac{۱}{۴}$ برابر وزن میله و زاویهٔ $Arctg\left(\frac{۴}{۳}\right)$ نسبت به‌افق.

۴ - $W\sin ۱۵^\circ$: $W\cos ۱۵^\circ$، بازاویهٔ ۱۵° نسبت به‌قائم.

۸ - $۴\frac{۳}{۸}gN$.

۹ - تقریباً $۵g\,tg۴۰^\circ=۴/۲gN$، $۱۰/۸gN$ و $۶۷^\circ ۱۴'$ نسبت به‌افق.

۱۰- $\frac{۱}{۶}W$ ؛ $W\frac{\sqrt{۳۷}}{۶}$؛ بازاویهٔ $Arctg(۶)$ نسبت به افق.

۱۱- $W\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ؛ $۲W\frac{\sqrt{۳}}{۳}$: با زاویهٔ ۶۰° نسبت به‌افق.

۱۲- $۲W\frac{\sqrt{۳}}{۳}$؛ $W\frac{\sqrt{۳}}{۳}$.

۱۵- $۷\frac{۱}{۴}$ gN.

۱۶- ۷۷/۱ gN ؛ ۱۶۳/۴ gN، وزاویهٔ $۶۳°۳۹'$ نسبت به‌افق.

۱۸- هریک ۰/۴۶m.

۱۹- $ACB=۹۰°$ ، و B زیر C است.
کمترین نیرو $= W\sin\alpha$.

۲۱- $۳\frac{۱}{۸}$ gN.

۲۲- ۲۰/۵ gN ، ۴/۵ gN.

۲۴- عمود بر AB؛ $\frac{۱}{۲}w\sqrt{۴-۳\sin^{۲}\theta}$.

۲۵- ۱۰N؛ $۵\sqrt{۳}$N.

۲۶- $۱۰\sqrt{۳}$ gN برصفحهٔ ۳۰°؛ ۱۰ gN برصفحهٔ ۶۰°؛ ۳۰° نسبت به‌افق.

تمرین ۲۰۱۲ (صفحهٔ ۱۱۹)

۱ - ۳۳ gN ؛ ۳۰/۵ gN ، با زاویهٔ $\mathrm{Arctg}\left(\frac{۲۵}{۵۶}\right)$ نسبت به‌افق.

۲ - ۱/۵ gN؛ تقریباً ۹/۱ gN ، بازاویهٔ $\mathrm{Arctg}(۶)$ نسبت به‌افق.

۴ - ۱۱/۴ gN

۶ - $\frac{۱}{۸}$ طول‌میله از انتهایی‌که بر صفحهٔ ۳۰° است.

۸ - ۵/۲۵gN ، ۷gN ، قائم.

۹ - $R_{۱}=\frac{۶۷}{۵۶}W$ ؛ $R_{۲}=\frac{۴۵}{۵۶}W$.

۱۰- $\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{m+n}{m}\sin\theta\right)$ ؛ ۰/۷۳

۱۱- عمود برخطی که مرکزغلتك را به‌حاشیهٔ جدول وصل می‌کند.

۱۲- عمودبرخطی‌که مرکز غلتك را به‌حاشیهٔ پله وصل می‌کند، ۲:۱ ، تمایل به‌لغزش برروی پله وجود دارد، ولی برروی زمین وجود ندارد.

۱۴- ۱۴۷۶N، ۷۵° جنوب شرقی؛ ۴۴۰۰N.

۱۵- $(۸-\sqrt{۳})$ gN

تمرین ۳۰۱۲ (صفحهٔ ۱۳۳)

۱ - $\frac{\sqrt{۳}}{۶}W$ افقی برپایینترین مفصل؛
$\frac{\sqrt{۳۹}}{۶}W$ بازاویهٔ $\mathrm{Arctg}(۲\sqrt{۳})$ نسبت به‌افق برهریك ازمفصلهای بالایی.

۲ - ۲W در AC؛ $\frac{W}{۲}$ افقی بر B و D.

۳ - کشش درنخ $= ۲W$؛ عکس‌العمل در B

و $D = \frac{\sqrt{3}}{6}W$ افقی.

۴ - W؛ W قائم بر A و C؛ W افقی بر B.

۵ - $\frac{3}{4}W$.

۶ - مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل

در B،

$$\frac{a^3-b^3}{2(a^2+b^2)}Mg,\ \frac{ab(a+b)}{2(a^2+b^2)}Mg$$

و در C،

$$\frac{a^3+2a^2b+b^3}{2(a^2+b^2)}Mg,\ \frac{ab(a+b)}{2(a^2+b^2)}Mg$$

و در A،

$$\frac{ab(a+b)}{2(a^2+b^2)}Mg,$$

$$\frac{a^3+2ab^2+b^3}{2(a^2+b^2)}Mg$$

۷ - $\left(1+\frac{b}{2a}\right)W$ ؛ $\left(2-\frac{b}{2a}\right)W$

$$\frac{c(a+b)}{2a\sqrt{a^2-c^2}}W$$

۹ - $2W$؛ مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل

درلولا عبارتند از $2W$ و $\frac{5}{3}W$.

۱۲- مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل در B یا E عبارتند از:

$$\frac{W}{4\cos 18} \text{ و } \left(\frac{1}{4\sin 18}-\frac{1}{2}\right)W$$

۱۳- $\frac{\sqrt{7}}{2}w$ بر A و D؛ $\frac{\sqrt{19}}{2}w$ بر B و C.

۱۴- $0/05\,m$ برطرف نزدیکتر به B.

مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهای فشاری عبارتند از:

بر A، $0/84$ و $1/63\,gN$

بر B، $0/84$ و $1/87\,gN$

بر C، $0/84$ و $0/37\,gN$.

۱۵- $W\,cotg\,\alpha$ ؛ $\frac{W}{\sin\alpha}$.

۱۶- $\frac{1}{2}W\left(tg\alpha+\frac{a}{c\sin^2\alpha}\right)$.

۱۷- $2\,gN$ ، $2\,gN$.

۲۰- $200\,gN$ افقی و قائم بر D و B.

۲۳- $11/74\,gN$.

۲۴- $0/6\,m$ از B؛ $2/5\,gN$.

۲۵- $2/5\,gN$ افقی.

۲۶- $\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{M}{2M+m}\right)$.

تمرین ۴.۱۲ (صفحهٔ ۱۴۵)

۱ - $0/74\,a$ از A برضلع مقابل B.

۲ - بر C.

۳ - $0/75\,m$

۴ - $6/05$ بازاویهٔ $70°42'$ نسبت به AB بر ضلع مقابل مربع.

۵ - BC را به‌نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.

۶ - $۲۴\sqrt{۲}$ N.

۷ - ۳۰ N.

۸ - ۵۷/۶.

۹ - ۲/۳۷P، BC را در $\frac{۷}{۹}$BC از B قطع می‌کندو با BCزاویه $\mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}\right)$ می‌سازد.

۱۰- ۱ از C تـا D ، ۱ از C تـا B ، ۱ از A تا D.

الف) ۲ درامتداد BC؛ ب) زوجی با گشتاوری دو برابر ضلع مربع.

۱۱- نیروی ۲۱ واحد از B تا A ؛ تقریباً ۵۴/۵.

۱۲- $۵\frac{\sqrt{۲}}{۴}$N ؛ $۵\sqrt{۲}$N.

۱۴- N ۲ از D تا A.

۱۵- ۱۳ ، $\sqrt{۱۷۳}$.

۱۶- ۲P از وسط AD به‌موازات AB.

تمرین ۵.۱۲ (صفحهٔ ۱۵۳)

۸ - دایرهٔ دیگر.

۹ - DG۶ که درآن D نقطهٔ وسط AB، و G طوری است که BC را به سه قسمت می‌کند و G به C نزدیکتر است.

۱۰- خطی عمود بروسط AC و C نقطهٔوسط AB است.

۱۱- مرکز در G، نقطهٔ وسط خطی است که نقاط وسط اضلاع متقابل چهار ضلعی را به هم وصل می‌کند ؛ شعاع برابر PG است.

۱۲- CF = AE

۱۶- $\sqrt{۱۰}$ N بازاویهٔ $\mathrm{Arctg}\left(\frac{۱}{۳}\right)$ نسبت به AB، امتداد AB را در ۱/۳۶AB از A قطع می‌کند.

۲۱- از نقطهٔ وسط AB.

۲۲- $l=۳-m$ ؛ ۲ : ۱.

مرین ۶.۱۲ (صفحهٔ ۱۶۱)

۱ - $\frac{۱}{۲}Wa$.

۲ - نیروی قائم ۷/۵N ؛ زوج ۱۸N m.

۵ - عکس‌العمل بر BC در B : نیروی قائم ۲W، نیروی افقی ۲W ، زوج ۵Wa؛ و در C، نیروی قائم W ، نیروی افقی ۲W، زوج Wa که‌درآن‌وزن AB = W، و طول AB = ۲a.

۶ - دو نیروی مساوی $\frac{۱۲P}{۵}$ که یک زوج

تشکیل می‌دهند.

۸ - $k=-۴$.

۱۰- kb به‌موازات AD، $\frac{۳}{۲}a$ از A ؛ زوج kab.

تمرین ۷۰۱۲ (صفحهٔ ۱۷۲)

۱ - $۳\frac{۳}{۴}$ ؛ ۵.

۲ - $۲۱\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$؛ که درآن a طول ضلع شش ضلعی است؛ ۶ واحد موازی با نیروی ۵ واحد.

۳ - $۶F$، زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(۵\sqrt{۵}-\frac{۹}{۸}\right)$ با AB؛ ۳/۱۷ از AB درآن سوی A، و ۰/۲۷ از BC درآن سوی C.

۵ - $\frac{G}{a\sqrt{۳}}$ که درآن $G^{۲}$ برابر است با $G_۱^۲+G_۲^۲+G_۳^۲-G_۲G_۳-G_۳G_۱-G_۱G_۲$.

۶ - $N-xY+yX=۰$.

۷ - ۵۰ ؛ 0/۰۴۷m بر امتداد BA، ۰/۰۹۴m میان A و D.

۸ - 1N ؛ $\sqrt{۳}x-y-\sqrt{۳}a=۰$.

۱۰- $\sqrt{۷۴}$N با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(-\frac{۷}{۵}\right)$ نسبت به AB ؛ ۳۶ واحد در خلاف جهت عقربه‌های ساعت.

۱۱- ۱۹/۰۵ واحد بازاویهٔ $۱°۳۶'$ بااضلاع افقی مربع ؛ ۲۳/۱۱ واحد درخلاف جهت عقربه‌های ساعت.

۱۲- ۶N در راستای CO ؛ ۹۰/۹Ncm.

۱۳- ۱۰ ، $۵\sqrt{۲}$ ، $۵\sqrt{۲}$N.

۱۴- $۴\frac{\sqrt{۵}}{۵}$N در راستای BC ، $۱۶\frac{\sqrt{۵}}{۱۵}$N در راستای AC ، $۸\frac{\sqrt{۵}}{۱۵}$N در راستای AB .

۱۵- ۶N از نقطهٔ وسط BC به‌طرف داخل؛ ۸N ازنقطهٔ وسط AC به طرف خارج.

۱۷- الف) $\sqrt{۱۰}$N با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg(۳)$ با AB؛ ۶N m درخلاف جهت‌عقربه‌های ساعت. ب) $\sqrt{۱۶۰}$ N بر B؛ $\sqrt{۹۰}$N بر C.

۲۰- ۱/۵۹ N m.

۲۲- $\sqrt{۱۹۴}$ ؛ $۵x+۱۳y-۱۷a=۰$.

۲۴- $۲P$ ، عمود بر BD در فاصله $\frac{۱}{۲}$BD از D.

تمرین ۸.۱۲ (صفحهٔ ۱۷۹)

۱ - ۱۲۰/۷gN.

۲ - $\frac{40}{3}+6\sqrt{3}\,N$ ، $\frac{40}{3}+10\sqrt{3}\,N$ ، $\frac{220}{3}-16\sqrt{3}\,N$ به‌ترتیب در A، B و C.

۴ - ۲۰gN.

۵ - $16\frac{2}{3}\,gN$ ؛ ۱۰۰gN.

۶ - ۱۴/۹۳gN.

۷ - ۵۸/۸πN ؛ ۳۴/۸πN.

۸ - ۲۰π ، $20\pi-\pi^2 J$.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل
(صفحهٔ ۱۸۱)

۱ - ۶ ، $3\sqrt{3}$.

۳ - $P\cos(\pi-\theta)$ ، $P\sin(\pi-\theta)$.

۷ - $\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$.

۸ - $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ؛ $\mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}\right)$.

۱۱- ۳ : ۴.

۱۲- $\frac{w}{2\sqrt{3}}$.

۱۳- $W+\frac{wd}{4b}$ ؛ $W+w\left(1-\frac{d}{4b}\right)$.

۱۴- $\frac{5W}{2\cos\frac{\pi}{5}}$.

۱۷- $\frac{1}{2}W$ ، $\frac{3}{2}W$.

۱۸- ۵۵۳ gN.

۱۹- قید: DA۱۱۷ gN، AC۲۲۴ gN.
ستون: CD۱۶۸ gN، CB۲۸۰ gN.

۲۲- kb بموازات AD، $\frac{3}{2}a$ از A ؛ kab.

۲۳- $(P+Q)\cos\alpha$ ، $(P-Q)\sin\alpha$.

۲۴- $\sqrt{2}$.

۲۵- $\frac{5M}{12a}$

۲۶- N ۱ موازی AB ؛ $1/2\sqrt{3}$ m ؛ $1/2\sqrt{3}$ Nm ؛ N ۱ موازی BA.

۲۷- $10\,a$ درجهت DCBA؛ $3\sqrt{2}$ از C به A.

۲۸- $10\sqrt{4-\sqrt{3}}\,N$ با زاویهٔ $\mathrm{Arc\,tg}\frac{(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ نسبت به BA ؛ ۱۰Nm.

۲۹- $(6\cos 36^\circ+1)(4\cos 36^\circ-1)$.

۳۰- ۴، $-8\sqrt{3}$ ؛ $18\,a\sqrt{3}$.

تمرین ۱۰۱۳ (صفحهٔ ۱۹۸)

۱ - میان نیروهای ۵ و ۴ نیوتون؛ ۰/۰۸ m از آخری.

۲ - ۹/۷ × ۱۰^{۳} gN درسمت چپ؛ ۹/۳ × ۱۰^{۳} gN درسمت دیگر.

۳ - میان نیروهای ۷ و ۴N، ۰/۲۴ m ازآخری.

۴ - ۱/۰۸ m از انتها.

۵ - ۷/۲ gN از انتهایی که مبنای اندازه‌گیری فاصله‌هاست، ۷/۸ gN ازانتهای دیگر.

۶ - ۱۰/۵ gN، و ۸/۵ gN.

۷ - ۲/۶۶ m ازنیروی ۲ N.

۸ - ۴/۸ m ازنخستین وزنهٔ ۱۰ Mg.

۹ - ۶/۳ m ازانتهای نزدیکتر به ۴ kg؛ ۸/۲gN برانتهای نزدیکتر به ۴ kg، و ۱۳/۸ gN برانتهای دیگر.

۱۰- ۵/۴۶ m.

۱۱- ۴۴/۳۷۵ gN برA؛ ۱۰۵/۶۲۵ gN برتکیه‌گاه نزدیکتر به B.

۱۳- ۲/۵ gN، ۵/۵gN، ۲/۸gN، ۳/۹ gN.

۱۴- ۶/۲N با زاویهٔ ′۶°۷۶ با AB، AB را میان A و B درجایی قطع می‌کند که $\frac{۶}{۷}$ cm از A فاصله داشته باشد

۱۵- ۵/۹ N با زاویهٔ °۱۳ بانیروی ۳ N

تمرین ۲۰۱۳ (صفحهٔ ۲۱۱)

۱ - ۱۴/۵ N؛ BC و CD، +۱۲/۲؛ AB و AD، +۸/۴۵

۲ - ۹۰ gN؛ ۶۴gN بازاویهٔ ′۳۶°۱۰۰ با DB.

۴ - AB، $-w$؛ BC، $-w$؛ CD، $-$۰/۶۲ w؛ DE، $-$۰/۳۸w؛ EA، $-$۰/۶۲ w؛ BE، +۰/۶w؛ BD، +۰/۶۲w.

۵ - ۲/۱۹ gN؛ ۴/۸ gN.

۶ - P = ۲۵ gN؛ AB، +۴۳/۳؛ AC، $-$۵۰؛ BC، +۸۶/۵.

۷ - AB و DC، $-$۰/۳۸؛ AD و BC، $-$۰/۷۶؛ BD، +۰/۶۶.

۸ - AB و AD، +۱۸/۷۵؛ BC و CD، +۲۵؛ AE، $-$۲۲/۵؛ BE و ED، $-$۳۱/۲۵.

۹ - AB، $-$۱۵؛ BC، $-$۹؛ CD، $-$۵/۵؛ AC، +۹/۲۵N،

۱۰- BD، +۱۰؛ BC و AD، $-$۸/۳؛ AB و CD، $-$۵/۵.

۱۱- YD و YC، $-$۱/۷۳؛ AD و BC، $-$۱/۵؛ XD و XC، +۰/۸۶؛

XA ؛ XB ، −۱/۱۵ ؛ AB ، −۰/۸۶.

۱۲- هر نیرو = ۱۰؛ AB، BC، CD، DE، +۲۰؛ AC و CE، −۱۱/۵۵؛ AE، +۵/۷۷.

۱۳- ۲۱/۲۱ درهر ریسمان حامل؛ ۱۷/۳۲ در AB و AC؛ ۶/۳۴ در BC.

۱۴- AE، +۳۵۸؛ AD، −۳۲۰؛ EC، +۱۳۴؛ ED، +۲۲۳؛ CD، −۱۵۰؛ CF، +۲۶۸؛ FD، +۵۶؛ FB، +۳۲۴؛ DB، −۱۴۵؛ عکس‌العملها، ۱۶۰ در A، ۲۹۰ در B.

۱۵- عکس‌العملها، ۲۷/۷ در A، ۲۲/۳ در B؛ AC، −۲۸/۳؛ AD، −۷/۷؛ CD، +۲۰؛ AB، −۲۰؛ BD، +۳/۶؛ DE، +۱۷/۳؛ BE، −۱۵؛ BF، −۲۰؛ EF، +۱۷/۳.

۱۶- عکس‌العملها، ۲۷/۵ در A، ۲۲/۵ در B؛ AC، +۵۵؛ AF، −۴۸؛ CD، +۲۵؛ CF، +۳۰؛ DF، −۲۵؛ DE، +۲۵؛ EF، +۲۰؛ EB، +۴۵؛ FB، −۳۹/۰.

۱۷- عکس‌العمل در D = ۲۲/۴؛ در A = ۲۰؛ AB، −۲۰؛ BD، +۱۴؛ BC، ۱۴؛ DC، +۱۰.

۱۸- AB، +۱۱/۵؛ BD، +۳۴/۵؛ DE، +۱۱/۵؛ DF، +۲۳/۰؛ CD، +۱۱/۵؛ EF، −۱۱/۵؛ CE، −۱۱/۵؛ AC، −۲۳؛ CD، −۱۱/۵.

۱۹- OB، −۶۰؛ AB، +۴۲/۳؛ AC؛ +۳۰؛ BD، −۲۰؛ BC، −۱۴/۲؛ CD، +۱۴/۲؛ CE، +۱۰؛ DE، −۱۴/۲. عکس‌العمل در A = ۶۶/۹.

۲۰- AF، −۴۰؛ AB، −۲۰؛ BC، +۲۰؛ BF، +۲۸/۳؛ FE، −۲۰؛ CE، +۱۴/۱؛ CD، +۱۰؛ ED، −۱۴/۱؛ CF، −۲۰.

۲۱- عکس‌العمل در A = ۱۲۶؛ AC، +۵۶/۵؛ BC، −۱۲۰؛ AD، +۸۰؛ CD، −۵۶/۵؛ CE، −۴۰؛ DE، +۲۸/۲؛ DF، +۲۰؛ EF، −۲۸/۲.

۲۲- AB، −۰/۵*W*؛ AC، +۱/۱۲*W*؛ BC، +*W*؛ EB، −۱/۱۲*W*؛ CD، +۳/۳*W*؛ EC، −۱/۴*W*.

۲۳- TB، ۱/۰۳؛ TC، ۱/۱۰؛ TD، ۱/۲۵؛ TE، ۱/۴.

۲۴- AC، −۴/۶۲؛ BC، +۲/۳؛ BD، +۵/۶۳؛ CD، −۴.

۲۵- AB، +۱۸؛ BF، +۱۸؛ BG، −۱۱/۳؛ FG، −۱۸؛ CG، +۱۵.

۲۶- AF و BG صفر؛ AD، +۰/۶۶؛ DF، −۰/۹۴؛ DE، +۰/۶۶؛ FE، −۰/۳۷؛ ED، +۰/۳۷؛ FG، −۰/۵؛ EC، +۰/۳۴؛ CG، −۰/۴۷؛ BC، +۰/۳۴.

۲۷- عکس‌العمل، ۰/۶ در A، ۰/۷۲ در B؛

AD ، −۱/۱ ؛ AC ، +۱/۳۲ ؛
DE، −۱ ؛ CD، −۰/۲۰ ؛ EC،
BC ، −۰/۲۰ ؛ EB ، +۰/۵ ؛
−۱/۱.

۲۸- CE، −۲ ؛ EF، صفر؛ AD، +۱۴ ؛
DC، +۱۰ ؛ AE، −۱۲/۱ ؛ DE،
+۴ ؛ EB، −۸/۷ ؛ CF، +۱۰ ؛
BF، +۱۰.

۲۹- ۳۳°، +۲/۶.

۳۰- AC، +۴/۱۸ ؛ AE، +۱۴/۲۶ ؛
ED، +۱۵/۷ ؛ CD، −۱۱/۸۳ ؛
BC، −۱۶/۰۱ ؛ CE، −۳/۵۳.

تمرین ۱.۱۴ (صفحهٔ ۲۳۳)

۱ - $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{3}{2}\right)$

۳ - $\frac{2}{5}$ وزن نردبان.

۱۱- $3\frac{1}{3}g\mathrm{N}$.

۱۲- صفر ، $\frac{1}{6}W$. اصطکاک هم بردیوار و هم برزمین به‌حالت حد است.

۱۳- $\frac{\sqrt{3}}{6}W$ ؛ $50g\mathrm{N}$.

۱۵- سیزدهمین پله.

تمرین ۲.۱۴ (صفحهٔ ۲۳۹)

۲ - $2\,\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{1}{16}\right)$.

۴ - $\frac{a}{2h}<\mu$

۹ - (الف) بالغزش؛ (ب) بایک برشدن.

۱۱- $\mu<\frac{1}{2}\,\frac{w}{W}$ ؛ $\sqrt{2}\,\frac{a}{b}$.

۱۲- $\frac{2}{3}$ ، $7\frac{a}{2}$.

تمرین ۳.۱۴ (صفحهٔ ۲۴۳)

۱ - $\frac{30}{59}$ ؛ میلهٔ بلندتر می‌لغزد.

۲ - $\frac{1}{2}$.

۴ - در A، $\frac{W(3+\cos 2\alpha)}{4\cos\alpha}$
در C، $\frac{W(3\cos 2\alpha+1)}{4\cos\alpha}$

در A، $5\frac{\sqrt{3}}{7}$.

تمرین ۴۰۱۴ (صفحهٔ ۲۴۷)

۱ - $\dfrac{\mu}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$

۲ - $P=W\sqrt{\mu^{۲}-n^{۲}}$ ، $\mathrm{Arc}\ tg\dfrac{n}{\sqrt{\mu^{۲}-n^{۲}}}$.

۶ - $\dfrac{W_۱}{W}=\dfrac{\mu}{\cot g ۲\theta-\mu}$

۷ - $\dfrac{۱}{۷}$.

۸ - $\dfrac{m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(M+m)(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)}$

۱۷- $P=\dfrac{W}{\sqrt{۲}-۱}$ ؛ نه.

۱۸- $\mu=\dfrac{۱}{۳\mu'+۴}$.

تمرین ۱۰۱۵ (صفحهٔ ۲۶۲)

۱ - ۳۲/۸۷۵ gN.

۲ - ۹/۵ gN.

۴ - ۲۵ gN، ۲۵ gN، ۵۰ gN، ۱۰۰ gN، ۲۰۰ gN. اختلاف برابر نیروی محرك است، ۲۵ gN.

تمرین ۲۰۱۵ (صفحهٔ ۲۷۱)

۱ - ۱۰ gN.

۲ - ۷/۵ gN.

۳ - ۵۰ gN.

۴ - ۵۰ ؛ $۱۶\frac{۲}{۳}$ gN.

تمرین ۳۰۱۵ (صفحهٔ ۲۷۳)

۱ - چهار نخ؛ ۲ واحد.

۲ - ۳ واحد، ۶.

۳ - ۵ ؛ ۲۴N.

۴ - ۸۵/۴ واحد، ۳۱/۷۴ درصد، ۳۸/۰۹ درصد، ۴۰/۸۲ درصد.

۵ - $W=۱۵P+۱۱w$.

۶ - ۶۷۲N.

۷ - ۷ gN.

۸ - ۱۲۹ gN، ۱۲۹ gN.

۹ - ۵۰/۸ gN.

۱۰- $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{۱}{۲}$.

۱۱- $187/5$ N.

۱۲- $0/68$

۱۳- طرفی که به‌محور 30cm پیچیده‌می‌شود.

۱۴- $\frac{9}{8}W$.

۱۵- $\frac{1}{11}$.

۱۶- $0/23$.

۱۷- 4000πN.

۱۸- $1/88$cm.

۱۹- $0/10$.

۲۰- $\frac{Wb}{4a}$ ؛ $\frac{b}{4an}$.

۲۱- 40 gN ، 196 gN.

۲۲- $Pc=\frac{1}{2}W(a-b)$ ؛ 864N.

تمرین ۱۰۱۶ (صفحهٔ ۲۸۳)

۱ - $3/1$cm.

۲ - $2/5$m.

۳ - $2/828$cm از BC ؛ $\frac{1}{3}$cm از AD.

۴ - $5/6$cm ؛ 4cm.

۵ - $\frac{\sqrt{171}}{2}$cm.

۶ - تقریباً $21/9$ cm.

۷ - $2\frac{2}{3}$m.

۹ - نصف طول یك ضلع برخطی‌که جرمهای ۱۵ kg و ۳ kg را به‌هم‌متصل‌می‌کند.

۱۰- ۴ cm، به‌طرف‌جرم ۵ kg برخطی که این جرم‌را به‌جرم ۲ kg متصل‌می‌کند.

۱۱- $3/15$ cm.

۱۲- $8/4$ m ؛ 3m.

تمرین ۲۰۱۶ (صفحهٔ ۲۹۳)

۱ - $9\frac{1}{3}$cm.

۲ - $\frac{6}{35}$cm برروی قطری که از سوراخ می‌گذرد.

۳ - $\frac{3\sqrt{2}}{17}$cm از مرکز برروی قطری که خط واصل میان مرکزهای سوراخها را نصف می‌کند.

۴ - $6\frac{2}{3}$ cm ، $3\frac{1}{9}$ cm.

۵ - $5\frac{2}{7}$cm ، $6\frac{2}{7}$ cm.

۷ - برروی AC در ۶/۰۷ cm از A.

۹ - $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{۱۶}{۳۳}\right)$.

۱۱- $\frac{۱۶}{۴۵}$ طول میانهٔ آن.

۱۲- ۴۶/۴ cm.

۱۳- ۱۵/۰۵ cm، ۱۵/۰۷ cm.

۱۵- ۷۲ cm.

۱۸- $۵۵\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}$ cm.

۲۰- ۲/۰ cm.

۲۱- ۳/۱۲ m.

۲۲- درهرحالت برروی خطی که رأس را به مرکزثقل قاعده متصل می‌کند و در $\frac{۱}{۴}$ طول این خط از بالا.

۲۴- $۲۶\frac{\sqrt{۲}}{۹}$ cm برروی میانهٔ ضلع ۸ cm از بالا.

۲۸- ۱۳ به ۵۴.

۳۱- $\mathrm{Arc}\,tg\left[\frac{۳}{۱۰}(۵+\sqrt{۵})\right]$.

۳۳- اگر لبه‌های خارجی را به عنوان محور بپذیریم درنقطه‌ای به‌مختصات (۲،۳).

۳۴- $\frac{۱۸۵}{۳۷۶}$ یک لبه.

۳۵- $\frac{۱۱}{۵۶}\sqrt{\frac{۲}{۳}}a$ از قاعده.

۳۶- $\frac{۱}{۳}b\frac{۳a+c}{۲a+c}$ ؛ $\frac{۳a^۲+۳ac+c^۲}{۳(۲a+c)}$

۳۷- در ۳/۱۵ m از سرآزاد الوار اولی، و درسطح بالایی الوار دوم.

۳۸- $۰/۵۲a$ از بالا.

۳۹- در فاصلهٔ $\frac{۲mca^۲}{Mb^۲}$ از محور.

$\frac{m}{M} \ngtr \frac{b^۲(a-b)}{۲a^۲c}$.

تمرین ۳.۱۶ (صفحهٔ ۳۰۰)

۳ - $\frac{(a^۲+ab+b^۲)\sqrt{[۴c^۲-(b-a)^۲]}}{۶c(a+b)}$

از DA؛

$\frac{۴ac^۲+۲bc^۲-a^۳+b^۳}{۶c(a+b)}$ ازمحوردیگر.

۴ - ۰/۵۰، ۲/۶۹.

۶ - $\frac{۵}{۳}$cm از هرقطر.

تمرین ۴.۱۶ (صفحهٔ ۳۰۹)

۲ - ۲۴ cm از C.

۳ - $\frac{(a^۲+ab+b^۲)\sqrt{[۴c^۲-(b-a)^۲]}}{۶c(a+b)}$

از DA؛

$\frac{۴ac^۲+۲bc^۲-a^۳+b^۳}{۶c(a+b)}$ ازمحوردیگر

۵ - $\frac{۱}{۲}(۳-\sqrt{۵})$.

۶ - $\frac{a^۲+ax+x^۲}{۳(a+x)}$ و $\frac{a(۲a+x)}{۳(a+x)}$، که در آن $x=$ AE است و AE کمتر از $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}-۱)a$ نیست.

۷ - با BC یا DE درتماس باصفحه؛ با BD یا EC درتماس باآن اگر DE بالای BC باشد.

۱۰- بلی.

۱۱- کمتر از ۳ به ۱ نباشد.

۱۲- ۱/۵۹.

۱۳- $\frac{c}{۲}(n-۱)$ از مرکز پایینترین مکعب و درارتفاع قائم $\frac{na}{۲}$.

۱۴ - $r\sqrt{۳}$.

۱۵- ۵۳/۹ cm؛ ۲۹°.

تمرین ۵.۱۶ (صفحهٔ ۳۲۱)

۲ - $\sqrt{۲}$ به ۱.

۷ - $\frac{۳a}{۲\pi}$ از مرکز در امتداد شعاع میانی، a شعاع قرص است.

۹ - $\frac{۱۳}{۱۴}r$.

۱۰- $\mathrm{Arc}\,\sin\left(\frac{۳}{۴}\pi\sin\theta\right)$.

۱۱- در $\frac{a}{۲\pi-۳\sqrt{۳}}$ از مرکز.

۱۲- $\frac{۱}{۲}W\,tg\alpha$.

۱۳- ۷۴۹ kg، ۶/۷m از پایین تیر.

۱۴- $(\pi^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}}$.

۱۶- $\mathrm{Arc}\,\sin\left(\frac{۱}{۳}\right)$

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

(صفحهٔ ۳۲۳)

۱ - $\frac{۱}{۴}\sqrt{۳}$.

۴ - μW

۵ - $\frac{W}{۲\mu \sin\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}$ ؛

$\frac{W}{۲\mu \sin\alpha(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)}$

۷ - $\frac{(W-w)(۱-\mu)}{\sqrt{۲}\mu}$ ؛ $\frac{(W-w)(۱+\mu)}{\sqrt{۲}\mu}$

۸ - AB ، فشار = ۳۵ gN ؛
BC ، فشار = ۸۸ gN ؛
CA ، کشش = ۱۷۳ gN ؛
CD ، فشار = ۱۳۵ gN ؛
نیرو در A = ۱۵۳٫ gN ؛
در °۶۰ نسبت به AD.

۹- (A)$\sqrt{۳}$ ، (B)$\sqrt{۷}$ ؛ AD (کشش)$۲\sqrt{۳}$ ؛ CD (فشار)۴ ، AC (فشار)۲ ، BC (فشار) $۲\sqrt{۳}$ ، AB (کشش)۱.

۱۰- AB ، CD، فشار = $۱۰\sqrt{۳}$ ؛
BC ، DA ، کشش = $۲۰\sqrt{۳}$ ؛
AC ، فشار = ۴۰.

۱۱- کشش در نخ = $\frac{w}{\sqrt{۳}}$ ؛
OA ، ستون = $\frac{۲w}{\sqrt{۳}}$ ؛
OB، فشار = $\frac{۱}{۲}w$ ؛
OC ، ستون = $\frac{w}{۲\sqrt{۳}}$ ؛
OD ، ستون = $\frac{۱}{۲}w$ ؛
OE ، فشار = $\frac{۲w}{\sqrt{۳}}$.

۱۲- نیروهای کششی در میله‌ها = $\frac{W}{\sqrt{۳}}$ ، $W\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$ ، $W(\sqrt{۳}+۱)$
فشار = $\frac{W(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})}{۲}$ ، BC، CD درفشار.

۱۳- AD ، AE فشار = $\frac{P}{\sqrt{۲}}$ ؛ BD، BE، فشار = $\frac{۳P}{\sqrt{۲}}$ ؛ CD، CE نیروی فشاری $P\sqrt{۵}$ ؛ CB، نیروی فشاری $۲P$.

۱۴- ۱۶°۶′ ؛ BC (فشاری) ۸/۳ gN ، CA (کششی) ۱۱/۱ gN، AB (کششی) ۳۳/۳ gN.

۱۵- DC : ۱۰، DE : ۱۰، EC : ۸/۷، EF : ۱۵ ، CB : ۱۵ ، EB : ۰ ، BA : ۳۰، FA : ۳۰، FB : ۲۶/۰، برحسب gN.

۱۶- ۶ ، ۸ ، $۲\sqrt{۳}$ کششی، $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ فشار،

$\frac{۷}{\sqrt{۳}}$ فشار.

۱۷- $۲\,\mathrm{Arc}\,sin\left(\frac{۱}{۳}\right)$.

۱۸- بر AC ، به فاصله $\frac{\pi ab^{۲}\sqrt{۲}}{۲(۴a^{۲}-۳\pi b^{۲})}$ از O.

۱۹- $\left(\frac{۷}{۴}\,,\,\frac{۱۹}{۴}\right)$ ، $\left(\frac{۴۷}{۲۸}\,,\,\frac{۱۵۳}{۲۸}\right)$

۲۰- $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{۴}{۳\pi}\right)$.

۲۴- $\frac{a^{۲}+ab+b^{۲}}{۳a+۳b}$.

۲۷- $\mathrm{Arc}\,tg\frac{۲۴}{۱۳}$.

۳۲- ۱۵/۹N.

۳۴- ۴ ؛ ۳/۴۵ ؛ ۰/۸۶ ؛ $\frac{[W+(۲^{n}-۱)w]}{۲^{n}}$.

۳۵- $\frac{۱}{۴}(W+w)$ ؛ $\frac{۴W}{۵(W+w)}$.

۳۶- ۶۸N ؛ $\frac{۴۹}{۵۴\pi}$ ، $\frac{۴۹}{۵۱\pi}$ ، $\frac{۴۹}{۵۰\pi}$.

تمرین ۱۰۱۷ (صفحهٔ ۳۵۴)

۱ - ۲۰ واحد در ۶۰° نسبت به AB.

۲ - $AB^{۲}=(a_{۱}-a_{۲})^{۲}+(b_{۱}-b_{۲})^{۲}$.

۳ - (الف) $۳\vec{i}+۴\vec{j}$ ، $-۵\vec{i}+۲۵\vec{j}$ ، $۲۲\vec{i}-۴۰\vec{j}$.

(ب) ۷ ، ۱۶− ، (پ) $\frac{۲\vec{i}+۳\vec{j}}{\sqrt{۱۳}}$ ، $\frac{۳\vec{i}-۴\vec{j}}{۵}$ ، $\frac{-۲\vec{i}+۵\vec{j}}{\sqrt{۲۹}}$.

۴ - $۴\vec{i}+۳\vec{j}$.

۱۴- $\mathrm{Arc}\,tg\,(۷)$ ، $-\frac{۴}{۷}$.

۱۵- $\vec{r}=(۱+m)\vec{a}+(۱-m)\vec{b}$.

۱۶- ۲ به ۱.

۲۱- $\vec{r}=(۱+۳m)\vec{i}+(۲-۳m)\vec{j}+(۳+۲m)\vec{k}$ ؛ $\left(-۳\frac{۱}{۲}\,,\,۶\frac{۱}{۲}\right)$.

۲۳- (الف) $(۲-۴m)\vec{i}+(m-۱)\vec{j}+(۳+۲m)\vec{k}$

(ب) $(۲m_{۱}+۳m_{۲})\vec{i}+(۲m_{۲}-m_{۱})\vec{j}+(۳m_{۱}-۴m_{۲})\vec{k}$

۲۶- $\frac{۲\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k}}{\sqrt{۱۴}}$ ، $a=b=c$.

۲۷- $\frac{۱}{۲}(b^۲c^۲+c^۲a^۲+a^۲b^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ ؛ $bc : ca : ab$.

۲۸- $۵۵^\circ ۴۵'$ ، $۰/۲۷a^۲$.

۲۹- $۴\sqrt{۲}$ ، $۴\sqrt{۲}$ ، $۲\sqrt{۵}$ cm ، $۴۱^\circ ۲۹'$.

۳۰- ۲ ، $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$ cm ، $۲۵^\circ ۳۸'$.

فهرست موضوعی