اسلایدهای آموزشی

مبانی مهندسی برق

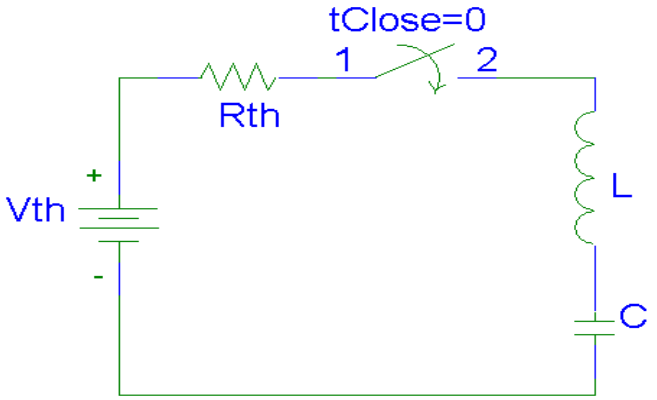
دکتر مهران حاجی آقاپور

استادیار دانشکده مهندسی برق
دانشگاه شهید بهشتی

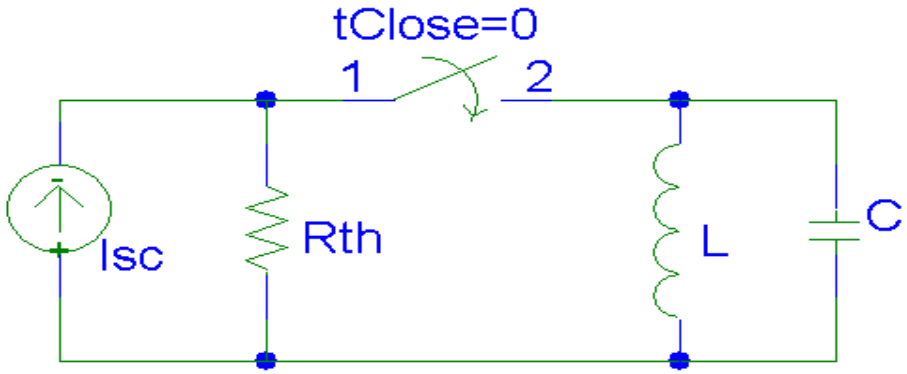
مدارهای مرتبه دوم

مدار مرتبه دوم چیست؟

مدارهایی که دارای تعدادی مقاومت و منبع، یک خازن و یک سلف می‌باشند. این مدارها بر دو نوع هستند، مدار ***RLC*** سری و مدار ***RLC*** موازی.

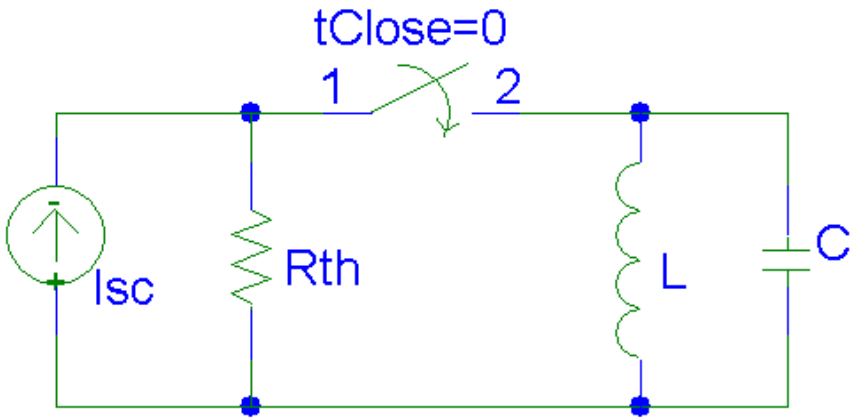


سری



موازی

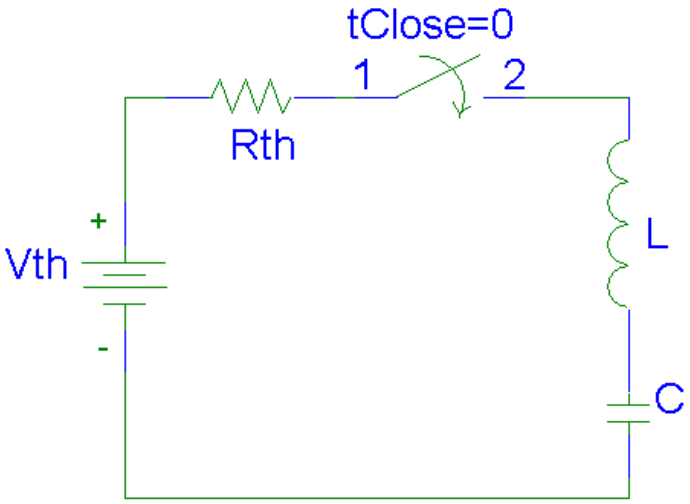
مدار RLC موازی



$$-I_{SC}+\frac{V_C}{R_{TH}}+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}V_C(x)dx+C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\frac{d^2V_C}{dt^2}+\frac{1}{R_{TH}C}\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{LC}V_C=\frac{1}{C}\frac{dI_{SC}}{dt}$$

مدار *RLC* سری



$$-V_{TH} + i_L R_{TH} + L\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L(x)dx = 0$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_{TH}}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{L}\frac{dV_{TH}}{dt}$$

فرم کلی معادلات

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+cx(t)=f(t)$$

	سری	موازی
a	1	1
b	R_{th}/L	$1/(R_{th}C)$
c	1/(LC)	1/(LC)

فرم کلی جواب

فرم کلی جواب مدارهای مرتبه دوم بصورت زیر است:

مقدار نهایی + پاسخ طبیعی=پاسخ مدار

که مقدار نهایی در واقع پاسخ مدار است وقتی که مدار به حالت پایدار خود رسیده باشد یا بعبارت دیگر با فرض مدارباز بودن خازنها و اتصال کوتاه بودن سلفها، پاسخ مدار محاسبه می‌شود.

پاسخ طبیعی

برای بدست آوردن پاسخ طبیعی معادلهٔ دیفرانسیلی را حل می‌کنیم:

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+cx(t)=f(t)$$

$$ap^2Ae^{pt}+bpAe^{pt}+cAe^{pt}=0$$

$$\left(ap^2+bp+c\right)Ae^{pt}=0$$

$$ap^2+bp+c=0$$

پاسخ طبیعی

با حل معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌های معادله بدست می‌آید:

$$p_1, p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بسته به مقادیر ریشه‌ها سه حالت ممکن است اتفاق افتد که فوق میرا، میرای بحرانی و زیر میرا نامیده می‌شوند.

حالت فوق میرا

اگر $b^2 > 4ac$ باشد مقادیر p_1 و p_2 حقیقی هستند و جواب معادلهٔ دیفرانسیلی (پاسخ گذرا) بصورت زیراست:

$$x_{trans}(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t}$$

که مقادیر p_1 و p_2 معلوم هستند ولی مقادیر A_1 و A_2 باید معلوم شوند.

حالت میرای بحرانی

این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که $b^2 = 4ac$ باشد. با توجه به آنچه از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم فرم جواب بصورت زیر است:

$$x_{trans}(t) = A_1 e^{-pt} + A_2 t e^{-pt}$$

که مشابه حالت قبل مقادیر p_1 و p_2 معلوم هستند ولی مقادیر A_1 و A_2 باید معلوم شوند.

حالت زیر میرا

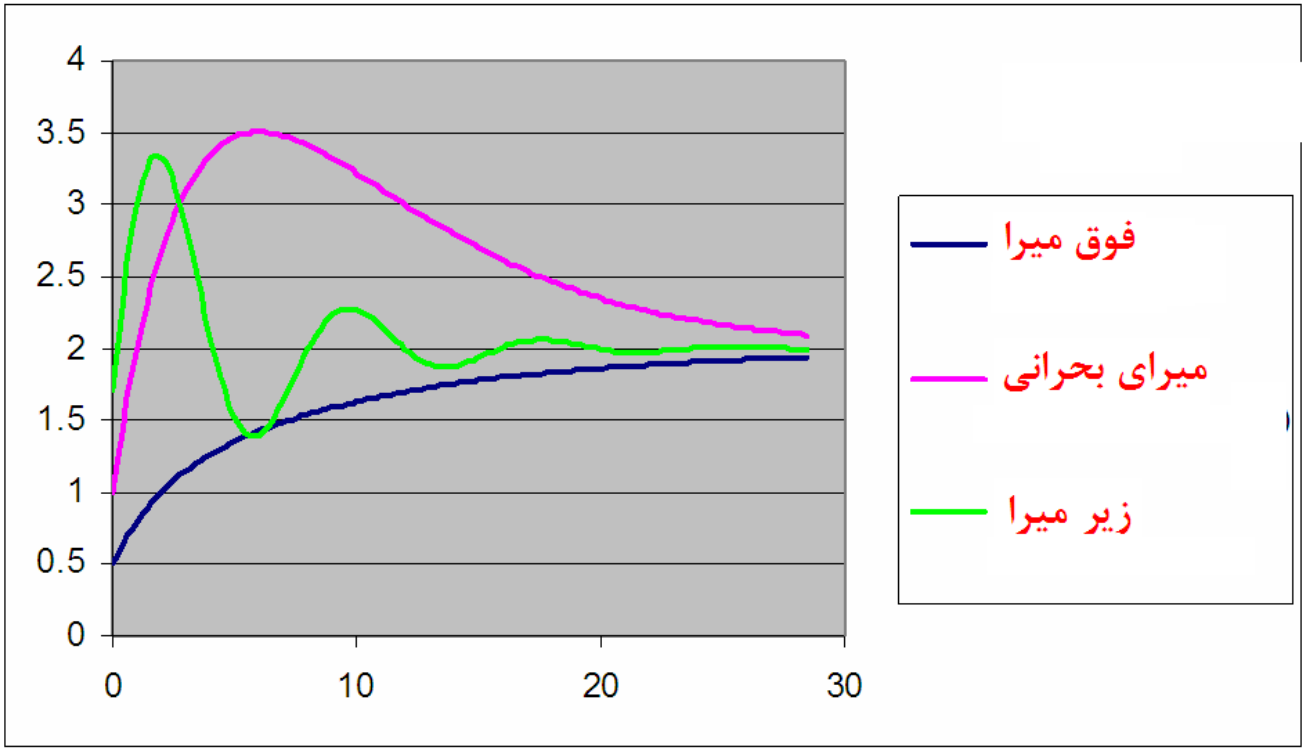
این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که $b^2 < 4ac$ باشد. با توجه به آنچه از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم فرم جواب بصورت زیر است:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$x_{trans}(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\beta t + \phi)$$

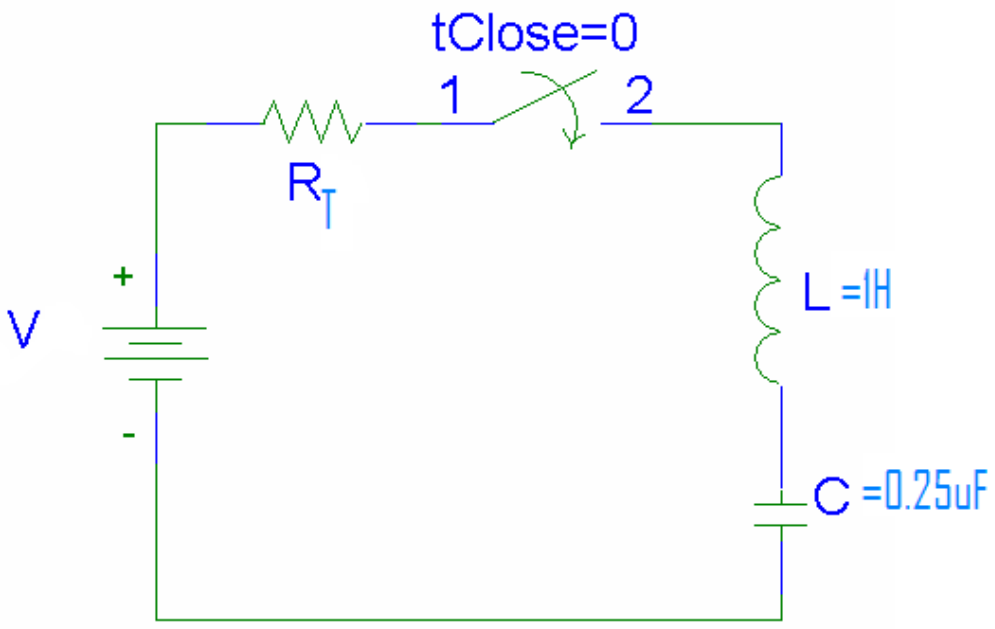
که مشابه حالت قبل مقادیر p_1 و p_2 معلوم هستند ولی مقادیر C و ϕ باید معلوم شوند.

حالت های مختلف



مثال از RLC سری

در یک مدار RLC سری مقدار $C=0.25^{uF}$ و $L=1^{H}$ می‌باشند. برای مقادیر مختلف مقاومت $R_T=8.5k\Omega$ و 4k و 1k مشخص کنید که مدار زیرمیرا، فوق میرا یا میرای بحرانی است.



حل

تعریف: معادله زیر که از حل آن مقادیر فرکانس های طبیعی بدست می‌آید را معادله مشخصه می‌نامند:

$$ap^2 + bp + c = 0$$

$$p_1, p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

برای مشخص کردن اینکه مدار در کدام یک از حالات زیرمیرا، فوق میرا یا میرای بحرانی است، باید معادله مشخصه را نوشته و حل کرد.

$R=8.5K\Omega$

در حالت سری **a=1** و **b=R/L** و **c=1/LC** می باشند. بنابراین:

$$ap^2+bp+c=0$$

$$p^2+\left(\frac{8.5\times10^3}{1}\right)p+\left(\frac{1}{1\times0.25\times10^{-6}}\right)=0$$

$$p^2+8.5\times10^3\,p+4\times10^6=0$$

$R=8.5K\Omega$

با توجه به اینکه مقدار $b^2-4ac=56.25*10^6$ بزرگتر از صفر می‌باشد، معادله دو جواب حقیقی دارد و مدار در حالت فوق میرا قرار دارد.

$p_1=-8000$

$p_2=-500$

$R=4K\Omega$

دوباره معادله مشخصه تشکیل می‌شود و ریشه‌ها را بدست می‌آوریم:

$a=1$ و $b=R/L$ و $c=1/LC$

$a=1$ و $b=4000$ و $c=4*10^6$

$b^2-4ac=16*10^6-16*10^6=0$

بنابراین مدار در حالت میرای بحرانی قرار دارد. و هر دو ریشه معادله برابر هم و -2000 هستند.

$R=1K\Omega$

معادله مشخصه تشکیل می‌شود و ریشه‌ها را بدست می‌آوریم:

$a=1$ و $b=R/L$ و $c=1/LC$

$a=1,\ b=1000,\ c=4*10^6$

$b^2-4ac=10^6-16*10^6=-15*10^6$

$R=1K\Omega$

در این حالت مدار دارای دو ریشهٔ موهومی است و بنابراین در حالت زیر میرا قرار دارد:

$$p1, p2 = -500 \pm 500\sqrt{15}\,j$$

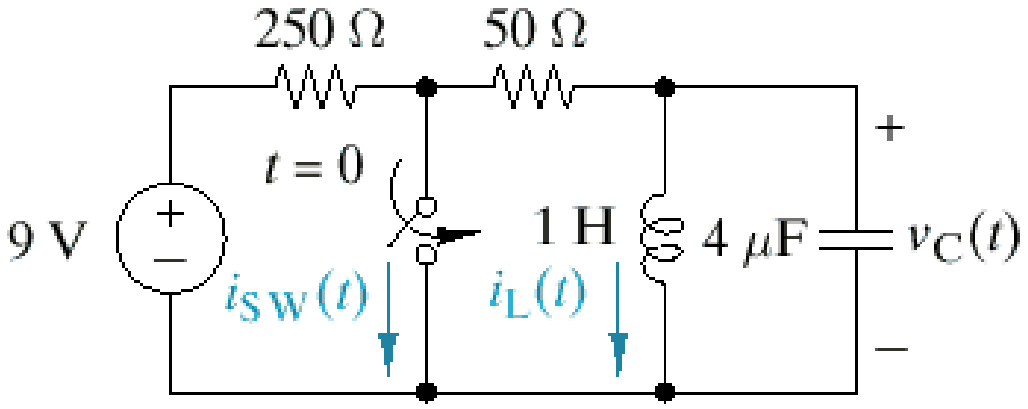
مدار با فرکانس ۱۹۳۶ نوسان می کند:

$$\omega = 500\sqrt{15} = 1936\ rad/\sec$$

مثال از مدار *RLC* موازی

در مدار ***RLC*** زیر ابتدا مقادیر اولیه ولتاژ خازن و جریان سلف را بدست آورید.

سپس رابطهٔ ولتاژ خازن را برای زمانهای بعد از بسته شدن کلید بدست آورید.

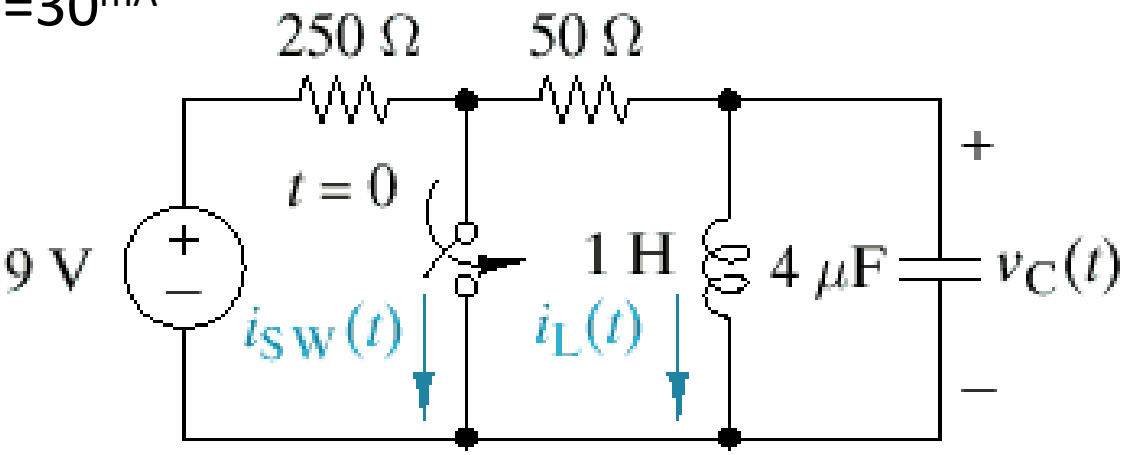


حل

در زمان های قبل از صفر که کلید تغییر وضعیت ندارد، سلف مانند اتصال کوتاه و خازن مدار باز درنظر گرفته می‌شود. بنابراین جریان سلف برابر است با:

$i_L(0^-) = 9/(250+50) = 30^{mA}$

$V_C(0^-) = 0$



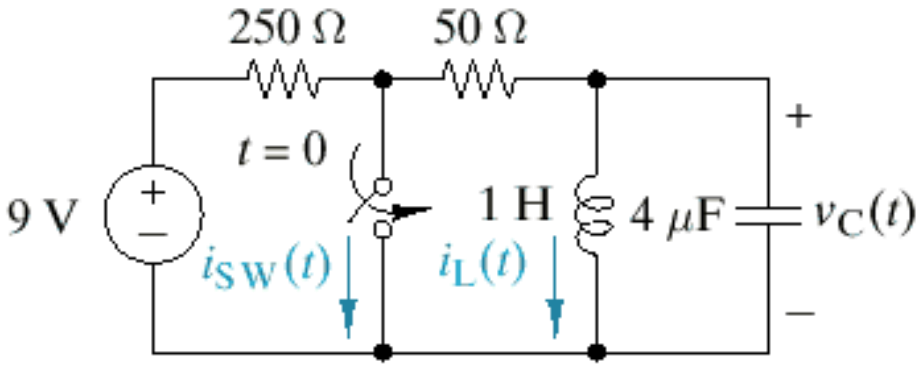
حل

حال با استفاده از روابط گفته شده برای مدارهای ***RLC*** پاسخ مدار را بدست می‌آوریم. برای ***RLC*** موازی **a=1** و **b=1/RC** و **c=1/LC** می‌باشند.

a=1

b=1/(50*4*10^{-6})=5000

c=1 /(4*10^{-6})=25*10^{4}



توجه به این نکته لازم است که بعد از بسته شدن کلید تنها مقاومت ۵۰ اهم در مدار ***RLC*** وجود دارد.

حل

حال معادله مشخصه را نوشته و حل می‌کنیم:

$$ap^2 + bp + c = 0$$

$$p^2 + 5000p + 25\times10^4 = 0$$

$$b^2 - 4ac = (2500 - 4\times25)10^4 = 24\times10^6$$

$$p_1 = -50.51 \ , \ \ p_2 = -4950$$

حل

بنابراین مدار در حالت فوق میرا قرار دارد و پاسخ آن بشکل زیر است:

$$i_L(t) = K_1 e^{-50.51t} + K_2 e^{-4950t}, t \geq 0$$

برای یافتن مقادیر مجهول از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$i_L(0) = I_o = K_1 e^{0} + K_2 e^{0} = 30 \times 10^{-3}, t \geq 0$$

حل

خازن و سلف با هم موازی هستند بنابراین می‌توان از ولتاژ اولیه خازن بعنوان یکی از شروط اولیه استفاده کرد:

$$v_C(0) = L\frac{di_L}{dt}(0) = 0$$

حل

دو رابطهٔ بدست آمده تشکل یک دستگاه دو معادله دو مجهول می‌دهند:

$$K_1 + K_2 = 30 \times 10^{-3}$$

$$-50.51K_1 - 4950K_2 = 0$$

با حل دستگاه مقادیر مجهولات بدست می‌آید و داریم:

$$i_L(t) = 30.3e^{-50.51t} - 0.309e^{-4950t}\ mA, t \geq 0$$

حل

از آنجا که خازن و سلف با هم موازی هستند می‌توان نوشت:

$$v_C(t) = L\frac{di_L}{dt} = -1.53e^{-50.51t} + 1.53e^{-4950t}\ V\ ,t \geq 0$$

حال می‌توان جریان عبوری از سوئیچ را برای زمان های بعد از صفر بدست آورد.

$$i_{SW}(t) = i_{250} + i_{50} = \frac{9}{250} + \frac{v_C(t)}{50}$$

$$= 36 - 30.6e^{-50.51t} + 30.6e^{-4950t}\ mA, t \geq 0$$

پاسخ پله مدار *RLC*

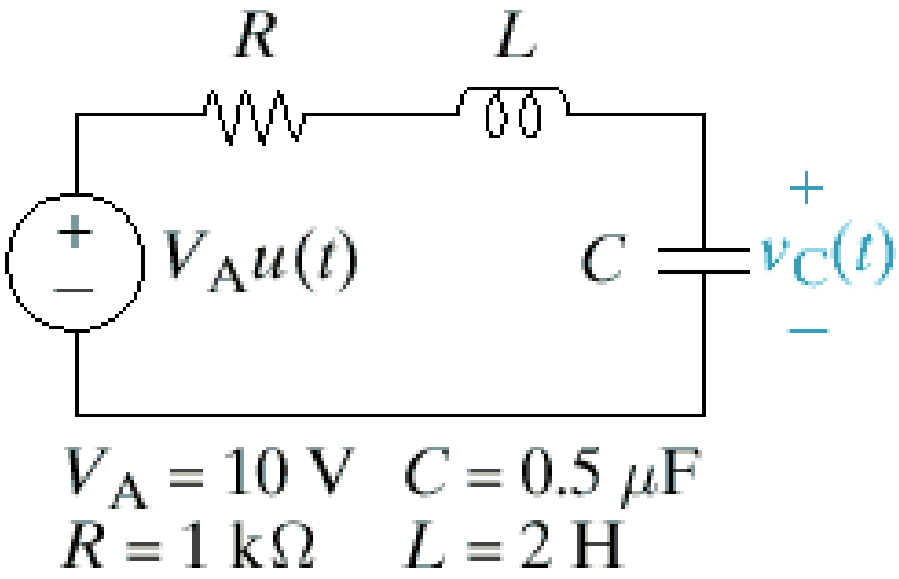
همان گونه که قبلاً گفته شد پاسخ کامل مدار ***RLC*** شامل دو قسمت است:

مقدار نهایی + پاسخ طبیعی= پاسخ مدار

در حالتی که منبعی در مدار وجود دارد وبه آن انرژی می‌دهد، باید مقدار نهایی هم محاسبه شود و در هنگام یافتن ضرایب مجهول پاسخ مدار، از آن ها استفاده شود.

مثال از پاسخ پله مدار *RLC*

در مدار زیر شرایط اولیه صفر است. ولتاژ خازن را برای زمان های بعد از صفر بدست آورید.



حل

مدار ***RLC*** سری است و بنابراین داریم:

$$10^{-6}\frac{d^2v_C}{dt^2}+0.5\times10^{-3}\frac{dv_C}{dt}+v_C=10, t\geq 0$$

از حل معادله فوق پاسخ طبیعی مدار بدست می‌آید:

$$v_n(t)=K_1e^{-250t}\cos 968t+K_2e^{-250t}\sin 968t \quad , \quad t\geq 0$$

با توجه به وجود منبع ولتاژ در مدار باید پاسخ نهایی را نیز به رابطه فوق اضافه کنیم:

حل

$$v_C(t) = 10 + K_1 e^{-250t} \cos 968t + K_2 e^{-250t} \sin 968t, t \geq 0$$

حال با استفاده از شرایط اولیه مقادیر مجهولات را در ربطهٔ فوق بدست می‌آوریم:

$$v_C(0) = 10 + K_1 = 0$$

$$\frac{dv_C}{dt}(0) = -250K_1 + 968K_2 = 0$$

حل

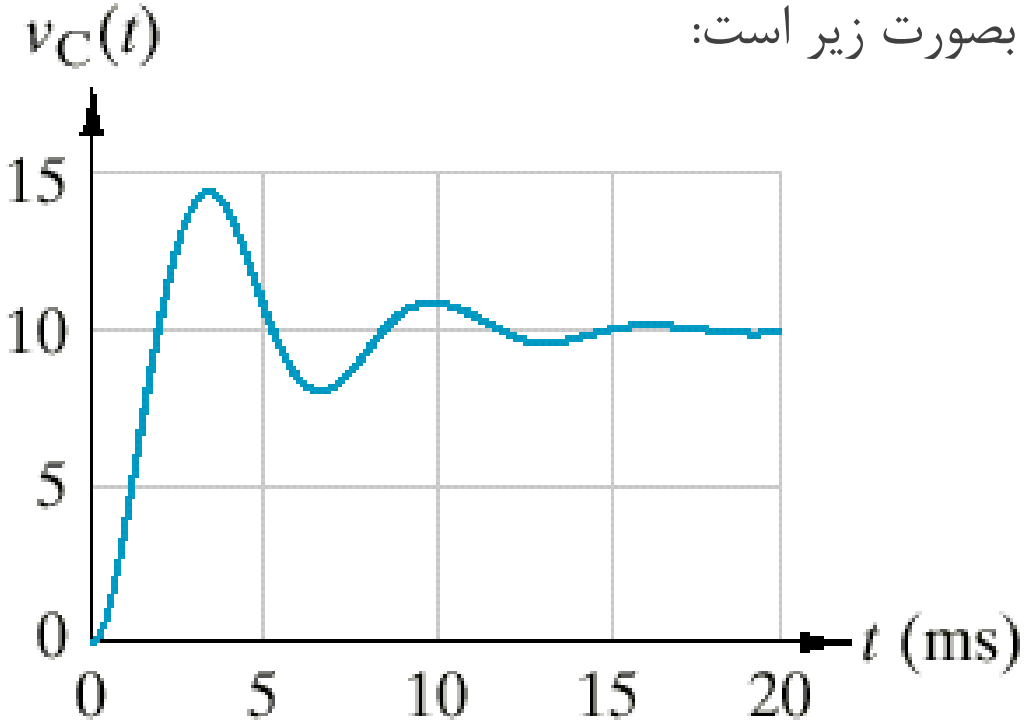
از حل دستگاه فوق مقادیر k_1 و k_2 بصورت زیر بدست می‌آیند:

K_1=-10 , K_2=-2.58

$$v_C(t) = 10 - 10e^{-250t}\cos 968t - 2.58e^{-250t}\sin 968t, t \geq 0$$

حل

نحوهٔ تغییرات ولتاژ خازن بصورت زیر است:



خلاصه حل مدار *RLC*

- با توجه به سری یا موازی بودن مدار ***RLC*** چندجمله‌ای مشخصه را تشکیل دهید.
- با استفاده از روش های حل معادلات دیفرانسیل یا روش لاپلاس، جواب معادله مشخصه را بدست آورید.
- مقدار نهایی پاسخ را با فرض مدار باز بودن خازن و اتصال کوتاه بودن سلف بدست آورده به معادله اضافه کنید.
- با استفاده از شرایط اولیه، مجهولات موجود در پاسخ را بدست آورید.