نیکلای یوری سوویچ واسیلیف

آندره آلکساندروویچ یه‌گوروف

مسأله‌های المپیادهای ریاضی

در شوروی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نشر توسعه

انتشارات فردوس : خیابان دانشگاه - کوچهٔ میترا - شماره ۷ تلفن : ٦۴٦۹۹٦۵

مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی

نیکلای یوری سوویچ و اسیلی‌یف - آندره الکساندرویچ یه‌گوروف

ترجمه پرویز شهریاری

چاپ سوم : ۱۳۷۵ - ۲۲۰۰ نسخه

چاپ و صحافی : چاپخانهٔ رامین

شابک : ۹٦۴-۵۵۰۹-۲۳-۲

پیش‌گفتار

بسیار پیش آمده است که علاقه‌مندی به‌ریاضیات، ضمن برخورد با مسأله‌های جالب آغاز شده است. از این گونه مسأله‌ها، در کتاب‌های درسی، نشریه‌های ریاضی، کتاب‌های جنب درسی و کتاب‌های مربوط به‌معماها و سرگرمی‌های ریاضی هم وجود دارد. ولی، المپیادهای ریاضی (از المپیادهای مدرسه‌ای و ناحیه‌ای گرفته تا المپیادهای جهانی)، سرچشمه‌ای غنی از مسأله‌های پرکشش و جالب بوده است.

دراین کتاب، مجموعهٔ کامل مسأله‌های دور نهائی المپیادهای ریاضی سراسری روسیه و اتحاد شوروی سابق ، از آغاز سال‌های ٦۰ آمده است. مسأله‌ها را از آغاز تا پایان با شمارهٔ ردیف آورده‌ایم. ولی در آغاز هرالمپیاد، مسأله‌های مربوط به‌کلاس‌های مختلف را (کلاس‌های هشتم، نهم و دهم) مشخص کرده‌ایم *.

مسأله‌های المپیادهای ۱۹٦۱ تا ۱۹۷۹ را به‌طور کامل حل کرده‌ایم و برای مسأله‌های المپیادهای سال‌های بعد راهنمائی‌های کوتاهی داده‌ایم.

---

*) دراتحاد شوروی سابق (و روسیه کنونی) دورهٔ دبیرستان در سال دهم تحصیل تمام می‌شود و، بنابراین، کلاس‌های هشتم، نهم و دهم، به‌معنای سه سال آخر دبیرستان است.

مسأله‌های نخستین المپیادهای سال‌های ۶۰ (که المپیادهای سراسری روسیه نامیده می‌شدند)، به‌طور نسبی ساده‌اند، با وجود این، در بین آن‌ها هم، به مسأله‌هایی برمی‌خوریم که جنبهٔ معمائی دارند و پیداکردن کلید حل آن‌ها، چندان ساده نیست. دشوارترین مسأله‌ها را، با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم.

مسأله‌ها، از نظر مضمون ریاضی‌خود، بسیار متنوع‌اند. تقریباً در بین مسأله‌های هر المپیاد، با مسأله‌هایی که از لحاظ تنظیم خود، عادی و سنتی هستند روبه‌رو می‌شویم: مسأله‌های مربوط به‌دایره‌ها، مثلث‌ها، سه‌جمله‌ای‌های درجه دوم، معادله‌ها و نامعادله‌ها. البته، این‌ها تمرین‌های ساده‌ای نیستند‌که تنها برای‌آزمایش میزان آگاهی‌ها وکاربرد روش‌های عادی دبیرستانی‌طرح شده‌باشند، بلکه اغلب برای حل‌آن‌ها، باید قضیه یاقضیه‌هایی را ثابت‌کرد؛ همچنین، مسأله‌های مربوط به مکان‌های هندسی (جست و جوی مجموعه‌ها) و می‌نیمم‌ها یا ماکزیمم‌ها، نیاز به بررسی جدی دارند.

با این‌همه، اهمیت بیشتررا باید به مساله‌هایی دادکه از صورت‌های عادی و سنتی‌دورند. دراین موردها، برای پیداکردن جواب ویا اثبات، تنها آگاهی‌های دبیرستانی کفایت نمی‌کند، بلکه درکنار آن‌ها، به اندیشه‌ای سالم و خلاق، به نیروی منطق و استدلال، نیاز است وباید بتوان شرط‌های نامتعارف را به‌زبان ریاضی مناسبی ترجمه‌کرد. راه حل این‌گونه مسأله‌ها، همیشه زنجیره‌ای ازچندگام طبیعی‌را تشکیل‌نمی‌دهد. اغلب پیش‌می‌آیدکه، باوجود تجزیه و تحلیل دقیق شرط‌های مسأله، نمی‌توان به اندیشه‌ای رسید که، به‌طور مستقیم، ما را به‌سمت راه‌حل هدایت‌کند، اگرچه راه‌حل حاضر وآمادهٔ‌آن، ازچند سطر تجاوز نمی‌کند (و این، یکی از نشانه‌هایی است‌که آن‌ها را، ازمساله‌های عادی متمایزمی‌کند). اغلب، مسیر راه‌حل، به‌صورتی نامنتظر، شهودی، همچون چراغی‌که ناگهان روشن شود، ظاهرمی‌شود. این، همان لحظهٔ «کشف» و بروز «خلاقیت ریاضی» است‌که، برای دانش‌آموز، شادی فراوان به‌همراه دارد.

البته، با اندیشه‌ای‌که در آغاز نامنتظر است، ممکن‌است بعد از آن،

بارها وبارها روبه‌روشویم (مثلاً، بازیافت زیبائی که‌درمساله۷ به‌دست می‌آید ــ چگونه مجموع عددهای جدول تغییرمی‌کند ــ به صورت دیگری درمسأله‌های ۱۵۱، ۱۹۶، ۲۷۱ و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد). و به تدریج، همین اندیشه‌ها و استدلال‌های ظریف ــ که در آغاز دست نیافتنی بودند ــ به‌صورت استدلال‌هایی عادی درمی‌آیند وبه‌عنوان یک‌روش، کارحل‌مسأله‌ها را ساده می‌کنند.

تسلط برروش‌های مشخص استدلال، نه‌تنها برای المپیادها، بلکه برای هر گونه پیشرفت جدی در ریاضیات، اهمیت دارد و، به همین مناسبت، در پایان کتاب، «راهنمای روش‌ها» را آورده‌ایم. در این بخش، به صورتی گذرا، از مفهوم‌ها، قضیه‌ها و روش‌هایی صحبت شده است‌که، به طورسنتی، برای هر شرکت کنندهٔ در المپیادها، دانسته فرض می‌شود. مثلاً در بند۱ از روش استقرای ریاضی، در بند ۲ از بخش پذیری عددهای درست، در بند۵ از چندجمله‌ای‌ها، در بند ۸ از نابرابری بین واسطهٔ حسابی‌و واسطهٔ هندسی گفت و گو شده است. هرجا، در متن‌کتاب، به واژه‌های «بند۱»، «بند ۲»، ... برخورد می‌کنید، به معنای آن است‌که به این بند از «راهنمای روش‌ها» تکیه شده است. روشن است که این «راهنما»، تنها می‌تواند در حل برخی از مسأله‌ها، آن هم اغلب به طورغیرمستقیم، کمک‌کند؛ در بسیاری ازمسأله‌ها، مجموعه‌ای از این «راهنماها» بـه کار می‌آیند و، در واقع، برای حل هر مساله، وجود «راهنمای» جداگانه‌ای ضرورت دارد.

هدف برگزاری هر المپیاد، این است کـه مسأله‌ها و پرسش‌هایی را در برابر دانش‌آمـوزان قـرار دهند، کـه هم از نظر مضمون و هم از نظر روش‌های حل، تازگی داشته باشند. ریاضی دانانی‌که این مساله‌ها را طرح می‌کنند، اغلب بر کتاب‌های کم‌تر شناخته شده ویا مقاله‌های علمی تازه تکیه می‌کنند. (بسیاری از پیش‌قضیه‌های علمی، براندیشه‌ای مقدماتی تکیه دارند و از همین گونه اندیشه‌های مقدماتی است‌که مسأله‌های المپیادها زاده می‌شوند. مثلاً، مساله‌های ۱۸۱، ۲۱۹، ۲۴۸، ۲۶۷ و ...، به همین ترتیب پدید آمده‌اند؛ و مسالهٔ ۱۴۸، کـه برای المپیادها در نظرگرفته شده است،

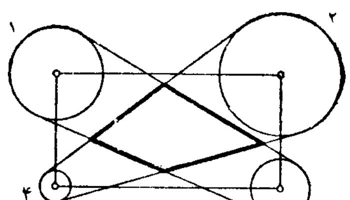
مسأله‌ها

نخستین المپیاد سراسری روسیه
سال ۱۹۶۱ (مسکو)

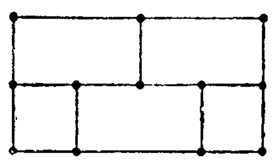
کلاس					
۸:	۱	۲	۳	۴	۵a
۹:	۶a	۷	۸	۹	۱۰
۱۰:	۱۱	۱۲	۷	۶b	۵b

۱. شکلی شامل ۱۶ پاره خط راست داده شده است (شکل۱). ثابت کنید، نمی‌توان خط شکسته‌ای رسم کرد که هرکدام از این پاره خطهای راست را، درست یکبار قطع کند (خط شکسته می‌تواند باز باشد و خودش را قطع کند، ولی رأس‌های آن نباید بر پاره خطهای راست واقع باشند، همچنین، ضلع‌های آن از رأس‌های شکل نباید عبور کنند.)

۲. چهار دایرهٔ ۱، ۲، ۳، ۴ را، به‌ترتیب، به‌مرکز رأس‌های مستطیل



شکل۲


شکل۱

و به‌شعاع r_1، r_2، r_3 و r_4 رسم کرده‌ایم؛ درضمن $r_1+r_3=r_2+r_4<d$ (d، طول قطر مستطیل است؛ شکل ۲). مماس‌هـای مشترك بیرونی‌را برای دودایرهٔ ۱ و ۳ و برای دودایرهٔ ۲ و ۴ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، درچهار-ضلعی که از برخورد این‌مماس‌ها به‌دست می‌آید، می‌توان‌دایره‌ای محاط کرد.

۳. ثابت کنید، بین هر ۳۹ عدد طبیعی متوالی، می‌توان عددی راپیدا کرد که، مجموع رقم‌های آن، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۴. جدولی ۴ × ۴ خانه‌ای داده شده است. ثابت کنید، می‌توان هفت ستاره در خانه‌های جدول طوری قرار دادکه، اگر دوسطر دلخواه ودوستون دلخواه از جدول را حذف کنیم، در خانه‌های باقی‌ماندهٔ جدول، همیشه‌دست کم یك ستاره وجود داشته‌باشد. ثابت کنید، اگر تعداد ستاره‌ها ازهفت‌کمتر باشد، همیشه می‌توان دوسطر و دو ستون جدول را طوری حـذف کرد که همهٔ خانه‌های باقی‌مانده، خالی باشند.

۵. a) چهار عدد مثبت (a، b، c، d) مفروض است. ازآن‌ها، چهار عدد جدید (ab، bc، cd، da) را طبق‌قاعدهٔ زیر می‌سازیم: هرعدد، درعدد بعدی خود، وعدد چهارم در عدد اول ضرب می‌شود. از گروه چهار عددی جدید، بنا برهمین‌قاعده، گروه چهارعددی سومی‌می‌سازیم وغیره. ثابت کنید، دردنبالهٔ این گروه‌های چهارعددی، هرگز دوباره به(a، b، c، d) نمی‌رسیم، مگر وقتی‌که داشته باشیم: $a=b=c=d=1$.

b) انتخاب دلخواهی ازعددهای ۱ و ۱- را، به‌طول 2^k، در نظر می‌گیریم. ازاین‌گروه عددها، گروه تازه‌ای با قاعدهٔ زیر می‌سازیم: هرعدد را درعدد بعدی خود، وآخرین عدد، یعنی‌عدد 2^kام را در عدد اول ضرب می‌کنیم. ازاین‌گروه جدید و طبق همان قاعده، گروه سوم از عددهای ۱ و ۱- را به‌دست می‌آوریم و غیره. ثابت کنید، سرآخر به‌گروهی ازعددها می‌رسیم که تنها شامل واحدها هستند.

۶. a) نقطه‌های A و B به‌طور یکنواخت و باسرعت زاویه‌ای برابر، به ترتیب، روی محیط دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 (در جهت حرکت عقربه‌های‌ساعت) حرکت می‌کنند. ثابت کنید، رأس C ازمثلث متساوی‌الاضلاع

ABC هم، به‌طور یکنواخت، روی محیط دایره‌ای حرکت می‌کند.

b) فاصلهٔ نقطهٔ ثابت P واقع درصفحهٔ مثلث ABC، تا دورأس A و B از این مثلث برابراست با $AP=2$ و $BP=3$. حـداکثر مقدار فاصلهٔ CP چقدر است؟

۷. درخانه‌های جدول $m\times n$، عددهایی نوشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، علامت‌های همهٔ عددهای یك ستون یاهمهٔ عددهای یك سطررا عـوض کنیم. ثابت کنید، با چندبار تکرار این‌عمل، می‌توان جدول را به‌صورتی درآورد که، درآن، مجموع عددهای واقع درهرستون و مجموع عددهای واقع در هرسطر، غیرمنفی باشد.

۸. n نقطه را، به‌کمك پاره خطهای راست غیرمتقاطع، طوری به‌هم وصل کرده‌ایم که، از هرنقطه بتوان، ازطریق این پاره‌خطها، به بقیهٔ نقطه‌ها عبور کرد؛ درضمن دونقطه‌ای پیدا نشودکه با دومسیر به‌هم وصل‌شده باشند. ثابت کنید، تعدادکل پاره خطهای راست، برابر است با $n-1$.

۹. a، b و p، سه‌عدد درست دلخواهند. ثابت کنید، می‌توان دوعدد k و l پیداکرد که نسبت به‌هم اول باشند و $ak+bl$ بر p بخش‌پذیر باشد.

۱۰. کولیا و په‌تیا $2n+1$ گردو را بین‌خودتقسیم می‌کنند($n\geqslant 2$)؛ درضمن، هرکسی می‌خواهد بیشترین مقدار ممکن گردو را به دست آورد. فرض می‌کنیم، سه روش تقسیم (و هرروش درسه مرحله) وجود داشته باشد.

مرحلهٔ اول. په‌تیا همهٔ گردوها را به دوبخش تقسیم می‌کند، به نحوی که، درهربخش، دست‌کم دو گردو باشد.

مرحلهٔ دوم. کولیا هربخش‌را دوباره به دو بخش تازه تقسیم می‌کند، به نحوی‌که درهربخش، دست‌کم یك‌گردو باشد.

(مرحله‌های اول و دوم، برای هرسه روش مشترك‌اند.)

مرحلهٔ سوم. در روش اول، کولیا بزرگترین و کوچکترین بخش را برمی‌دارد؛ در روش دوم، کولیا دوبخش وسط را برمی‌دارد؛ در روش‌سوم، کولیا یا دوبخش بزرگتر وکوچکتر ویا دو بخش‌متوسط را برمی‌دارد، ولی بنابرقرار قبلی، ازآن‌چه انتخاب کرده‌است، یك‌گردو به په‌تیا برمی‌گرداند.

کدام روش تقسیم، برای کولیا مناسب‌تر و کدام روش نامناسب‌تر است؟

۱۱. ثابت کنید، برای هرسه دنبالهٔ نامتناهی عددهای طبیعی

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

می‌توان شماره‌های p و q را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$a_p \geqslant a_q, \; b_p \geqslant b_q, \; c_p \geqslant c_q$$

۱۲. درمستطیلی با ضلع‌های ۲۰ و ۲۵، به‌تعداد ۱۲۰ مربع به‌ضلع واحد انداخته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان درمستطیل دایره‌ای به قطر واحد قرارداد، به نحوی که حتی یکی از مربع‌ها را قطع نکند.

المپیاد دوم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۲ (مسکو)

کلاس					
۸:	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۹:	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۱۷
۱۰:	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶

۱۳. روی امتداد ضلع‌های AB، BC، CD و DA از چهارضلعی محدب $ABCD$، نقطه‌های A'، B'، C' و D' را طوری انتخاب کرده‌ایم، که داشته‌باشیم: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DA}$. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$، پنج برابر مساحت چهارضلعی $ABCD$ است.

۱۴. دایره s و خط راست l در یك صفحه داده شده است و می‌دانیم، خط راست l، از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ s گذشته است. دایرهٔ s' را رسم می‌کنیم که از نقطهٔ O بگذرد و مرکز آن، روی خط راست l باشد. نقطهٔ تماس مماس مشترك دو دایرهٔ s و s' را با دایرهٔ s'، M می‌نامیم. مطلوب

است مکان هندسی نقطهٔ M.

۱۵. عددهای درست ومثبت a_0، a_1، …، a_{99}، a_{100} داده‌شده‌اند. می‌دانیم $a_1 > a_0$، $a_2 = 3a_1 - 2a_0$، $a_3 = 3a_2 - 2a_1$، …، $a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. ثابت کنید، $a_{100} > 2^{99}$.

۱۶. ثابت کنید، عددهای درست a، b، c و d وجود ندارند، به نحوی که به ازای آن‌ها، عبارت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ به ازای $x = 19$ برابر واحد و به ازای $x = 62$ برابر ۲ شود.

۱۷. در هر یك از خانه‌های جدول مربعی $n \times n$، که در آن n عددی فرد است، یکی از عددهای ۱ یا ۱ — را بدلخواه نوشته‌ایم. زیر هر ستون، حاصل‌ضرب همهٔ عددهای این ستون، و درسمت راست هر سطر، حاصل‌ضرب همهٔ عددهای این سطر نوشته شده است. ثابت کنید، مجموع همهٔ این $2n$ حاصل‌ضرب، نمی‌تواند برابر صفر باشد*.

۱۸. دو ضلع از مثلثی داده شده‌اند و می‌دانیم میانه‌های وارد بر این دو ضلع در مثلث، برهم عمودند. مثلث را رسم کنید.

۱۹. a، b، c و d، عددهایی مثبت‌اندکه حاصل ضرب آن‌ها، برابر واحد است. ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 10$$

۲۰. پنج‌ضلعی منتظمی داده شده است. M، نقطهٔ دلخواهی واقع در درون یا روی محیط این پنج‌ضلعی است. فاصله‌های نقطهٔ M را ازضلع‌های پنج‌ضلعی (ویا امتدادآن‌ها)، به‌ترتیب مقدارهای صعودی آن‌ها شماره‌گذاری می‌کنیم:

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4 \leqslant r_5$$

همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، به ازای آن‌ها، r_3 کمترین مقدار ممکن را قبول کند؛ همچنین، همهٔ موضع‌های M را پیدا کنید که، برای آن‌ها، r_3 بیشترین مقدار ممکن باشد.

*) این مساله در کلاس هشتم، برای $n = 25$ داده شده است.

۲۱. عددی با ۱۹۶۲ رقم درنظر گرفته‌ایم که بر ۹ بخش پذیر است. مجموع همهٔ رقم‌های این عدد را با a، مجموع رقم‌های عدد a را با b و مجموع رقم‌های عدد b را با c نشان می‌دهیم. عدد c را پیدا کنید.

۲۲. از نقطهٔ M وسط قاعدهٔ AC در مثلث متساوی الساقین ABC، عمود MH را برضلع BC فرودآورده‌ایم. P را وسط پاره خط راست MH می‌گیریم. ثابت کنید $AH \perp BP$.

۲۳. حداکثر مساحت مثلثی را پیداکنید که برای ضلع‌های آن، a و b و c، داشته باشیم:

$$0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3$$

۲۴. x و y و z، سه عدد درست دلخواه ودوبه‌دو متمایزاز یکدیگرند. ثابت کنید:

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5 \text{ بر } 5(y-z)(z-x)(x-y)$$

بخش‌پذیر است.

۲۵. دربارهٔ عددهای a_0، a_1، ....، a_n می‌دانیم

$$a_0=a_n=0 \text{ و } a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\geqslant 0$$

(برای $k=1, 2, \dots, n-1$). ثابت کنید همهٔ a_kها، غیرمثبت‌اند.

۲۶. عددهای مثبت a_1، a_2، ....، a_n، b_1، b_2، ....، b_m مفروض‌اند و می‌دانیم:

$$a_1+a_2+\dots+a_m=b_1+b_2+\dots+b_n$$

ثابت کنید، درجدول شامل m سطر و nستون، می‌توان حداکثر $m+n-1$ عدد مثبت طوری قرار داد که، درآن، مجموع عددهای سطر iام برابر a_i و مجموع عددهای ستون k ام برابر b_k باشد.

المپیاد سوم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۳ (مسکو).

کلاس					
۸:	۲۷	۲۸	۲۹a	۳۰	۳۱a
۹:	۳۲	۳۳	۳۴	۳۱b	۲۸
۱۰:	۳۵	۳۶	۳۷	۲۹b	۲۸
۱۱:	۳۸	۲۸	۳۹	۴۰	۲۹b

۲۷. از پنج دایرهٔ مفروض، هر چهار دایره، از یك نقطه می‌گذرند. ثابت کنید، نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می‌گذرند.

۲۸. ۸ نفردر یك مسابقهٔ شطرنج شرکت کردند وهمهٔ آن‌ها، امتیازهایی مختلف به دست آوردند. شطرنج‌بازی که مقام دوم را کسب کرده است، به اندازهٔ مجموع امتیازهای چهار مقام آخر، امتیاز آورده است. دو نفری که در مقام‌های سوم و هفتم قرار دارند، چگونه بازی را تمام کرده‌اند، نفرسوم برده است یا نفر هفتم؟

۲۹. a) هرقطر چهارضلعی محدب $ABCD$، مساحت آن را نصف می‌کند. ثابت کنید، $ABCD$ یك متوازی‌الاضلاع است.

b) در شش ضلعی محدب $ABCDEF$ می‌دانیم، هر یك از قطرهای AD، BE و CF، مساحت آن را نصف می‌کند. ثابت کنید، این قطرها، در یك نقطه به‌هم می‌رسند.

۳۰. عددهای طبیعی a و b نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد $a+b$ و a^2+b^2، برابر است با ۱ یا ۲.

۳۱. دو نقطهٔ A و B روی محیط دایره ثابت‌اند و نقطهٔ M تمامی محیط دایره را می‌پیماید. ازنقطهٔ K وسط پاره‌خط راست MB، عمود KP را بر خط راست MA رسم کرده‌ایم.

a) ثابت کنید، همهٔ خطهای راست KP ازیك نقطه می‌گذرند.

b) مجموعهٔ نقطه‌های P (مکان هندسی نقطهٔ P) را پیدا کنید.

۳۲. مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع واحد مفروض است. حداقل

مقدار d را پیدا کنید که، بهازای آن، پاره خط راست بهطول d، درحالی که دو انتهای آن، روی ضلعهای مثلث است، بتواند تمامی سطح مثلث را جارو کند.

۳۳. صفحهٔ شطرنجی ۶×۶ را، با ۱۸ مهره به اندازهٔ ۱×۲ دومینو پوشاندهایم (هر مهره، دوخانه را اشغال کرده است). ثابت کنید، مهرهها را بههرترتیبی چیده باشیم، میتوان صفحهٔ شطرنجی را، بایك خط راستافقی یا یك خط راست قائم بـه دو بخش تقسیم کرد، به نحویکه به هیچکدام از مهرهها لطمهای وارد نیاید.

۳۴. n عدد مثبت و مختلف a_1، a_2، ...، a_n داده شده است. از این عددها، همهٔ مجموعهای ممکن را، باهرتعداد جمله، ساختهایم (تعدادجملههای هرمجموع، از ۱ تا n است). ثابت کنید، در بین این مجموعها، دستکم $\frac{1}{2}n(n+1)$ عدد پیدا میشود که دو بهدو با هم فرق دارند.

۳۵. در مثلث ABC، دو نیمسازی را رسم کردهایم که از رأسهای A و B گذشتهاند؛ سپس از رأس C، خطهای راستی موازی با این دو نیمساز کشیدهایم. محل برخورد این خطهای راست با نیمسازها را، به ترتیب، D و E مینامیم. معلوم شد دو خط راست DE و AB با هم موازیاند. ثابت کنید، مثلث ABC متساویالساقین است.

۳۶. تصاعد حسابی نامتناهی، با جملههای مثبت مفروض است. ثابت کنید، اگر یکی از جملههای تصاعد مجذور کامل باشد،آن وقت، در تصاعد، بینهایت جملهٔ مجذور کامل پیدا میشود.

۳۷. ۴۵ ضلعی منتظم مفروض است. آیا میتوان رأسهای آن را، با عددهای از ۰ تا ۹ طوری شمارهگذاری کرد که، برای هر دو عدد مختلف، ضلعی وجود داشته باشد که دو انتهای آن با این عددها شمارهگذاری شده باشد؟

۳۸. عددهای حقیقی a، b، p و q را طوری پیدا کنید که برابری

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

برای هرمقدار x برقرار باشد.

۳۹. در دو انتهای قطری از دایره، عددهای ۱ را قرار دادهایم. هر یك از نیم دایرههای حاصل را نصف کردهایم و در نقطهٔ وسط کمان هرنیمدایره، مجموع دو عددی را قرار دادهایم که در دو انتهای آن وجود دارند (گام اول). سپس، هریك از چهار کمان حاصل را نصف کرده و در نقطهٔ وسط آنها، مجموع دو عددی را که در دو انتهای آن است، قرار دادهایم (گام دوم). این عمل را nبار ادامه دادهایم. مجموع همهٔ عددهایی را پیدا کنید که روی محیط دایره نوشتهایم.

۴۰. مثلثی متساویالساقین مفروض است. مکان هندسی نقطههایـی از درون مثلث را پیدا کنید کـه فاصلهٔ هرکـدام از آنها تا قاعده، برابر با واسطهٔ هندسی فاصلهٔ آن تا دو ساق باشد.

المپیاد چهارم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۴ (مسکو)

کلاس					
۸:	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵a
۹:	۴۱	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹
۱۰:	۵۰	۵۱	۵۴a،b	۵۲	۵۳
۱۱:	۵۴	۵۵	۵۲	۵۳	۴۴

۴۱. در مثلثی، طول هریك از دو ارتفاع آن، از طول ضلعی که بر آن رسم شدهاست، کوچکتر نیست. زاویههای مثلث را پیداکنید.

۴۲. ثابتکنید، عدد $m(m+1)$ نمیتواند، به ازای مقداری طبیعی m، برابر با توانی از یك عدد درست باشد.

۴۳. در هر یك از عددهای ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰، مجموع رقمها را محاسبه کردهایم. در هـریك از میلیارد عددی کـه بهدست میآید، دوباره مجموع رقمها را بـه دست آوردهایم و غیره، تا وقتی کـه همهٔ عددها، یك رقمی بشوند. کدام عدد بیشتر به دست میآید: ۱ یا ۲؟

۴۴. n عدد درست دلخواه a_1، a_2، ...، a_n داده شده‌است. از این گروه عددها، گروه جدیدی درست می‌کنیم:

$$\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{a_2+a_3}{2},\ \dots,\ \frac{a_{n-1}+a_n}{2},\ \frac{a_n+a_1}{2}$$

و از این گروه جدید، گروه بعدی را با همان قاعده به دست می‌آوریم وغیره. ثابت کنید، اگر همهٔ عددهای حاصل درست باشند، آن وقت، همهٔ عددهای اولیه، برابرند.

۴۵. a) درشش ضلعی محدب $ABCDEF$، همهٔ زاویه‌ها بـرابرند. ثابت کنید:

$$AB-DE=EF-BC=CD-FA$$

b) ثابت کنید، عکس این‌حکم هم درست است: اگر برای شش‌پاره‌خط راست به طول‌های a_1، a_2، a_3، a_4، a_5 و a_6 داشته باشیم:

$$a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$$

آن وقت می‌تـوان، با ایـن پاره خط‌های راست، یك شش ضلعی محدب با زاویه‌های برابر ساخت.

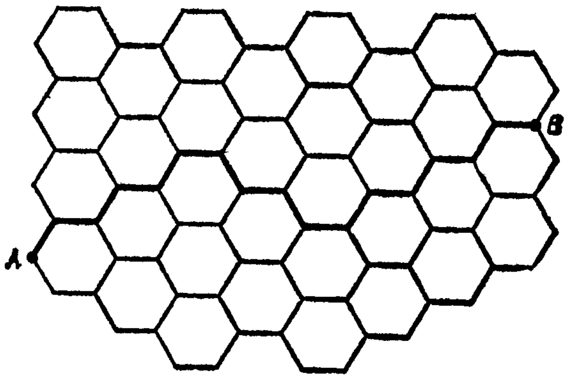
۴۶. این‌معادله را، در مجموعهٔ عددهای درست، حل کنید:

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots+\sqrt{x}}}}}_{\text{۱۹۶۴ رادیکال}}=y$$

۴۷. ازرأس‌های چهارضلعی محدب $ABCD$، عمودهایی بر قطرهای آن رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، چهارضلعی کـه رأس‌های آن، بر پای این عمودها منطبق باشد، با چهارضلعی اصلی متشابه است.

۴۸. همهٔ عددهای طبیعی و فرد n را پیداکنید که، برای آن‌ها، عدد $(n-1)!$ بر n^2 بخش‌پذیر نباشد.

۴۹°. به‌کمك شش‌ضلعی‌های منتظم به ضلع واحد، شبکه‌ای را روی



شکل ۳

صفحه رسم کرده‌ایم (شکل ۳). حشره‌ای روی ضلع‌های شبکه، ازنقطهٔ A به طرف نقطهٔ B، روی کوتاه‌ترین مسیرممکن، راهی به اندازهٔ ۱۰۰ را می‌پیماید. ثابت کنید، نیمی از تمامی مسیر را، در یك جهت طی می‌کند.

۵۰. چهار ضلعی $ABCD$ را بر دایرهٔ بـه مرکز O محیط کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع دو زاویهٔ AOB و COD برابر ۱۸۰ درجه است.

۵۱. a، b وn، سه عـدد طبیعی ثابت‌اند. می‌دانیم، به ازای هر عدد طبیعی k $(k\neq b)$، عدد $a-k^n$ برعدد $b-k$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، در این صورت $a=b^n$.

۵۲. در عبارت $x_1 : x_2 : \dots : x_n$، بـرای نشان دادن ردیف عمل‌ها، پرانتزهایی گذاشته و نتیجه را به این صورت نوشته‌ایم:

$$\frac{x_{i_1}\, x_{i_2}\, \cdots\, x_{i_k}}{x_{j_1}\, x_{j_2}\, \cdots\, x_{j_{n-k}}}$$

(درضمن، هـر یك از حرف‌های x_1، x_2، ...، x_n، یا در صورت کسر قرار دارد و یا در مخرج آن). اگر همهٔ روش‌های ممکن پرانتز گذاری را در نظر بگیریم، به چند کسر از این‌گونه می‌رسیم؟

۵۳. مکعبی را به چهار وجهی‌هایی تقسیم کـرده‌ایم که یکدیگر را نمی‌پوشانند. کمترین تعداد این چهاروجهی‌ها چقدر است؟

۵۴. بزرگترین عدد مجذور کاملی را پیدا کنیدکه، بعد از حذف دو

رقم آخر آن (دو رقم راست)، دوباره یك مجذور کامل به دست آید (فرض بر این است که، یکی از رقم‌های حذف شده، برابرصفر نیست).

۵۵. $ABCD$، یك ذوزنقهٔ محیطی است؛ E را نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD، و r_1، r_2، r_3، r_4 را، بـه ترتیب، شعاع دایـره‌های محاط در مثلث‌های ABE، BCE، CDE، DAE می گیریم. ثابت کنید:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$$

المپیاد پنجم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۵ (مسکو)

کلاس					
۸:	۵۶a	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۹:	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵
۱۰:	۵۶b	۶۶	۶۷a	۶۸a	۶۹
۱۱:	۶۳	۶۷b	۷۰	۶۸b	۷۱

* **۵۶.** a) هر یك از عددهای x_1، x_2، ...، x_n، می‌تواند بدون ارتباط با بقیه، مقدار ۱، ۰ یا ۱− را قبول کند. حداقل مجموع حاصل ضرب‌های دو به دوی این n عدد، چقدر می‌تواند باشد؟

b) حداقل مقدارمجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به دوی n عدد x_1، x_2، ...، x_n چقدر است، به شرطی که قدرمطلق هیچ کدام از این عددها، از واحد تجاوز نکند؟

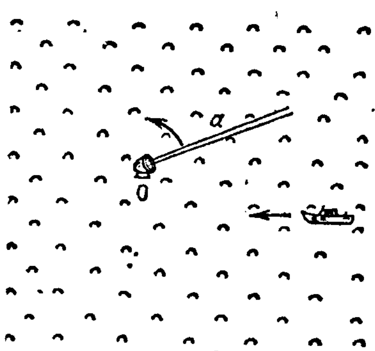
* **۵۷.** صفحه‌ای مربعی با ۳ × ۳ خانه و ۹ کارت، که اندازه‌های یکی از آن‌ها برابر با اندازه‌های یك خانه است، در اختیار داریم. روی هـر کارت عددی نوشته شده است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، به نوبت این کارت‌ها را روی خانه‌ها می گذارند. بعد از آن که همهٔ کارت‌ها در خانه‌ها قرار گرفتند، اولی (آغاز کنندهٔ بازی) مجموع شش عددی را به دست می‌آورد که در دوسطر بالایی وپایینی قرار دارند و، دومی، مجموع شش عددی

را که در ستون‌های سمت چپ و سمت راست واقع است، محاسبه می‌کند. کسی بازی را برده است که صاحب مجموع بیشتری باشد. ثابت کنید، اگر بازی درست انجام شود، دومی نمی‌تواند از اولی ببرد، بـدون ارتباط با عددهایی که روی کارت‌ها نوشته شده است.

۵۸. دایره‌ای را بر مثلث ABC محیط کرده‌ایم. وترهایی که وسط کمان AC را به وسط کمان‌های AB و BC وصل کرده‌اند، ضلع‌های AB و BC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید، پاره خط راست DE، با ضلع AC موازی است و ازمرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می گذرد.

۵۹. شمارهٔ بلیت اتـوبوس عددی شش رقمی است. بلیتی را «بلیت خوشبختی» می‌نامیم که مجموع سه رقم آن، با مجموع سه رقم آخـر بلیت برابر باشد. ثابت کنید، مجموع همهٔ شماره‌های بلیت‌های خوشبختی، بر عدد ۱۳ بخش‌پذیر است.

***۶۰.** روی دریاچهٔ کوچکی، یك نورافکن قرار داده‌اند که، پرتو آن، پاره خط راستی ازسطح آب‌دریا به طول a را روشن می‌کند (شکل ۴). نورافکن، به طور یکنواخت، دور محور قائم، طوری دوران می‌کند کـه، انتهای پرتو آن، باسرعت v جا به‌جا می‌شود. ثابت کنید، ناوچه‌ای که سرعت حداکثر آن برابر $\frac{v}{8}$ است، نمی‌تواند به دریاچه نزدیك شود، بـدون آن که



شکل ۴

در معرض پرتو نورافکن قرار گیرد.

۶۱. در یك گروه ملی، ۱۰۰ نفر عضویت دارند و هر شب، سه نفر نگهبانی می‌دهند. ثابت کنید، نمی‌توان برنامهٔ نگهبانی‌ها را طوری تنظیم کرد که، هر دو نفر، تنها یك بار باهم نگهبانی بدهند.

۶۲. پاره خط راستی، محدود بـه دو ضلع جانبی مثلث و مماس با دایرهٔ محاطی مثلث، با قاعدهٔ مثلث موازی شده است. اگر محیط مثلث برابر $2p$ باشد، حداکثر طول این پاره‌خط راست چقدر است؟

۶۳. n^2 عدد x_{ij} $(i, j=1, 2, \dots, n)$، دردستگاهی‌شامل n^3 معادله صدق می‌کنند:

$$x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}=0, \quad (i, j, k=1, 2, \dots, n)$$

ثابت کنید، عددهای a_1، a_2، ...، a_n وجود دارند، به نحوی که برابری $x_{ij}=a_i-a_j$، برای هر i و j، برقرار باشد.

۶۴*. آیا می‌توان ۱۹۶۵ نقطه را، در مربع به ضلع واحد، طوری قرار داد که هر مستطیل بـه مساحت $\frac{1}{200}$ و با ضلع‌هایی موازی ضلع‌های مربع، دست‌کم یکی از این نقطه‌ها را در درون خود داشته باشد؟

۶۵*. گردکردن یك عدد را، به‌این‌معنا می‌گیریم که، آن را، با یکی از دو عدد درست نزدیك به‌آن، عوض کنیم.

n عدد داده شده‌است. ثابت کنید، می‌توان این n عدد را طوری گردکرد که، مجموع هر m عدد گردشده $(1 \leqslant m \leqslant n)$، از مجموع خود عـدد (یعنی درحالتی که گرد نشده‌اند)، بیش‌از $\frac{1}{4}(n+1)$ اختلاف نداشته باشد.

۶۶. جهان‌گردی‌که با قطار به مسکو آمده بود، تمام روز را درشهر قدم زد. در رستورانی واقع در یك میدان شام خـورد و تصمیم گرفت به ایستگاه برگردد و، در ضمن، تنها از خیابان‌هایی عبور کند کـه، تا آن ساعت، به تعداد فرد از آن‌ها گذشته است. ثابت‌کنید، جهان‌گرد در هرحال می‌تواند، به این ترتیب، خود را به ایستگاه برساند.

۶۷. a) یك کمیسیون ۴۰ بار تشکیل شده است. در هر نشست ۱۰ عضو کمیسیون شرکت کـرده‌اند، در ضمن هیچ دو عضوی از کمیسیون با هم، بیش از یکبار، درنشست‌ها نبوده‌اند. ثابت‌کنید، تعدادعضوهای‌کمیسیون از ۶۰ بیشتر است.

b) ثابت کنید، با ۲۵ نفر نمی‌توان بیش از ۳۰ کمیسیون ۵ عضوی تشکیل داد، به شرطی‌که هیچ دوکمیسیونی، بیش ازیك عضو مشترك نداشته باشند.

۶۸*. دو عدد مثبت p و q، نسبت به هم اول‌اند. عـدد درست n را «خوب» می‌نامیم، وقتی‌که بتوان‌آن را به‌صورت $n=px+qy$ نشان داد که، در آن، x و y عـددهای درست غیر منفی‌اند؛ و در حالت عکس، آن را «بد» می‌نامیم.

a) ثابت کنید، عدد درست c وجود دارد، به نحوی کـه از دو عدد درست n و $c-n$، همیشه یکی عدد «خوب» و دیگری عدد «بد» است.

b) روی هم، چند عدد «بد» غیرمنفی وجود دارد؟

۶۹. هواپیمای اکتشافی روی دایره‌ای به مرکـز نقطهٔ A و به شعاع ۱۰ کیلومتر، با سرعت ساعتی ۱۰۰۰ کیلومتر پرواز می‌کند. درلحظه‌ای، از نقطهٔ A موشکی پرتاب می‌شودکه دارای همان سرعت هـواپیما است ومسیر حرکت آن، همیشه، روی خط راستی قـرار داردکه نقطهٔ A را به هواپیما وصل می‌کند. موشك، چه مدتی بعد از پرتاب، به هواپیما می‌رسد؟

۷۰. ثابت کنید، مجموع طول یال‌های هـر چندوجهی از $3d$ بیشتر است‌که، درآن، d عبارت است از فاصله بین دورترین دو راس چندوجهی از یکدیگر.

۷۱*. در سیاره‌ای که به شکل کـره است، موجودی زندگی می‌کند که می‌تواند، روی سطح سیاره، با سرعتی که از u تجاوز نمی‌کند، حرکت کند. یك سفینهٔ فضایی در اطراف این سیاره در پرواز است که می‌تواند با سرعت v حرکت کند. ثابت‌کنید، اگـر داشته باشیم $\frac{v}{u}>10$، آن وقت،

موجود روی سیاره نمی‌تواند خود را از دید سفینه مخفی کند.

المپیاد ششم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۶ (وورونژ)

کلاس					
۸:	۷۲	۷۳a	۷۴	۷۵a	۷۶
۹:	۷۷	۷۳b	۷۵b	۷۸	۷۹
۱۰و۱۱:	۷۵b	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳

۷۲. روی هرسیاره از یك منظومه، یك اخترشناس، نزدیك‌ترین سیاره را مشاهده می‌کند. فاصله‌های بین سیاره‌ها، دو به دو، با هم اختلاف دارند. ثابت کنید، اگر تعداد سیاره‌ها فرد باشد، سیاره‌ای وجود دارد که کسی آن را مشاهده نمی‌کند.

۷۳. a) نقطه‌های B و C در درون پاره‌خط راست AD واقع‌اند. ثابت کنید، اگر AB برابر CD باشد، آن وقت، برای هر نقطهٔ P ازصفحه، داریم:

$$PA+PD \geqslant PB+PC$$

b) نقطه‌های A، B، C و D، روی یك صفحه مفروض‌اند. می‌دانیم، برای هرنقطهٔ P از صفحه، این نابرابری برقرار است.

$$PA+PD \geqslant PB+PC$$

ثابت کنید، نقطه‌های B و C روی پاره‌خط راست AD واقع‌اند و $AB=CD$.

۷۴. آیا عددهای طبیعی x و y وجوددارند که، به ازای آن‌ها، x^2+y و $x+y^2$، مجذورهای کاملی باشند؟

۷۵. a) دانش‌آموزان کلاس هشتم در یك صف ایستاده‌اند. جلو هر کدام از آن‌ها، دانش‌آموزی از کلاس هفتم ایستاده است که قدی کوتاه‌تر دارد. ثابت کنید، اگر صف دانش‌آموزان کلاس هشتم به ردیف قد وصف دانش‌آموزان کلاس هفتم هم به‌ردیف قد خود ایستاده باشند، بازهم مثل‌قبل،

م، دانش‌آموز کلاس هشتم بلندتر از دانش‌آموز کلاس هفتم جلوخود است.

(ا) گروهی سرباز به شکل مستطیلی ایستاده‌اند، به نحوی که در هر صف، ردیف قد آن‌ها رعایت شده است. ثابت کنید، اگر سربازان را، در هر ستون، به‌ردیف قد خود قرار دهیم، بازهم مثل سابق، در هرصف، به‌ردیف قد خود قرار می‌گیرند.

۷۶. روی یك صفحهٔ کاغذ شطرنجی، مستطیل $ABCD$ را رسم کرده‌ایم، به نحوی که ضلع‌های آن، روی خط‌های راست شبکه قرار داشته باشد و، در ضمن، AD، k برابر AB باشد (k، عددی درست است). همهٔ مسیرهای ممکن را از طریق خط‌های راست شبکه در نظر می‌گیریم، به نحوی که کوتاه‌ترین راه از A به C باشند. ثابت کنید، بین این مسیرها، نمونه‌هایی پیدا می‌شود که، در آن‌ها، نخستین حلقه بر AD واقع است و، این حلقه، k برابر نمونه‌هایی است که، در آن‌ها، نخستین حلقه بر AB قرار دارد.

۷۷. برای عددهای a_1، a_2، ...، a_n می‌دانیم:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1,\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant 2a_2,\ \ldots,\ a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}$$

ثابت کنید، در مجموع $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$، می‌توان علامت‌ها را طوری در نظر گرفت که داشته باشیم: $0 \leqslant s \leqslant a_1$.

۷۸. ثابت کنید، در چهارضلعی محدب به مساحت S و محیط P، می‌توان دایره‌ای به‌شعاع $\frac{S}{P}$ جاداد.

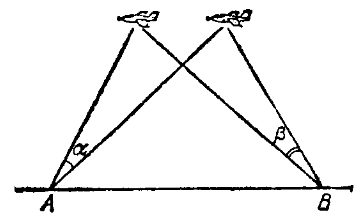
۷۹. در یك شهر، برای هر سه چهار راه A، B و C، مسیری وجود دارد که از A به B می‌رود، ولی از C نمی‌گذرد. ثابت کنید، هر چهارراه باهرچهارراه دیگر، دست‌کم به‌وسیلهٔ دومسیر غیرمتقاطع، مربوط است. (چهارراه، به‌نقطه‌ای می‌گوئیم که، از آن جا، دست‌کم دو خیابان عبور کند؛ در شهر، دست‌کم، دو چهارراه وجود دارد.)

۸۰. مثلث ABC مفروض است. همهٔ چهاروجهی‌های ممکن $PABC$

را در نظر می‌گیریم کــه، در آن‌ها، PH کوچکترین ارتفاع چهاروجهی باشد (H، تصویر نقطهٔ P بــر صفحهٔ ABC است). مجموعهٔ نقطه‌های H (مکان هندسی نقطهٔ H) را پیدا کنید.

*۸۱. ۱۰۰ نقطه روی صفحه داده شده است. ثابت کنید، این نقطه‌ها را می‌توان با چند دایرهٔ غیرمتقاطع پوشاند، به نحوی که مجموع قطرهای این دایره‌ها، کوچکتر از ۱۰۰ و فاصلهٔ بین هــر دو دایره بیشتر از واحد باشد (فاصلهٔ بین دو دایرهٔ غیر متقاطع، بــه فاصلهٔ بین نزدیکترین نقطه‌های آن‌ها گفته می‌شود).

۸۲. از دو نقطهٔ A و B، کــه به فاصلهٔ d کیلومتر از یکدیگر قرار دارند، به طور هم زمان و در طول یك ثانیه، هواپیمائی را مشاهده می‌کنند



شکل ۵

که روی خط راست و با سرعتی ثابت حــرکت می‌کند (شکل ۵). از نقطهٔ A اطلاع می‌دهند کــه، این هواپیما، در طول یك ثانیه، به اندازهٔ زاویهٔ α جابه‌جا شده است؛ از نقطهٔ B اطلاع می‌دهند که، درطول این یك ثانیه، هواپیما به اندازهٔ زاویهٔ β جا به جا شده است (α و β، زاویه‌هایی حاده‌اند). حداقل سرعت هواپیما، چقدر می‌تواند باشد؟

*۸۳. ۲۰ عدد ۱، ۲، ...، ۲۰ روی کاغذ نوشته شده‌است. دو بازی کن، به نوبت، جلو این عددها، علامت «+» یا «−» می‌گذارند (علامت را، می‌توان جلوی هر عددی گذاشت که بی‌علامت باقی مانده‌است). اولی می‌خواهد ترتیبی بدهد که، بعداز پایان علامت گذاری‌ها، مجموع همهٔ عددها، کمترین مقدارممکن را، از لحاظ قدرمطلق، داشته باشد. نفردوم، چه‌مجموع حداکثری را، از لحاظ قدرمطلق، می‌تواند برای خود تأمین کند؟

نخستین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۷ (تفلیس)

کلاس					
:۸	۸۴a	۸۵a	۸۶a	۸۷a	۸۸
:۹	۸۷b	۸۶a	۸۵b	۸۴b	۸۹
:۱۰	۹۰	۸۶b	۹۱	۹۲	۹۳

۸۴. a) در مثلث ABC، که زاویه‌هایی حاده دارد، بزرگترین ارتفاع آن، AH، با میانهٔ BM برابر است. ثابت کنید، زاویهٔ ABC از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کند.

b) در مثلث ABC، با زاویه‌هــای حاده، ارتفاع AH با میانهٔ BM و بانیمساز CD برابر است. ثابت کنید، ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

۸۵. a) دریك عدد طبیعی، جای رقم‌ها را به دلخواه عوض کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع عدد اصلی با عددی که به‌دست می‌آید، نمی‌تواند برابر با عدد زیر باشد:

$$\underbrace{۹۹۹...۹}_{\text{۱۹۶۷ رقم}}$$

b) رقم‌های عــددی را جابه‌جا و، سپس آن را، باعــدد اصلی جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر این مجموع برابر $۱۰^{۱۰}$ باشد، عدد اصلی بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۸۶. a) نورافکن زاویهٔ ۹۰ درجه را روشن می‌کند. ثابت کنید، با قراردادن نورافکن در چهار نقطهٔ دلخواه صفحه، می‌تــوان طوری آن‌ها را جهت گیری کرد که تمامی صفحه روشن شود.

b) در هر یك از هشت نقطهٔ فضا، نورافکنی قرار دارد کــه می‌تواند یك هشتم فضا را (یعنی درون یك کنج سه وجهی را که یال‌های آن دو به دو بر هم عمودند) روشن کند. راس این کنج را باید در نقطه‌ای در نظر

گرفت که نورافکن در آن‌جا قرار دارد. ثابت کنید، می‌توان جهت نورافکن‌ها را طوری تنظیم کرد که تمامی فضا روشن شود.

۸۷. a) آیا می‌توان عدد های ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را روی محیط یک دایره طوری قرار داد که، هر دو عدد مجاور، ۳، ۴ یا ۵ واحد با هم اختلاف داشته باشند؟

b) آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ...، ۱۳ را روی محیط دایره طوری قرار داد که، هر دو عدد مجاور به اندازهٔ ۳، ۴ یا ۵ واحد با هم اختلاف داشته باشند؟

۸۸. ثابت کنید، عددی وجود دارد که بر 5^{1000} بخش‌پذیر است و در بین رقم‌های آن، حتی یک صفر وجود ندارد.

۸۹*. همهٔ زوج عددهای درست x و y را پیدا کنید که در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$$

۹۰. در دنباله‌ای از عددهای درست و مثبت، با آغاز از جملهٔ سوم، هر جمله برابر است با قدرمطلق تفاضل دو جملهٔ قبل از آن.

این دنباله، حداکثر چند جمله می‌تواند داشته باشد، به شرطی که هر جملهٔ آن، از ۱۹۶۷ تجاوز نکند؟

۹۱. «خودکشی شاه». روی یک صفحهٔ شطرنجی ۱۰۰۰ × ۱۰۰۰، شاه سیاه و ۴۹۹ رخ سفید وجود دارد. ثابت کنید، مهرهٔ شاه در هر خانه‌ای باشد و سفید به هر ترتیبی بازی کند، شاه زیر ضربهٔ رخ‌های سفید است. (حرکت‌ها، مثل بازی معمولی شطرنج انجام می‌شوند.)

۹۲. سه راس متوالی لوزی، به ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC و CD از مربع مفروض به ضلع واحد قرار دارند. مطلوب است مساحت شکلی که به‌وسیلهٔ رأس چهارم چنین لوزی‌هایی پر می‌شود.

۹۳*. عدد طبیعی k، دارای این ویژگی است که، اگر عدد n بر آن بخش‌پذیر باشد، مقلوب عدد n هم (یعنی عددی که با همان رقم‌های n، ولی در جهت عکس نوشته شده باشد) بر k بخش‌پذیر است. ثابت کنید، عدد

k، مقسوم علیهی از عدد ۹۹ است.

دومین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۸ (لنین‌گراد)

کلاس	دور کتبی					دور شفاهی				
۸:	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۱۰۰a	۱۰۶	۱۰۷	۱۰۸	۱۰۹
۹:	۹۹	۱۰۰	۱۰۱	۹۷	۱۰۲	۱۱۰	۱۱۱	۱۰۰a	۱۰۸	۱۰۹
۱۰:	۱۰۳	۹۵	۱۰۴	۹۷	۹۶	۱۰۰b	۱۱۲	۱۱۳	۱۱۴	۱۰۹

۹۴. در یک هشت‌ضلعی، همهٔ زاویه‌ها برابرند و طول ضلع‌ها عددهایی درست‌اند. ثابت کنید، در این هشت‌ضلعی، ضلع‌های رو به‌رو با هم برابرند.

۹۵. کدام یک بزرگترند: 31^{11} یا 17^{14}؟

۹۶. صفحه‌ای شطرنجی که طول ضلع هرخانهٔ آن برابر یک سانتی‌متر است، در اختیار داریم. دایره‌ای به‌شعاع ۱۰۰ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم، به نحوی که محیط آن، از هیچ رأسی از خانه‌ها نمی‌گذرد و بر هیچ ضلعی از خانه‌ها مماس نیست. محیط این دایره، چند خانه را می‌تواند قطع کند؟

۹۷. بین دانشجویانی که به دانشگاه «دوستی ملت‌ها» آمده‌اند، درست ۵۰ نفر زبان انگلیسی، درست ۵۰ نفر زبان فرانسوی و درست ۵۰ نفر زبان اسپانیائی می‌دانند. ثابت کنید، دانشجویان را می‌توان به ۵ گروه (لازم نیست برابر باشند)، چنان تقسیم کرد که، در هر گروه، درست ۱۰ نفر که زبان انگلیسی می‌دانند، درست ۱۰ نفر که زبان فرانسوی می‌دانند و درست ۱۰ نفر که زبان اسپانیائی می‌دانند، وجود داشته باشد. (فرض بر این است که، از بین دانشجویان، برخی هیچ‌کدام از این زبان‌ها را نمی‌دانند و برخی دیگر به دو یا هر سه زبان مسلط‌اند.)

۹۸. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\cdots+\frac{20}{x^2-100}=$$

$$=11\left(\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right)$$

۹۹. در یك n ضلعی منتظم ($n>5$)، اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین قطر، برابر با ضلع nضلعی است. n را پیدا کنید.

۱۰۰. دنبالهٔ a_1، a_2، a_3، ...، به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1=1,\ a_2=a_1+\frac{1}{a_1},\ \ldots,\ a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$$

ثابت کنید: $a_{100}>14$.

۱۰۱. نقطهٔ O را در درون مثلث ABC و نقطهٔ O' را در درون مثلث $A'B'C'$ انتخاب کرده‌ایم؛ زاویه‌های هردو مثلث، حاده‌اند. از نقطهٔ O، عمود OA_1 را بر ضلع BC، عمود OB_1 را بر ضلع CA و عمود OC_1 را بر ضلع AB رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب، عمودهای $O'A'_1$، $O'B'_1$ و $O'C'_1$ را، به ترتیب، بر ضلع‌های $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ رسم کرده‌ایم. معلوم شد:

$$OA_1\|O'A',\ OB_1\|O'B',\ OC_1\|O'C',$$

$$OA_1\cdot O'A'=OB_1\cdot O'B'=OC_1\cdot O'C'$$

ثابت کنید:

$$O'A'_1\|OA,\ O'B'_1\|OB,\ O'C'_1\|OC,$$

$$O'A'_1\cdot OA=O'B'_1\cdot OB=O'C'_1\cdot OC$$

۱۰۲*. ثابت کنید، هر عدد طبیعی را که از $n!$ تجاوز نکند، می‌توان به صورت مجموعی از عددهای طبیعی مختلف نشان داد، به نحوی که، تعداد جمله‌های مجموع، از n تجاوز نکند و، درضمن، هرجملهٔ مجموع، مقسوم‌علیهی از $n!$ باشد.

۱۰۳. نقطهٔ D را روی ضلع AB و نقطهٔ E را روی ضلع AC از مثلث ABC گرفته‌ایم. در ضمن، می‌دانیم:

$$DE\|BC,\ AD=DE=AC,\ BD=AE$$

ثابت کنید، طول BD برابر است با طول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع $R=AC$.

۱۰۴. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. سه کره، به‌ترتیب، با قطرهای AB، AC و AD در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، این کره‌ها، چهاروجهی را می‌پوشانند.

۱۰۵. a) در جدول 4×4، علامت‌های «+» و «−» را، طبق شکل ۶، قرار داده‌ایم. تصمیم می‌گیریم، علامت همهٔ خانه‌هایی را که در

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

شکل ۶

یك سطر، یا یك ستون، یا به روی خط راستی موازی یك قطر (و درحالت خاص، یکی ازخانه‌های گوشه‌ای) قراردارند، به‌طور هم‌زمان، عوض کنیم. ثابت‌کنید، اگر این عمل را هر چندبار انجام دهیم، به‌جدولی نمی‌رسیم که همهٔ علامت‌های خانه‌های آن مثبت باشد.

b) در همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 8×8، علامت مثبت گذاشته‌ایم، به استثنای یکی از خانه‌ها (و البته، به جز خانه‌های گوشه‌ای)، که در آن، علامت منفی قرار داده‌ایم. تصمیم گرفتیم، به طور هم زمان، علامت همهٔ خانه‌های یك سطر، یك ستون یا یك قطر را تغییر دهیم (و درحالت خاص، هرکدام ازخانه‌های گوشه‌ای‌را؛ قطررا به خطی گوییم که مهرهٔ فیل می‌تواند روی‌آن حرکت کند). ثابت‌کنید، اگر هر چند بار، به این ترتیب، علامت‌ها را تغییر دهیم، به جدولی نمی‌رسیم که همهٔ علامت‌های آن، مثبت باشد.

۱۰۶. میانه‌های مثلث ABC، آن را به شش مثلث تقسیم می‌کنند. معلوم شد، از بین دایره‌های محاطی این مثلث‌ها، چهار دایره باهم برابرند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۰۷. ثابت کنید، معادله

$$x^2+x+1=py$$

برای بی‌نهایت عدد اول p، در مجموعهٔ عددهای درست (x, y)، جواب‌دارد.

۱۰۸. بعداز هنرنمائی ۲۰ هنرمند رقص، هریک از ۹ داور، بنا به نظر خود، ردیفی برای مقام‌های آن‌ها، از ۱ تا ۲۰ معین کردند. معلوم شد، اختلاف مقام‌هایی که داوران مختلف برای‌هر هنرمند تعیین کرده‌اند، بیشتر از ۳ نیست.

مقام‌های هر هنرمند را جمع کردند و عددهای حاصل را، به ترتیب صعودی نوشتند. ردیف

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant c_4 \leqslant \dots \leqslant c_{20}$$

به دست آمد. داوران روی هم، به c_1، حداکثر چه عددی داده‌اند؟

۱۰۹. عددهای a_1، a_2، ...، a_n از بین عددهای 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ...، $\frac{1}{n}$، و هر کدام یک بار و، هم‌چنین، عددهای b_1، b_2، ...، b_n هم از بین همین عددها، بازهم هر کدام یک بار، انتخاب شده‌اند. در ضمن، می‌دانیم:

$$a_1+b_1 \geqslant a_2+b_2 \geqslant a_3+b_3 \geqslant \dots \geqslant a_n+b_n$$

ثابت کنید، به ازای هر m از بین عددهای ۱ تا n، داریم:

$$a_m+b_m \leqslant \frac{4}{m}$$

۱۱۰. روی میز معلم یک ترازو گذاشته شده است. درکفه‌های ترازو وزنه‌هایی وجود دارد‌که ممکن است برابر نباشند. روی هر وزنه، نام فامیل یک یا چند نفر ازدانش‌آموزان نوشته شده است. هر دانش‌آموزی که به کلاس وارد می‌شود، وزنه‌ای راکه نام فامیل او روی آن نوشته شده است، برمی‌دارد و درکفهٔ دیگر ترازو می‌گذارد. ثابت‌کنید، می‌توان ورود‌دانش‌آموزان به کلاس را طوری اجازه داد که، در نتیجه، آن کفه‌ای از ترازو سبک‌تر باشد که در ابتدا سنگین‌تر بوده است.

۱۱۱. طرح یک شهر به صورت مستطیلی است که به خانه‌هائی تقسیم شده است. n خیابان موازی با هم، و m خیابان دیگر عمود بر آن‌ها، در آن وجود دارد. درخیابان‌های شهر (و نه درچهار راه‌ها)، پاسبان‌های ادارهٔ راهنمائی و رانندگی مستقر شده‌اند. هر پاسبان، شماره، جهت حرکت وزمان اتوبوس‌هایی راکه از مقابل او می‌گذرند، اطلاع می‌دهد. همهٔ اتوبوس‌ها، روی‌مسیرهای بسته‌ای درخیابان‌های شهرحرکت می‌کنند (وقتی‌که اتوبوسی، یک بارمسیرخود را طی می‌کند، از هیچ نقطه‌ای دو بار نمی‌گذرد). حداکثر، چند پاسبان باید در خیابان‌های شهر گذاشت، تا بتوان بنابر آگاهی‌هایی که می‌دهند، مسیر هراتوبوس را، به‌صورتی یک‌ارزشی، معین کرد؟

۱۱۲. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، بر ضلع AC در نقطهٔ K مماس است. ثابت کنید، خط راستی که وسط ضلع AC را به مرکز دایرهٔ محاطی مثلث وصل می‌کند، پاره خط راست BK را نصف می‌کند.

۱۱۳. دنبالهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n، به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1=0, |a_2|=|a_1+1|, |a_3|=|a_2+1|, \dots$$
$$\dots, |a_n|=|a_{n-1}+1|$$

ثابت کنید: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geqslant -\frac{1}{2}$.

۱۱۴. در چهارضلعی محدب $ABCD$، طول همهٔ ضلع‌ها و قطرها، عددهایی گویا هستند. اگر O محل برخورد قطرهای چهار ضلعی باشد، ثابت کنید، طول پاره‌خط راست AO، عددی گویاست.

سومین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۹ (کیف)

کلاس	روز اول			روز دوم		
۸:	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۲۲	۱۲۳	۱۲۴a
۹:	۱۱۸	۱۱۹	۱۱۵	۱۲۴	۱۲۵	۱۲۶
۱۰:	۱۱۹	۱۲۰	۱۲۱	۱۲۵	۱۲۷	۱۲۸

۱۱۵. روی قاعدهٔ AD در ذوزنقهٔ $ABCD$، نقطهٔ E طوری انتخاب شده است که مثلث‌های ABE، BCE و CDE، محیط‌هایی برابر پیدا کرده‌اند. ثابت کنید: $BC=\frac{1}{2}AD$.

۱۱۶. در مرکز میدانی مربع شکل، یك گرگ و در چهار رأس این مربع، چهار سگ ایستاده‌اند. گرگ می‌تواند، در تمامی میدان بدود، ولی سگ‌ها، تنها روی ضلع‌های مربع حرکت می‌کنند. گرگ می‌تواند از عهدهٔ یك سگ برآید، ولی در برابر دو سگ مغلوب می‌شود. حداکثر سرعت هر سگ، ۱/۵ برابر حداکثر سرعت گرگ است. ثابت کنید، سگ‌ها، این امکان را دارند که مانع خروج گرگ از میدان مربعی بشوند.

۱۱۷. دنباله‌ای متناهی از رقم‌های صفر و واحد، با دو ویژگی زیر داده شده است:

الف) اگر در جای دلخواهی از دنباله، ۵ رقم متوالی را جدا کنیم و، در جای دلخواه دیگری، دوباره ۵ رقم متوالی را در نظر بگیریم، آن‌وقت، این دو ردیف ۵ رقمی با هم اختلاف دارند (مثلاً در دنبالهٔ ۰۱۱۰۱۰۱)؛

ب) اگر در سمت راست دنباله، رقم ۰ یا رقم ۱ را قرار دهیم، ویژگی الف)، برقرار نباشد.

ثابت کنید، چهار رقم اول این دنباله، بر چهار رقم آخر آن منطبق است.

۱۱۸. a، b، c و d را، عددهایی مثبت می‌گیریم. ثابت کنید، در

بین نابرابری‌های

$$a+b<c+d,$$
$$(a+b)(c+d)<ab+cd,$$
$$(a+b)cd<ab(c+d)$$

دست کم یکی، نادرست است.

۱۱۹. کوچکترین عدد طبیعی a را پیدا کنید که، به ازای آن، سه جمله‌ای درجهٔ دوم با ضریب‌های درست وضریب بزرگترین درجهٔ a، وجود داشته باشد، به نحوی که دارای دو ریشهٔ مختلف کوچکتر از واحد باشد.

۱۲۰. عدد طبیعی n مفروض است. همهٔ کسرهای به‌صورت $\frac{1}{pq}$ را می‌نویسیم که، در آن، p و q نسبت به هم اول‌اند و $0<p<q\leqslant n$، $p+q>n$. ثابت کنید، مجموع همهٔ این کسرها، برابر است با $\frac{1}{2}$.

۱۲۱*. n نقطه را در فضا طوری مستقر کرده‌ایم که، هر سه نقطهٔ آن، رأس‌های مثلثی را با یك زاویهٔ بزرگتر از ۱۲۰ درجه تشکیل می‌دهند. ثابت کنید، این نقطه‌ها را، می‌توان با حرف‌های A_1، A_2، ...، A_n طوری نام‌گذاری کرد که، هرکدام از زاویه‌های $A_iA_jA_k$ $(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$، بزرگتر از ۱۲۰ درجه باشد.

۱۲۲. درچهارعدد سه رقمی مختلف، رقم اول سمت چپ، یکی است. درضمن، مجموع این چهار عدد، بر سه تا ازاین عددها بخش‌پذیر است. این عددها را پیدا کنید.

۱۲۳. خط‌های هوایی بین شهرهای یك کشور طوری تنظیم شده‌اند که، هرشهر، حداکثر با سه شهر ارتباط هوایی دارد. درضمن، برای مسافرت ازهرشهر به هر شهر دیگر، بیش از یك بار، نیاز به تعویض هواپیما نیست. حداکثر تعداد شهرهای این کشور، چقدر است؟

۱۲۴. در یك پنج‌ضلعی محدب، همهٔ ضلع‌ها با هم برابرند.

a) ثابت کنید: در درون این پنج‌ضلعی و روی قطر بزرگتر، نقطه‌ای وجود دارد که، از آن‌جا، هر ضلع پنج ضلعی به زاویه‌ای دیده می‌شود که از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند.

b) ثابت کنید، دایره‌هایی‌که به قطرضلع‌ها رسم شوند، پنج ضلعی را نمی‌پوشانند.

۱۲۵. روی تختهٔ سیاه، معادله‌ای به این صورت نوشته شده است:

$$x^3+\dots+x^2+\dots+x+\dots=0$$

دو نفر، به صورت زیر، با هم بازی می‌کنند. نفر اول، در یکی از جاهای خالی، عدد درستی مخالف صفر (مثبت یا منفی) می‌نویسد؛ سپس، نفر دوم، در یکی ازجاهای خالی باقی مانده، عددی درست وغیر صفر را جا می‌دهد. سرآخر، نفر اول، در تنها جای باقی‌مانده، عدد درستی را قرار می‌دهد. ثابت‌کنید، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که، بدون توجه به حرکت دومی، ریشه‌های معادله‌ای‌که به دست می‌آید، عددهایی درست باشند.

۱۲۶*. ۲۵ تیم فوتبال، برای کسب عنوان قهرمانی کشور، با هم مسابقه می‌دهند. دست‌کم، چند بازی باید انجام شود تا بین هر سه تیم، دو تیم وجود داشته باشد که بازی خود را انجام داده باشند؟

۱۲۷. یك k ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R مفروض است. اگر h_k، فاصلهٔ مرکز چندضلعی تا یکی از ضلع‌های آن باشد، ثابت‌کنید:

$$(n+1)h_{n+1}-nh_n>R$$

۱۲۸*. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1، a_2، ...، a_n داریم:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots$$

$$\dots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{\pi}{4}$$

چهارمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۰ (سیم‌فه روپول - مرکز کریمه)

کلاس	روز اول					روز دوم		
۸:	۱۲۹	۱۳۰	۱۳۱	۱۳۲	۱۳۳a			
۹:	۱۳۴	۱۳۵	۱۳۳b	۱۳۶	۱۳۷			
۱۰:	۱۳۸	۱۳۹	۱۳۳b	۱۳۶	۱۴۰	۱۴۱	۱۴۲	۱۴۳

۱۲۹. یك دایره، قطر AB از آن و نقطهٔ C واقع بر این قطر، مفروض‌اند. روی محیط دایره، دو نقطهٔ X و Y را، قرینهٔ هم نسبت به قطر AB، طوری پیداکنیدکه، خط راست YC بر خط راست XA عمود باشد.

۱۳۰. ثابت کنید، اگر حاصل ضرب سه عدد مثبت برابر واحد، و مجموع این سه عدد از مجموع عکس آن‌ها بزرگتر باشد، آن وقت، درست یکی از این عددها، از واحد بزرگتر است.

۱۳۱. در یك چندضلعی محدب، چندضلع می‌تواند وجود داشته باشد که، طول هرکدام از آن‌ها، برابر با طول بزرگترین قطر چندضلعی باشد.

۱۳۲. رقم‌های یك عدد هفده رقمی را، در جهت عکس نوشته‌ایم. عدد حاصل را، با عدد اصلی جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، دست کم یکی از رقم‌های این مجموع، عددی زوج است.

۱۳۳. a) زمین قلعه‌ای به شکل مثلث متساوی الاضلاع، با ضلع به طول ۱۰۰ متر است. آن را به ۱۰۰ سالن مثلثی شکل تقسیم کرده‌اند. همهٔ دیوارهای سالن، طول‌هایی برابر دارند: ۱۰ متر. در وسط هر دیوار بین هردو سالن، دری تعبیه شده است. ثابت‌کنید، اگرکسی بخواهد، سالن‌های قلعه را بازدید کند، بدون این که دوبار وارد یك سالن بشود، نمی‌تواند بیش‌از ۹۱ سالن را ببیند.

b) هریك ازضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع را به‌k بخش برابرتقسیم کرده‌ایم. از هر نقطهٔ تقسیم، خط‌های راستی‌موازی ضلع‌هاکشیده‌ایم. به این ترتیب، مثلث مفروض، به k^2 مثلث کوچکتر تقسیم می‌شود. دنبالهٔ مثلث‌هایی را یك «زنجیره» می‌نامیم که، در آن، هیچ مثلثی دوبار تکرار نشده باشد

و، در ضمن، هر مثلث با مثلث قبلی خود، در یك ضلع مشترك باشد. حداکثر تعداد مثلث‌های این«زنجیره» چند است؟

۱۳۴. پنج پاره خط راست چنان‌اندکه، با هر سه تای‌آن‌ها، می‌توان یك مثلث ساخت. ثابت کنید، دست کم یکی از این مثلث‌ها، زاویه‌هایی حاده دارد.

۱۳۵. در مثلث ABC که زاویه‌هایی حاده دارد، نیمساز AD، میانهٔ BM و ارتفاع CH، در یك نقطه به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، زاویهٔ BAC از ۴۵ درجه بیشتر است.

۱۳۶. بارقم‌های ۱و۲، پنج عددn رقمی طوری ساخته‌ایم که، رقم‌های هر دو عدد، درست در m مرتبهٔ خود بر هم منطبق‌اند؛ ولی رقم‌های هرپنج عدد، در هیچ مرتبه‌ای بر هم منطبق نیستند. ثابت کنید:

$$\frac{۲}{۵}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant\frac{۳}{۵}$$

۱۳۷*. ثابت‌کنید، از بین هر دویست عدد درست، می‌توان صد عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد.

۱۳۸. در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط ضلع BC و نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، خط راستی گذرانده‌ایم تا ارتفاع AH را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید، طول پاره‌خط راست AE برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث.

۱۳۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی k، بی‌نهایت عدد طبیعی t وجود دارد که، در عددنویسی به‌مبنای ده، شامل‌رقم‌های صفر نباشد و،درضمن درعدد t و kt، درمجموع رقم‌ها برابر باشند.

۱۴۰. دو مستطیل برابر، طوری روی هم قرار گرفته‌اند که، محیط‌های آن‌ها، در هشت نقطه، یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت‌کنید، مساحت بخش مشترك دو مستطیل، از نصف مساحت هر یك از مستطیل‌ها، بیشتر است.

۱۴۱. روی‌کارت‌های جداگانه، همهٔ عددهای پنج رقمی از ۱۱۱۱۱ تا ۹۹۹۹۹را نوشته‌ایم. این‌کارت‌ها را، به‌ترتیب دلخواه، درکنار هم‌قرار می‌دهیم. ثابت‌کنید، عدد حاصل (که عددی با ۴۴۴۴۴۵ رقم است)، نمی‌تواند توانی از ۲ باشد.

۱۴۲*. همهٔ عددهای طبیعی را،که تعداد رقم‌های هرکدام از آن‌ها از n تجاوزنمی‌کند، به دو گروه تقسیم‌کرده‌ایم. درگروه‌اول، همهٔ عددهایی را قرار داده‌ایم‌که، مجموع رقم‌های هریك از آن‌ها، عددی فرداست، و در گروه‌دوم همهٔعددهای بامجموع رقم‌های‌زوج. ثابت‌کنید، اگر$n>k\geqslant ۱$، آن وقت،مجموع توان‌های kام همهٔ عددهـای گروه اول، برابر است با مجموع توان‌های kام همهٔ عددهای‌گروه دوم.

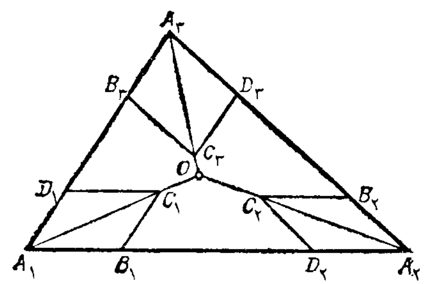
۱۴۳*. رأس‌های یك n ضلعی منتظم را باچند رنگ مختلف، طوری رنگ کرده‌ایم (هر رأس، تنها یك رنگ دارد) کـه، نقطه‌های هـم رنگ، رأس‌های یك چندضلعـی منتظم را تشکیل می‌دهند. ثابت‌کنید، در بین این چندضلعی‌ها،دوچندضلعی برابر وجود دارد.

پنجمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۱ (ریگا)

کلاس	روز اول				روز دوم		
۸:	۱۴۴	۱۴۵a	۱۴۶a	۱۴۷		۱۵۲a,b	۱۵۳	۱۵۴
۹:	۱۴۴	۱۴۵a	۱۴۸	۱۴۷	۱۴۶b	۱۵۶	۱۵۲c	۱۵۵
۱۰:	۱۴۹	۱۴۵b	۱۵۰	۱۴۷	۱۵۱	۱۵۶	۱۵۷	۱۵۸

۱۴۴. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، می‌توان عددی n رقمی با رقم‌های ۱و۲ پیداکردکه بر ۲^n بخش‌پذیر باشد.

۱۴۵. a) مثلث $A_۱A_۲A_۳$ مفروض است. نقطه‌های $B_۱$ و $D_۲$ راروی ضلع $A_۱A_۲$، نقطه‌های $B_۲$ و $D_۳$ را روی ضلع $A_۲A_۳$ ونقطه‌های $B_۳$ و $D_۱$ را روی ضلع $A_۳A_۱$ طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاع‌های $A_۱B_۱C_۱D_۱$، $A_۲B_۲C_۲D_۲$ و $A_۳B_۳C_۳D_۳$ را بسازیم، آن وقت، خط‌های راست $A_۱C_۱$، $A_۲C_۲$ و $A_۳C_۳$ در یك نقطهٔ O به هـم برسند. ثابت کنید،



شکل ۷

اگر داشته باشیم: $A_۱B_۱ = A_۲D_۲$ و $A_۲B_۲ = A_۳D_۳$، آن وقت داریم: $A_۳B_۳ = A_۱D_۱$ (شکل ۷).

b) چند ضلعی محدب $A_۱A_۲\ldots A_n$ داده شده است. نقطه‌های $B_۱$ و $D_۲$ را روی ضلع $A_۱A_۲$، نقطه‌های $B_۲$ و $D_۳$ را روی ضلع $A_۲A_۳$، ...، نقطه‌های B_n و $D_۱$ را روی ضلع $A_nA_۱$ طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاع‌های $A_۱B_۱C_۱D_۱$، $A_۲B_۲C_۲D_۲$، ...، $A_nB_nC_nD_n$ را بسازیم، آن وقت، خط‌های راست $A_۱C_۱$، $A_۲C_۲$، $A_۳C_۳$، ...، A_nC_n در یك نقطهٔ O به هم برسند. ثابت کنید، برابری زیر، از حاصل‌ضرب طول‌ها، برقرار است:

$$A_۱B_۱ . A_۲A_۲ . A_۳B_۳ \cdots A_nB_n = A_۱D_۱ . A_۲D_۲ \cdots A_nD_n$$

۱۴۶. a) دونفر، به‌این ترتیب، باهم بازی می‌کنند. نفر اول پشت سرهم، دو ردیف عدد و در هرردیف ۱۰ عدد می‌نویسد، به نحوی که با این قانون سازگار باشند: اگرعدد b زیرعدد a، و عدد d زیرعدد c نوشته شده باشد، داشته باشیم $a+d=b+c$. بازی‌کن دوم، ازاین‌قانون اطلاع‌دارد و می‌خواهد همهٔ عددها را پیدا کند. تصمیم می‌گیرد، پرسش‌هایی از این نوع از بازی‌کن اول بکند: «در ردیف اول ودرجای سوم چه عددی قرار دارد؟» یا «چه‌عددی در ردیف دوم وجای نهم قراردارد؟» وغیره. بازی‌کن دوم، دست‌کم چند پرسش‌مطرح کند تا ازهمهٔ عددها اطلاع داشته باشد؟

b) درجدول $m\times n$، عددهایی را طوری نوشته‌ایم که، برای هر دو

سطر و هردو ستون، مجموع‌های واقع در دورأس متقابل مستطیلی که‌تشکیل می‌شود، برابر بامجموع دوعدد دورأس دیگر مستطیل باشد. بخشی‌ازعددها پاك شده‌اند. ولی به‌کمك عددهای باقی مانده می‌توان آن‌ها را پیدا کرد. ثابت کنید، تعداد عددهای باقی مانده، از $m+n-۱$ عدد کمتر نیست.

۱۴۷*. دریك مربع به‌ضلع واحد، چند دایره رسم کرده‌ایم که، شعاع هرکدام از آن‌ها، از ۰/۰۰۱ کوچکتر است. فاصلهٔ بین هر دو نقطه از هر دو دایره، برابر ۰/۰۰۱ نیست. ثابت کنید، مساحتی که به وسیلهٔ دایره‌ها پوشیده می‌شود، از ۰/۳۴ تجاوز نمی‌کند.

۱۴۸*. در سه ظرف مقداری‌آب وجود دارد. مقدار آب هر ظرف، برحسب لیتر، با عدد درستی بیان می‌شود. تصمیم می‌گیریم، در هر ظرف به اندازهٔ آبی که در آن وجود دارد، از یکی‌از ظرف‌های دیگر وارد کنیم. ثابت کنید، باچند بار جابه‌جائی، می‌توان یکی از ظرف‌ها را آزاد کرد. (ظرف‌ها به‌اندازهٔ کافی بزرگ‌اند: هرکدام ازآن‌ها، می‌تواند همهٔ آب‌های سه ظرف را درخود جای دهد.)

۱۴۹. عددهای $p_۱$، $p_۲$، $q_۱$، $q_۲$ در نابرابری زیرصدق می‌کنند:

$$(q_۱-q_۲)^۲+(p_۱-p_۲)(p_۱q_۲-p_۲q_۱)<۰$$

ثابت کنید، سه جمله‌ای‌های $x^۲+p_۱x+q_۱$ و $x^۲+p_۲x+q_۲$ دارای ریشه‌های حقیقی هستند و، درضمن، بین دو ریشهٔ هرسه جمله‌ای، ریشه‌ای‌از سه جمله‌ای دیگر واقع است.

۱۵۰. تصویرهای جسمی بر دو صفحه، دایره شده است. ثابت کنید، این دو دایره، شعاع‌هایی برابر دارند.

۱۵۱. روی محیط دایره‌ای، چند عدد نوشته‌ایم. اگر برای چهار عدد متوالی a، b، c و d داشته باشیم: $(a-d)(b-c)<۰$، آن وقت، جای دوعدد b و c را عوض می‌کنیم. ثابت کنید، به تعداد محدودی می‌توان این عمل‌را انجام داد.

۱۵۲. a) ثابت کنید، خط راستی که مثلث مفروض‌را به دوچند ضلعی با محیط‌ها و مساحت‌های برابر تقسیم کند، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث

می‌گذرد.

b) همین حکم را در مورد چندضلعی دلخواهی ثابت کنید که بتوان یك دایره در آن محاط کرد.

c) ثابت کنید، همهٔ خط‌های راستی که، هم مساحت و هم محیط مثلث را نصف می‌کنند، از یك نقطه می‌گذرند.

۱۵۳. ثابت کنید، از بین ۲۵ عدد مثبت مختلف، می‌توان دوعددطوری انتخاب کرد که، حتی یکی از بقیهٔ عددها، برابر مجموع و یا برابر تفاضل این دوعدد نباشد.

۱۵۴. a) دررأس A_1 از دوازده ضلعی منتظم $A_1A_2 \dots A_{12}$، علامت منفی، و در بقیهٔ رأس‌ها، علامت مثبت گذاشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، به‌طور هم زمان، علامت رأس‌های شش رأس متوالی را، عوض کنیم. ثابت کنید، نمی‌توان با تکرار چندبار این عمل، به‌جایی رسید که علامت رأس A_2 منفی وعلامت بقیهٔ رأس‌ها مثبت باشد.

b) همین‌حکم را، برای حالتی که به‌جای شش رأس متوالی، علامت‌های چهار رأس متوالی چندضلعی را عوض کنیم، ثابت کنید.

c) همین حکم را برای موردی ثابت کنید که، تصمیم بگیریم، به‌طور هم زمان، علامت‌های سه رأس متوالی چندضلعی را عوض کنیم.

۱۵۵*. روی صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، N خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. ثابت کنید، ازاین صفحه می‌توان تعداد محدودی مربع، طوری جدا کرد که با دوشرط زیر سازگار باشند:

۱) همهٔ خانه‌های سیاه در داخل این‌مربع‌ها باشند؛

۲) در هر مربع جدا شده، مساحت خانه‌های سیاه از $\frac{1}{5}$ مساحت این مربع کمتر و از $\frac{4}{5}$ مساحت آن بیشتر نباشد.

□

مساله‌های از ۱۵۶ تا ۱۵۸، در روز دوم و به دانش‌آموزان کلاس دهم

داده شده است. این توضیح هم، قبل‌ازصورت مسأله‌ها، برای دانش‌آموزان آمده است:

«سه مسأله به‌شما پیشنهاد می‌شود. حل‌درست هریك از این سه مسأله، به اندازهٔ کافی دشوار است و وقت‌زیادی رامی‌گیرد. یکی ازاین مساله‌ها راانتخاب کنید وحل آن را، تا هرجا که می‌توانید جلو ببرید.

بعد از حل‌مسأله، «خلاصهٔ نتیجه‌گیری‌ها» را بنویسید: گزاره‌هایی راکه ثابت کرده‌اید نام ببرید، چند مثال در موردهایی که به‌نتیجه رسیده‌اید بیاورید، نظریه‌هایی را تنظیم کنید که به‌نظرتان درست می‌آیند.»

۱۵۶. مکعب به‌ضلع n را، به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده‌ایم. چند مکعب‌کوچك را انتخاب وازمرکز هرکدام از آن‌ها، سه‌خط راست موازی با سه یال مکعب رسم می‌کنیم. دست‌کم چندمکعب کوچك را باید انتخاب کرد تا، این خط‌های راست، همهٔ مکعب‌های کوچك را خط بزنند؟

a) پاسخ را، برای مقدارهای کوچك n بدهید: برای ۴، ۳، ۲ $= n$.

*b) سعی کنید، پاسخ را برای $n = 10$ پیدا کنید.

*c) مسأله را درحالت کلی حل کنید. اگر نتوانستید پاسخ دقیق‌را به دست‌آورید، حدبالا وحد پایینی‌را، برای تعداد مکعب‌های کوچکی که باید انتخاب‌کنیم، تخمین بزنید.

*d) توجه کنید که، این مسأله را، می‌توان به‌این صورت تنظیم کرد:

همهٔ انتخاب‌های ممکن (x_1, x_2, x_3) را درنظرمی‌گیریم که، در آن، هریك از حرف‌های x_1، x_2 و x_3 می‌توانند یکی از n مقدار ۱، ۲، ...، n را قبول کنند. دست‌کم چندگروه سه تایی باید انتخاب‌کرد تا، برای هریك ازگروه‌های سه‌تایی باقی مانده، گروهی از بین سه تایی‌های انتخاب شده پیدا بشودکه باآن تنها دریك مقدار اختلاف داشته باشد (یعنی دو گروه، تنها دریکی از مختص‌های x_1، x_2 یا x_3 اختلاف داشته باشند)؟ سعی کنید پاسخ را برای مسألهٔ‌کلی‌تر پیداکنید، وقتی‌که، به جای سه‌عدد، گروه‌ها را با چهارعدد یا بیشتر درنظر گرفته باشیم.

۱۵۷. a) تابع $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ را درنظر می‌گیریم.

ثابت‌کنید، برای هرنقطهٔ (x, y)، می‌توان عددهای درست (m, n) را پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$f(x-m, y-n)=(x-m)^2+(x-m)(y-n)+(y-n)^2\leqslant \frac{1}{2}$$

b*) کمترین‌مقدار ازعددهای $f(x-m, y-n)$ را $\overline{f}(x, y)$ می‌نامیم. (برای همهٔ عددهای درست m و n). حکم مسألهٔ a) به این معناست که برای هر x و y، نابرابری $\overline{f}(x, y)\leqslant\frac{1}{2}$ برقرار است.

ثابت کنید که، در واقع، نابرابری نیرومندتری برقرار است: $\overline{f}(x, y)\leqslant\frac{1}{3}$. همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که، برای آن‌ها، برابری $\overline{f}(x, y)=\frac{1}{3}$ برقرار باشد.

c*) این تابع را درنظر می‌گیریم:

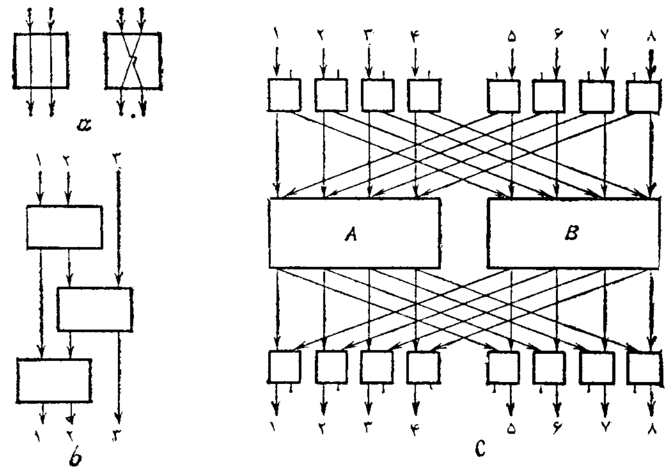
$$f_a(x, y)=x^2+axy+y^2, \quad (0\leqslant a\leqslant 2)$$

عدد c را، در بستگی با a، طوری پیداکنید که، به ازای همهٔ (x, y)ها، نابرابری $|\overline{f}_a(x, y)|\leqslant c$ برقرار باشد. بکوشید ارزیابی‌دقیق را پیداکنید.

۱۵۸. کلید با دو ورودی و دو خروجی را می‌توان در دو موقعیت مختلف قرار داد (شکل ۸-a).

در شکل ۸-b، طرح ارتباط تلفنی با سه ورودی و سه خروجی داده شده است، که ویژگی «همه کاره بودن» را دارد: با تغییر دادن وضع کلید، می‌توان به‌هریك از شش‌حالتی که سه ورودی را به‌سه خروجی‌مختلف وصل می‌کند، رسید، یعنی

$$\begin{array}{cccccc} 123 & 123 & 123 & 123 & 123 & 123 \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ 123 & 312 & 231 & 213 & 321 & 132 \end{array}$$



شکل۸

(این را آزمایش کنید. توجه‌کنید که، تعداد حالت‌های مختلف این‌طرح، برابر است با $8=2^3$، زیرا هرکلید می‌تواند در دو وضع قرار گیرد.)

a) طرح مربوط به چهار ورودی وچهار خروجی‌را بسازید، به‌نحوی که «همه‌کاره» باشد، یعنی امکان هریك از ۲۴ اتصال ممکن ورودی‌ها و خروجی‌ها را فراهم کند.

b) حداقل تعدادکلیدهایی‌که برای این‌طرح‌لازم می‌شود، چقدراست؟

c*) وقتی‌که با n ورودی و n خروجی سروکار داشته باشیم، طرحی راکه، به‌کمك آن، امکان‌همهٔ $n!$ اتصال n ورودی با n خروجی‌مختلف فراهم شود، «طرح همهٔکارهٔ مرتبهٔ n» می‌نامیم.

درشکل ۸-c، طرحی‌با هشت ورودی و هشت خروجی داده شده‌است که، درآن، A و B، «همه‌کارهٔ مرتبهٔ۴» هستند. ثابت‌کنید، این طرح «همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۸» است.

حدبالا و حد پایین تعدادکلیدها را در «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ n» تخمین بزنید.

ششمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۲ (چه لیانبیسك)

کلاس	روز اول				روز دوم		
۸:	۱۵۹	۱۶۰	۱۶۱		۱۶۶	۱۶۷	۱۶۸
۹:	۱۶۲a	۱۶۳	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۹	۱۷۰	۱۷۱
۱۰:	۱۶۲b	۱۶۳	۱۶۵	۱۶۴	۱۶۶	۱۷۲	۱۷۳

۱۵۹. M را وسط ضلع AD و N را وسط ضلع BC در مستطیل $ABCD$ گرفته‌ایم. روی امتداد پاره خط راست CD، و از طرف D، نقطهٔ P را انتخاب کرده‌ایم. محل برخورد خط‌های راست PM و AC را Q می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\widehat{QNM}=\widehat{MNP}$$

۱۶۰. روی خط راستی، ۵۰ پاره خط راست داده شده است. ثابت کنید، دست کم یکی از دو حکم زیر درست است:

الف) هشت پاره خط راست پیدا می‌شود که دارای نقطهٔ مشترکی هستند؛

ب) هشت پاره خط راست وجود دارد که، هیچ دوتایی از آن‌ها، نقطهٔ مشترکی ندارند.

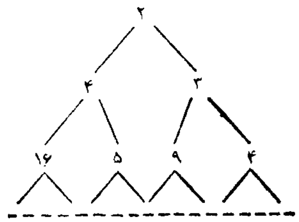
۱۶۱. بزرگترین عدد درست x را پیدا کنید که، به‌ازای آن، عدد

$$۴^{۲۷}+۴^{۱۰۰۰}+۴^{x}$$

برابر با مجذور یك عدد درست باشد.

۱۶۲. a) فرض کنید، a، m و n، سه عدد طبیعی باشند و $a>۱$. ثابت کنید، اگر $a^m+۱$ بر $a^n+۱$ بخش‌پذیر باشد، آن وقت m بر n بخش‌پذیر است.

b) فرض کنید، a، b، m و n، عددهایی طبیعی باشند؛ در ضمن، a و b نسبت به هم اول و $a>۱$. ثابت کنید، اگر a^m+b^m بر a^n+b^n بخش‌پذیر باشد، آن وقت m بر n بخش‌پذیر است.



شکل ۹

۱۶۳. جدولی مثلثی را، با قانون زیر ساخته‌ایم: در سطر بالا، عدد طبیعی a را می‌نویسیم، سپس، زیر هر عدد k، درسمت چپ $k^۲$، ودرسمت راست $k+۱$ را قرارمی‌دهیم. مثلاً، به ازای $a=۲$، جدولی به‌دست می‌آید که درشکل ۹ نشان داده‌ایم. ثابت کنید، در هر سطر این جدول، همهٔ عددها با هم اختلاف دارند.

***۱۶۴.** چند مربع داده شده است که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، برابر است با ۱. ثابت کنید، می‌توان همهٔ این‌مربع‌ها را درمربعی به مساحت ۲ جا داد، بدون این که روی هم قرار گیرند.

۱۶۵. O محل برخورد قطرها، در چهارضلعی محدب $ABCD$ است. ثابت کنید، خط راستی که از نقطه‌های برخورد میانه‌های دو مثلث AOB و COD می‌گذرد، بر خط راستی که از نقطه‌های برخورد ارتفاع‌های دو مثلث BOC و AOD می‌گذرد، عمود است.

۱۶۶. هر یك از نه خط راست، مربع را به دو چهارضلعی تقسیم کرده‌اند که، نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر ۲:۳ شده است. ثابت کنید، دست کم سه خط راست، از این نه خط راست، از یك نقطه می‌گذرند.

۱۶۷. هفت‌ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶A_۷$، در یك دایره محاط شده است. ثابت کنید، اگر مرکز این دایره، دردرون هفت‌ضلعی باشد، آن وقت، مجموع زاویه‌های رأس‌های $A_۱$، $A_۳$ و $A_۵$، از ۴۵۰ درجه کمتر است.

***۱۶۸.** دو نفر، به این بازی مشغول‌اند. اولی یك رقم را نام می‌برد، دیگری، بنا به نظر خود، آن را به جای یکی از ستاره‌ها، در تفاضل زیر

قرار می‌دهد:

— * * * *

* * * *

بعد اولی رقم دیگری را نام می‌برد و دومی آن را به جای ستارهٔ دیگری می‌گذارد؛ این روند ۸ بار تکرار می‌شود تا همهٔ ستاره‌ها به رقم تبدیل شوند. اولی می‌خواهد تا آن‌جا که ممکن است، به تفاضل بزرگتری برسد، در حالی که تمایل دومی به هر چه کوچکتر بودن تفاضل است. ثابت کنید:

a) دومی می‌تواند رقم‌ها را طوری قرار دهدکه، بدون ارتباط با نوع رقم‌هایی‌که اولی نام برده است، تفاضل حاصل از ۴۰۰۰ تجاوز نکند.

b) اولی می‌تواند رقم‌هایی را نام ببرد که، بدون ارتباط با این که این رقم‌ها را دومی درکجا قرار می‌دهد، تفاضل حاصل‌کمتر از ۴۰۰۰ نباشد.

۱۶۹. x و y را عددهایی مثبت و s را کوچکترین‌عدد از بین‌عددهای x، $y+\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ فرض می‌کنیم. حداکثر مقدار s چقدر می‌تواند باشد؟ بازای چه مقدارهایی از x و y، مقدار s به‌این حداکثر می‌رسد؟

۱۷۰. نقطهٔ O، در درون چندضلعی محدب طوری انتخاب شده است که، با هر دو رأس چندضلعی، یك مثلث متساوی الساقین می‌سازد. ثابت کنید، این نقطه، از رأس‌های چندضلعی، به‌یك فاصله است.

۱۷۱. آیا می‌توان عددهای ۰، ۱ و ۲ را در خانه‌های یك جدول شطرنجی ۱۰۰×۱۰۰ طوری قرار داد‌که، در هر مستطیل ۴×۳ آن، سه تا صفر، چهار تا واحد و پنج تا دو وجود داشته باشد؟

۱۷۲. مجموع‌عددهای مثبت x_1، x_2، …، x_n، برابرواحد است. s را بزرگترین عدد از بین عددهای زیر می‌گیریم:

$$\frac{x_1}{1+x_1},\ \frac{x_2}{1+x_1+x_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}$$

حداقل ممکن‌عدد s را پیدا کنید. بازای چه مقدارهایی از x_1، x_2، …، x_n، به این حداقل می‌رسیم؟

۱۷۳*. بعد از پایان یك‌دور بازی‌هاکی، معلوم شد، برای هر گروهی از تیم‌ها، می‌توان تیمی را پیدا کرد (که ممکن است جزو همین گروه تیم‌ها باشد)، به نحوی که در بازی با تیم‌های این گروه، امتیازهایی کسب کرده باشد که، تعداد آن‌ها، عددی فرد باشد. ثابت کنید، تعدادتیم‌هایی که در این دور با هم مسابقه داده‌اند، عددی زوج است. (باخت، ۰ امتیاز؛ تساوی، ۱ امتیاز و برد، ۲ امتیاز دارد.)

هفتمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۳ (کیشی‌نو)

کلاس	روز اول			روز دوم			
۸:	۱۷۴a	۱۷۵	۱۷۶	۱۸۲	۱۸۳	۱۸۴	
۹:	۱۷۴b	۱۷۷	۱۷۸	۱۷۹	۱۸۵	۱۸۶	۱۸۴
۱۰:	۱۸۰	۱۷۷	۱۸۱	۱۸۷	۱۸۸	۱۸۴	

۱۷۴. برای تعیین‌کیفیت ۱۴ سکه به قاضی مراجعه‌کردند. متخصص کشف کرد که سکه‌های اول تا هفتم تقلبی و سکه‌های هشتم تا چهاردهم، واقعی‌اند. قاضی فقط این را می‌داندکه، سکه‌های تقلبی یك وزن دارند و سکه‌های واقعی هم، هم وزن‌اند؛ در ضمن آگاه است که یك سکهٔ تقلبی از یك سکهٔ واقعی سبك‌تر است. متخصص، یك ترازو در اختیار دارد، ولی وزنه‌هایی در اختیار او نیست.

a) متخصص می‌خواهد به قاضی ثابت کندکه سکه‌های اول تا هفتم، تقلبی‌اند. چگونه می‌تواند، تنها با سه بار استفاده از ترازو، به این امر توفیق یابد؟

b) ثابت کنید، متخصص می‌تواند، با سه بار استفاده از ترازو، چیز بیشتری را ثابت کند: او می‌تواند ثابت کنید، سکه‌های اول تا هفتم تقلبی و سکه‌های هشتم تا چهاردهم واقعی‌اند.

۱۷۵. ثابت کنید، عدد نه رقمی که، در آن، از همهٔ رقمها به جز صفر استفاده شده است و، در ضمن، رقم آخر آن برابر ۵ است، نمی‌تواند مجذور یك عدد درست باشد.

۱۷۶. n نقطه داده شده است و $n>4$. ثابت کنید، می‌توان این نقطه‌ها را، با پیکان چنان به هم وصل کرد که، از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، به کمك یك یا دو پیکان رسید (هر دو نقطه را می‌توان با پیکانی به هم وصل کرد که تنها یك جهت داشته باشد؛ حرکت روی هر پیکان، تنها درمسیری ممکن است که با جهت آن مشخص شده است).

۱۷۷. زاویهٔ به‌راس O و دایره‌ای که بر ضلع‌های این زاویه در نقطه‌های A و B مماس است، رسم شده‌اند. از نقطهٔ A، نیم‌خط راستی موازی OB رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند. پاره‌خط راست OC دایره را در نقطهٔ دیگر E قطع کرده است و خطهای راست AE و OB در نقطهٔ K به‌هم رسیده‌اند. ثابت کنید: $OK=KB$.

۱۷۸. عددهای حقیقی a، b و c چنان‌اند که، برای هر مقدار x واقع در بازهٔ $[-1, 1]$، این نابرابری برقرار است:

$$|ax^2+bx+c|\leqslant 1$$

ثابت کنید، به ازای همین مقدارهای x، نابرابری زیر هم برقرار است:

$$|cx^2+bx+a|\leqslant 2$$

۱۷۹. فدراسیون تنیس، به تنیس‌بازان عضو خود، شماره داده است: به بهترین بازی‌کن، شمارهٔ اول، به نفر بعدی از لحاظ قدرت بازی، شمارهٔ دوم وغیره. می‌دانیم، تنیس بازی که با رقیب خود، بیش از ۲ شماره اختلاف داشته باشد، همیشه پیروز می‌شود. دوره‌ایی از مسابقه، که در آن ۱۰۲۴

تنیس‌باز شرکت کرده بودند، به شیوهٔ المپیك برگزار شد: بنا بر قرعه، هر دو نفر با هم بازی می‌کنند، بعد برندگان دور اول در گروه‌های دونفری به‌زورآزمایی می‌پردازند و غیره، به‌نحوی که تعداد بازی‌کنان هر دور، نصف تعداد بازی‌کنان دور قبل است. به این ترتیب، بعد ازده دور، قهرمان مسابقه معلوم می‌شود. قهرمان مسابقه، حداکثر چه شماره‌ای می‌تواند داشته باشد؟

۱۸۰. سه جمله‌ای $f(x)=ax^2+bx+c$ چنان است که، معادلهٔ $f(x)=x$، جواب حقیقی ندارد. ثابت کنید، معادلهٔ $f(f(x))=x$ هم، دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

۱۸۱. روی کاغذ شطرنجی نامتناهی سفیدی، n خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. درهر لحظهٔ زمانی $t=1, 2, \ldots$، به‌طور هم‌زمان و طبق قاعدهٔ زیر، خانه‌های صفحهٔ شطرنجی، تغییر رنگ می‌دهند: هرخانهٔ K به رنگی درمی‌آید که دست‌کم دو خانه ازسه خانهٔ K، خانهٔ سمت چپ و خانهٔ سمت راست آن، در مرحلهٔ قبل، آن رنگ را داشته‌اند (اگر درمرحلهٔ قبل، دو خانه سفید بوده‌اند، K به رنگ سفید در می‌آید و اگر دو خانه در مرحلهٔ قبل، رنگ سیاه داشته‌اند، K سیاه می‌شود).

a) ثابت کنید، بعد از گذشت زمان معینی، روی صفحهٔ شطرنجی، خانهٔ سیاه باقی نمی‌ماند.

b) ثابت کنید، از بین رفتن خانه‌های سیاه، به بعد از لحظهٔ $t=n$، موکول نمی‌شود.

۱۸۲. روی ضلع‌های مثلث ABC، که زاویه‌هایی حاده دارد، سه مثلث متشابه با هم AC_1B، BA_1C و CB_1A را، در بیرون مثلث و با زاویه‌های حاده ساخته‌ایم؛ در ضمن

$$\widehat{AB_1C}=\widehat{ABC_1}=\widehat{A_1BC}\ ،\ \widehat{BA_1C}=\widehat{BAC_1}=\widehat{B_1AC}$$

a) ثابت کنید، دایره‌های محیطی مثلث‌های AC_1B، BA_1C و CB_1A، در یك نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

b) ثابت کنید، خطهای راست AA_1، BB_1 و CC_1 هم، در همین

نقطه به‌هم می‌رسند.

۱۸۳. N نفر با هم آشنا نیستند. می‌خواهیم بعضی از آن‌ها را طوری با هم آشنا کنیم که، وقتی سه نفر را به دلخواه از بین این N نفر انتخاب کردیم، تعداد آشناهای آن‌ها، یکسان نباشد. ثابت کنید، برای هر N، می‌توان به‌این نتیجه رسید.

۱۸۴. شاه صفحهٔ 8×8 شطرنج را طی کرده است، به نحوی که در هر میدان درست یکبار بوده است و با حرکت آخر به میدان اولیه برگشته است (شاه، طبق قانون عادی شطرنج حرکت می‌کند). وقتی که مرکز میدان‌هایی را که شاه پشت سر هم پیموده است، به هم وصل کردیم، خط شکسته بسته‌ای به دست آمد که خودش را قطع نکرده است.

a) مثالی پیدا کنید که شاه درست ۲۸ حرکت، در جهت افقی و قائم، انجام داده باشد.

b) ثابت کنید، که شاه نمی‌تواند کمتر از ۲۸ حرکت داشته باشد.

c) حداکثر و حداقل طول مسیری که شاه طی می‌کند، چقدر است، به شرطی که طول ضلع یك خانهٔ صفحهٔ شطرنج، برابر واحد باشد؟

۱۸۵. مثلثی با مساحت واحد و ضلع‌های a، b و c داده شده است. می‌دانیم:

$$a \geqslant b \geqslant c$$

ثابت کنید: $b \geqslant \sqrt{2}$.

۱۸۶. یك nضلعی محدب، که هیچ دو ضلعی از آن با هم موازی نیستند، و نقطه‌ای در درون آن داده شده است. ثابت کنید، از این نقطه، نمی‌توان بیش از n خط راست رسم کرد، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، مساحت n ضلعی را نصف کند.

۱۸۷. x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$$

۱۸۸. ۴ نقطه، غیرواقع بر یك صفحه، در فضا داده شده‌اند. چند متوازی‌السطوح وجود دارد، به نحوی که، این چهار نقطه، راس‌هایی از آن باشند؟

هشتمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۴ (ایروان)

کلاس	روز اول			روز دوم			
:۸	۱۸۹a,b,c	۱۹۰	۱۹۱	۱۹۷	۱۹۸	۱۹۹	۲۰۰a
:۹	۱۹۰	۱۹۲	۱۸۹d	۱۹۳	۲۰۱	۲۰۲	۲۰۰b
:۱۰	۱۹۴	۱۹۵	۱۹۶	۱۹۳	۲۰۳	۲۰۴	۲۰۰b

۱۸۹. روی‌هر یك از کارت‌ها عدد «۱+» یا «۱−» نوشته شده است. سه کارت را انتخاب می‌کنیم و می‌پرسیم: حاصل ضرب عددهای روی این کارت‌ها، چقدر است؟ (از خود عددها، اطلاعی به ما نمی‌دهند.)

حداقل چندبار باید این پرسش را تکرار کرد تا حاصل‌ضرب عددهای روی همهٔ کارت‌ها را بدانیم، به شرطی که تعداد کارت‌ها: a) ۳۰؛ b) ۳۱؛ c) ۳۲ باشد؟ در هر حالت ثابت کنید، با تعداد کمتری پرسش، نمی‌توان به نتیجه رسید.

d) روی محیط دایره‌ای، ۵۰ عدد نوشته شده است که، هرکدام از آن‌ها، برابر «۱+» یا «۱−» است. می‌خواهیم، حاصل‌ضرب همهٔ این عددها را بدانیم. با هر پرسش، می‌توان به حاصل‌ضرب سه عدد مجاور هم، پی برد، حداقل چند پرسش لازم است؟

۱۹۰. بین عددهای به صورت 5^l-36^k، کوچکترین عدد را، از لحاظ قدرمطلق، پیدا کنید (k و l، عددهایی طبیعی‌اند). ثابت کنید، عددی را که پیدا کرده‌اید، به واقع کوچکترین است.

۱۹۱. a) هر یك از ضلع‌های یك شش ضلعی، محدب، طولی بزرگتر از واحد دارد. آیا همیشه، در این شش‌ضلعی، می‌توان قطری با طول بزرگتر از ۲ پیدا کرد؟

b) در شش‌ضلعی محدب $ABCDEF$، طول هر یك از قطرهای AD، BE و CF از ۲ بیشتر است. آیا، در این شش‌ضلعی، همیشه می‌توان ضلعی با طول بزرگتر از واحد پیدا کرد؟

۱۹۲. دو دایره، به شعاع‌های R و r، مماس خارج‌اند. ذوزنقه‌های مختلف $ABCD$ را طوری می‌سازیم که، هر یك از دایره‌ها، بر هر دو ساق و یکی ازقاعده‌های ذوزنقه مماس باشند. حداقل طول ساق AB چقدراست؟

***۱۹۳.** روی صفحه، n بردارداده شده است که طول هرکدام ازآن‌ها، برابر واحد است. مجموع این n بردار، برابر بردار صفر شده است. ثابت کنید، این بردارها را می‌توان طوری شماره گذاری کرد که به ازای هر $k=1, 2, \ldots, n$، مجموع k بردار اول، طولی بیشتر از ۲ نداشته باشد.

۱۹۴. به‌ازای کدام عددهای حقیقی a، b و c، برابری

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=$$
$$=|x|+|y|+|z|$$

برای همهٔ عددهای حقیقی x و y و z برقرار است؟

۱۹۵. مربع $ABCD$ مفروض است. نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب، بر- ضلع‌های AB و BC واقع‌اند و در ضمن $BP=BQ$. H را پای عمودی می‌گیریم که از B برپاره‌خط راست PC رسم شده است. ثابت کنید، زاویهٔ DHQ برابر ۹۰ درجه است.

۱۹۶. چندنقطهٔ قرمز و چندنقطهٔ آبی‌داده شده است. برخی‌ازآن‌ها را، با پاره‌خط‌های راست به هم وصل کرده‌ایم. یك نقطه را درنظرمی‌گیریم ودر حالتی‌که بیش ازنیمی ازپاره‌خط‌های راست متصل به‌آن، به‌نقطه‌هایی منتهی شده باشندکه رنگی‌مخالف‌رنگ نقطهٔ مفروض دارند،نقطهٔ مفروض را «ویژه» می‌نامیم. تصمیم می‌گیریم، نقطه‌های «ویژه» را تغییررنگ بدهیم: درهر گام، یکی از نقطه‌های ویژه را انتخاب می‌کنیم و رنگ آن را، به‌رنگ مخالف خود درمی‌آوریم. ثابت‌کنید، بعد ازچندگام، نقطهٔ «ویژه‌ای» باقی‌نمی‌ماند.

۱۹۷. عددهای طبیعی n و k را طوری پیدا کنیدکه عدد n^n دارای

k رقم و عدد k^k دارای n رقم باشد.

۱۹۸. روی ضلع‌های مجاور بـه زاویهٔ قائمـهٔ CA و CB از مثلث قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین ABC، به ترتیب، نقطه‌های D و E را طوری انتخاب کرده‌ایم کـه داشته باشیم: $CD=CE$. امتداد عمودهای وارد از نقطه‌های D و C بـر خط راست AE، بـه ترتیب، وتر AB را در K و L قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $KL=LB$.

۱۹۹. دو نفر، روی صفحهٔ شطرنجی ۸×۸، «موش و گـربه» بازی می‌کنند. اولی یك مهره دارد(موش)، ودومی دارای چندمهره است (گربه‌ها). حرکت همهٔ مهره‌ها، یکسان است: به‌راست، به‌چپ، به‌طرف بالا و به‌طرف پایین؛ و در هرحرکت یك خانه. اگر موش به‌یکی ازخانه‌های کناری برسد، می‌تواند از صفحه به بیرون بپرد. اگر موش و گربه دریك خانه قرارگیرند، گربه، موش را می‌خورد.

بازی‌کن‌ها، به نوبت، حرکت می‌کنند؛ در ضمن دومی، در هرحرکت خود، همهٔ گربه‌ها را با هم حرکت می‌دهد (البته، گربه‌های مختلف، می‌توانند در جهت‌های مختلف حرکت کنند). حرکت اول را، مـوش آغاز می‌کند. کوشش موش در این است که از صفحه بیرون بپرد، و گـربه‌ها می‌خواهند، قبل از فرارموش، به‌او دسترسی پیداکنند.

a) تعداد گربه‌ها را، دو تا می‌گیریم. موش دریکی از خانه‌ها ــ البته، به جز خانه‌های کناری، قرار دارد. آیا می‌توان گربه‌ها را در کناره‌های صفحه طوری جا دادکه آن‌ها، بتوانند موش را بخورند؟

b) سه گربه داریم، ولی موش می‌تواند، بار اول، دو حرکت متوالی انجام دهد. ثابت کنید، گربه‌ها در هـر نقطه‌ای باشند، موش می‌تواند خود را از دست آن‌ها نجات دهد.

۲۰۰. a) ثابت کنید، عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۳۲ را می‌توان طوری ردیف کرد که، برای هردو عددی از این‌ردیف، نصف‌مجموع آن‌ها، برابر با هیچ کدام از عددهای واقع در بین آن‌ها، نباشد.

b) آیا صد عدد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰ را می‌توان طوری ردیف کرد که، نصف مجموع هر دو عدد دلخواه از این ردیف، برابر با هیچ کدام از عددهای واقع در بین آن‌ها، نباشد؟

۲۰۱. عدد سه رقمی A دارای این ویژگی است: اگر واسطهٔ حسابی همهٔ عددهایی را پیدا کنیم کـه از عدد A و با جابه‌جا کردن رقم‌های آن به دست آمده‌اند، دوباره خود عدد A به دست می‌آید. همهٔ عددهای A را پیدا کنید.

۲۰۲. چندضلعی محدبی مفروض است و در آن، نمی‌توانیم هیچ‌کدام از مثلث‌های به مساحت واحد را جا بدهیم. ثابت کنید، این چندضلعی را می‌توان در مثلثی با مساحت ۴ جاداد.

۲۰۳. تابـع f، در بازهٔ $1 \geqslant x \geqslant 0$ داده شده است. می‌دانیم، این تابع، غیرمنفی است و در ضمن $f(1)=1$. به جز این، برای هر دو عدد x_1 و x_2، با شرط $x_1 \geqslant 0$، $x_2 \geqslant 0$ و $x_1+x_2 \leqslant 1$، داریم:

$$f(x_1+x_2) \geqslant f(x_1)+f(x_2)$$

a) ثابت کنید، برای هر تابع f از این گونه، به ازای هر مقداری از x، نابرابری $f(x) \leqslant 2x$ بر قرار است.

b) آیا درست است که، برای هر مقدار x

$$f(x) \leqslant 1/9x$$

۲۰۴. مثلث ABC با مساحت واحدداده شده است. A_1، B_1 و C_1 را، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های BC، CA و AB می‌گیریم. اگـر K، L و M، به ترتیب، نقطه‌هایی واقع بر پاره‌خط‌های راست AB_1، CA_1 و BC_1 باشند، بخش مشترک مثلث‌های $A_1B_1C_1$ و KLM، چه مقـدار مساحتی می‌تـواند داشته باشد؟

نهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۵ (ساراتوف)

کلاس	روز اول				روز دوم		
:۸	۲۰۵a	۲۰۶	۲۰۷	۲۰۸a	۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵
:۹	۲۰۹	۲۰۶	۲۱۰	۲۰۸b	۲۱۶	۲۱۵	۲۱۷
:۱۰	۲۱۱	۲۱۲	۲۰۵b	۲۰۸	۲۱۴	۲۱۸	۲۱۹

۲۰۵. a) مثلث ABC را، دور مرکز دایرهٔ محاطی آن، بـه اندازهٔ زاویه‌ای کوچکتر از ۱۸۰ درجه، دوران داده‌ایم تا مثلث $A_1B_1C_1$ به دست آید. پاره‌خط‌های راست AB و A_1B_1 در نقطهٔ C_2، پاره خط‌های راست BC و B_1C_1 در نقطهٔ A_2 و پاره‌خط‌های راست CA و C_1A_1 درنقطهٔ B_2 یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، دو مثلث $A_2B_2C_2$ و ABC متشابه‌اند.

b) چهارضلعی $ABCD$ را که در دایره‌ای محـاط شده است، دور مرکزدایرهٔ محیطی‌آن، به‌اندازهٔ زاویه‌ای کمتر از ۱۸۰ درجه دوران‌داده‌ایم تا چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ بدست آید. محل برخورد خط‌های‌راست AB و A_1B_1، BC و B_1C_1، CD و C_1D_1، DA و D_1A_1 را پیدامی‌کنیم. ثابت کنید، چهار نقطهٔ اخیر، راس‌های یك متوازی‌الاضلاع‌اند.

۲۰۶. مثلث ABC به مساحت واحد داده شده‌است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، اولـی نقطهٔ X را روی ضلع AB انتخاب می‌کند، بعد دومی نقطهٔ Y را روی BC و، سپس اولی نقطهٔ Z را روی AC در نظر می‌گیرند. اولی می‌خواهد، تا آن جا که ممکن‌است، مساحت مثلث XYZ بیشترباشد، در حالی که دومی علاقه‌مند است به حداقل مساحت برای این مثلث برسد. اولی، حداکثر بچه مساحتی دست می‌یابد؟

۲۰۷. رأس‌های یك ۳۲ ضلعی محدب در نقطه‌های گرهی یك صفحهٔ کاغذ شطرنجی‌قرار دارند. اگر طول ضلع هرخانه برابر واحد باشد،حداقل محیط ۳۲ ضلعی چقدر است؟

۲۰۸*. a) می‌خواهیم دریك جدول مربعی 7×7، مرکزهای k خانه را طوری علامت بگذاریم که، اگر به هر ترتیبی چهار نقطهٔ دلخواه از بین

آن‌ها انتخاب کنیم، رأس‌های یك مستطیل با ضلع‌هایی موازی ضلع‌های مربع نباشند. k حداکثر چه عددی می‌تواند باشد تا به این امر توفیق یابیم؟

b) همین مسأله را در مورد مربع ۱۳×۱۳ خانه‌ای حل کنید.

۲۰۹. درشش‌ضلعی‌محدب $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$، وسط قطرهای A_6A_2، A_1A_3، A_2A_4، A_3A_5، A_4A_6 و A_5A_1 را، به ترتیب، B_1، B_2، B_3، B_4، B_5 و B_6 می‌نامیم. ثابت کنید، اگر شش ضلعی $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ محدب باشد، مساحت آن، برابر $\frac{1}{4}$ مساحت شش ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ است.

۲۱۰. ثابت کنید، بارقم‌های ۱ و ۲ می‌توان 2^{n+1} عدد ساخت، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها دارای 2^n رقم باشد و، در ضمن، هر دو عدد، دست کم در 2^{n-1} مرتبهٔ خود، با هم اختلاف داشته باشند.

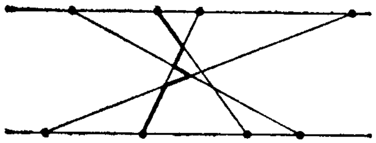
۲۱۱. مجموعه‌ای متناهی از چندضلعی‌ها، در صفحه داده شده است، به نحوی که هردو تا از آن‌ها، دارای نقطهٔ مشترکی هستند. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که همهٔ این چندضلعی‌ها را قطع می‌کند.

۲۱۲. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a، b و c، این نابرابری برقرار است:

$$a^3+b^3+c^3+3\,abc>ab(a+b)+bc\,(b+c)+ac\,(a+c)$$

۲۱۳. سه مگس روی ضلع‌های مثلث ABC طوری حرکت می‌کنند که، مرکز ثقل مثلثی که تشکیل می‌دهند، تغییرجا نمی‌دهد. ثابت کنید، این نقطه برمرکز ثقل مثلث ABC منطبق است، به شرطی که بدانیم، یکی از مگس‌ها، روی تمامی محیط مثلث حرکت می‌کند. (مرکز ثقل یك مثلث، درمحل برخورد میانه‌های آن واقع است.)

۲۱۴. روی تختهٔ سیاه، چندصفر، ۱ و ۲ نوشته شده است. درهر گام، دو عددنابرابر را پاك می‌کنیم و، به جای آن‌ها، عدد سوم را می‌نویسیم (به جای ۰ و ۱، عدد ۲؛ به جای ۰ و ۲، عدد ۱ و به جای ۱ و ۲، عدد ۰). ثابت کنید، اگر بعداز چندگام، تنها یك عدد باقی بماند، این عدد بستگی به این



شکل ۱۰

ندارد که گام‌ها را به چه ردیفی برداشته‌ایم.

۲۱۵. روی صفحه، نواری داده شده است که دو مرز آن را، دو خط موازی با هم تشکیل می‌دهند. n خط راست، این نوار را قطع کرده است. هردوخط راست، در درون نوار، یکدیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه خط راستی در یك نقطه به هم نمی‌رسند. همهٔ مسیرهایی را در نظر می‌گیریم که، با آغاز از کنارهٔ پایین نوار و روی این خط‌های راست، تا کنارهٔ بالای نوار امتداد دارند. این مسیرها، باید دارای این ویژگی باشند: ضمن عبور از مسیر، همیشه رو به‌بالا برویم؛ وقتی که به یك نقطه برخورد می‌رسیم، باید روی‌خط راست دیگری حرکت کنیم (شکل ۱۰). ثابت کنید، بین این‌مسیرها

a) دست‌کم $\frac{n}{2}$ مسیر، بدون برخورد با یکدیگر وجود دارد؛

b) مسیری وجود دارد که شامل دست‌کم n پاره خط راست است؛

c*) مسیری وجوددارد که شامل بیش از $\frac{n}{2}+1$ پاره خط راست‌نیست؛

d*) مسیری وجود دارد که از طریق هر n خط راست می‌گذرد.

[در کلاس‌هشتم، بخش‌های a، b) و d) برای حالت $n=20$؛ و برای کلاس نهم، بخش‌های b)، c) و d) درحالت کلی خواسته شده است.]

۲۱۶. عددهای طبیعی k را طوری پیدا کنید که وقتی مکعب به ضلع k را به مکعب‌های به‌ضلع واحد تقسیم می‌کنیم، بتوان مکعب‌های واحد را طوری به رنگ‌های سیاه و سفید در آورد که، هر مکعب کوچك، درست مجاور با دو مکعب دیگر هم رنگ خود باشد. (دو مکعب را وقتی مجاور هم می‌دانیم که در یك وجه مشترك باشند.)

۲۱۷. چندجمله‌ای $P(x)$

a) با ضریب‌های طبیعی؛

b) با ضریب‌های درست

داده شده است. مجموع رقم‌های عدد $P(n)$ را، در دستگاه عدد نویسی به مبنای ده، a_n می‌نامیم. ثابت کنید، عددی پیدا می‌شود که در دنبالهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n، ...، بی‌نهایت بار تکرار شده است.

۲۱۸. در مسابقهٔ قهرمانی جهان و اروپا، ۲۰ تیم شرکت کرده‌اند. در بین این تیم‌ها، k تیم اروپایی وجود دارد که نتیجهٔ مسابقه‌های بین آن‌ها، به حساب مسابقهٔ اروپائی گذاشته می‌شود. مسابقه دریك دور انجام می‌شود.

حداکثر k را طوری پیدا کنیدکه، به ازای آن، بتوان این نتیجه را به‌دست آورد: تیمی که بیشترین امتیاز را در مسابقه اروپایی به دست‌آورده است، کمترین امتیاز را درمسابقهٔ جهانی به‌دست آورده باشد؛ به‌شرطی که

a) این مسابقه در هاکی باشد و تساوی هم به حساب آید؛

b) این مسابقه در والیبال باشد وتساوی به‌حساب نیاید؟

۲۱۹. a) عددهای حقیقی a_1، a_2، b_1، b_2 و عددهای مثبت p_1، p_2، q_1، q_2 مفروض‌اند. ثابت کنید، درجدول ۲ × ۲

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1}{p_1+q_1} & \dfrac{a_1+b_2}{p_1+q_2} \\[2ex] \dfrac{a_2+b_1}{p_2+q_1} & \dfrac{a_2+b_2}{p_2+q_2} \end{pmatrix}$$

می‌توان عددی را پیداکردکه از عدد هم‌سطر خود کمتر و از عدد هم ستون خود بیشتر نباشد.

b*) عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_m، b_1، b_2، ...، b_n و عددهای مثبت p_1، p_2، ...، p_m، q_1، q_2، ...، q_n مفروض‌اند. جدولی $m \times n$ تشکیل می‌دهیم که در برخورد سطر iام ($i=$ ۱، ۲، ...، m) با ستون jام آن ($j=$ ۱، ۲، ...، n)، عدد

$$\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$$

قرار گرفته باشد، ثابت کنید، در این جدول عددی پیدا می‌شودکه کمتر از هر عدد هم‌سطر خود و بیشتر از هر عدد هم‌ستون خود نباشد.

دهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۶ (دوشنبه)

کلاس	روز اول	روز دوم
۸:	۲۲۰ ۲۲۱ ۲۲۲a،b ۲۲۳	۲۲۹ ۲۳۰ ۲۳۱
۹:	۲۲۲b ۲۲۴ ۲۲۳ ۲۲۵	۲۳۰ ۲۳۲ ۲۳۱
۱۰:	۲۲۳ ۲۲۶ ۲۲۷ ۲۲۸ ۲۲۵	۲۳۳ ۲۳۴ ۲۳۱

۲۲۰. ۵۰ ساعتی‌که درست‌کار می‌کنند، روی میز قرار دارند. ثابت کنید، لحظه‌ای وجود داردکه، درآن، مجموع فاصله‌های مرکزمیز تا انتهای عقربه‌های دقیقه شمار، از مجموع فاصله‌های مرکز میز تا مرکز ساعت‌ها، بیشتر است.

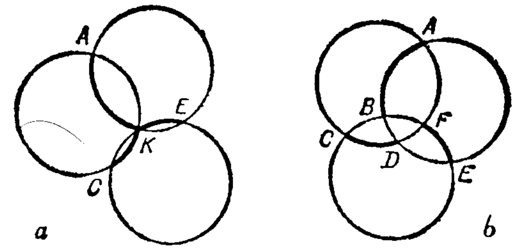
۲۲۱. ۱۰۰۰ عدد را در یك سطر پشت سر هم نوشته‌ایم. زیر این عددها، سطر دوم را با قانون زیر می‌نویسیم: زیر هر عدد a از سطر اول، عددی طبیعی را می‌نویسیم که برابر باشد با تعداد عددهای a در سطر اول. با همین روش، سطر سوم را زیرسطر دوم می‌نویسیم: زیر هر عدد b، عددی طبیعی رامی‌نویسیم که برابر باشد با تعداد عددهای b در سطر دوم. سپس، با همین روش، سطر چهارم و بعد سطر پنجم و غیره را می‌سازیم.

a) ثابت‌کنید، یکی از سطرها، با سطر بعدی خود، یکی درمی‌آید.

b) دقیق‌تر، ثابت کنید، سطر یازدهم، با سطر دوازدهم، یکی است.

c) برای سطر اول، نمونه‌ای پیدا کنید که، به ازای آن، سطرهای دهم و یازدهم برهم منطبق نباشند.

۲۲۲. سه دایره با شعاع‌های برابر، روی یك صفحه داده شده است.



شکل ۱۱

a) ثابت کنید، اگر این سه دایره، مثل شکل ۱۱، a از یک نقطه بگذرند، مجموع کمان‌های مشخص شدهٔ $\overset{\frown}{AK}$، $\overset{\frown}{CK}$ و $\overset{\frown}{EK}$ برابر است با ۱۸۰ درجه.

b) ثابت کنید، اگر سه دایره در وضع شکل ۱۱، b باشند، مجموع کمان‌های مشخص شدهٔ $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{EF}$ برابر است با ۱۸۰ درجه.

۲۲۳. عددهای طبیعی x_1 و x_2 از ۱۰۰۰۰ کوچکترند. با آغاز از این دو عدد، دنبالهٔ x_1، x_2، x_3، ...، x_n را می‌سازیم که، در آن، x_3 برابر است با $|x_1-x_2|$، x_4 برابر است با کوچکترین عدد از بین عددهای

$$|x_1-x_2|\ ،\ |x_2-x_3|\ ،\ |x_1-x_3|$$

x_5 برابرست با کوچکترین عدد از بین عددهای

$$|x_1-x_2|،|x_1-x_3|،|x_1-x_4|،|x_2-x_3|،|x_2-x_4|،|x_3-x_4|$$

و به‌همین ترتیب، برای عددهای بعدی دنباله (هرجملهٔ دنباله، برابر است با کوچکترین عدد از بین قدرمطلق تفاضل‌های دو به‌دوی جمله‌های قبلی). ثابت کنید، درهر حال $x_{21}=0$.

۲۲۴. آیا می‌توان راس‌های یک مکعب را با عددهای سه رقمی طوری شماره‌گذاری کرد که، اولاً این عددها تنها با رقم‌های ۱ و ۲ ساخته شده باشند، ثانیاً شماره‌های هر دو راس مجاور، دست‌کم در دومرتبه از رقم‌های خود با هم اختلاف داشته باشند؟

۲۲۵*. بردارهای **a**، **b**، **c** و **d** به‌مجموع ۰، روی یک صفحه داده شده‌اند.

ثابت کنید:

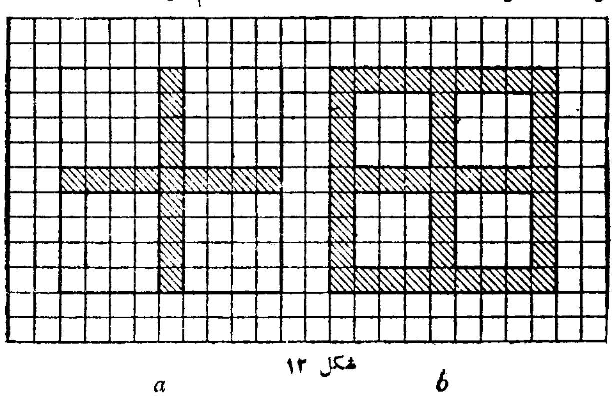
$$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+|\mathbf{c}|+|\mathbf{d}| \geqslant |\mathbf{a}+\mathbf{d}|+|\mathbf{b}+\mathbf{d}|+|\mathbf{c}+\mathbf{d}|$$

۲۲۶. در ۱۹۷۶ ضلعی منتظم، وسط همهٔ ضلع‌ها و وسط همهٔ قطرها را علامت گذاشته‌ایم. از این نقطه‌ها، حداکثر چند نقطه روی محیط یک دایره‌اند؟

۲۲۷. روی یک صفحهٔ مربع شکل کاغذ، n مستطیل رسم کرده‌ایم، به نحوی که ضلع‌های آن‌ها، موازی با ضلع‌های صفحه باشد. بین این مستطیل‌ها، هیچ دو مستطیلی، دارای نقطهٔ درونی مشترک نیستند. ثابت کنید، اگر همهٔ این مستطیل‌ها را از صفحهٔ مربعی شکل کاغذ جدا کنیم، تعداد قطعه‌های بخش باقی‌ماندهٔ کاغذ، از $n+1$ تجاوز نمی‌کند.

۲۲۸. روی سه جادهٔ مستقیم، سه پیاده، با سرعت‌هایی ثابت حرکت می‌کنند. در لحظهٔ آغاز حرکت، این سه نفر، روی یک خط راست نیستند. ثابت کنید آن‌ها نمی‌توانند، بیش از دو بار، روی یک خط راست قرار گیرید.

۲۲۹. روی صفحهٔ شطرنجی ۹۹ × ۹۹، شکلی را در نظر گرفته‌ایم (این شکل، در بخش‌های a، b و c متفاوت است). در هر خانهٔ شکل Φ، حشره‌ای قرار دارد. در لحظه‌ای، حشره‌ها می‌پرند و دوباره در خانه‌های همان شکل می‌نشینند؛ در ضمن، ممکن است در یک خانهٔ شکل، چند حشره بنشینند. هر دو حشره‌ای که در خانه‌های مجاور هم قرار دارند، بعد از پرواز،



شکل ۱۲

یا دوباره در دوخانهٔ مجاور می‌نشینند و یا هردو در یك خانه جا می‌گیرند. (دو خانه را، وقتی مجاور هم به حساب می‌آوریم که یك ضلع یا یك رأس مشترك داشته باشند.)

a) فرض کنید، شکل Φ، «صلیب مرکزی» باشد، یعنی شکلی که شامل خانه‌های افقی و خانه‌های قائم وسط صفحهٔ شطرنجی است (شکل ۱۲، a). ثابت کنید، دراین حالت، حشره‌ای وجود دارد که یا به‌جای خود برمی‌گردد و یا به‌خانهٔ مجاور می‌پرد.

b) آیا این حکم، برای حالتی که Φ به شکل «چارچوب پنجره‌ای» باشد، یعنی وقتی‌که شامل صلیب مرکزی و همهٔ خانه‌های کناری صفحه باشد، (شکل ۱۲، b)، بازهم درست است؟

c*) آیا حکم، برای حالتی که شکل Φ، تمامی صفحه را فرا گرفته باشد، درست است؟

۲۳۰. مثلث را «بزرگ» می‌نامیم، وقتی‌که طول هر ضلع آن ازواحد بیشتر باشد. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، با طول ضلع ۵، داده شده است. ثابت کنید:

a) از مثلث ABC. می‌توان ۱۰۰ مثلث «بزرگ» جدا کرد؛

b) مثلث ABC را می‌توان، به‌طورکامل، دست‌کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» تقسیم کرد.

c*) مثلث ABC را می‌توان دست‌کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» طوری تقسیم کرد که، هر دو مثلث «بزرگ» یا متقاطع نباشند، یا تنها یك راس مشترك داشته باشند و یا ضلع یکی از دو مثلث، ضلع دیگری هم باشد (این نوع تقسیم را، مثلث‌بندی گویند.)

d*) مساله‌های b) و c) را، برای مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۳ حل کنید.

۲۳۱. عددطبیعی n مفروض است. دنبالهٔ عددهای طبیعی $a_1, a_2, \ldots, a_k$ را، برای عدد n $(k \geqslant n)$، «عام» می‌نامیم، وقتی‌که بتوان از آن، با خط‌زدن بعضی از جمله‌ها، هـر تبدیلی از عددهای ۱، ۲، ...، n را به دست آورد

(یعنی، هر دنباله‌ای از n عدد که، در آن، هر یك از عددهای ۱، ۲، ...، n یکبار آمده باشد). مثلاً دنباله

(۱، ۲، ۳، ۱، ۲، ۱، ۳)

برای $n=3$، یك دنبالهٔ «عام» است، ولی دنبالهٔ

(۱، ۲، ۳، ۲، ۱، ۳، ۱)

برای $n=3$، عام نیست، زیرا با هر حذفی، نمی‌تـوان تبدیل (۳، ۱، ۲) را ازآن به دست آورد. هدف این مساله آن است‌که برای به دست‌آوردن تعداد جمله‌های کوتاه‌ترین دنبالهٔ عام (با مفروض بودن n)، برآوردی پیدا کنیم.

a) نمونه‌ای از یك دنبالهٔ عام شامل n^2 جمله بدهید.

b) نمونه‌ای از دنبالهٔ عام شامل n^2-n+1 جمله پیداکنید.

c*) ثابت کنید، هر دنبالهٔ عام، دست کم دارای $\frac{1}{2}n(n+1)$ جمله است.

d*) ثابت کنید، به ازای $n=4$، کوتاه‌ترین دنبالهٔ عام، از ۱۲ جمله تشکیل شده است.

e*) تحقیق کنید، برای عدد مفروض n، چگونه می‌توان، کوتاه‌ترین دنبالهٔ عام را پیداکرد. (هیأت داوران مسابقه می‌توانند، دنبالهٔ عام را، برای هر n، با n^2-2n+4 جمله بسازد.)

۲۳۲. n عدد حقیقی روی محیط دایره نوشته شده است؛ مجموع این n عدد، برابر صفر و یکی از آن‌ها برابر واحد است.

a) ثابت کنید، دو عدد مجاور وجود دارد کـه دست کم به اندازهٔ $\frac{4}{n}$ باهم اختلاف دارند.

b*) ثابت کنید، عددی وجود دارد که با واسطهٔ حسابی دوعدد مجاور

خود، دست‌کم به اندازهٔ $\frac{۸}{n^۲}$ اختلاف دارد.

c*) ارزیابی بخش b) را می‌توان بهتر کرد. سعی کنید، به جای عدد ۸، عدد بزرگتری قراردهید، به نحوی که حکم مساله برای همهٔ عددهای طبیعی n برقرار باشد.

d*) ثابت کنید، برای $n=۳۰$، می‌توان عددی روی محیط دایره پیدا کرد که، دست کم، به اندازه $\frac{۲}{۱۱۳}$ با واسطهٔ حسابی دو عدد مجاور خود اختلاف داشته باشد. نمونه‌ای از انتخاب ۳۰ عدد روی محیط دایره بیاورید، به نحوی که اختلاف هیچ عددی با واسطهٔ حسابی دو عدد مجاور خود، بیشتر از $\frac{۲}{۱۱۳}$ نباشد.

۲۳۳. در رأس‌های n ضلعی منتظم به مرکز O، عددهای $(۱+)$ و $(۱-)$ را قرارداده‌ایم. در گام اول، تصمیم می‌گیریم علامت همهٔ عددهایی را که در رأس‌های یك k ضلعی منتظم به مرکز O قرار دارند، عوض کنیم (در ضمن، پاره خط راستی را هم که از O می‌گذرد، یك دو ضلعی به مرکز O به‌حساب می‌آوریم). ثابت کنید. درحالت‌های a)، b) و c)، می‌توان انتخاب اولیهٔ $(۱+)$ و $(۱-)$ را طوری در نظر گرفت که، با برداشتن هر چندگام، به حالتی که همهٔ عددها $(۱+)$ باشند، نرسیم:

a) $n=۱۵$؛

b) $n=۳۰$؛

c*) n، هرعدد دلخواه بزرگتر از ۲؛

d*) سعی کنید، برای عدد دلخواه n، حداکثر $K(n)$، تعداد ترتیب‌های مختلف $(۱+)$ و $(۱-)$ را پیدا کنید که، در بین آن‌ها، نتوان یکی را از دیگری، با هرچندگام، به‌دست آورد. مثلاً ثابت کنید: $K(۲۰۰)=۲^{۸۰}$.

۲۳۴*. روی کرهٔ به شعاع واحد، دایرهٔ عظیمه‌ای را رسم کرده‌ایم که آن را «استوا» می‌نامیم. به سادگی می‌توانیم، اصطلاح‌های جغرافیایی

دیگر را هم به کار بریم: قطب، نصف‌النهار، مدار.

a) تابع f را، با متناظر کردن هر نقطهٔ کره با مجذور فاصلهٔ این نقطه از صفحهٔ استوا، در نظر می‌گیریم. تحقیق کنید که، این تابع، دارای ویژگی زیر است:

(*) اگر $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ انتهای سه شعاع دو به دو عمود بر هم در کره باشند، آن وقت $f(M_۱)+f(M_۲)+f(M_۳)=۱$.

در همهٔ بخش‌های بعدی، f عبارت است از تابع غیر منفی دلخواهی روی کره، به نحوی‌که در همهٔ نقطه‌های استوا به سمت صفر میل می‌کند و، در ضمن، دارای ویژگی (*) است.

b) M و N را، نقطه‌هایی از یك نصف‌النهار، واقع در بین قطب شمال و استوا فرض می‌کنیم. ثابت کنید، اگر نقطهٔ M، دورتر از نقطهٔ N، نسبت به صفحهٔ استوا باشد، آن وقت $f(M)>f(N)$.

c) M و N را نقطه‌های دلخواهی از کره می‌گیریم. ثابت کنید، اگر نقطهٔ M، نسبت به نقطهٔ N، از صفحهٔ استوا دورتر باشد، آن وقت $f(M)>f(N)$.

d) ثابت کنید، اگر M و N روی یك مدار باشند، آن وقت

$$f(M)=f(N)$$

e) ثابت کنید، تابع f، بر تابعی که در بخش a) توضیح داده‌ایم، منطبق است.

یازدهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۷ (تالین)

کلاس	روز اول					روز دوم			
:۸	۲۳۵	۲۳۶	۲۳۷b	۲۳۸		۲۴۳	۲۴۴a,b	۲۴۵	۲۴۶
:۹	۲۳۷a	۲۳۹	۲۳۵	۲۴۰		۲۴۷	۲۴۸	۲۴۹	۲۵۰
:۱۰	۲۳۷a	۲۳۹	۲۴۱	۲۴۲	۲۳۵	۲۵۱	۲۴۴ a,c−e	۲۴۶	

۲۳۵. یك خط شکستهٔ بسته، کـه خودش را قطع نکرده است، روی صفحه‌داده‌شده است؛ هیچ سه رأسی از خط شکسته، روی یك خط راست نیستند. دوضلع غیرمجاور آن را، «خاص» می‌نامیم، وقتی که ادامهٔ یکی از آن‌ها، دیگری را قطع کند. ثابت کنید، تعداد جفت ضلع‌های خاص، عددی زوج است.

۲۳۶. چند نقطه، که بر یك خط راست واقع نیستند، روی صفحه در نظر می‌گیریم و روی هرکدام از آن‌ها، عددی می‌نویسیم. می‌دانیم، اگرخط راستی از دو یا چند نقطه بگذرد، مجموع همهٔ عددهای واقع بر آن، برابر صفرمی‌شود. ثابت کنید همهٔ عددها برابر صفرند.

۲۳۷. a) مثلث‌های T_1 و T_2 در دایره‌ای محاط‌اند، درضمن، راس‌های مثلث T_1 در وسط کمان‌هایی از دایره قرار دارند کـه به وسیلهٔ راس‌های مثلث T_2 به وجود آمده‌اند. ثابت کنید، در شش‌ضلعی $T_1 \cap T_2$، قطرهایی که راس‌های روبه‌رو را بههم وصل می‌کنند، باضلع‌های مثلث T_1 موازی‌اند و در یك نقطه به هم می‌رسند.

b) پاره خط راستی که وسط کمان‌های AB و AC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را به هم وصل می‌کند، ضلع‌های AB و AC را در نقطه‌های D و K قطع می‌کند. ثابت کنید. نقطه‌های A، D، K و O (مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC)، راس‌های یك لوزی‌اند.

۲۳۸. روی محیط دایره‌ای، چند کارت کـوچك سیاه و سفید قـرار داده‌ایم. دو نفر، به نوبت، این عمل را انجام می‌دهند: اولی همهٔ کارت‌های سیاهی را کـه در مجاورت خود (ولو در یك طرف) کارت سفیدی دارند بر می‌دارد و، سپس، دومی همهٔ کارت‌های سفیدی را برمی‌دارد که درمجاورت خودکارت سیاهی دارند. این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دهند تا همهٔ کارت‌های باقی مانده، از یك رنگ باشند.

a) فرض کنید، در ابتدا، ۴۰ کارت وجود داشته باشد. آیا ممکن است این وضع پیش آید که بعد از آن که، هرکدام از دو نفر دوحرکت انجام دادند، روی محیط دایره تنها یك کارت باقی بماند؟

b*) روی‌محیط دایره هزارکارت وجود دارد. حداقل چندحرکت باید

انجام شود تا روی محیط دایره، فقط یك کارت باقی بماند؟

۲۳۹. دنبالهٔ عددی نامتناهی $\{a_n\}$ داده شده است. می‌دانیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$$

ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

۲۴۰. در یك کشور، از هر شهر می‌توانیم به هر شهر دیگری برویم، بدون این که از شهرهای دیگر عبور کنیم. قیمت بلیت مسافرت بین هر دو شهر معلوم است. دو نوع مسافرت به همهٔ شهرها را درنظر می‌گیریم. درهر یك از این مسافرت‌ها، به هر شهر، تنها یکبار می‌رویم. در مسیری که برای مسافرت اول انتخاب می‌کنیم، از این اصل پیروی می‌کنیم: آغاز مسیر، یك شهردلخواه است؛ در هرمرحله، مسیر خود را به شهری ازشهرهای باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم که، قیمت بلیت مسافرت بـه آن جا، نسبت به قیمت بلیت مسافرت به دیگر شهرها کمترین مقدار باشد (اگـر چند شهر از این‌گونه وجـود داشته باشد، یکـی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم)؛ مسافرت را بـه همین تـرتیب ادامه می‌دهیم تا همهٔ شهرها را ببینیم. در مسیر دوم، بـرای مسافرت، باز هم آغاز حرکت را، شهری دلخواه می‌گیریم، ولی درهرمرحله، برای مسیر بعدی، شهری را انتخاب می‌کنیم که، بلیت مسافرت بهآن، نسبت به بقیهٔ شهرهای باقی‌مانده، گران‌تر باشد. ثابت کنید، مجموع قیمت بلیت‌ها در مسیر اول، از مجموع قیمت بلیت‌ها در مسیر دوم، بیشتر نیست.

۲۴۱. در هریك از راس‌های چندوجهی محدب M، سه یال بـه هم رسیده‌اند. می‌دانیم، هـروجه این چندوجهی، یك چندضلعی قابل محاط در دایره است. ثابت کنید، می‌توان کره‌ای را بر این چندوجهی محیط کرد.

۲۴۲*. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$x^{10}+*x^{9}+*x^{8}+\dots+*x^{2}+*x+1=0$$

دونفر با هم بازی می‌کنند. اولی به جای یکی ازستاره‌ها، یك عدد می‌گذارد،

بعد دومی به جای یکی از ستاره‌های باقی‌مانده یك عدد می‌گذارد، سپس دوباره نوبت به اولی می‌رسد. به نوبت جای ستاره‌ها را عدد می‌گذارند تا جایی که دیگر ستاره‌ای باقی نماند (روی هم ۹ حرکت). اگر در پایان کار، به چند جمله‌ای برسیم که ریشه‌های حقیقی نداشته باشد، اولی بازی را برده است، و اگر چند جمله‌ای حاصل، دست کم یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد، دومی بازی را برده است. آیا دومی می‌تواند، با هرنوع بازی اولی، برنده شود؟

۲۴۳. ۷ نفر پشت یك میز گرد نشسته‌اند. جلوی هرکدام از آن‌ها، یك لیوان است. در بعضی از این لیوان‌ها، مقداری شیر وجود دارد. یکی از افراد، تمامی شیر لیوان خود را در بقیهٔ لیوان‌ها، به طورمساوی، می‌ریزد. بعد، نفر سمت راست او، همین عمل را انجام می‌دهد. سپس نفر سوم در سمت راست نفردوم، شیر موجود در لیوان خود را بین بقیه، به طورمساوی، تقسیم می‌کند و غیره. وقتی که نفر آخر (هفتمین نفر) شیر خود را به طور مساوی بین بقیهٔ لیوان‌ها تقسیم کرد، معلوم شد، در هر لیوان، همان مقدار شیر وجود دارد که در ابتدا بوده است. اگر مجموع شیرهای همهٔ لیوان‌ها، برابر ۳ لیتر باشد، در آغاز کار، در هر لیوان، چقدر شیر بوده است؟

۲۴۴. عدد $2n$ رقمی را وقتی «خاص» می‌نامیم که، اولاً خود عدد مجذور کامل باشد و ثانیاً، عددهایی که از n رقم اول و، از n رقم آخر به دست می‌آیند، هردو مجذورکامل باشند (در ضمن، عدد n رقمی دوم می‌تواند با صفرآغاز شود، ولی نباید برابر صفر باشد؛ عدد n رقمی اول، نمی‌تواند با صفر آغاز شود).

a) همهٔ عددهای «خاص» دورقمی و چهاررقمی را پیدا کنید.

b) آیا عددهای شش رقمی «خاص» وجود دارد؟ (یا نمونه‌ای از این عددها بدهید و یا ثابت کنید، چنین عددهایی وجود ندارند.)

c*) ثابت کنید، دست‌کم یك عدد ۲۰رقمی «خاص» وجود دارد.

d*) ثابت کنید، تعداد عددهای «خاص» ۱۰۰ رقمی، بیشتراز ۱۰ نیست.

e*) ثابت کنید، دست‌کم، یك عدد «خاص» ۳۰ رقمی وجود دارد.

۲۴۵*. مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ از عددهای مثبت داده شده است. برای هرزیرمجموعهٔ آن، مجموع عددهایی را که در آن وجوددارد، می‌نویسیم (مجموع عددها، درزیرمجموعه‌های شامل یك، دو، ...، n جمله). ثابت کنید، همهٔ این‌عددها را می‌توان طوری به n گروه تقسیم کرد که، درهرکدام ازآن‌ها، نسبت بزرگترین عدد به کوچکترین عدد، از ۲ تجاوز نکند.

۲۴۶. هزار بلیت با شماره‌های ۰۰۰، ۰۰۱، ۰۰۲، ...، ۹۹۹ و صد جعبه با شماره‌های ۰۰، ۰۱، ۰۲، ...، ۹۹ دراختیار داریم. بلیت درجعبه‌ای انداخته می‌شود که، با حذف یکی از رقم‌های شمارهٔ بلیت، شمارهٔ جعبه به دست آید، ثابت کنید:

a) می‌توان همهٔ بلیت‌ها را در ۵۰ جعبه انداخت؛

b) همهٔ بلیت‌ها را، درکمتر از ۴۰ جعبه، نمی‌توان جا داد؛

c*) نمی‌توان همهٔ بلیت‌ها را در کمتر از ۵۰ جعبه جا داد؛

d*) شمارهٔ بلیت‌ها را چهاررقمی می‌گیریم (از ۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹) و هر بلیت را در جعبه‌ای می‌اندازیم که، شمارهٔ آن، از شمارهٔ بلیت، با حذف دو رقم آن به‌دست آید. ثابت کنید، همهٔ بلیت‌های چهاررقمی را می‌توان‌در ۳۴ جعبه جا داد.

e*) حداقل چند جعبه لازم است تا بتوان همه بلیت‌های k رقمی را در آن‌ها جا داد ($k = 4, 5, 6, \dots$)؟

۲۴۷. صفحهٔ شطرنجی مربعی با 100×100 خانه مفروض است. چند خط شکستهٔ غیر متقاطع با خود رسم کرده‌ایم که روی ضلع‌های خانه‌ها ساخته شده‌اند و، درضمن، نقطهٔ مشترکی با هم ندارند. این خط‌های شکسته، دقیقاً در داخل مربع‌اند، ولی دو انتهای آن‌ها، به مرزهای آن رسیده‌اند. ثابت کنید، به جز راس‌های مربع اصلی، گره‌های دیگری هم (در داخل یا روی مرز مربع) وجود دارند که متعلق به هیچ کدام از خط‌های شکسته نیستند (هر راس یك خانه از صفحهٔ شطرنجی را، یك گره می‌نامیم).

۲۴۸*. عددهای طبیعی $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, \dots, y_m$ مفروض‌اندو

می‌دانیم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m<mn$$

ثابت‌کنید، در برابری

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$$

می‌توان بخشی از جمله‌ها را، طوری حذف کردکه، دوباره، به یك برابری برسیم.

۲۴۹. ۱۰۰۰ مربع را روی صفحه رسم کرده‌ایم، به نحوی که، ضلع‌های آن‌ها، موازی با محورهای مختصات باشد، M را، مجموعهٔ مرکزهای این‌مربع‌ها می‌گیریم، ثابت کنید، می‌توان بخشی ازمجموعهٔ مربع‌ها را، طوری جداکردکه، هرنقطهٔ مجموعهٔ M، حداقل متعلق به‌یکی و حداکثر متعلق به‌چهارتا از مربع‌های جدا شده باشد.

۲۵۰. روی میز، یك ترازو و n وزنه، با وزن‌های مختلف، وجود دارد. وزنه‌ها را به‌نوبت، درکفه‌های ترازو قرار می‌دهیم (هربار، وزنه‌ای را از روی میز برمی‌داریم و در این یا آن کفه می‌گذاریم).

a) ثابت کنید، می‌توان وزنه‌ها را طوری ردیف کرد که، ابتداکفهٔ چپ، بعدکفهٔ راست، سپس دوباره‌کفهٔ چپ ترازو و غیره، سنگین‌تر باشد.

این دنبالهٔ نتیجه‌ها را باحرف‌های L و R نشان می‌دهیم و به‌صورت واژهٔ $LRLRLR\ldots$ می‌نویسیم. در این جا، L به معنای آن است که کفهٔ چپ سنگین‌تر است و R، به معنای سنگین‌تر بودن کفهٔ راست ترازو است.

b*) ثابت کنید، برای هر واژهٔ به طول n از حرف‌های L و R، می‌توان وزنه‌ها را به چنان ردیفی تنظیم کردکه، اگر آن‌ها را باهمان ردیف به‌نوبت در این یا آن‌کفهٔ ترازو قرار دهیم، واژهٔ مفروض، متناظر با وضع کفه‌های ترازو باشد.

۲۵۱*. چند جمله‌ای با یك متغیر x و ضریب بزرگترین درجهٔ واحد را، در نظر می‌گیریم. چند جمله‌ای‌های P و Q را، قابل جابه‌جایی

می‌نامیم، وقتی‌که چندجمله‌ای‌های $P(Q(x))$ و $Q(P(x))$، متحد با یکدیگر باشند.

a) برای هر عدد α، همهٔ چندجمله‌ای‌های $Q(x)$ را پیدا کنید که از درجهٔ سوم تجاوز نکنند و با چندجمله‌ای $P(x)=x^2-\alpha$ قابل جابه‌جایی باشند.

b) P را چندجمله‌ای از درجهٔ دوم و k را عددی طبیعی می‌گیریم. ثابت کنید، بیش از یك چندجمله‌ای درجهٔ k وجود ندارد که با P قابل جابه‌جایی باشد.

c) چند جمله‌ای‌های از درجهٔ ۴ و ۸ را پیدا کنید که با چندجمله‌ای مفروض از درجهٔ دوم، قابل جابه‌جایی باشند.

d) چندجمله‌ای‌های Q و R، با چندجمله‌ای مفروض P از درجهٔ دوم، قابل جابه‌جایی‌اند. ثابت‌کنید، این دو چند جمله‌ای نسبت به هم قابل جابه جایی‌اند.

e) ثابت کنید، دنباله‌ای نامتناهی از چندجمله‌ای‌های P_2، P_3، P_4، ...، P_k، ... وجود دارد (P_k چندجمله‌ای درجهٔ k است)، به نحوی که هر دو چندجمله‌ای دلخواه از آن، نسبت به هم قابل جابه‌جایی باشند و $p_2=x^2-2$.

دوازدهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۸ (تاشکند)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۲۵۲	۲۵۳	۳۵۴	۳۵۵	۲۶۰	۲۶۱	۲۶۲	۲۶۳
				a·b				
۹:	۲۵۲	۲۵۳	۲۵۶	۲۵۷	۲۶۰	۲۶۱	۲۶۴	۲۶۵
۱۰:	۲۵۸	۲۵۹	۲۵۵	۲۵۷	۲۶۰	۲۶۶	۲۶۷	۲۶۸
			c·d·e					

۲۵۲. نزدیك‌ترین عدد درست به $\sqrt{n}$ را a_n می‌نامیم. این مجموع را

پیدا کنید:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{1980}}$$

۲۵۳. نقطهٔ M را در درون چهار ضلعی $ABCD$ طوری در نظر می‌گیریم که $ABMD$ متوازی‌الاضلاع شود. ثابت کنید، اگر $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$، آن‌وقت $\widehat{ACD}=\widehat{BCM}$.

۲۵۴. ثابت کنید، عدد $1-1978^m$، به‌ازای هیچ عدد طبیعی m، بر عدد $1-1000^m$ بخش‌پذیر نیست.

۲۵۵. روی صفحه (یا در فضا)، مجموعهٔ متناهی K_0 داده شده است. همهٔ نقطه‌هایی را که می‌توان از راه قرینهٔ یك نقطه نسبت به‌نقطهٔ دیگر این مجموعه به‌دست آورد، به K_0 اضافه می‌کنیم و مجموعهٔ حاصل را K_1 می‌نامیم. به‌همین ترتیب، از مجموعهٔ K_1، مجموعهٔ K_2؛ از مجموعهٔ K_2، مجموعهٔ K_3 و غیره را پیدا می‌کنیم.

a) فرض کنید K_0 از دو نقطهٔ A و B به‌فاصلهٔ واحد تشکیل شده باشد. کمترین مقدار n را پیدا کنید که، به‌ازای آن، در مجموعهٔ K_n نقطه‌ای وجود داشته باشد که در فاصلهٔ ۱۰۰۰ از نقطه A باشد.

b) K_0 را مجموعه‌ای از سه نقطه بگیرید که در راس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع به‌مساحت واحد قرار دارند. مطلوب است مساحت کوچکترین چندضلعی محدبی که مجموعهٔ K_n را در بر گرفته باشد ($n=1, 2, \dots$).

در بخش‌های زیر، K_0، عبارت است ازمجموعهٔ چهارراس یك‌چهاروجهی منتظم با حجم واحد.

c) کوچکترین چندوجهی محدبی را در نظر می‌گیریم که مجموعهٔ K_1 را در بر گرفته باشد. تعداد و نوع وجه‌های این چندوجهی را پیدا کنید.

d) حجم این چندوجهی چقدر است؟

e*) حجم کوچکترین چندوجهی محدبی را پیدا کنید که مجموعهٔ K_n را در بر گرفته باشد ($n=2, 3, \dots$).

۲۵۶. دو تودهٔ چوب‌کبریت داریم. در ابتدا، در یك توده m چوب کبریت و در دیگری n چوب‌کبریت وجود دارد ($m>n$). دو نفر، به نوبت، چوب کبریت‌هایی از توده‌ها برمی‌دارند. در هر حرکت؛ می‌توان از یك توده، به‌تعداد مضربی از تعداد چوب‌کبریت‌های تودهٔ دیگر برداشت (که البته باید مخالف صفر باشد). کسی بازی را برده است که آخرین چوب‌کبریت را از یك توده بردارد.

a) ثابت کنید، اگر $m>2n$، آن وقت: کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند برد خود را تأمین کند.

b) گزارهٔ زیر به‌ازای چه‌مقداری از α درست است: اگر $m>\alpha n$ باشد، آغازکنندهٔ بازی می‌تواند برد خود را تأمین کند؟

۲۵۷*. ثابت کنید، دنبالهٔ نامتناهی‌وکران‌دار x_n وجود دارد، به نحوی که برای هر دو عدد مختلف و دلخواه m و k داشته باشیم:

$$|x_m-x_k|\geqslant\frac{1}{|m-k|}$$

۲۵۸. $f(x)=x^2-x+1$ می‌گیریم. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $m>1$، عددهای m، $f(m)$، $f(f(m))$، ...، دو به دو نسبت به هم اول‌اند.

۲۵۹. ثابت کنید، عدد A وجود دارد که، به ازای آن، می‌توان در نمودار تابع $y=A\sin x$، دست کم ۱۹۷۸ مربع دو به‌دو نابرابر محاط کرد. (مربعی‌را محاطی می‌گوییم، وقتی‌که هرچهار راس آن، روی نمودار تابع باشد.)

۲۶۰. سه‌کامپیوتر کوچك، زوج عددهای طبیعی را روی‌کارت‌ها چاپ می‌کنند. آن‌ها، طوری برنامه ریزی شده‌اند که به‌ترتیب زیر کار می‌کنند: اولی باخواندن کارت (a, b)، کارت جدید $(a+1, b+1)$ را می‌دهد؛ دومی با خواندن‌کارت (a, b)، کارت $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ را می‌دهد (دومی تنها وقتی‌کار می‌کند که a، b عددهایی زوج باشند)؛ سومی بعد از خواندن دو کارت

(a, b) و (b, c)،کارت (a, c) را می‌دهد. درضمن، کامپیوترها،کارت‌های خوانده شده را هم بر می‌گردانند. فرض کنید، در ابتدا، کارت (۵، ۱۹) را دراختیارداشته باشیم. آیا می‌توان بااستفاده ازاین سه‌کامپیوتر (به هر ردیفی)؛ a) کارت (۱، ۵۰)، b) کارت (۱، ۱۰۰) را به دست آورد؟

c) کارت اولیه را (a, b) می‌گیریم $(a<b)$ و می‌خواهیم کارت $(1, n)$ را به دست آوریم. به ازای چه مقداری از n، این کار ممکن است؟

۲۶۱. درد ایرهٔ به شعاع R، nضلعی به مساحت S را محاط کرده‌ایم. روی هر ضلع n ضلعی، نقطه‌ای را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مساحت n ضلعی که، راس‌های آن در نقطه‌های مشخص شده باشد، از $\frac{2S}{R}$ کمتر نیست.

۲۶۲. مهره‌ای در گوشهٔ صفحهٔ شطرنجی $n\times n$ قرار دارد. هر یك از دو نفری که با هم بازی می‌کنند، به نوبت، مهره را به میدان مجاور (که با میدانی که مهره در آن بود است، یك ضلع مشترك دارد) می‌برد. باردوم، نمی‌توان مهره را به‌میدانی برد که قبلاً بوده است. کسی می‌بازد که امکان حرکت نداشته باشد.

a) ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، کسی‌که بازی را آغازکرده است، می‌تواند ببرد و، اگر n فرد باشد، دومی امکان برد دارد.

b) اگر مهره، به جای گوشه،در میدان مجاور آن باشد، چه‌کسی امکان برد دارد؟

۲۶۳. روی صفحه، چند پاره‌خط راست غیرمتقاطع داده شده است، به‌نحوی که هیچ دوپاره‌خط راستی بریك امتداد نیستند. می‌خواهیم چند پاره‌خط راست دیگر رسم کنیم که هرکدام از آن‌ها، از وصل نقطه‌های انتهایی پاره‌خط‌های راست قبلی به دست آمده باشند و، روی هم، همهٔ پاره‌خط‌های راست، یك خط شکسته تشکیل دهند که خودش را قطع نکند. آیا همیشه، این کار ممکن است؟

۲۶۴. عددهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ به بازهٔ $[a, b]$ تعلق دارند که، در آن، $0<a<b$. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$$

۲۶۵*. عدد اول $p>3$ مفروض است. مجموعهٔ M را روی صفحهٔ مختصاتی. شامل نقطه‌هایی با مختصات درست (x, y)، طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$0\leqslant x<p \text{ و } 0\leqslant y<p$$

ثابت کنید، می‌توان p نقطهٔ مختلف از مجموعهٔ M را، طوری جدا کرد که، هیچ چهار نقطه‌ای از آن، راس یك متوازی‌الاضلاع و، هیچ سه نقطه‌ای از آن، روی یك خط راست نباشند.

۲۶۶*. ثابت کنید، برای هر چهاروجهی، می‌توان دو صفحه طوری پیدا کرد که، نسبت مساحت‌های دو تصویر چهاروجهی بر آن‌ها، از $\sqrt{2}$ کمتر نباشد.

۲۶۷. n عدد $a_1, a_2, \dots, a_n$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$b_k=\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k},\ (k=1, 2, \dots, n);$$

$$C=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\dots+(a_n-b_n)^2;$$

$$D=(a_1-b_n)^2+(a_2-b_n)^2+\dots+(a_n-b_n)^2$$

ثابت کنید: $C\leqslant D\leqslant 2C$.

۲۶۸*. دنبالهٔ این عددها را در نظر می‌گیریم:

$$x_n=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n$$

هرکدام از جمله‌های این دنباله، به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$$

که در آن، q_n، r_n، s_n و t_n، عددهای درستی هستند. این‌حدها را پیدا کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}$$

سیزدهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۹ (تفلیس)

کلاس	روز اول			روز دوم			
۸:	۲۶۹	۲۷۰	۲۷۱	۲۷۴	۲۷۵	۲۷۶	۲۷۷
۹:	۲۶۹	۲۷۲	۲۷۱	۲۷۸	۲۷۹	۲۸۰	۲۸۱
۱۰:	۲۷۳	۲۷۲	۲۷۱	۲۷۶	۲۷۵	۲۸۲	۲۸۳

۲۶۹. سه راس یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، روی سه‌ضلع مختلف مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین دیگری قرار دارند. حداقل نسبت مساحت‌های این دو مثلث، چقدر است؟

۲۷۰. کانگورو، روی ربع اول دستگاه مختصات Oxy به‌این ترتیب می‌جهد ($x\geqslant 0$، $y\geqslant 0$): او می‌تـواند از نقطهٔ (x, y)، به‌نقطهٔ $(x-5, y+7)$ یا بـه نقطهٔ $(x+1, y-10)$ بجهد؛ در ضمن، پرش به‌نقطه‌هایی که، در آن‌ها، یکی از مختص‌ها منفی است، مجاز نیست. کانگورو، از کدام نقطه‌های (x, y)، نمی‌تواند خود را به نقطه‌ای برساند که درفاصلهٔ بیش از ۱۰۰۰ ازمبداء مختصات باشد؟ مجموعهٔ همهٔ این نقطه‌های (x, y) را رسم و مساحت آن را پیدا کنید.

۲۷۱. در یک مجلس، هـر یک از عضوها، حداکثر سه دشمن دارد. ثابت کنید، این مجلس را می‌توان به‌دو گـروه چنان تقسیم کرد که، هر عضو مجلس، در گروه خود، بیش از یک دشمن نداشته باشد. (فرض براین است که، اگر B دشمن A باشد، A هم دشمن B است.)

۲۷۲. روی صفحهٔ کاغذ، چند عـدد نوشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، به این عددها، عدد دلخواه دیگری اضافه‌کنیم، با این شرط که، عددتازه، برابر واسطهٔ حسابی دو یا چند عدد از عددهای موجود باشد و، در ضمن، با هیچ کدام از عددهای قبلی برابر نباشد. ثابت کنید، با آغاز از دو عدد ۰ و ۱، می‌توان با تکرار عمل فوق،

a) عدد $\frac{1}{5}$ را به دست آورد؛

b*) هرعدد گویای بین ۰ و ۱ را به دست آورد.

۲۷۳. دنبالهٔ نزولی x_n، از عددهای مثبت، طوری است‌که برای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$x_1+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\dots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1$$

ثابت‌کنید، برای هرعدد طبیعی n، خواهیم داشت:

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\dots+\frac{x_n}{n}\leqslant 3$$

۲۷۴. چند نقطه روی صفحه داده شده است. برای دو نقطهٔ A و B، بردار $\overrightarrow{AB}$ را در نظر می‌گیریم؛ در ضمن، تعداد بردارهایی که از هر نقطه آغاز شده‌اند، برابر است با تعداد بردارهایی که به این نقطه ختم شده‌اند. ثابت کنید، مجموع همهٔ این بردارها، برابر بردار صفراست.

۲۷۵. حداقل چندمهره بایددرمیدان‌های‌صفحهٔ شطرنجی با اندازه‌های

a) 8×8 خانه‌ای؛

b) $n\times n$ خانه‌ای

قرار داد تا روی هـر خط راستی از مرکز یک میدان می‌گذرد و موازی با یک ضلع یا یک قطر صفحهٔ شطرنجی است، دست کم یک مهره واقع باشد؟ (مهره‌ها، در مرکز میدان‌ها قرار دارند.)

۲۷۶. x و y را، در این دستگاه پیدا کنید:

$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a, \quad \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b$$

که در آن، a و b، عددهایی مفروض‌اند.

۲۷۷. چند مربع داریم که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، برابر است با ۴. ثابت کنید، با این مربع‌ها، همیشه می‌توان مربع به‌مساحت واحد را پوشاند.

۲۷۸. ثابت کنید، برای عددهای دلخواه x_1، x_2، ...، x_n از بازهٔ [۰، ۱]، نابرابری زیر برقرار است:

$$(x_1+x_2+\dots+x_n+1)^2 \geqslant 4(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)$$

۲۷۹. عددهای طبیعی p و q نسبت به هم اول‌اند. بازهٔ [۰، ۱] را، به $p+q$ بازهٔ یکسان تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، در هریک از این بازه‌ها، به‌جز دو بازهٔ اول و آخر، درست یکی از $p+q-2$ عدد زیر قرار دارد:

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$$

۲۸۰. از نقطهٔ O واقع در فضا، ۱۹۷۹ خط راست l_1، l_2، ...، l_{1979} رسم کرده‌ایم، به نحوی که هیچ دو خط راستی برهم عمود نباشند. روی خط راست l_1، نقطهٔ A_1 را، غیراز نقطهٔ O انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، می‌توان نقطه‌های A_i را روی خط‌های راست l_i ($i=2, 3, \dots, 1979$) طوری انتخاب کرد که، ۱۹۷۹ زوج خط‌های راست زیر بر هم عمود باشند:

$$A_1A_3 \perp l_2,\ A_2A_4 \perp l_3,\ \dots,\ A_{i-1}A_{i+1} \perp l_i,\ \dots$$

$$\dots,\ A_{1977}A_{1979} \perp l_{1978},\ A_{1978}A_1 \perp l_{1979},\ A_{1979}A_2 \perp l_1$$

۲۸۱*. دنبالهٔ متناهی a_1، a_2، ...، a_n از عددهای ۰ و ۱، باید با شرط

زیر سازگار باشد: برای هر عدد درست k از ۰ تا $n-1$، مجموع

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\dots+a_{n-k}a_n$$

عددی فرد باشد.

a) دربارهٔ چنین دنباله‌ای، برای $n=25$، بیندیشید.

b) ثابت کنید، چنین دنباله‌ای، برای مقداری از $n>1000$، وجود دارد.

۲۸۲. چهارضلعی محدب $ABCD$ را، به وسیلهٔ قطرهای آن، به چهار مثلث تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر شعاع‌های چهار دایرهٔ محاطی این مثلث‌ها، باهم برابر باشند، چهارضلعی $ABCD$ یك لوزی است.

۲۸۳*. روی خط راستی، نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n را، به همین ردیف، طوری قرار داده‌ایم که، طول هر یك از پاره‌خط‌های راست A_1A_2، A_2A_3، ...، $A_{n-1}A_n$ از واحد تجاوز نکنند. می‌خواهیم $k-1$ نقطه از نقطه‌های A_2، ...، A_{n-1} را طوری به‌رنگ قرمز در آوریم که، طول هردو بخش دلخواه از k بخشی که به وسیلهٔ نقطه‌های قرمز روی پاره‌خط راست A_1A_n پدید آمده‌اند، اختلافی بیش از واحد نداشته باشند. ثابت کنید، این عمل را همیشه می‌توان انجام داد:

a) برای $k=3$؛

b) برای هرعدد طبیعی $k<n-1$.

چهاردهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۰ (ساراتوف)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۲۸۴	۲۸۵	۲۸۶	۲۸۷	۲۹۳	۲۹۴	۲۹۵	۲۹۶
۹:	۲۸۸	۲۸۹	۲۸۶	۲۹۰	۲۹۵	۲۹۷	۲۹۸	۲۹۹
۱۰:	۲۹۱	۲۸۹	۲۹۲	۲۹۰	۳۰۰	۳۰۱	۳۰۲	۳۰۳

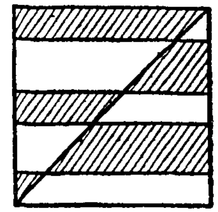
۲۸۴. عددهای دورقمی از ۱۹ تا ۸۰ را از چپ به راست کنار هم

نوشته‌ایم:

۱۹۲۰۲۱ ... ۷۸۷۹۸۰

آیا این عدد، بر ۱۹۸۰ بخش‌پذیر است؟

۲۸۵. ضلع قائم AB از مربع $ABCD$ را، به n پاره‌خط راست طوری تقسیم کرده‌ایم که، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست ردیف زوج با مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست ردیف فرد، برابر بشود. از نقطه‌های



شکل ۱۳

تقسیم، پاره‌خط‌های راستی موازی با ضلع AD رسم و، سپس، هریک از n نوار حاصل را، به وسیلهٔ قطر BD، به دو بخش چپ و راست تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع مساحت‌های بخش‌های چپ در ردیف‌های فرد، برابر است با مجموع مساحت‌های بخش‌های راست در ردیف‌های زوج (در شکل ۱۳، این بخش‌ها را، هاشور زده‌ایم).

۲۸۶. محموله‌ای را که در صندوق‌هایی بسته‌بندی شده است، باید به ایستگاه فضایی «سالیوت» رسانید. تعداد صندوق‌ها از ۳۵ کمتر نیست و وزن کل محموله، برابر ۱۸ تن است. هفت سفینهٔ فضایی «پروگرس» در اختیار داریم که، هرکدام از آن‌ها، می‌تواند ۳ تن بار را درمدار قرار دهد. می‌دانیم، این سفینه‌ها می‌توانند باهم، هر ۳۵ صندوق از صندوق‌های موجود را با خود حمل کنند. ثابت کنید، با این سفینه‌ها، می‌توان تمامی باررا در مدار قرار داد.

۲۸۷. نقطه‌های M و P، به ترتیب، وسط ضلع‌های BC و CD از چهارضلعی $ABCD$ هستند. می‌دانیم:

$$MP+AP=a$$

ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $ABCD$، از $\frac{1}{2}a^2$ کمتر است.

۲۸۸. آیا معادلهٔ $x^2+y^3=z^4$، برای عددهای اول x، y و z، جواب دارد؟

۲۸۹. روی قطر AC از دایره‌ای، نقطهٔ E داده شده است. از نقطهٔ E، وتر BD را طوری رسم کنید که مساحت چهارضلعی $ABCD$، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۹۰. در ساحل یک دریاچهٔ گرد بزرگ، چند نقطهٔ مسکونی وجود دارد. بین برخی از این نقطه‌های مسکونی، می‌توان با کشتی رفت و آمد کرد. می‌دانیم، تنها وقتی بین دو نقطه، رفت و آمد با کشتی ممکن است که، بین دو نقطهٔ مسکونی بعد از آن‌ها (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)، این وسیلهٔ ارتباطی وجود نداشته باشد. ثابت کنید، ازهر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، می‌توان با کشتی مسافرت کرد، به نحوی که حداکثر به دو بار جابه‌جایی نیاز باشد.

۲۹۱. عددی شش رقمی که از شش رقم مختلف و مخالف صفر درست شده است، بر ۳۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، با جابه‌جایی رقم‌های این عدد، می‌توان دست‌کم ۲۳ عدد مختلف شش رقمی دیگر به دست آورد که، باز هم، بر ۳۷ بخش‌پذیر باشند.

۲۹۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin x + 2\sin(x+y+z) = 0 \\ \sin y + 3\sin(x+y+z) = 0 \\ \sin z + 4\sin(x+y+z) = 0 \end{cases}$$

۲۹۳. روی صفحه، ۱۹۸۰ بردار داده شده است؛ در ضمن، در بین آن‌ها، بردارهای ناهم‌راستا وجود دارد. می‌دانیم، مجموع هر ۱۹۷۹ بردار، با برداری که در این مجموع نیامده، هم راستا است. ثابت کنید، مجموع

این ۱۹۸۰ بردار، برابر با بردار صفر است.

۲۹۴. مجموع همهٔ رقم‌های عدد طبیعی n را، با $S(n)$ نشان می‌دهیم.

a) آیا عدد طبیعی n وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$n+S(n)=۱۹۸۰$$

b) ثابت کنید، از هردوعدد طبیعی متوالی، دست‌کم یکی را می‌توان به صورت $n+S(n)$، برای یك عدد طبیعی سوم n، نوشت.

۲۹۵. بعضی‌از خانه‌های یك‌صفحهٔ شطرنجی نامتناهی را به‌رنگ قرمز و بقیه را به‌رنگ آبی درآورده‌ایم؛ درضمن، این‌رنگ‌آمیزی به‌نحوی است که در هرمستطیل ۶خانه‌ای بااندازه‌های ۳ × ۲، درست دوخانهٔ قرمز وجود دارد. دریك مستطیل ۹۹خانه‌ای، بااندازه‌های ۱۱ × ۹، چندخانهٔ قرمزمی‌تواند وجود داشته باشد؟

۲۹۶. مردمی‌که در باغ گل زندگی می‌کردند، ناگهان دچار بیماری سرماخوردگی شدند. در یك روز، چند نفر از آن‌ها سرما خوردند و بیمار شدند و، اگر چه پس‌از آن، کسی به خودی خود دچار سرماخوردگی نشد، کسانی‌که ازدوستان بیمارخود عیادت می‌کردند، مریض می‌شدند. می‌دانیم، هرکسی درست‌یك روز دچارسرما خوردگی می‌شود؛ در ضمن، چنین فردی، دست کم یك روز مصونیت پیدا می‌کند، یعنی، در ایـن روز، سالم است و دوباره به بیماری سرما خوردگی دچار نمی‌شود. با وجود سرایت بیماری، هر کسی‌که سالم است، روزانه، از دوستان بیمار خود عیادت می‌کند. وقتی اپیدمی آغاز شد، مردم تلقیح را فراموش‌کردند و کسی واکسن ضد سرما- خوردگی نزد.

ثابت کنید:

a) اگـر، قبل از اپیدمی، بعضی از افـراد واکسن زده باشند و در نخستین روز، مصونیت داشته باشند، آن وقت اپیدمی می‌تواند برای همیشه ادامه پیدا کند؛

b) ولی اگر در روز اول، کسی مصونیت نداشته باشد، اپیدمی دیر

یا زود به‌پایان می‌رسد.

۲۹۷. حاصل ضرب همهٔ رقـم‌های عـدد طبیعی n را، با $P(n)$ نشان می‌دهیم. آیا ممکن است دنبالهٔ (n_k) که با دستور برگشتی

$$n_{k+1}=n_k+P(n_k)$$

و جملهٔ اول $n_1\in\mathbf{N}$ داده شده است، کران‌دار نباشد؟

۲۹۸. مثلث ABC، با ضلع‌های بـرابر، مفـروض است. خط راستی موازی با ضلع AC، خط‌های راست AB و BC را، به ترتیب، درنقطه‌های M و P قطع کرده است. نقطهٔ D را مرکز مثلث PMB ونقطهٔ E را وسط پاره‌خط AP می‌گیریم. زاویه‌های مثلث DEC را پیداکنید.

۲۹۹. مکعب مستطیلی با یال‌های به طول x، y و z سانتی‌متر مفروض است؛ در ضمن

$$p=4(x+y+z),\ s=2(xy+yz+xz),\ d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

را، به ترتیب، محیط، مساحت سطح و قطر مکعب مستطیل می‌گیریم. ثابت کنید، به شرط $x<y<z$ داریم:

$$x<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right),$$

$$z>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$$

۳۰۰. مجموعهٔ A از عددهای درست تشکیل شده است؛ کـوچکترین عضوآن واحد، و بزرگترین عضوآن ۱۰۰ است. هرعضو A، به جز واحد، برابر است با مجموع دوعدد (که ممکن است برابر هم باشند) متعلق به این مجموعه. دربین همهٔ مجموعه‌های A،که با این شرط سازگارباشند، مجموعهٔ با حداقل تعداد جمله‌ها را پیداکنید.

۳۰۱. ثابت‌کنید، بی‌نهایت عدد B وجود داردکه، به‌ازای‌آن، معادلهٔ

$$\left[\sqrt{x^3}\right]+\left[\sqrt{y^3}\right]=B$$

دست‌کم ۱۹۸۰ جواب، در مجموعهٔ عددهای طبیعی x و y داشته باشد ($[z]$ به معنای بزرگترین عدد درستی است که از z تجاوز نکند).

۳۰۲. درچهاروجهی $ABCD$، یال AC بر BC و یال AD بر BD عمود است. ثابت کنید، کسینوس زاویهٔ بین خط‌های راست AC و BD، از $\frac{CD}{AB}$ کمتر است.

۳۰۳. عدد $x\in[0, 1]$، به صورت کسر دهدهی نامتناهی نوشته شده است. با جابه‌جا کردن ۵ رقم اول بعد از ممیز در آن، به ترتیبی دلخواه، دوباره به‌کسر دهدهی نامتناهی می‌رسیم که، متناظر با عددی مثل x_1 است. اگر درنمایش دهدهی x_1، رقم‌های از دوم تا ششم بعد ازممیز را جابه‌جا کنیم، نمایش دهدهی عدد x_2 به دست می‌آید. به‌طورکلی، نمایش دهدهی x_{k+1} با جابه‌جاکردن رقم‌های عدد x_k، ازرقم $(k+1)$ام تارقم $(k+5)$ام بعد از ممیز به دست می‌آید.

a) ثابت کنید، صرف‌نظر از نوع جابه‌جایی رقم‌ها در هر گام، دنبالهٔ عددهای حاصل x_k، همیشه دارای حد است. این حد را y می‌نامیم.

b) آیا می‌توان، با این‌روند، از عدد گویای x، به‌عدد گنگ y رسید؟

c) کسر x را طوری پیداکنید‌که، برای آن، روند فوق، همیشه منجر به‌عدد گنگ y شود، بدون توجه به‌این‌که، در هرگام، چه تبدیلی از ۵ رقم را جانشین کنیم.

پانزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۱ (آلماآتا)

کلاس	روز اول	روز دوم
:۸	۳۰۴ ۳۰۵ ۳۰۶ ۳۰۷	۳۱۵ ۳۱۶ ۳۱۷ ۳۱۸
:۹	۳۰۸ ۳۰۷ ۳۰۹ ۳۱۰	۳۱۹ ۳۲۰ ۳۲۱ ۳۲۲
:۱۰	۳۱۱ ۳۱۲ ۳۱۳ ۳۱۴	۳۲۳ ۳۲۴ ۳۲۵ ۳۲۶

۳۰۴. دوصفحهٔ شطرنج‌مساوی ۸×۸ خانه‌ای، دارای مرکز مشترک‌اند؛ در ضمن، یکی از آن‌ها، نسبت به دیگری، به اندازهٔ ۴۵ درجه دور مرکز چرخیده‌است. مجموع مساحت‌های همهٔ بخش‌های متقاطع‌سیاه این‌دوصفحهٔ شطرنج را پیداکنید، به شرطی‌که مساحت هرخانه، برابر واحد باشد.

۳۰۵. نقطه‌های A، B، M و N روی محیط یک دایره‌اند. ازنقطهٔ M، وترهای MA_1 و MB_1 را، به ترتیب، عمود بر خط‌های راست NB و NA رسم کرده‌ایم. ثابت‌کنید، خط‌های راست AA_1 و BB_1 موازی‌اند.

۳۰۶. گوییم عددی دارای ویژگی $P(k)$ است وقتی‌که بتوان‌آن را به‌حاصل‌ضرب k عدد طبیعی متوالی بزرگتر از واحد تجزیه‌کرد.

a) k را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، عددی مثل N، درعین‌حال، دارای ویژگی‌های $P(k)$ و $P(k+2)$ باشد.

b) ثابت‌کنید، عددی‌وجود ندارد که، درعین‌حال، دارای دو ویژگی $P(2)$ و $P(4)$ باشد.

۳۰۷. جدولی ۴ سطر دارد. در سطر اول، عددهای طبیعی دلخواهی نوشته شده است، که در بین آن‌ها، عددهای برابر هم می‌توانند باشند. سطر دوم، به این ترتیب پرشده است: از چپ به راست به عددهای سطر اول نگاه می‌کنیم و، زیر عدد a، عدد k را می‌نویسیم، به شرطی که عدد a در سطر اول (و در سمت راست آن) k بار آمده باشد. باهمین روش، سطر سوم را زیر سطر دوم، و سطر چهارم را زیر سطر سوم می‌نویسیم. ثابت کنید، سطر دوم و سطرچهارم، همیشه یکسان درمی‌آیند.

۳۰۸. عدد a داده شده است. مطلوب است، کمترین مقدار مساحت مستطیلی‌که ضلع‌هایی موازی محورهای مختصات Ox و Oy داشته باشد و، در ضمن، شکلی را که از دستگاه نامعادله‌های زیر به دست می‌آید، در بربگیرد:

$$\begin{cases} y \leqslant -x^2 \\ y \geqslant x^2 - 2x + a \end{cases}$$

۳۰۹. مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC، CDE و EHK مفروض‌اند (راس‌ها را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید) و طوری روی صفحه قرار گرفته‌اند که داریم: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$. ثابت کنید، مثلث BHD هم، متساوی‌الاضلاع است.

۳۱۰. در محله‌ای ۱۰۰۰ نفر زندگی می‌کنند. هرروز هریك از آن‌ها، خبرهای تازه‌ای را که دیروز شنیده است، با همهٔ آشناهای خود در میان می‌گذارد. می‌دانیم که، هر خبر تازه‌ای، سرانجام به‌گوش همهٔ ساکنان محله می‌رسد.

ثابت کنید، می‌توان از بین افراد محله، ۹۰ نفر طوری انتخاب کرد که، اگر همهٔ آن‌ها را از خبر تازه‌ای آگاه کنیم، بعد از ۱۰ روز، همهٔ ساکنان محله آن را شنیده باشند.

۳۱۱. دربارهٔ عددهای a و b می‌دانیم که نامعادلهٔ

$$a\cos x + b\cos 3x > 1$$

جواب ندارد. ثابت کنید $|b| \leqslant 1$.

۳۱۲. نقطه‌های K و M، وسط ضلع‌های AB و CD از چهارضلعی محدب $ABCD$ هستند؛ نقطه‌های L و N روی دو ضلع دیگر چهارضلعی طوری قرار گرفته‌اند که، چهارضلعی $KLMN$، یك مستطیل شده است. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $ABCD$، دو برابر مساحت مستطیل $KLMN$ است.

۳۱۳*. همهٔ دنباله‌های (a_n) از عددهای طبیعی را طوری پیدا کنید که دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) به‌ازای هر n داشته باشیم: $a_n \leqslant n\sqrt{n}$؛

ب) به‌ازای هر دو عدد مختلف m و n، تفاضل $a_m - a_n$ بر $m-n$ بخش‌پذیر باشد.

۳۱۴*. آیا می‌توان همهٔ خانه‌های یك جدول مستطیلی را، طوری به رنگ‌های سیاه و سفید درآورد که، تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های

سفید برابر باشد، ولی در هر سطر و هر ستون، بیش از $\frac{3}{4}$ خانه‌ها از یك رنگ باشند؟

۳۱۵. ثابت کنید، اگر چهارضلعی‌های $AHBT$، $AMBE$، $ACPH$، $BKXM$، $CKXP$ متوازی‌الاضلاع باشند، آن وقت چهارضلعی $ABTE$ هم یك متوازی‌الاضلاع است (رأس‌های همهٔ چهارضلعی‌ها را، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به حساب آورید).

۳۱۶. این معادله را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی x و y حل کنید:

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

۳۱۷. در یك مسابقهٔ فوتبال، ۱۸ تیم، در ۸ مرحله با هم بازی کرده‌اند: هر تیم با هشت تیم مختلف بازی کرده است. ثابت کنید، سه تیم پیدا می‌شود که هنوز با هم حتی یك مسابقه هم نداده‌اند.

۳۱۸. نقطه‌های C_1، A_1 و B_1 را، به ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC و CA از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$AC_1:C_1B = BA_1:A_1C = CB_1:B_1A = \frac{1}{3}$$

اگر P را محیط مثلث ABC و p را محیط مثلث $A_1B_1C_1$ بگیریم، ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}P < p < \frac{3}{4}P$$

۳۱۹. ثابت کنید، اگر عددهای مثبت x و y در معادلهٔ

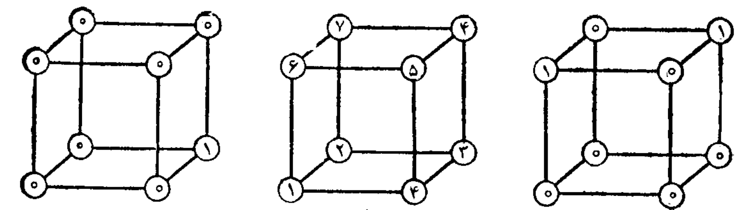
$$x^3 + y^3 = x - y$$

صدق کنند، آن وقت $x^2 + y^2 < 1$.

۳۲۰. دانش‌آموزی می‌خواهد یك چندضلعی محدب را، که در دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارد، رسم کند. ابتدا، یکی از ضلع‌ها را رسم می‌کند،

از انتهای آن ضلع دوم، سپس، از انتهای ضلع دوم، ضلع سوم و غیره را رسم می‌کند. درپایان کارمتوجه می‌شودکه چندضلعی او بسته نیست وآخرین خط راستی که به دست آورده است، به فاصلهٔ d از رأس اول قرار دارد. می‌دانیم، دانش آمـوز زاویه‌ها را با دقت رسم کـرده و خطای نسبی او، در رسم هر ضلع، از عدد p تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید: $d \leqslant ۴p$.

۳۲۱. در هر رأس مکعب، عددی نوشته‌ایم. در یك گام، به دو عددی که روی یك یال دلخواه قراردارند، یك واحد اضافه کرده‌ایم. آیا می‌توان،



a b c

شکل ۱۴

بعد از چند گام، هر هشت عدد را مساوی کرد، به شرطی که عددهای اولیه مطابق شکل ۱۴ — a باشند؟ دربارهٔ عددهای شکل ۱۴ — b چطور؟ و دربارهٔ عددهای شکل ۱۴ — c؟

۳۲۲. دست کم یك عدد طبیعی n را پیداکنید، به‌نحوی که، هریك از عددهای

$$n، n+۱، n+۲، \ldots، n+۲۰$$

با عـدد ۳۰۰۳۰ = ۱۳ × ۱۱ × ۷ × ۵ × ۳ × ۲، مقسوم‌علیه مشترکـی بزرگتر از واحد داشته باشد.

۳۲۳. هر یك از عددهای طبیعی از ۱۰۰ تا ۹۹۹ را روی یك کارت نوشته‌ایم. کارت‌ها را روی میز طوری می‌گذاریم که عددها دیده نشوند (به طرف پایین باشند)؛ سپس، آن‌ها را مخلوط می‌کنیم و در یك ستون قـرار می‌دهیم. کارت‌های ستون را، یکی بعد از دیگری، برمی‌گردانیم، آن‌ها را طبقه‌بندی می‌کنیم و، روی هم، درستون‌هایی، به ترتیب، ازعددهای کوچکتر

قرار می‌دهیم، به نحوی که عددها دیده شوند (رو به‌بالا باشند). در ستون اول، همهٔ عددهایی‌که به ۰ ختم شده‌اند؛ در ستون دوم، همهٔ عددهایی‌که به ۱ختم شده‌اند وغیره. همهٔ این‌ستون‌ها را دریك‌ستون جمع‌می‌کنیم: ستون‌دوم را روی ستون اول، سپس‌روی آن ستون سوم را، و سرآخرستون دهم را. ستونی را که به دست می‌آید، برمی‌گـردانیم و دوباره طبقه‌بندی می‌کنیم، منتهی این‌بار، بعد از برگرداندن هرکارت و خـواندن عدد روی آن، آن‌ها را برحسب رقم دوم خود، در ستون‌های جداگانه قرار می‌دهیم. مثل حالت قبل، این ستون‌ها را جمع می‌کنیم (به ترتیب صعودی، نسبت به رقـم دوم). برای بارآخر، آن‌هارا، نسبت به‌رقم سمت چپ، طبقه‌بندی و، سپس، دریك ستون جمع می‌کنیم. بعد از طبقه‌بندی آخر، عددهای روی کارت‌ها، به چه ردیفی قرار گرفته‌اند؟

۳۲۴. درمستطیلی باضلع‌های برابر ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، ۶نقطه قرار گرفته‌اند. ثابت‌کنید، دو نقطه پیدا می‌شودکه، فاصلهٔ بین آن‌ها، از $\sqrt{۵}$ سانتی‌متر تجاوز نمی‌کند.

۳۲۵. a) حداقل مقدار این چندجمله‌ای را پیدا کنید:

$$P(x، y)=۴+x^{۲}y^{۴}+x^{۴}y^{۲}-۳x^{۲}y^{۲}$$

b*) ثابت کنید، ایـن چندجمله‌ای را نمی‌توان بـه صورت مجمـوع مجذورهای چندجمله‌ای‌هایی از دو متغیر x و y نوشت.

۳۲۶. پاره‌خط‌های راست AD، BE و CF یال‌های جانبی موازی، از یك منشور مثلث‌القاعده را تشکیل می‌دهند. روی قاعدهٔ ABC این منشور همهٔ نقطه‌هایی را پیداکنیدکه، از خط‌های راست AE، BF و CD به یك فاصله باشند.

شانزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۲ (اودسا)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۳۲۷	۳۲۸	۳۲۹a	۳۳۰	۳۳۷	۳۳۸	۳۳۹	۳۴۰
۹:	۳۳۱	۳۳۲	۳۳۳	۳۳۴	۳۴۱	۳۴۲	۳۴۳	۳۴۴
۱۰:	۳۳۵	۳۳۲	۳۲۹b	۳۳۶	۳۴۵	۳۴۶	۳۴۷	۳۴۸

۳۲۷. روی محیط دایرهٔ به مرکز O_1 و شعاع r_1، نقطه‌های M و K را انتخاب کرده‌ایم. در زاویهٔ مرکزی، MO_1K، دایره‌ای به مرکز O_2 و شعاع r_2 محاط شده است. مساحت چهارضلعی MO_1KO_2 را پیدا کنید.

۳۲۸. در دنباله‌های عددی (a_n) و (b_n)، با آغاز از جملهٔ سوم، هرجمله برابر است با مجموع دو جملهٔ قبل از آن. در ضمن

$$a_1 = 1،\ a_2 = 2;\ b_1 = 2،\ b_2 = 1$$

چند عدد وجود دارد که در هردودنباله، با آن‌ها برخورد می‌کنیم؟

۳۲۹. a) m و n، عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید، اگر برای عددهای غیرمنفی k_1، k_2، ...، k_n، عدد $2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_n}$ بر عدد 2^m-1 بخش‌پذیر باشد، آن وقت $n \geqslant m$.

b) آیا عددی طبیعی وجود دارد که بر $\underbrace{11\dots1}_{m}$ بخش‌پذیر و مجموع رقم‌های آن، کوچکتر از m باشد؟

۳۳۰. هر رأس مکعب را متناظر با عددی حقیقی و غیر منفی قرار داده‌ایم؛ در ضمن، مجموع همهٔ این عددها، برابر است با واحد. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. اولی، یکی از وجه‌ها را انتخاب می‌کند، دومی وجه دیگر را درنظر می‌گیرد و، سرانجام، اولی وجه سوم را انتخاب می‌کند. در ضمن، نمی‌توان وجهی را انتخاب کرد که، وجه موازی با آن، قبلاً انتخاب شده است. ثابت کنید، اولی می‌تواند طوری بازی کند که، عدد واقع بررأس مشترک سه‌وجه انتخاب شده، از $\frac{1}{6}$ تجاوز نکند.

۳۳۱. یك روز، سه جوان در کتاب‌خانهٔ عمومی به هم رسیدند. یکی از آن‌ها گفت: «من یك روز در میان به‌کتاب‌خانه می‌آیم.» دومی اطلاع داد که، او دو روز درمیان به‌کتاب خانه مراجعه می‌کند. معلوم شد که سومی هم، سه روز در میان به‌کتاب‌خانه سرمی‌زند. کتاب‌دار که گفت‌وگوی آن‌ها را می‌شنید، یادآوری کرد که چهارشنبه‌ها، کتاب خانه تعطیل است. جوانان توضیح دادند که، اگر روز مراجعهٔ آن‌ها، با روز تعطیل کتاب‌خانه برخورد

کند، روز بعد به کتاب‌خانه می‌روند و دیدارهای بعدی خود را، از آن روز به حساب می‌آورند. این جوانان، یك روز دوشنبه، دوباره یکدیگر را در کتاب‌خانه ملاقات کردند. گفت‌وگوی بالا، درچه روزی از هفته، بین جوانان انجام گرفته است؟

۳۳۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، که لوزی نیست، نسبت طول‌های دو قطر داده شده است: $AC:BD=k$. نیم خط راست AM را قرینهٔ نیم‌خط AD نسبت به‌خط راست AC، نیم‌خط راست BM را قرینهٔ نیم خط BC نسبت به خط راست BD و نقطهٔ M را، محل برخورد نیم‌خط‌های راست AM و BM می‌گیریم. مطلوب است محاسبهٔ نسبت $AM:BM$.

۳۳۳. $3k$ نقطه، روی محیط دایره‌ای قرار داده‌ایم، از $3k$ کمانی که به‌دست می‌آید، k کمان به طول ۱، k کمان به طول ۲ و k کمان باقی‌مانده به‌طول ۳ هستند. ثابت کنید، بین این نقطه‌ها، دونقطه وجود دارد که در دو انتهای یك قطرند.

۳۳۴. نقطهٔ M را، دردرون چهاروجهی درنظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، دست کم یکی‌از یال‌های چهاروجهی، از نقطهٔ M، به زاویه‌ای دیده‌می‌شود که، کسینوس آن، از $-\frac{1}{3}$ تجاوز نمی‌کند.

۳۳۵. عددهای a، b و c دربازهٔ $(0، \frac{\pi}{2})$ قرار دارند و می‌دانیم:

$$\cos a = a،\ \sin\cos b = b،\ \cos\sin c = c$$

این عددها را، به ردیف صعودی بنویسید.

۳۳۶. خط شکستهٔ بستهٔ M، دارای تعداد فردی رأس است: A_1، A_2، ...، A_{2n+1}. $S(M)$ راخط شکستهٔ بستهٔ تازه‌ای می‌گیریم که رأس‌های‌متوالی آن، B_1، B_2، ...، B_{2n+1}، دروسط ضلع‌های خط شکستهٔ M قرار دارند: B_1 وسط پاره خط راست A_1A_2، B_2 وسط A_3A_4، ...، B_{n+1} وسط $A_{2n+1}A_1$، B_{n+2} وسط A_2A_3، ...، B_{2n+1} وسط $A_{2n}A_{2n+1}$. ثابت کنید، در دنبالهٔ خط‌های شکستهٔ

$$M_1=S(M),\ M_2=S(M_1),\ \dots,\ M_k=S(M_{k-1})$$

خط شکستهٔ بسته‌ای وجود داردکه با خط شکستهٔ M متجانس است.

۳۳۷. عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹۸۲ را، یکی پس از دیگری، به ردیفی دلخواه نوشته‌ایم. کامپیوتر، دو به دوی عددهای مجاوررا، ازچپ به راست، مورد بررسی قرار می‌دهد (اولی و دومی، دومی و سومی و غیره) و هر جا عدد بزرگتر در سمت چپ عددکوچکتر قرار داشته باشد، جای آن‌ها را با هم عوض می‌کند. سپس دوباره، از راست به چپ، دوبه‌دوی عددهای مجاور را بررسی می‌کند و، طبق همان قانون، در صورت لزوم، جای عددها را با هم‌عوض می‌کند. بعد ازپایان این برنامه، معلوم شد،عددی که در جای صدم قرار داد، در هر دوبار، بدون تغییر جا باقی مانده است. این عدد را پیداکنید.

۳۳۸. رودخانه‌ای در منطقهٔ نزدیك به مصب خود، چند جزیره پدید آورده است‌که مجموع محیط‌های همهٔ آن‌ها برابر ۸ متر است. می‌خواهیم از نقطه‌ای واقع در یك طرف رود، با قایق به طرف دیگر آن برویم. در فاصلهٔ بین این نقطه وکنارهٔ دیگر رود، جزیره‌ها قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، ازاین نقطه به‌نقطه‌ای درکنارهٔ دیگر، کمتر از ۳ متر راه با قایق وجود دارد. دوکنارهٔ رود با هم موازی و عرض رودخانه برابر یك متر است.

۳۳۹. نمودار تابع $y=x^2$ را روی صفحهٔ مختصاتی Oxy رسم کرده‌ایم. سپس، محورهای مختصات را پاك کرده و تنها سهمی را باقی گذاشته‌ایم. به‌کمك پرگار وخط‌کش، چگونه می‌توان محورها وواحد طول را باز سازی کرد؟

۳۴۰. خانه‌های یك‌جدول‌مربعی $n\times n$ را، باعددهای درست پرکرده‌ایم. در ضمن، در هر دو خانه‌ای‌که یك ضلع مشترك دارند، عددهایی گذاشته‌ایم که اختلاف آن‌ها، از واحد تجاوز نمی‌کند. ثابت‌کنید، در جدول، دست‌کم به‌یك عدد برخورد می‌کنیم که

a) لااقل $\left[\frac{n}{2}\right]$ مرتبه تکرارشده است (منظور از $[a]$، بخش درست عدد a است)؛

b) لااقل n بار تکرار شده است.

۳۴۱. درستی این نابرابری را، برای همهٔ مقدارهای مثبت x، ثابت کنید:

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\times 2^{\sqrt[6]{x}}$$

۳۴۲. ازمجموعهٔ عددهای۱، ۲، ...، ۱۹۸۲، دست‌کم چند عدد باید حذف‌کرد تا هیچ‌کدام از عددهای باقی‌مانده، برابربا حاصل ضرب دوعدد دیگر باقی‌مانده نباشد؟ به چه ترتیبی، باید این کار را انجام داد؟

۳۴۳. در هر خانه از یك صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، یك عدد حقیقی نوشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان خانه‌ای پیداکردکه، عدد آن، دست‌کم از عددهای‌چهارخانه ازهشت خانه‌ای‌که‌آن را احاطه‌کرده‌اند، تجاوزنمی‌کند.

۳۴۴*. ثابت کنید، از هر دنبالهٔ عددهای حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$، می‌توان بخشی ازعددها را طوری جداکردکه با سه شرط زیرسازگارباشند:

الف) هیچ سه عددی را که در دنباله، پشت سر هم قرار دارند، با هم انتخاب نکرده باشیم؛

ب) از بین هر سه عدد متوالی در دنباله، دست‌کم یکی را در نظر گرفته باشیم؛

ج) قدرمطلق مجموع عددهایی که انتخاب کرده‌ایم، از مقدار زیر کمتر نباشد:

$$\frac{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|}{6}$$

۳۴۵. $n-1$ خانه ازیك جدول مربعی $n\times n$ را علامت‌گذاشته‌ایم. ثابت‌کنید، با جابه‌جایی سطرها نسبت به هم و جابه‌جایی ستون‌ها نسبت به هم، می‌توان به جدولی رسید که همهٔ خانه‌های علامت‌دار، در زیر قطرهای جدول باشند.

۳۴۶. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n وهرعدد حقیقی a، نابرابری زیر برقرار است:

$$|a|\cdot|a-1|\cdot|a-2|\cdots|a-n|\geqslant\langle a\rangle\frac{n!}{2^n}$$

که در آن، $\langle a\rangle$ عبارت است از فاصلهٔ عدد a تا نزدیکترین عدد درست به آن و $n!=1\times2\times\cdots\times n$.

۳۴۷. a) آیا چندجمله‌ای‌های

$$P=P(x,y,z),\ Q=Q(x,y,z),\ R=R(x,y,z)$$

از متغیرهای x و y و z وجود دارند، به نحوی که، این اتحاد برقرار باشد:

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1$$

b) همان پرسش، برای اتحاد

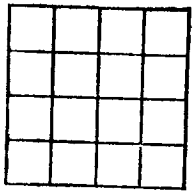
$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1$$

۳۴۸*. رأس‌های چهاروجهی $KLMN$، روی وجه‌ها یا یال‌های چهاروجهی دیگر $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید، مجموع طول‌های همهٔ یال‌های چهاروجهی $KLMN$ از $\frac{4}{3}$ مجموع همهٔ یال‌های چهاروجهی $ABCD$ کمتر است.

هفدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۳ (کی‌شی نف)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۳۴۹	۳۵۰	۳۵۱	۳۵۲	۳۶۰	۳۶۱	۳۶۲	۳۶۳
۹:	۳۵۳	۳۵۴	۳۵۵	۳۵۶	۳۶۴	۳۶۵	۳۶۶	۳۶۷
۱۰:	۳۵۷	۳۵۴	۳۵۸	۳۵۹	۳۶۰	۳۶۸	۳۶۹	۳۷۰

۳۴۹. در شبکهٔ شکل ۱۵، هر خانه دارای اندازهٔ 1×1 است. آیا می‌توان، این شبکه را: a) به صورت اجتماعی از هشت خط شکسته نشان



شکل ۱۵

داد، به‌نحوی‌که طول هرکدام ازآن‌ها برابر ۵ باشد؛ b) به‌صورت اجتماعی از پنج خط شکسته نشان‌داد، به نحوی‌که طول هرکدام از آن‌ها، برابر ۸ باشد؟

۳۵۰. سه عدد درست را روی تختهٔ سیاه نوشته‌ایم. یکی از عددها را پاک کرده‌ایم و، به جای آن، عددی را نوشته‌ایم که از مجموع دو عدد دیگر یک واحد کمتر باشد. این عمل را چند بار تکرار کرده‌ایم و، در نتیجه، به عددهای ۱۷، ۱۹۶۷ و ۱۹۸۳ رسیده‌ایم. آیا ممکن است، در ابتدا، روی تخته سیاه، عددهای a) ۲، ۲، ۲؛ b) ۳، ۳، ۳ نوشته شده باشد؟

۳۵۱. سه دایره، در نقطه‌های X، Y و Z، دوبه‌دو بر هم مماس بیرونی‌اند. شعاع‌های دایره‌ها را $\frac{2}{\sqrt{3}}$ برابر می‌کنیم و مرکزهای آن‌ها را ثابت نگه‌می‌داریم. ثابت کنید، هر نقطهٔ مثلث XYZ، دست‌کم به وسیلهٔ یکی از دایره‌ها پوشیده می‌شود.

۳۵۲. چندعدد طبیعی مختلف، که بین مجذورهای دوعددطبیعی متوالی قرار دارند، داده شده‌اند. ثابت کنید، همهٔ حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها هم، عددهایی مختلف‌اند.

۳۵۳. همهٔ جواب‌های این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} y^2=x^3-3x^2+2x\\ x^2=y^3-3y^2+2y\end{cases}$$

۳۵۴. عددطبیعی k، در دستگاه دهدهی، دارای n رقم است. این‌عدد را درمرتبهٔ دهگان گردکرده‌ایم (به‌جای رقم یکان، صفر گذاشته‌ایم؛ واگر رقم

یکان از ۴ بزرگتر باشد، یك واحد به‌رقم دهگان اضافه‌کرده‌ایم). سپس، به همان ترتیب، عدد حاصل را در مرتبهٔ صدگان گرد کرده‌ایم و غیره. بعد از $(n-1)$ امین گام، عدد k_1 به دست آمده است. ثابت کنید: $k_1<\frac{18}{13}k$.

۳۵۵. نقطهٔ D وسط ضلع AB، و نقطه‌های E و F به ترتیب روی پاره‌خط‌های راست AC و BC از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید، مساحت مثلث DEF، از مجموع مساحت‌های دو مثلث ADE و BDF تجاوز نمی‌کند.

۳۵۶. (α_n) و (β_n) دنباله‌هایی هستند که، به ترتیب، از آخرین رقم‌های عددهای درست $[(\sqrt{10})^n]$ و $[(\sqrt{2})^n]$ درست شده‌اند (در این‌جا، $[x]$ به معنای بخش‌درست عدد x است). آیا دنباله‌های (α_n) و (β_n) متناوب‌اند؟

۳۵۷. α و β دو زاویهٔ حاده‌اند و می‌دانیم:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

ثابت کنید: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

۳۵۸. راس‌های چهاروجهی $ABCD$ را، به طور قائم، بر دو صفحه تصویر کرده‌ایم. این تصویرها را، به ترتیب، A_1، B_1، C_1، D_1 و A_2، B_2، C_2، D_2 می‌نامیم. ثابت کنید، یکی از صفحه‌ها را می‌توان در فضا طوری جابه‌جا کرد که A_1A_2، B_1B_2، C_1C_2 و D_1D_2 با هم موازی باشند.

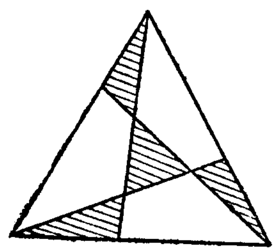
۳۵۹*. دانش‌آموزی، حل معادله‌های درجهٔ دوم را تمرین می‌کند. هر معادله‌ای را که حل می‌کند، به شرط داشتن ریشه‌های حقیقی، معادلهٔ دیگری به‌کمك ریشه‌های آن، به ترتیب زیر، می‌سازد: ریشه بزرگتررا به‌جای جملهٔ آزاد (مقدار ثابت) معادلهٔ جدید و ریشهٔ کوچکتر را در ضریب x قرار می‌دهد؛ ضریب x^2 را هم واحد انتخاب می‌کند. ثابت کنید، این تمرین را، نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه دهد. بیشترین تعداد معادله‌هایی که می‌تواند به این ترتیب، پشت هر هم، حل کند، چندتاست؟

۳۶۰. عددهای طبیعی m و n و k چنان‌اند که عدد m^n بر n^m و عدد n^k بر k^n بخش‌پذیر است. ثابت کنید، عدد m^k بر k^m بخش‌پذیر است.

۳۶۱. در زبان قبیلهٔ «آبا»، دو حرف وجود دارد. می‌دانیم، هیچ واژه‌ای از این زبان، درآغازواژهٔ دیگری قرارنگرفته است (یعنی نمی‌توان یك‌واژه را طوری به دوبخش تقسیم کردکه، بخش اول آن، معنا داشته باشد). آیا واژه‌نامهٔ این زبان، می‌تواند شامل ۳ واژهٔ چهار حرفی، ۱۰ واژهٔ پنج حرفی، ۳۰ واژهٔ شش حرفی و ۵ واژهٔ هفت حرفی باشد؟

۳۶۲. آیا می‌توان درخانه‌های یك صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، عددهای درست را طوری قرار دادکه در هر مستطیل 4×6 آن (که ضلع‌هایی در امتداد ضلع‌های خانه‌ها دارد)، مجموع عدد: a) برابر ۱۰، b) برابر ۱ شود؟

۳۶۳. چهار مثلثی که در شکل ۱۶ هاشور خورده‌اند، مساحت‌هایی برابردارند. ثابت‌کنید، مساحت‌های سه چهارضلعی، که هاشور نخورده‌اند، باهم برابرند. اگرمساحت یکی از مثلث‌ها، برابر یك سانتی‌متر مربع باشد، مساحت یکی از چهارضلعی‌ها چقدر است؟



شکل ۱۶

۳۶۴. بچه‌های مهدکودك را در دو ستون در کنار هم قرار داده‌اند. می‌دانیم، درهرستون، تعداد پسرها با تعداد دخترها برابر است و، همچنین، تعداد ردیف‌های دو نفری که، در آن‌ها، یك پسر و یك دختر وجود دارد، با تعداد بقیهٔ ردیف‌های دو نفری برابر است. ثابت کنید، تعدادکل بچه‌ها، بر ۸ بخش پذیر است.

۳۶۵. یکی از ضلع‌های مستطیلی برابر ۱ سانتی‌متر است. به جز این

می‌دانیم که، با رسم دو خط راست عمود بر هم، می‌توانیم آن را به چهار مستطیل کوچکتر طوری تقسیم کنیم که، مساحت سه تا از آن‌ها از ۱ سانتی‌متر مربع و مساحت چهارمی از ۲ سانتی‌متر مربع، کمتر نباشد. حداقل ضلع دوم مستطیل چقدر باشد، تا این عمل ممکن شود؟

۳۶۶. نقطهٔ دلخواه O را در درون مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

که در آن، S_A، S_B و S_C، به ترتیب، عبارتند از مساحت مثلث‌های BCO، CAO و ABO.

۳۶۷. ثابت کنید، بین هر $2m+1$ عدد درست مختلف، به شرطی که قدرمطلق آن‌ها از $2m-1$ تجاوز نکند، می‌توان سه عدد به مجموع ۰ پیدا کرد.

۳۶۸. نقطه‌های D، E و F، به ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC و CA (و نه روی رأس‌ها) از مثلث ABC داده شده‌اند. بزرگترین ضلع‌های مثلث‌های DEF، ADF، BDE و CEF را، به ترتیب، با طول‌های d_0، d_1، d_2 و d_3 می‌گیریم. ثابت کنید:

$$d_0\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\min(d_1, d_2, d_3)$$

در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

۳۶۹. مجموعهٔ M، شامل k پاره خط راست دو به دو غیرمتقاطع و، واقع بر یک خط راست است. می‌دانیم، هر پاره‌خط راستی را که طولی بیشتر از واحد ندارد، می‌توان طوری روی خط راست قرار داد که دو انتهای آن متعلق به مجموعهٔ M باشد. ثابت کنید، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راستی که M را تشکیل داده‌اند، از $\frac{1}{k}$ کمتر نیست.

۳۷۰*. در بسط نامتناهی عدد حقیقی a، در دستگاه عددنویسی به مبنای ۱۰، همهٔ رقم‌ها وجود دارد. فرض کنید، v_n به معنای تعداد پاره‌خط‌های رقمی مختلف به طول n باشد، که در این بسط با آن‌ها برخورد می‌کنیم. ثابت کنید، اگر برای مقداری از n، شرط $v_n\leqslant n+8$ برقرار باشد، آن وقت، a، عددی گویاست.

هیجدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۴ (عشق‌آباد)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۳۷۱	۳۷۲	۳۷۳	۳۷۴	۳۸۳	۳۸۴	۳۸۵	۳۸۶
۹:	۳۷۵	۳۷۶	۳۷۷	۳۷۸	۳۸۷	۳۸۸	۳۸۹	۳۹۰
۱۰:	۳۷۹	۳۸۰	۳۸۱	۳۸۲	۳۹۱	۳۹۲	۳۹۳	۳۹۴

۳۷۱. a) حاصل ضرب n عدد درست برابر n و مجموع آن‌ها برابر صفر شده است. ثابت کنید، عدد n بر ۴ بخش‌پذیر است.

b) n را عددی طبیعی و بخش‌پذیر بر ۴ می‌گیریم. ثابت کنید، می‌توان n عدد درست طوری پیدا کرد که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر n و مجموع آن‌ها برابر صفر باشد.

۳۷۲. a و b، عددهایی غیرمنفی و دلخواه هستند. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

۳۷۳. دو مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، روی صفحه داده شده‌اند؛ رأس‌های این مثلث‌ها، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، نام‌گذاری شده است. از نقطه‌ای مثل O، بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را، به ترتیب، برابر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{B_1B_2}$ و $\overrightarrow{C_1C_2}$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه‌های A، B و C هم، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۳۷۴. چهار رنگ و بی‌نهایت تختهٔ مربعی شکل به ضلع واحد، در

اختیار داریم و تصمیم می‌گیریم، ضلع‌های تخته‌ها را رنگ کنیم، به نحوی که رنگ‌های هر چهارضلع در یك تخته، با هم اختلاف داشته باشند. این تخته‌های مربعی را طوری کنار هم قرار می‌دهیم که، ضلع‌های مجاور هم در دو تخته، هم رنگ باشند. به‌ازای چه عددهایی از m و n، می‌توان از این تخته‌ها، مستطیلی $m\times n$ ساخت، به نحوی که هر ضلع آن از یك رنگ، و چهارضلع آن، از چهار رنگ مختلف باشد؟

۳۷۵. $x>0$، $y>0$ و α عددهایی حقیقی و دلخواه‌اند. ثابت کنید:

$$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}<x+y$$

۳۷۶. یك مکعب و دو رنگ قرمز و سبز دراختیار داریم. دو نفر، به این ترتیب، باهم بازی می‌کنند. اولی ۳ یال مکعب را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ قرمز در می‌آورد. رقیب او، ۳ یال دیگر را (از آن‌ها که تاکنون رنگ نشده‌اند) رنگ سبز می‌زند. بعد دوباره اولی ۳ یال بی‌رنگ را قرمز و، بالاخره، رقیب او، ۳ یال باقی‌مانده را سبز می‌کند. رنگ یك یال را نمی‌توان عوض کرد و یك یال را، نمی‌توان دوبار، ولو با یك رنگ، رنگ زد. کسی بازی را می‌برد که، برای نخستین‌بار، توانسته باشد همهٔ یال‌های یك وجه مکعب را، به رنگ مربوط به خود درآورد. آیا این حکم درست است که بازی‌کن اول، به شرطی که درست بازی کند، می‌تواند به طور قطع برنده باشد؟

۳۷۷. روی محیط دایره‌ای $n\geqslant 3$ عدد طبیعی نوشته‌ایم و می‌دانیم، برای هر عدد، نسبت مجموع دو عدد مجاور آن به خود عدد، باز هم عددی طبیعی است. ثابت کنید، مجموع همهٔ این نسبت‌ها: a) از $2n$ کمتر نیست؛ b)* از $3n$ کمتر است.

۳۷۸. دایرهٔ به مرکز O، درمثلث ABC محاط شده است و، نقطه‌های تماس آن با ضلع‌های BC، AC و AB، بـه ترتیب، عبارتند از نقطه‌های A_1، B_1، و C_1. پاره‌خط‌های راست AO، BO و CO، به‌ترتیب، محیط دایره را در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط‌های راست

A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 از یك نقطه می‌گذرند.

۳۷۹. به ازای چه مقدارهایی از m و n، این برابری برقرار است:

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$$

۳۸۰. n عـدد حقیقی مختلف را، در یك سطر و به ترتیب صعودی نوشته‌ایم. در سطر دوم و زیر آن‌ها، همان عددها را، و به احتمالی در ردیف دیگری، نوشته‌ایم. مجموع هر دو عـددی را که در یك ستون قرار دارند محاسبه کرده‌ایم و زیر آن‌ها آورده‌ایم. به این ترتیب، سطر سوم به دست می‌آید. معلوم شد، عددهای سطر سوم، بـه ردیف صعودی قرار گـرفته‌اند. ثابت کنید، دو سطر اول و دوم، بر هم منطبق‌اند.

۳۸۱. مثلث ABC مفروض است. از نقطهٔ P، خط‌های راست PA، PB و PC را رسم کرده‌ایم. این خط‌های راست، دایره محیطی مثلث را، درنقطه‌های A_1، B_1 و C_1 (غیر از A، B و C) قطع کرده‌اند. معلوم شد که مثلث $A_1B_1C_1$ با مثلث ABC برابر است. ثابت کنید، حداکثر ۸ نقطهٔ P با این ویژگی وجود دارد.

۳۸۲. عددهای مثبت x، y و z، در این معادله‌ها، صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9 \\ z^2+zx+x^2=16 \end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $D=xy+2yz+3zx$.

۳۸۳. معلم، سه جمله‌ای درجـه دوم $x^2+10x+20$ را روی تختهٔ سیاه نوشت. سپس، هر یك از دانش‌آموزان، به نوبت، یك واحد به ضریب x و یا به مقدار ثابت اضافه کردند و یا یك واحد کم کردند (تنها یکی از این دو عدد را، یك واحد بزرگتر یا یك واحد کوچکتر کردند و نه هر دوی آن‌ها را). درنتیجه، سه جمله‌ای درجه دوم $x^2+20x+10$ روی تختهٔ سیاه

نوشته شد. آیا این حکم درست است که، در لحظه‌ای، سه‌جمله‌ای درجه دومی با ریشه‌های درست، روی تختهٔ سیاه، ظاهر شده است؟

۳۸۴. سکه‌ای به شعاع r، روی صفحه طوری جا به‌جا می‌شود که، مرکز آن، محیط یک چند ضلعی محیط بر دایره‌ای به شعاع $R>r$ را می‌پیماید. اگر محیط این چند ضلعی، برابر p باشد، مساحت شکلی را پیدا کنید که در اثر حرکت سکه به‌دست می‌آید (یک حلقهٔ چند زاویه‌ای).

۳۸۵. $n+1$ وزنه، به وزن کلی $2n$، و یک ترازوی دوکفه‌ای که در حال تعادل است، در اختیار داریم. وزن هر وزنه با یک عدد طبیعی بیان می‌شود. وزنه‌ها را، به‌نوبت، درکفه‌های ترازو می‌گذاریم: ابتدا، سنگین‌ترین (یا یکی ازسنگین‌ترین) آن‌ها را، سپس، سنگین‌ترین وزنه از آن‌چه باقی‌مانده است و غیره. در ضمن، هر بار، وزنهٔ نوبتی را در کفه‌ای می‌گذاریم که سبک‌تر است و، اگر ترازو در حال تعادل باشد، به دلخواه در یکی از دو کفه قرار می‌دهیم. ثابت کنید، بعد از آن که همهٔ وزنه‌ها را درکفه‌های ترازو قرار دهیم، ترازو به حالت تعادل می‌ایستد.

۳۸۶. عددی را «عدداول مطلق» می‌نامیم که هم خودش و هم عددهایی که ازجابه‌جا کردن رقم‌های آن به دست می‌آیند، اول باشند. [مثلاً ۱۳۱، عدد اول مطلق است، زیرا عددهای ۱۳۱، ۱۱۳ و ۳۱۱ اول‌اند، در حالی که عدد ۱۰۱، اول مطلق نیست.] ثابت کنید، هر عدد اول مطلق، نمی‌تواند بیش از سه رقم متفاوت داشته باشد.

۳۸۷. رقم‌های $x\neq 0$ و y چنان‌اند که، به ازای هر $n\geqslant 1$، عدد

$$\underbrace{xx\ldots x}_{n}6\underbrace{yy\ldots y}_{n}4$$

برابرمجذور یک عدددرست است. همهٔ مقدارهای ممکن x و y را پیداکنید.

۳۸۸. چهار نقطهٔ متفاوت A، B، C و D را روی خط راست، و به همین ردیف، انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، برای هرنقطه E، که برخط راست AD واقع نباشد، این نابرابری برقرار است:

$$AE+ED+|AB-CD|>BE+CE$$

۳۸۹. دنبالهٔ x_n به این ترتیب تعریف شده است:

$$x_1=1;\ x_2=1;\ x_{n+2}=x^2_{n+1}-\frac{1}{2}x_n \quad (n\geqslant 1)$$

ثابت کنید، دنبالهٔ x_n دارای حد است و آن را پیدا کنید.

۳۹۰*. در خانه‌های سفید یک جدول شطرنجی 1984×1983 خانه‌ای، عددهای ۱ ویا ۱− را طوری نوشته‌ایم که، برای هرخانهٔ سیاه، حاصل‌ضرب عددهای واقع در خانه‌های سفید مجاور آن، برابر ۱ باشد. ثابت کنید، این وضع، وقتی پیش می‌آید که همهٔ عددهای نوشته شده، برابر ۱ باشند.

۳۹۱. در خانه‌های جدول مربعی 3×3، عددهای ۱ یا ۱− را نوشته‌ایم. برای هر خانه، حاصل‌ضرب عددهای واقع در خانه‌های مجاور آن را، محاسبه می‌کنیم (دوخانه را مجاور می‌دانیم که، در یک ضلع، مشترک باشند). حاصل‌ضرب‌های حاصل‌را، در خانه‌های جدول، به جای عددهای قبلی قرار می‌دهیم. بعد، همان عمل را در مورد جدول جدید انجام می‌دهیم و غیره. ثابت کنید، بعد از چندگام، تنها عددهای ۱ در جدول خواهد بود.

۳۹۲. کدام یک ازاین دوعدد بزرگترند: $\frac{2}{201}$ یا $\ln\frac{101}{100}$؟

۳۹۳. سه دایرهٔ c_1، c_2، c_3، به مرکزهای C_1، C_2، C_3، و شعاع‌های r_1، r_2، r_3، طوری روی صفحه‌اند که، هر دایره، در بیرون دو دایرهٔ دیگر قراردارد؛ درضمن $r_1>r_2$ و $r_1>r_3$، A، نقطهٔ برخورد مماس‌های بیرونی دودایرهٔ c_1 و c_2، دربیرون دایرهٔ c_3؛ و B، نقطهٔ برخورد مماس‌های بیرونی دو دایرهٔ c_1 و c_3 در بیرون دایرهٔ c_2 قرار دارند. از نقطهٔ A، مماس‌هایی بر دایرهٔ c_3؛ واز نقطهٔ B، مماس‌هایی بردایره c_2 رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، از برخورد این دو زوج مماس، یک چهارضلعی پدید می‌آید که در دایره قابل محاسبه است. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۳۹۴. ثابت کنید، هرمقطع مکعب با صفحه‌ای که ازمرکز آن می‌گذرد، مساحتی داردکه از مساحت وجه مکعب کمتر نیست.

نوزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۵ (موگی‌لو)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۳۹۵	۳۹۶	۳۹۷	۳۹۸	۴۰۷	۴۰۸	۴۰۹	۴۱۰
۹:	۳۹۹	۴۰۰	۴۰۱	۴۰۲	۴۱۱	۴۱۰	۴۱۲	۴۱۳
۱۰:	۴۰۳	۴۰۴	۴۰۵	۴۰۶	۴۱۴	۴۱۵	۴۱۶	۴۱۷

۳۹۵. درمثلثی که زاویه‌هایی حاده دارد، ازوسط هر ضلع، عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت شش ضلعی محدود به این عمودها، برابر است با نصف مساحت مثلث.

۳۹۶. آیا عددطبیعی n، باویژگی زیر، وجود دارد: مجموع رقمهای عدد n برابر ۱۰۰۰ و مجموع رقمهای عدد n^2 برابر 1000^2 باشد؟

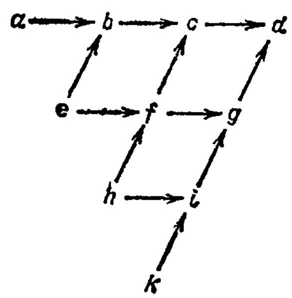
۳۹۷. حداکثر چند مهره می‌توان روی صفحهٔ ۸×۸ خانه‌ای دامکا قرارداد تا، هرمهره، دست‌کم به وسیلهٔ یك مهرهٔ دیگر، درخطرزده شدن باشد؟

۳۹۸. می‌خواهیم هر ضلع و هر قطر یك n ضلعی منتظم را طوری رنگ کنیم که هر دو پاره‌خط راستی که نقطهٔ مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف درآمده باشند. برای این منظور، دست‌کم به چند رنگ نیاز داریم؟

۳۹۹. خط راست l، نقطهٔ O دربیرون این خط راست ونقطهٔ دلخواه A، روی یك صفحه، داده شده‌اند. ثابت کنید، تنها با استفاده از تقارن نسبت به‌خط راست l ودوران به‌مرکز نقطهٔ O، می‌توان نقطهٔ O را به نقطهٔ A تبدیل کرد.

۴۰۰. حداکثر در چند نقطهٔ صحیح مختلف، سه جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c، که در آن $a>100$، می‌توانند مقدارهایی را قبول کنند که از ۵۰ تجاوز نکنند؟

۴۰۱. عددهای طبیعی و مختلف a، b، ...، k، به صورت جدول شکل ۱۷ نوشته شده‌اند. می‌دانیم، هر عددی که در روی شکل، دو پیکان به



شکل ۱۷

سمت آن می‌رود، برابر با مجموع عددهایی است که در ابتدای این پیکان‌ها قراردارند، به ازای چه حداقلی برای d، این وضع ممکن است؟

۴۰۲*. دنبالهٔ نامتناهی و اکیداً صعودی عددهای a_1، a_2، ... داده شده است. ثابت کنید:

a) شماره‌ای مثل k_0 پیدا می‌شود که، برای هر $k\geqslant k_0$، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$$

b) برای شماره‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ k، داریم:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$$

۴۰۳. همهٔ زوج عددهای (x, y) را پیداکنیدکه، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$|\sin x-\sin y|+\sin x\cdot\sin y\leqslant 0$$

۴۰۴. پنج ضلعی محدب $ABCDE$ روی صفحه داده شده است. A_1 را قرینهٔ A نسبت به نقطهٔ B، B_1 را قرینهٔ B نسبت به نقطهٔ C، ...، E_1 را قرینهٔ E نسبت به نقطهٔ A می‌گیریم. بعد از بــه دست آوردن این قرینه‌ها، خود پنج‌ضلعی $ABCDE$ را پاك می‌کنیم. ثابت کنید، بـا در دست داشتن

نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1 و E_1، می‌توان به کمک پرگار و خط‌کش، پنج‌ضلعی $ABCDE$ را بازسازی کرد.

۴۰۵. دنبالهٔ a_1، a_2، a_3، ... با این قانون‌ها داده شده است:

به ازای $n \geqslant 1$: $a_{2n}=a_n$؛

به ازای $n \geqslant 0$: $a_{4n+1}=1$، $a_{4n+3}=0$.

ثابت کنید، این دنباله، دورهٔ تناوب ندارد.

۴۰۶*. n خط راست $(n>2)$ روی صفحه‌ای رسم کرده‌ایم که صفحه را به چند حوزه تقسیم کرده‌اند. بعضی از این حوزه‌ها را رنگ زده‌ایم؛ درضمن، هیچ دو حوزه‌ای که رنگ شده‌اند، در مرزی مشترک نیستند. ثابت کنید، تعداد حوزه‌های رنگ شده، از $\frac{1}{3}(n^2+n)$ تجاوز نمی‌کند.

۴۰۷. یک مکعب، یک قوطی مکعبی سرپوش‌دار با همان اندازه‌های مکعب و شش نوع رنگ در اختیار داریم. با هر رنگ، یکی از وجه‌های مکعب و یکی از وجه‌های قوطی را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان مکعب را در قوطی طوری قرار داد که، هر وجه مکعب، به وجهی از قوطی با رنگی دیگر مجاور باشد.

۴۰۸. قطر A_0A_5، دایرهٔ به مرکز O را، به دو نیم دایره تقسیم کرده است. کمان یکی از این نیم دایره‌ها را، به پنج کمان برابر A_0A_1؛ A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4 و A_4A_5 تقسیم کرده‌ایم. خط راست A_1A_4، پاره‌خط‌های OA_2 و OA_3 را در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید، مجموع طول‌های دو پاره‌خط راست A_2A_3 و MN برابر است با شعاع دایره.

۴۰۹. دانش‌آموز عضو انجمن ریاضی، برای ماشین حساب خود برنامه‌ای ریخته است. طبق این برنامه، ماشین، با فشاردادن دکمه، چهار عدد (a, b, c, d) را به چهار عدد $(a-b, b-c, c-d, d-a)$ تبدیل می‌کند. ثابت کنید، اگر هر چهار عدد نخستین، چهار عدد مساوی باهم نباشند، بعد از چهار بار که دکمه را فشار دهیم، چهار عدد به‌دست می‌آید که، دست‌کم یکی از

آن‌ها، از ۱۹۸۵ بزرگتر است.

۴۱۰. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $2n-1$، $2n$ را به دو گروه، و در هر گروه n عدد، تقسیم کرده‌ایم. فرض کنید، عددهای گروه اول را به ردیف صعودی:

$$a_1<a_2<\dots<a_n$$

و عددهای گروه دوم را، به ردیف نزولی:

$$b_1>b_2>\dots>b_n$$

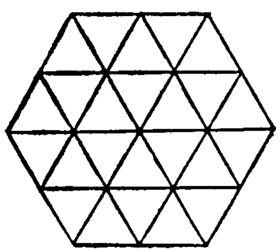
نوشته باشیم. ثابت کنید:

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\dots+|a_n-b_n|=n^2$$

۴۱۱. با چند مکعب مساوی، یک مکعب مستطیل ساخته‌ایم. سه وجه مکعب مستطیل را، که رأسی مشترک دارند، رنگ کرده‌ایم، معلوم شد که نصف تعداد مکعب‌ها، دست‌کم در یک وجه خود، رنگ خورده‌اند. چند مکعب، دارای وجه‌هایی رنگی هستند؟

۴۱۲. یکی از دو دایرهٔ به شعاع R از رأس‌های A و B و، دیگری، از رأس‌های B و C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ گذشته است. نقطهٔ برخورد دوم دو دایره را M می‌گیریم. ثابت کنید، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AMD برابر است با R.

۴۱۳*. شش‌ضلعی منتظم را، به ۲۴ مثلث تقسیم کرده‌ایم (شکل ۱۸). در همهٔ گره‌های شکل، عددهای مختلفی نوشته‌ایم (شکل، دارای ۱۹ گره



شکل ۱۸

است). ثابت کنید، دست کم ۷ مثلث از بین ۲۴ مثلث وجوددارندکه عددهای رأس‌های آن‌ها، به‌ترتیب صعودی نوشته شده‌اند (عددهای راس‌ها را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، در نظر می‌گیریم).

۴۱۴. این معادله را حل کنید:

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{\vdots}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1$$

(در این کسر مسلسل، ۱۹۸۵ بار، عدد ۲ تکرار شده است).

۴۱۵. از پنج ضلعی منتظم به‌ضلع برابر ۱ سانتی‌متر، همهٔ نقطه‌هایی را که از همهٔ رأس‌های پنج‌ضلعی، به فاصله‌ای کمتر از ۱ سانتی‌متر قرار دارند، جدا کرده‌ایم. مساحت بخش باقی‌مانده را پیدا کنید.

۴۱۶. صفحه‌ای شطرنجی نامتناهی، با خانه‌های به ضلع ۱ سانتی‌متردر اختیارداریم. تصمیم می‌گیریم، برش‌هایی روی خطهای راست شبکه انجام دهیم. ثابت کنید، به ازای هر عـدد درست $m>12$، می‌توان مستطیلی را بریدکه مساحتی بیشتر از m سانتی‌متر مربع داشته باشد و، در ضمن، نتوان از آن، مستطیلی به مساحت m سانتی‌متر مربع جدا کرد.

۴۱۷. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر یک سانتی‌متر است. دایرهٔ محاطی مربعی $ABCD$، و دایره‌ای را که از نقطه‌های A، C و B_1 گذشته است، رسم کرده‌ایم. حداقل فاصلهٔ بین نقطه‌های محیط این دو دایره را پیدا کنید.

بیستمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۶ (اولیانوسک)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۴۱۸	۴۱۹	۴۲۰	۴۲۱	۴۳۰	۴۳۱	۴۳۲	۴۳۳
۹:	۴۲۲	۴۲۳	۴۲۴	۴۲۵	۴۳۴	۴۳۳b	۴۳۵	۴۳۶
۱۰:	۴۲۶	۴۲۷	۴۲۸	۴۲۹	۴۳۷	۴۳۸	۴۳۹	۴۴۰

۴۱۸. ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b+1=0$، عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید، عدد a^2+b^2، یک عدد مرکب است.

۴۱۹. دو مربـع مساوی، در برخـورد با یکدیگر، یک هشت ضلعی ساخته‌اند. ضلع‌های یکی از مربع‌ها سبز وضلع‌های مربع دیگر قرمز است. ثابت کنید، مجموع طول ضلع‌های سبزهشت‌ضلعی، با مجموع طول ضلع‌های قرمز آن، برابر است.

۴۲۰. نقطهٔ M روی ضلع AC از مثلث ABC (با زاویه‌های حاده) قرار دارد. دایره‌هایی بر دو مثلث ABM و ACM محیط کـرده‌ایم. نقطهٔ M درچه وضعی باشد تا مساحت بخش مشترک دو دایـره، حداقل مقدار ممکن بشود؟

۴۲۱. می‌خواهند n شهر بسازند و آن‌ها را با $n-1$ جاده بـه هم وصل کنند، به‌نحوی‌که بتوان ازهرشهر به‌هرشهر دیگرمسافرت کرد. (هرجاده، دوشهر را به‌هم وصل می‌کند؛ جاده‌ها یکدیگررا قطع نمی‌کنند و ازشهرهای دیگر نمی‌گذرند.) در ضمن، می‌خواهند، کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین هر دو شهر، به‌ترتیب، برابر با ۱، ۲، ۳، ...، $\frac{n(n-1)}{2}$ کیلومتر، ازطریق شبکهٔ جاده‌ها باشد. آیا چنین خواستی‌را می‌توان بر آورد، به شرطی‌که داشته‌باشیم: a) $n=6$؛ b) $n=1986$.

۴۲۲. ثابت کنید، نمی‌تـوان در دستگاه محورهای مختصات قائـم، چهارضلعی محدبی رسم کرد، به‌نحوی‌که یکی‌ازقطرهای آن دو برابر دیگری، زاویهٔ بین دوقطر برابر ۴۵ درجه و مختصات رأس‌های چهارضلعی، عددهایی

درست باشند.

۴۲۳. ثابت کنید، جدول مستطیلی $m \times n$ خانه‌ای را، می‌توان با عددهای طبیعی مجذور کامل طوری پر کرد که، مجموع عددهای هر سطر و هر ستون، باز هم مجذور کامل باشند.

۴۲۴. دو دایره، که فاصلهٔ بین مرکزهای آن‌ها برابر d است، در نقطه‌های P و Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. از نقطه‌های P، Q و نقطهٔ A واقع بر محیط دایرهٔ اول (A، غیر از P و Q است)، خطهای راستی گذرانده‌ایم که دایرهٔ دوم را، به ترتیب، در نقطه‌های B و C قطع کرده‌اند.

a) ثابت کنید، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است با d.

b) اگر نقطهٔ A روی محیط دایرهٔ اول حرکت کند، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث ABC، چه مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند؟

۴۲۵*. یک شش‌ضلعی منتظم، روی یک صفحه داده شده است. هر ضلع آن را، به ۱۰۰۰ بخش برابر تقسیم کرده‌ایم و، نقطه‌های تقسیم را، با پاره‌خط‌های راستی موازی با ضلع‌های شش‌ضلعی، به هم وصل کرده‌ایم. در شبکه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید، سه گره را، که رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، در نظر می‌گیریم (با هر اندازه‌ای و در هر موقعیتی) و آن‌ها را رنگ می‌کنیم. به همین طریق، گره‌های سه‌گانه را رنگ می‌کنیم تا جائی که دیگر نتوان چنین گره‌های سه‌گانه را پیدا کرد. ثابت کنید، اگر تنها یک گره بدون رنگ باقی بماند، این گره نمی‌تواند یکی از رأس‌های شش‌ضلعی اصلی باشد.

۴۲۶. همهٔ عددهای طبیعی را پیدا کنید، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها، برابر مجذور تعداد همهٔ مقسوم‌علیه‌های خود باشد.

۴۲۷. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1، a_2، ...، a_n داریم:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\dots+\frac{n}{a_1+a_2+\dots+a_n}<2\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$$

۴۲۸. در مثلث ABC ($AB \neq AC$)، از رأس A، خط‌های راست مختلفی گذرانده‌ایم. ثابت کنید، روی هر کدام از آن‌ها، بیش از یک نقطهٔ

M پیدا نمی‌شود که غیر از رأس‌های مثلث باشد و در شرط $A\widehat{B}M = A\widehat{C}M$ صدق کند. خط‌های راستی را معین کنید که شامل چنین نقطه‌ای نباشند.

۴۲۹. مکعب با یال به طول n ($n \geq 3$)، از n^3 مکعب واحد تشکیل شده است. ثابت کنید، می‌توان روی هر یک از این مکعب‌های واحد، عدد درستی نوشت، به نحوی که بین آن‌ها، عددهای برابر وجود نداشته باشد و مجموع عددها، در هر ردیفی که موازی با یک یال مکعب است، برابر صفر شود.

۴۳۰. در عددنویسی به مبنای ۱۰، عدد طبیعی a دارای n رقم برابر x، عدد b دارای n رقم برابر y و عدد c دارای $2n$ رقم برابر z است. برای هر $n \geq 2$، همهٔ این گونه رقم‌های x، y و z را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $a^2+b=c$.

۴۳۱. در درون یک دوازده ضلعی محدب، دو نقطه داده شده است که به فاصلهٔ ۱۰ سانتی متر از یکدیگر قرار دارند. برای هر یک از این نقطه‌ها، مجموع فاصله‌های از آن‌ها تا رأس‌های دوازده ضلعی را پیدا کرده‌اند. ثابت کنید، اختلاف این دو مجموع، از یک متر کمتر است.

۴۳۲. در ۳۰ لیوان، شیر وجود دارد. پسر بچه‌ای می‌خواهد کاری کند که مقدار شیر، در همهٔ لیوان‌ها برابر باشد. برای این منظور، به ترتیب، دو لیوان را برمی‌دارد و از یکی در دیگری می‌ریزد تا مقدار شیر آن‌ها برابر شود. آیا می‌توان، مقدار شیر اولیه را در لیوان‌ها، طوری انتخاب کرد که پسربچه، هر قدر که به کار خود ادامه دهد، نتواند به هدف خود برسد؟

۴۳۳. مستطیلی را، به کمک خط‌های راست موازی با ضلع‌های آن، به مربع‌هایی به ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم و، سپس، آن‌ها را، شبیه صفحهٔ شطرنج، به رنگ‌های سیاه و سفید درآورده‌ایم. قطر مستطیل، به پاره‌خط‌های راست سفید و سیاه تقسیم می‌شود، مطلوب است نسبت مجموع طول‌های پاره‌خط‌های سفید به مجموع طول‌های پاره‌خط‌های سیاه، به شرطی که اندازه‌های مستطیل a) 100×99؛ b) 101×99 باشد.

۴۳۴. n ضلعی منتظم $A_1A_2\dots A_n$، روی صفحه داده شده است. a) ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، می‌توان برای هر نقطهٔ M از صفحه، در عبارت

$$\pm \overrightarrow{MA_1} \pm \overrightarrow{MA_2} \pm \cdots \pm \overrightarrow{MA_n}$$

علامت‌های مثبت و منفی را طوری انتخاب کرد که، مجموع حاصل، برابر صفر شود. b) ثابت کنید، در حالت فرد بودن n، عبارت مذکور به کمک انتخاب علامت‌های مثبت ومنفی، تنها برای تعداد محدودی نقطهٔ M ازصفحه، برابر صفر می‌شود.

۴۳۵. خانه‌های یك جدول مربعی $n\times n$ $(n\geqslant 3)$ را، به‌این ترتیب، با عددهای ± 1 پرکرده‌ایم:

۱) در تمام خانه‌های مرزی جدول، عدد -1 را گذاشته‌ایم؛

۲) عددهایی را که به نوبت در خانه‌های خالی جـدول می‌گذاریم، می‌توان به یکی ازاین‌دوصورت انتخاب کرد: برابر با حاصل‌ضرب دوعدد دو طرف آن در یك سطر و یا برابر حاصل‌ضرب دو عدد دو طرف آن در یك ستون باشد. این روش را ادامه می‌دهیم تا همهٔ خانه‌های جدول پرشود. a) حداکثر؛ b) حداقل تعداد عددهای $+1$ در جدول چقدر است؟

۴۳۶. درستی این نابرابری را، برای هرعدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$|\sin 1|+|\sin 2|+\cdots+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8}{5}n$$

۴۳۷. m و n، عـددهایی طبیعی‌اند و $1\leqslant m<n\leqslant 1986$. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای به‌صورت $\frac{1}{mn}$، عددی درست نیستند.

۴۳۸. یك مربع‌ویك مثلث‌را، بردایره‌ای‌به‌شعاع‌واحد محیط کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت بخش مشترك مربع و مثلث از ۳/۴ بیشتر است. آیا می‌توان گفت‌که، این مساحت، از ۳/۵ بیشتر است؟

۴۳۹*. چندجمله‌ای $P(x)$را «مجاز» می‌نامیم،وقتی که همهٔ ضریب‌های آن، برابر ۰، ۱، ۲ یا ۳ باشند. برای عدد طبیعی مفروضn، تعداد همهٔ چندجمله‌ای‌های «مجاز» را پیدا کنیدکه، برای آن‌ها، داشته باشیم: $P(2)=n$.

۴۴۰*. همهٔ چهاروجهی‌های $AXBY$ را درنظر می‌گیریم که برکرهٔ

مفروضی محیط‌اند. ثابت کنید، اگر نقطه‌های A و B ثابت باشند، مجموع زاویه‌های چهارضلعی فضایی $AXBY$، یعنی مقدار

$$\widehat{AXB}+\widehat{XBY}+\widehat{BYA}+\widehat{YAX}$$

به انتخاب نقطه‌های X و Y بستگی ندارد.

بیست و یکمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۷ (فرونزه)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۴۴۱	۴۴۲	۴۴۳	۴۴۴	۴۵۲	۴۵۳	۴۵۴	۴۵۵
:۹	۴۴۵	۴۴۶a	۴۴۷	۴۴۸	۴۵۶	۴۵۷	۴۵۸	۴۵۹
:۱۰	۴۴۹	۴۵۰	۴۵۱	۴۴۶b	۴۵۵	۴۶۰	۴۶۱	۴۶۲

۴۴۱. ده ورزشکار، در مسابقهٔ تنیس روی میز، مسابقه می‌دهند. هردو نفر آن‌ها، درست یك بار باهم بازی می‌کنند. اولی در x_1 بازی پیروزشد و در y_1 بازی باخت؛ دومی x_2 بازی را برد و y_2 بازی را شکست خورد و غیره. ثابت کنید:

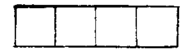
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+x_{10}^2$$

۴۴۲. می‌دانیم، به‌کمك ۶ وزنه می‌توان ۶۳ جسم راکه، وزن‌آن‌ها، عددهای طبیعی متوالی را تشکیل می‌دهند، وزن کرد. همهٔ این گونه وزنه‌ها را پیداکنید.

۴۴۳. هفت ضلعی منتظم $A_1A_2 \ldots A_7$ مفروض است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{A_1A_5}+\frac{1}{A_1A_3}=\frac{1}{A_1A_7}$$

۴۴۴. بازی «نبرد دریائی»، در مربع ۷×۷ خانه‌ای انجام می‌شود. حداقل چند شلیك لازم است تا، به طور حتم، چهارنفر عرشهٔ کشتی زخمی شوند، به شرطی که

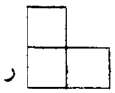
a) به صورت  باشد؛

b) از چهارخانه‌ای که ضلع‌های آن‌ها بـه هم متصل است، تشکیل شده باشد.

۴۴۵. ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی n، عدد

$$1^{1987}+2^{1987}+\dots+n^{1987}$$

بر $n+2$ بخش پذیر نیست.

۴۴۶. a) حداقل چند نمونه ازشکل  را باید درمربع ۸×۸ خانه‌ای جا داد، تا دیگر نتوان حتی یکی از این شکل‌ها را، بدون این که روی دیگران قرار گیرد، در آن مستقر کرد؟

b) درمربع ۱۹۸۷×۱۹۸۷ خانه‌ای، یکی‌از خانه‌ها را، به‌دلخواه، جداکرده‌ایم. ثابت کنید، در هرحال، بخش باقی‌مانده را می‌توان به صورت شکل‌های شبیه بخش a) برید.

۴۴۷. سه خط راست، موازی ضلع‌های مثلث رسم کرده‌ایم. هر یك از این خط‌های راست، از ضلعی که با آن موازی است، به فاصله‌ای برابر طول همان ضلع قرار دارد. درضمن، برای‌هرضلع مثلث، خط راست موازی با آن و رأس مقابل به این ضلع، در دو طرف مختلف ضلع قرار گرفته‌اند. ضلع‌های مثلث را امتداد داده‌ایم تا سه خط راستی راکه رسم کرده‌ایم، قطع کنند. ثابت کنید، این نقطه‌های برخورد، روی محیط یك دایره واقع‌اند.

۴۴۸*. دو خط شکستهٔ بسته، کـه تعداد ضلع‌های هر کدام از آن‌ها عددی فـرد است، روی صفحه‌ای داده شده‌اند. همهٔ ضلع‌های ایـن خط‌های شکسته، روی خط‌های راست مختلفی قرار دارند و هیچ سه تایی از آن‌ها، از یك نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید، از هر خط شکسته، می‌توان یك ضلع طوری انتخاب کرد که دو ضلع روبه‌رو در یك چهارضلعی محدب باشند.

۴۴۹. پنج عدد طبیعی طوری پیدا کنید که، هر دو عدد آن‌ها، نسبت به هم اول باشند و، مجموع هر چند عدد از آن‌ها، عددی مرکب باشد.

۴۵۰. ثابت کنید، اگر، درپنج ضلعی محدب $ABCDE$ داشته باشیم:

$$\widehat{ABC}=\widehat{ADE}،\ \widehat{AEC}=\widehat{ADB}$$

آن وقت داریم: $\widehat{BAC}=\widehat{DAE}$.

۴۵۱. همهٔ‌مقدارهای α را پیدا کنید که، به ازای هر کدام‌از آن‌ها، دنبالهٔ

$$\cos\alpha،\ \cos 2\alpha،\ \cos 4\alpha،\ \cos 8\alpha،\ \dots،\ \cos 2^n\alpha$$

فقط شامل عددهای منفی باشد.

۴۵۲. برای عددهای مثبت a، b، c، A، B و C داریم:

$$a+A=b+B=c+C=k$$

ثابت کنید: $aB+bC+cA\leqslant k^2$.

۴۵۳. درهر یك ازخانه‌های جدول مربعی ۱۹۸۷×۱۹۸۷ خانه‌ای، عددی گذاشته‌ایم که، قدرمطلق آن، از واحد تجاوز نمی‌کند. در هر مربع ۲×۲ از این جدول، مجموع عددها، برابرصفر است. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای این جدول، از ۱۹۸۷ تجاوز نمی‌کند.

۴۵۴. رأس B اززاویهٔ ABC دربیرون‌دایره‌ای‌قراردارد و نیم‌خط‌های راست BA و BC، دایره را قطع می‌کنند. ازنقطهٔ K، محل برخورد نیم‌خط راست BA با محیط‌دایره، خط راستی عمود بر نیمساز زاویه‌کشیده‌ایم، که دایره را در نقطه‌های K و P، و نیم خط راست BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. ثابت کنید، طول پاره‌خط راست PM، دو برابر طول عمودی است‌که از مرکز دایره بر نیمساز زاویهٔ ABC فرود آید.

۴۵۵. دونفر، به نوبت، عددی طبیعی راکه از p تجاوز نمی‌کند، بر تخته سیاه می‌نویسند. کسی بازنده است‌که نتواند، در نوبت خود، عددی را بنویسد. در ضمن، طبق قانـون بازی، نمی‌توان عـددی را روی تختهٔ سیاه نوشت‌که مقسوم‌علیهی از یکی از عددهای قبلی باشد.

a) روشن‌کنید. به‌ازای $p=10$، چه‌کسی می‌تواند برنامه‌ای برای بردن خود طرح کند. این برنامه را توضیح دهید.

b) به همان پرسش دربارهٔ ۱۰۰۰=p پاسخ بدهید.

۴۵۶. عمو «دریا»، هر عصر از بین ۳۳ پهلوانی که برای نگهبانی نامزد شده‌اند، ۹ یا ۱۰ نفر را به صلاح دید خود، انتخاب می‌کند. حداقل بعد از چند روز، همهٔ پهلوانان، به تعداد برابر نگهبانی داده‌اند؟

۴۵۷. در شبکه‌ای، که مختصات گره‌های آن عددهایی درست‌اند، مجموعه‌ای غیرتهی از گره‌ها را علامت گذاشته‌ایم. به جز آن، دسته‌ای از بردارهای غیر صفر، با مختصات درست داده شده است. می‌دانیم، اگر از هر گره شبکه که علامت دارد، همهٔ بردارهای مفروض را رسم کنیم، بین نقطه‌های انتهائی آن‌ها، نقطه‌های علامت‌دار، بیش از نقطه‌های بی‌علامت است. ثابت کنید، تعداد گره‌های علامت‌دار، بی‌نهایت است.

۴۵۸. p ضلعی محدبی را ($p \geqslant$ ۵)، روی همهٔ قطرها بریده‌ایم. ثابت کنید، بین بخش‌های حاصل، بخش‌هایی با مساحت‌های برابر وجود دارد.

۴۵۹*. مجموعهٔ T_0، شامل همهٔ عددهای به صورت (۲^k) است که، در آن، $k=$ ۰، ۱، ۲، ...، به ازای هر ۱۹۸۷ ،...، ۲، ۱ $=p$، مجموعهٔ T_p را از مجموعهٔ T_{p-1} به این ترتیب به دست می‌آوریم که، به آن، همهٔ عددهایی را که به صورت مجموعی از چند جملهٔ T_{p-1} است، اضافه کنیم. ثابت کنید، دست کم یك عدد طبیعی وجود دارد که به مجموعهٔ T_{1987} تعلق ندارد.

۴۶۰. نمودار تابع $y=f(x)$، که در تمامی محور عددی معین است، ضمن دوران دور مبداء مختصات، بر خودش منطبق می‌شود.

a) ثابت کنید، معادلهٔ $f(x)=x$، درست یك جواب دارد.

b) نمونه‌ای از این تابع را بدهید.

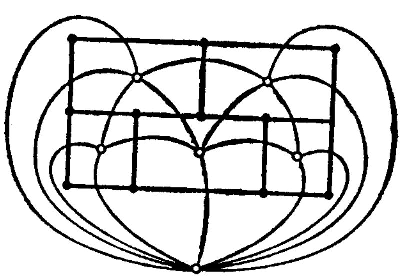
۴۶۱. همهٔ وجه‌های یك چند وجهی محدب، مثلث‌اند. ثابت کنید، هر یال این چندوجهی را، می‌توان طوری به رنگ قرمز یا آبی در آورد که، بتوانیم از هر راس به رأس دیگر، تنها روی یال‌های قرمز، و همچنین، تنها روی یال‌های آبی حرکت کنیم.

۴۶۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، این نابرابری درست است:

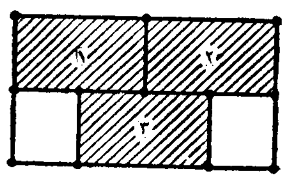
$$(2n+1)^n \geqslant (2n)^n + (2n-1)^n$$

حل، راهنمائی، پاسخ

۱. فرض می‌کنیم، بتوانیم این خط شکسته را رسم کنیم. چون دورهٔ هر یك از بخش‌های ۱، ۲ و ۳، که در شکل ۱۹ هاشور خورده‌اند، شامل پنج پاره‌خط راست است و خط شکسته باید هر کدام از این پاره‌خط‌های راست را، درست یکبار قطع کند، بنابراین، هر یك از این سه بخش، باید شامل یکی از دو انتهای خط شکسته باشد (اگر در یکی از این بخش‌ها، انتهائی از خط شکسته نباشد، آن وقت، خط شکسته باید به تعداد مرتبه‌هایی که به آن وارد شده است، به همان تعداد هم از آن خارج شده باشد، یعنی باید پاره خط‌های راست مرزی را، به تعداد زوج قطع کرده باشد). ولی خط شکسته، تنها دو انتها دارد. تناقص حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.



شکل ۲۵



شکل ۱۹

▽ همین راه‌حل را می‌توان، به صورت دیگری بیان کرد. شکل ما، صفحه را به ۶ حوزه تقسیم کرده است. در هر یك از این حوزه‌ها، نقطه‌ای انتخاب می‌کنیم و، آن را، «پای‌تخت» حوزه می‌نامیم؛ و برای هر یك از ۱۶ پاره‌خط راست، «جاده»‌ای در نظر می‌گیریم که این پاره‌خط راست را قطع و پای‌تخت‌های دوحوزهٔ مجاور آن را به هم به وصل کرده باشد (شکل ۲۰). از این شبکهٔ جاده‌ها نمی‌توان به نحوی عبور کرد که، از هر جاده، تنها یکبار گذشته باشیم: زیرا ۴ پای‌تخت وجود دارد که، از هرکدام آن‌ها، به تعداد فردی جاده می‌گذرد. و برای این‌که بتوان برای مسیرخود درروی جاده‌ها، راهی پیدا کرد که، از هر جاده تنها یکبار عبور کنیم، لازم است (و به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که، کافی است) که، تعداد «پای‌تخت‌های فرد»، برابر ۰ یا ۲ باشد.

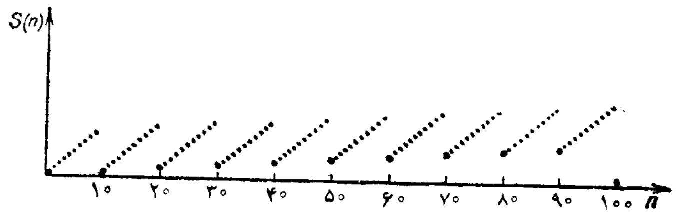
۲. $ABCD$ را مستطیل مفروض و LN را، مماس‌مشترك دایره‌های ۱ و ۳ (به مرکز نقطه‌های A و C) می‌گیریم. از نقطهٔ O، مرکز مستطیل، عمود OM را بر خط راست LN رسم می‌کنیم. چهارضلعی $ALNC$ یك ذوزنقه، و OM پاره‌خط راستی است که وسط دو ساق آن را به هم وصل کرده است، به نحوی که

$$OM=\frac{1}{2}(r_1+r_3)$$

فاصلهٔ نقطهٔ O تا مماس مشترك دوم همین دو دایره، بازهم برابر $\frac{1}{2}(r_1+r_3)$ می‌شود.

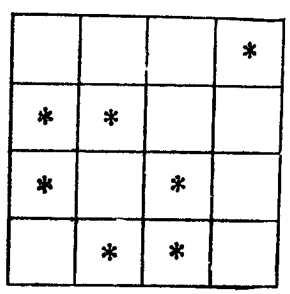
به‌همین ترتیب ثابت‌می‌شود که، فاصلهٔ O، تاهریك ازمماس مشترك‌های دو دایرهٔ دیگر، برابر است با $\frac{1}{2}(r_2+r_4)$. چون، بنا به‌فرض، باید داشته باشیم: $r_1+r_3=r_2+r_4$، بنابراین نقطهٔ O، از هرچهار مماس مشترك به یك فاصله است، یعنی مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است که بوسیلهٔ این مماس‌ها تشکیل می‌شود.

۳. بین بیست عدد نخستین از عددهای مفروض، دو عدد وجود دارد که به صفر ختم می‌شوند (در دستگاه دهدهی عددنویسی). دست‌کم، در یکی از این دو عدد، رقم قبل از صفر، برابر ۹ نیست. این عدد را N، و مجموع رقم‌های آن را s می‌گیریم. در این صورت، عددهای N، $N+1$، $N+2$، ...، $N+9$، $N+19$، جزو ۳۹ عدد مفروض‌اند و مجموع رقم‌های آن‌ها، به‌ترتیب برابراست با: s، $s+1$، $s+2$، ...، $s+10$، ولی بین ۱۱ عدد متوالی، دست‌کم یکی، بر ۱۱ بخش‌پذیر است.



شکل ۲۱

▽ به‌طور کلی، برای هر $m=2, 3, \ldots$، می‌توان کوچکترین عدد c_m را طوری پیدا کرد که، بین هر c_m عدد طبیعی متوالی، دست کم در موردیکی، مجموع رقم‌ها بر m بخش‌پذیر باشد (برای $m<20$، کافی است رفتار تابع «مجموع رقم‌های عدد n» را، در محدودهٔ صد عدد مطالعه کنیم؛ نمودار این تابع در شکل ۲۱ داده شده است)؛ در چند حالت خاص داریم: $c_2=3$، $c_3=5$، ...، $c_{10}=19$، $c_{11}=39$، $c_{12}=59$.



شکل ۲۲

۴. روشن است که، شکل ۲۲، با هفت ستاره‌ای که در خانه‌های آن گذاشته‌ایم، با شرط مساله سازگار است.

اگر تعداد ستاره‌ها برابر ۶ یا کمتر باشد، آن وقت، دوستون پیدا می‌شود که، در هرکدام از آن‌ها، حداکثر یك ستاره وجود دارد. دوستون دیگر را حذف می‌کنیم. در این صورت، حداکثر دو ستاره باقی‌می‌ماند که، با حذف سطرهایی که این دو ستاره در آن‌ها قرار دارند، دیگر ستاره‌ای باقی نمی‌ماند.

$\triangledown$ بررسی حالت کلی این‌مساله، جالب است: حداقل تعداد ستاره‌هایی که می‌توان در یك جدول $m\times n$ قرار داد، چقدر می‌تواند باشد تا اگر k ستون و l سطر را حذف کنیم، دست‌کم، یك ستاره باقی بماند (در این جا، k، l، m و n عددهایی طبیعی‌اند و $k<m$، $l<n$). ولی حل این مساله، حتی برای $m=n$ و $k=l=n-2$، بسیار دشوار است (مسالهٔ ۲۰۸ را ببینید که، در آن جا، $n=7$ و $n=13$).

۵. a) از برهان خلف استفاده وفرض می‌کنیم، دوباره، با چهار عدد نخستین، یعنی $(a، b، c، d)$ برخورد کنیم.

ابتدا ثابت می‌کنیم که، در این صورت $abcd=1$.

$abcd=p$ می‌گیریم. در این صورت، حاصل ضرب عددهای گروه دوم برابر p^2، حاصل‌ضرب چهار عدد گروه سوم برابر p^4، حاصل‌ضرب عددهای گروه چهارم برابر p^8 وغیره می‌شود. روشن است که، برای $p\neq 1$، در دنبالهٔ این حاصل‌ضرب‌ها، نمی‌توان به دو عدد برابر رسید و، بنابراین، همهٔ گروه‌ها، با هم فرق دارند. به‌این‌ترتیب $p=1$.

اکنون، گروه چهار عددی دوم را درنظرمی‌گیریم: ab، bc، cd، da. چون $abcd=1$، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که گروه چهارم، به صورت عددهای b^2c^2، c^2d^2، d^2a^2، a^2b^2 درمی‌آید. به این ترتیب، گروه چهارم، از مجذور عددهای گروه دوم و جابه‌جایی آن‌ها، به دست می‌آید. به همین ترتیب، می‌توان از گروه چهارم عددها، گروه ششم و، سپس، از آن، گروه هشتم و غیره را به دست آورد.

اگر همهٔ عددهای گروه چهارم، برابرواحد نباشند، آن وقت، بزرگترین آن‌ها، از واحد بزرگتر است. بنابراین، بزرگترین عدد، ازچهار عددگروه $2n$ام، همراه با n، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند؛ و این، متناقض با آن است که، به‌طور متناوب، تکرار شوند.

به این ترتیب $ab=bc=cd=da=1$، که از آن‌جا، به سادگی به دست می‌آید: $a=b=c=d=1$.

b) به سادگی‌روشن می‌شود که، حکم‌مساله، برای $n=1$ درست‌است. فرض می‌کنیم، حکم، برای $n=k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای $n=k+1$ هم درست است. سه سطر اول را می‌نویسیم:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2^{k+1}}; \quad (1)$$
$$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \ldots, x_{2^{k+1}}x_1;$$
$$x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, \ldots, x_{2^{k+1}}x_2;$$

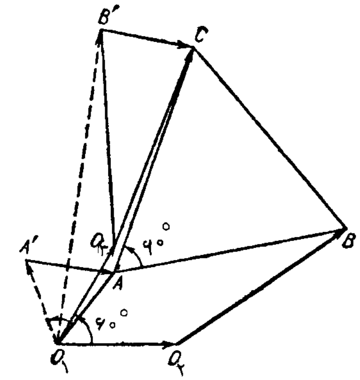
به سادگی می‌بینیم که، عددهای ردیف فرد وعددهای واقع در ردیف زوج، سطرهای

$$x_1, x_3, \ldots, x_{2^{k+1}-1} \text{ و } x_2, x_4, \ldots, x_{2^{k+1}}$$

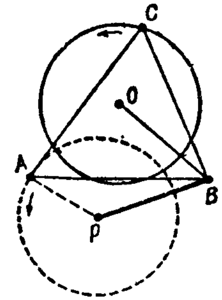
را به وجود می‌آورند که، هر کدام از آن‌ها طولی برابر 2^k دارد و، بنابر فرض استقرا، سرانجام، به واحدهای مثبت می‌رسند. بنابراین، سطر (۱) هم، بعد از برداشتن گام‌هایی، منجر به‌واحدهای مثبت می‌شود.

$\triangledown$ می‌توان ثابت کرد که ازسطر x به‌طول $m=2^k.r$ (r، عددی‌فرد است)، تنها وقتی می‌توان به سطری با واحدهای مثبت رسید که، x از r بخش مساوی به طول 2^k تشکیل شده باشد، یعنی دورهٔ تناوبی برابر 2^k داشته باشد.

۶. a) فرض می‌کنیم $\overrightarrow{O_1O_3}$، برداری باشد که ازدوران بردار $\overrightarrow{O_1O_2}$ به اندازهٔ ۶۰ درجه (در همان جهتی که از دوران $\overrightarrow{AB}$، بردار $\overrightarrow{AC}$ به دست می‌آید) به دست آمده است؛ در همین دوران دور O_1، تصویر A و B را



شکل ۲۳



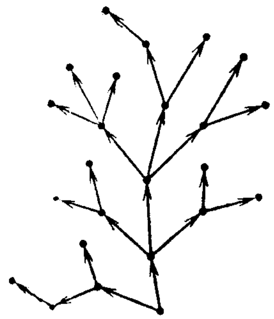
شکل ۲۴

A' و B' می‌گیریم. ضمن دوران یکنواخت بردارهای $\overrightarrow{O_1A}$ و $\overrightarrow{O_2B}$، مثلث $O_1A'A$ هم دور O_1، و بردارهای $\overrightarrow{O_2B'}$ و $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{A'A}$ و در نتیجه مجموع آن‌ها $\overrightarrow{O_2C}$ هم دور O_2، با همان سرعت زاویه‌ای دوران می‌کنند (شکل ۲۳).

b) پاسخ: ۵. نقطهٔ B را به فاصلهٔ ۳ از P تثبیت می‌کنیم (شکل ۲۴). ضمن حرکت A روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲ و به مرکز P، رأس C روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲، که مرکز آن به فاصلهٔ $OP=۳$ از P قرار دارد، حرکت می‌کند (مثلث OPB، متساوی‌الاضلاع است). دورترین نقطهٔ محیط این دایره از P، به فاصلهٔ $CO+OP$ یعنی ۵، قرار دارد.

▽ در نابرابری $PC \leqslant AP+PB$ هم (برای هر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و هر نقطهٔ P)، وقتی به برابری می‌رسیم که، نقطهٔ P، روی کمان AB از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل رأس C نیست) باشد.

۷. بین همهٔ جدول‌هایی که می‌توان از تغییر علامت سطرها و ستون‌ها به دست آورد، آن را انتخاب می‌کنیم که، مجموع همهٔ عددهای واقع در آن، حداکثر باشد. این جدول T (با حداکثر مقدار ممکن مجموع عددها) وجود دارد، زیرا مجموعهٔ روش‌های تغییر علامت‌ها در جدول $m\times n$، مجموعه‌ای متناهی و دارای 2^{mn} عضو است (تعداد روش‌های ممکن، برای تغییر علامت‌ها در سطرها و ستون‌ها، در عمل، از این هم کمتر است: 2^{m+n-1}). در جدول



شکل ۲۵

T، مجموع عددها در هر سطر و هر ستون، عددی غیرمنفی است. در واقع، اگر مجموع عددها در یک سطر (یا یک ستون) از جدول T، منفی باشد، آن‌وقت با تغییر علامت عددها در این سطر (یا ستون)، به جدولی می‌رسیم که، مجموع عددهای آن بیشتر از مجموع عددهای جدول T می‌شود که، نوع انتخاب جدول T را، نقض می‌کند.

۸. یکی از نقطه‌ها را «ریشه» می‌نامیم. هر یک از $n-1$ نقطهٔ باقی‌مانده را، در تناظر با آخرین پاره‌خط مسیری قرار می‌دهیم که از «ریشه» به این نقطه می‌رود (بنا بر شرط، این مسیر، منحصر به فرد است). این تناظر، یعنی تناظر بین مجموعهٔ $n-1$ نقطه و مجموعهٔ همهٔ پاره‌خط‌ها، یک به یک است. اگر روی همهٔ پاره‌خط‌های راستی که از «ریشه» آغاز شده‌اند، در مسیری که به سمت نقطه‌های دیگر می‌روند، علامت پیکان بگذاریم (شکل ۲۵)، آن وقت، به هر نقطه (به جز ریشه)، یک پیکان می‌رسد.

▽ گرافی که، در این مساله، مورد مطالعه قرار گرفته است «درخت» نامیده می‌شود (ضمیمهٔ ۱۱)؛ در این جا، یکی از «رأس‌های» گراف را به عنوان «ریشه» انتخاب کرده‌ایم. یادآوری می‌کنیم، این مساله را، با روش استقرای ریاضی (ضمیمهٔ ۱) هم می‌توان حل کرد.

۹. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد b و $p-a$ را برابر d می‌گیریم:

$$b=kd \quad \text{و} \quad p-a=ld$$

در این صورت، k و l نسبت به هم اول می‌شوند. سپس داریم:

$$ak+bl=\frac{ab}{d}+\frac{(p-a)\,b}{d}=pk$$

یعنی $ak+bl$ بر p بخش‌پذیر است.

۱۰. پاسخ: مناسب‌ترین روش، برای کولیا، روش اول است؛ درهر یك از روش‌های دوم و سوم، به شرط بازی آگاهانه، گردوی کمتری به‌او می‌رسد. (همان طور که خواهیم دید، در این تقسیم، بحث تنها بر سر یك گردو است.)

فرض کنیم په‌تیا، گردوها را، به نحوی، به دو بخش کرده باشد (در یك بخش a و در دیگری b گردو؛ $a<b$)؛ کولیا می‌تواند بخش بزرگتر را طوری تقسیم کند که در یکی ۱ گردو و در دیگری $b-1$ گردو وجود داشته باشد. همین دو بخش، کوچکترین و بزرگترین بخش‌ها را تشکیل می‌دهند (واین، بستگی به تقسیم بخش شامل a گردو ندارد). به این ترتیب، باروش اول، به تعداد $b\geqslant n+1$ گردو به‌کولیا می‌رسد. (اگر په‌تیا $a=n$ و $b=n+1$ گرفته باشد، سهم‌او دراین روش، یك گردو کمتر ازسهم کولیا می‌شود.)

در روش دوم، اگر بعد از نخستین حرکت داشته باشیم $a=2$ و $b=2n-1$، بهترین نوع تقسیم برای کولیا عبارت است از

$$2=1+1\ ;\ 2n-1=(n-1)+n$$

که در این صورت، n گردو به کولیا می‌رسد. (اگر حرکت اول، به نحو دیگری باشد، کولیا می‌تواند تقسیم را طوری انجام دهدکه‌کمتر از $n+1$ گردو به او نرسد.)

درروش سوم، اگر $a=n$ و $b=n+1$ باشد، کولیا نمی‌تواند طوری تقسیم‌ها را انجام دهدکه بیش از $n+1$ گردو به او برسد (مجموع دو بخش متوسط و مجموع دو بخش کوچکتر و بزرگتر، همیشه یکی از دو مقدار n یا $n+1$ رااختیار می‌کنند). دراین صورت، وقتی که‌کولیا یك گردو به په‌تیا بدهد، سهم په‌تیا بیشتر می‌شود.

۱۱. چون $a_1, a_2, \ldots, a_n$ عددهایی طبیعی‌اند، بنا براین می‌توان

شماره‌های $i_1, i_2, \ldots, i_n$ را طوری در نظر گرفت که داشته باشیم:

$$a_{i_1}\leqslant a_{i_2}\leqslant\cdots\leqslant a_{i_n}\leqslant\cdots$$

(a_{i_1}، کوچکترین عدد در دنبالهٔ a_n؛ a_{i_2}، کوچکترین عدد از بقیهٔ جمله‌های دنبالهٔ a_n وغیره). به‌همین ترتیب، از دنبالهٔ شماره‌های $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ می‌توان دنبالهٔ $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots$ را طوری درنظر گرفت که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$b_{j_1}\leqslant b_{j_2}\leqslant\cdots\leqslant b_{j_n}\leqslant\cdots$$

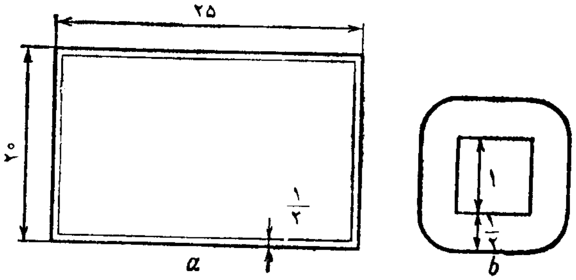
روشن است که، در این ضمن، دنبالهٔ $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}, \ldots$ غیر نزولی باقی می‌ماند. اکنون، کافی است، ازدنبالهٔ $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_n}, \ldots$ دنباله‌ای غیرنزولی را انتخاب کنیم. در این صورت

$$a_{k_1}\leqslant a_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant a_{k_n}\leqslant\cdots$$
$$b_{k_1}\leqslant b_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant b_{k_n}\leqslant\cdots$$
$$c_{k_1}\leqslant c_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant c_{k_n}\leqslant\cdots$$

که از آن‌ها، درستی حکم مساله ثابت می‌شود.

▽ ضمن حل مساله، از این گزاره استفاده کردیم که، در هرمجموعهٔ عددهای طبیعی (ولو نامتناهی)، کوچکترین عدد وجود دارد. در واقع، این گزاره، با نظام استقرای ریاضی، هم ارز است (ضمیمهٔ ۱).

۱۲. مرکزدایرهٔ به‌قطرواحد، بایددردرون مستطیلی‌باشدکه، ضلع‌های



شکل ۲۶

آن، به فاصله‌ای بیش از $\frac{1}{2}$ از ضلع‌های مستطیل اصلی قرار دارند و، در ضمن، دردرون مستطیل اصلی باشد؛ یعنی این مرکز، بایددردرون چارچوبی باشدکه درشکل ۲۶ — a نشان داده شده است. مساحت این مستطیل درونی، برابر است با $456 = 24 \times 19$.

به‌جز این، مرکزاین دایره، باید به فاصلهٔ بیش از $\frac{1}{2}$ از محیط هر یك از مربع‌ها باشد، یعنی در بیرون هر شکلی به مساحت $3+\frac{\pi}{4}$، که در شکل ۲۶ — b دیده می‌شود. حتی اگر این شکل‌ها یکدیگر را قطع نکنند، مجموع مساحت‌های آن‌ها چنین می‌شود:

$$120\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=360+30\pi<360+30\times 3.2=456$$

بنا براین، این شکل‌ها، نمی‌توانند مستطیل به‌مساحت۴۵۶را بپوشانند و، در نتیجه، دایره‌ای با قطر واحد پیدا می‌شودکه هیچ‌کدام از مربع‌ها را قطع نکند.

۱۳. هرمیانه، مثلث را به دومثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. بنا براین (شکل ۲۷) داریم:

$$S_{ABC}=S_{CBB'}=S_{CB'C'}$$

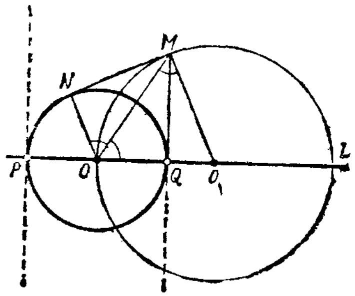
که از آن جا نتیجه می‌شود: $S_{BB'C'}=2S_{ABC}$.

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

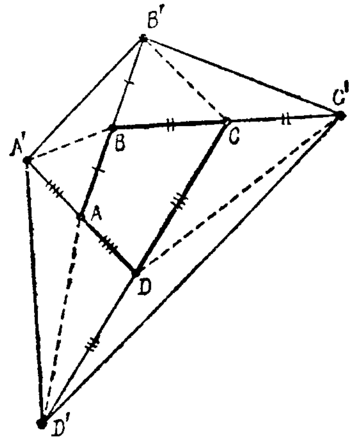
$$S_{CD'C'}=2S_{BCD};\ S_{DD'A'}=2S_{CDA};\ S_{AA'B'}=2S_{DAB}$$

واز مجموع این‌چهار برابری، به‌دست می‌آید:

$$S_{BB'C'}+S_{CC'D'}+S_{DD'A'}+S_{AA'B'}=$$
$$=2(S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB})=4S$$



شکل ۲۸



شکل ۲۷

به‌این ترتیب: $S_{A'B'C'D'}=4S+S=5S$.

۱۴. پاسخ: مکان مطلوب، عبارت است از دو خط راست مماس بر دایرهٔ s درنقطه‌های P و Q (به‌استثنای خود نقطه‌های P و Q).

نقطهٔ تماس مماس مشترك دودایرهٔ s و s' بادایرهٔ s را، N می‌نامیم. دراین‌صورت

$$\widehat{NOM}=\widehat{OMO_1}=\widehat{MOO_1}$$

($ON\parallel O_1M$ و $OO_1=O_1M$). بنا براین زاویهٔ MQO قائمه است وخط راست MQ درنقطهٔ Q بردایرهٔ s مماس‌است (شکل۲۸).

ازطرف دیگر، از هرنقطهٔ واقع برخط راست جواب، به شرطی‌که روی محیط s نباشد، می‌توان دایره‌ای گذراندکه مرکزش روی خط راست l باشد و، درضمن، از O بگذرد.

۱۵. بنا به‌فرض $a_1-a_0\geqslant 1$. سپس به‌ترتیب

$$a_2-a_1=2(a_1-a_0);\ a_3-a_2=2(a_2-a_1);\ \ldots;$$
$$a_{100}-a_{99}=2(a_{99}-a_{98})$$

اگراین۹۹ برابری را درهم ضرب کنیم (دوطرف هریك ازبرابری‌ها،عددی

مثبت است)، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$a_{۱۰۰}=a_{۹۹}+۲^{۹۹}(a_۱-a_۲)>۲^{۹۹}$$

▽ ارزیابی دقیق‌تر را می‌توان، به‌کمك استقرا به‌دست آورد: $a_k\geqslant ۲^k$، $a_{k+۱}-a_k\geqslant ۲^k$، $(k=۱،۲،\ldots)$، $a_{۱۰۰}\geqslant ۲^{۱۰۰}$.

۱۶. فرض کنید: $P(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$. تفاضل

$$P(۶۲)-P(۱۹)=a(۶۲^۳-۱۹^۳)+b(۶۲^۲-۱۹^۲)+c(۶۲-۱۹)$$

بر ۴۳ بخش‌پذیر است و نمی‌تواند برابر واحد باشد.

▽ به‌طور کلی، برای هر چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های درست، برای هر دو عدد درست $x_۱$ و $x_۲$، تفاضل $P(x_۱)-P(x_۲)$ بر $x_۱-x_۲$ بخش‌پذیر است (ضمیمهٔ ۶).

۱۷. $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n را حاصل‌ضرب‌های سطرها و $q_۱$، $q_۲$، ...، q_n را حاصل‌ضرب‌های ستون‌ها می‌گیریم. دراین‌صورت

$$p_۱p_۲\cdots p_n=q_۱q_۲\cdots q_n$$

زیرا، هرطرف‌این‌برابری، معرف حاصل‌ضرب همهٔ عددهای واقع درجدول است. این برابری، به‌معنای آن است که، اگر تعداد عددهای ۱− در بین $p_۱$، $p_۲$، ... p_n زوج باشد، تعداد عددهای ۱− دربین $q_۱$ و $q_۲$، ...، q_n هم زوج است و اگر تعداد عددهای ۱− در دنبالهٔ اول فرد باشد، دردنبالهٔ دوم هم فرداست. به‌این ترتیب، دربین دو $۲n$ عدد $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n، $q_۱$، $q_۲$، ...، q_n، تعداد عددهای ۱− زوج و، بنابراین، تعداد عددهای ۱+ هم زوج است. ولی‌چون n، عددی فرد است، تعداد عددهای ۱− نمی‌تواند با تعداد عددهای ۱+ برابرباشد و، درنتیجه، مجموع

$$p_۱+p_۲+\cdots+p_n+q_۱+q_۲+\cdots+q_n$$

نمی‌تواند برابر صفرشود.

▽ این‌مجموع،می‌تواند با $۲n$، اختلافی برابر d داشته‌باشد، به‌شرطی که d مضربی از ۴ باشد. جالب است، با پیداکردن مثال‌های متناظر،روشن کنیدکه، برای هر $d=۴k$، $|k|<\frac{n}{۲}$، مجموع مربوط می‌تواند برابر

$۲n-d$ شود.

۱۸. a و b را طول ضلع‌های BC و AC ازمثلث ABC می‌گیریم و فرض‌می‌کنیم، میانه‌های AD و BE تحت‌زاویهٔ قائمه، یکدیگررا قطع‌کرده باشند. پاره‌خط راست AC به طول b را درنظرمی‌گیریم و نقطهٔ F راروی آن طوری انتخاب می‌کنیم‌که داشته باشیم: $AF:FC=۳$. دراین‌صورت FD با BE موازی و زاویهٔ ADF برابر ۹۰ درجه می‌شود. به این ترتیب، می‌توان نقطهٔ D را پیداکرد: این نقطه، اولاً روی محیط دایره‌ای به قطر AF و ثانیاً روی محیط دایره‌ای به مرکز C وشعاع $\frac{۱}{۲}a$ قرار دارد. با به دست‌آوردن نقطهٔ D، نقطهٔ B هم به سادگی پیدا می‌شود. مساله وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $\frac{۱}{۲}<\frac{b}{a}<۲$ و، در ضمن، مساله تنها یك جواب دارد.

▽ به سادگی می‌توان ثابت‌کردکه، در چنین مثلثی، برای ضلع‌سوم به طول c داریم:

$$c^۲=\frac{۱}{۵}(a^۲+b^۲)$$

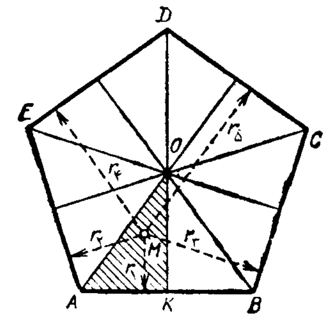
و از آن‌جا، راه دیگری برای رسم مثلث به دست آورد.

۱۹. از نابرابری $x^۲+y^۲\geqslant ۲xy$ نتیجه می‌شود:

$$(a^۲+b^۲)+(c^۲+d^۲)\geqslant ۲(ab+cd)\geqslant ۴\sqrt{abcd}=۴،$$

$$ab+cd\geqslant ۲،\ bc+ad\geqslant ۲،\ ac+bd\geqslant ۲$$

▽ با استفاده از قضیهٔ کلی مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی، می‌توان مساله را به طریق دیگری حل‌کرد و، در ضمن، ثابت‌کردکه، برای هر n عدد مثبت به حاصل‌ضرب واحد، مجموع مجذورهای آن‌ها از n، و مجموع حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها (که تعدادی برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ دارند) از $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ کمتر نیست.



شکل ۲۹

۲۰. پاسخ: بیشترین مقدار برای رأس پنج‌ضلعی و کمترین مقدار برای وسط یکی از ضلع‌ها به دست می‌آید.

پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ را، به وسیلهٔ محورهای تقارن آن، به ۱۰ مثلث تقسیم می‌کنیم. کافی است نقطهٔ M را، تنها در درون یکی از این مثلث‌ها، و مثلاً مثلث AOK مورد بررسی قراردهیم (شکل ۲۹). برای این که فاصلهٔ نقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای را تا ضلع‌های آن با هم مقایسه کنیم، کافی است روشن کنیم که، نقطهٔ M، در کدام طرف نیمساز این زاویه قراردارد. با توجه به این نکته، قانع می‌شویم که فاصلهٔ نقطهٔ M تا ضلع‌های پنج‌ضلعی: AB، AE، BC، DE و CD، به ترتیب صعودی است:

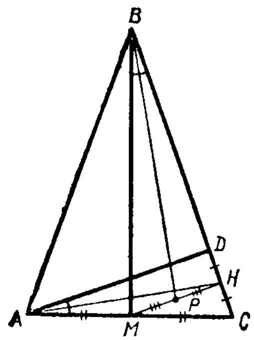
$$r_۱ \leqslant r_۲ \leqslant r_۳ \leqslant r_۴ \leqslant r_۵$$

اکنون دیگر روشن است که فاصلهٔ $r_۳$ وقتی به حداکثر خود می‌رسد که، نقطهٔ M، روی رأس A قرار گیرد، ووقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که، نقطهٔ M، بر نقطهٔ K منطبق باشد.

۲۱. پاسخ: $c = ۹$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع رقم‌های هرعدد بر ۹، برابراست با باقی‌مانده تقسیم خودعددبر ۹ (ضمیمهٔ ۳). ازطرف دیگر $a \leqslant ۱۹۶۲ \times ۹ < ۱۹۹۹۹$؛

بنا براین $b \leqslant ۱ + ۴ \times ۹ = ۳۷$ و $c \leqslant ۹$



شکل ۳۰

۲۲. ارتفاع AD را در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل ۳۰). در این صورت، در مثلث ADC، پاره‌خط راست MH ضلع DC را هم نصف می‌کند، یعنی $DH = CH$. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BHM و ADC متشابه‌اند، زیرا

$$\widehat{DAC} = ۹۰^\circ - \widehat{C} = \widehat{HBM}$$

اگر یکی از این مثلث‌ها را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، ضلع‌های متناظر در آن‌ها، باهم موازی می‌شوند؛ درضمن میانه‌های آن‌ها، BP و AH هم، موازی با هم درمی‌آیند، یعنی قبل ازدوران، BP و AH برهم عمودند.

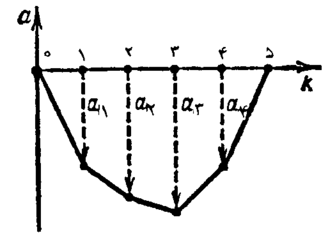
۲۳. پاسخ: ۱.

بین مثلث‌های بادوضلع a و b، باشرط‌های $۰ < a \leqslant ۱$ و $۱ \leqslant b \leqslant ۲$، حداکثر مساحت، مربوط به مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن $a = ۱$ و $b = ۲$ باشد (درواقع $s \leqslant \frac{ab}{۲} \leqslant ۱$، زیرا ارتفاع وارد بر ضلع b، از a تجاوز نمی‌کند). اکنون، وتر این مثلث $c = \sqrt{۵}$، با شرط $۲ \leqslant c \leqslant ۳$ سازگاراست؛ بنا براین، بین همهٔ این مثلث‌ها، مثلث قائم‌الزاویهٔ با ضلع‌های ۱، ۲ و $\sqrt{۵}$، حداکثر مساحت را دارد.

۲۴. خارج قسمت برابر است با

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲xy - ۲yz - ۲zx$$

برای تحقیق، بهتراست فرض کنیم: $x - y = u$، $y - z = v$، دراین صورت



شکل ۳۱

$z-x=-(u+v)$ و، سپس، این اتحاد را ثابت کنیم:

$$(u+v)^5=u^5+v^5+5uv(u+v)\ (u^2+uv+v^2)$$

[به‌کمك بسط دوجمله‌ای (ضمیمهٔ ۶)].

۲۵. شکل ۳۱ به حل این مساله‌کمك می‌کند: خط شکستهٔ با رأس‌هایی در نقطه‌های (k, a_k)، محدب است، زیرا

$$a_{k+1}-a_k\geqslant a_k-a_{k-1}$$

(یعنی، ضریب‌زاویهٔ هرضلع، ازضریب‌زاویهٔ‌ضلع قبلی، بیشتراست)، به‌نحوی که همهٔ این نقطه‌ها، به‌جز دو انتها، در زیر محور Ok قرار دارند.

فرض می‌کنیم، به ازای مقداری از $1\leqslant m$، داشته باشیم: $a_{m-1}\leqslant 0$ و $a_m>0$. در این صورت

$$a_n-a_{n-1}\geqslant a_{n-1}-a_{n-2}\geqslant\dots\geqslant a_{m+1}-a_m\geqslant a_m-a_{m-1}>0$$

و بنابراین

$$a_n>a_{n-1}>\dots>a_m>0$$

که با شرط $a_n=0$ متناقض است.

۲۶. جدولی $m\times n$ در نظر می‌گیریم و، استدلال را، با استقرا انجام می‌دهیم. درستی حکم، برای جدول 1×1 روشن است. فرض می‌کنیم، حکم مساله، برای هر تعدادی کمتر از $m+n$ عدد، درست باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $m+n$ عدد هم درست است. کوچکترین

عدد، از بین $m+n$ عدد مفروض a_1، a_2، ...، a_m، b_1، b_2، ...، b_n را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، این عدد، مثلاً a_1 باشد. a_1 را در گوشهٔ چپ و بالای جدول قرارمی‌دهیم و، سپس، سطراول را از جدول جدا می‌کنیم. اکنون بایدمساله را، برای جدول $(m-1)\times n$ و گروه‌عددهای a_2، ...، a_m، b_1-a_1، b_2، ...، b_n حل کنیم‌که، بنا به فرض استقرا، حل آن، برای ما ممکن است.

راه حل دوم. پاره‌خط راستی به طول

$$d=a_1+a_2+\dots+a_m=b_1+b_2+\dots+b_n$$

رسم و، آن را، با دو روش، تقسیم می‌کنیم: m پاره‌خط راست «قرمز» به طول‌های a_1، a_2، ...، a_m و n پاره‌خط راست «آبی» به طول‌های b_1، b_2، ...، b_n. روی‌هم $(m-1)+(n-1)$ نقطهٔ‌تقسیم و،متناظر با آن، $m+n-1$ پاره خط راست‌کوچك خواهیم داشت. این باقی می‌ماندکه طول هریك از این پاره‌خط‌های راست‌کوچك را (اشتراك پاره‌خط قرمز a_i با پاره‌خط‌آبی b_j) درخانهٔ متناظرآن درجدول (محل برخورد i امین سطر و j امین‌ستون) بنویسیم.

۲۷. نقطهٔ برخورد دایره‌های اول، دوم، چهارم و پنجم را A؛ نقطهٔ برخورد دایره‌های‌اول، سوم، چهارم وپنجم را B؛ ونقطهٔ برخورد دایره‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم را C می‌گیریم.

هر سه نقطهٔ A، B و C نمی‌توانند جدا از هم باشند، زیرا این سه نقطه، بر محیط دایره‌های چهارم و پنجم قرار دارند و، دو دایره، نمی‌توانند بیش از دو نقطهٔ برخورد داشته باشند. بنابراین، از سه نقطهٔ A، B و C، دو تا برهم منطبق‌اند (ضمیمهٔ ۹).

مثلاً فرض کنید $A=B$. دراین‌صورت، همهٔدایره‌ها، ازنقطهٔ A می‌گذرند.

۲۸. پاسخ: نفر سوم، از نفر هفتم برده است.

شطرنج بازانی‌که چهار مقام آخر را به دست آورده‌اند، روی هم ۶ بار با هم بازی کرده‌اند و، بنابراین، در این بازی‌ها، دست‌کم ۶ امتیاز کسب شده است. به این ترتیب، بازی‌کن مقام دوم، دست‌کم ۶ امتیازدارد.

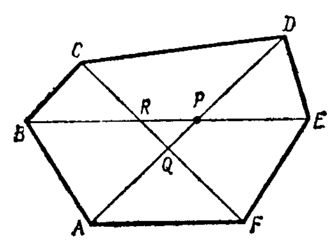
ازطرف دیگر، این شطرنج بازمقام دوم، نمی‌تواند بیش از ۶ امتیاز داشته باشد: اگر بازی‌کن مقام اول ۷ امتیازآورده باشد، به معنای آن است که از نفر دوم برده است و نفردوم نمی‌تواند بیش از ۶ امتیاز داشته باشد؛ واگر اولی ۶/۵ امتیاز داشته باشد، بازهم دومی بیش از ۶ امتیاز ندارد. از این‌جا نتیجه می‌شود که، نفر مقام دوم، درست ۶ امتیاز کسب کرده است.

چهار نفر مقام‌های آخر هم، همین ۶ امتیاز را داشته‌اند و، بنابراین، در برابر شطرنج‌بازان مقام‌های اول تا چهارم، به همهٔ آن‌ها باخته‌اند.

۲۹. a) O را نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم. چون دو مثلث ABD و BCD، مساحت‌هایی برابر دارند و در قاعدهٔ BD مشترك‌اند، بنابراین، دوارتفاع وارد براین قاعده دردو مثلث، با هم برابرند، یعنی نقطه‌های A و C، از BD به یك فاصله‌اندکه، ازآن‌جا، نتیجه می‌شود: $AO=OC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد: $BO=OD$.

به‌این ترتیب، قطرهای چهارضلعی $ABCD$، یکدیگررا نصف کرده‌اند، یعنی این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

b) راه‌حل اول. فرض می‌کنیم، در شش ضلعی محدب $ABCDEF$، قطرهایی که رأس‌های روبه‌رو را به هم وصل کرده‌اند، مساحت آن را نصف کنند و، درعین‌حال، ازیك نقطه نگذرند. دراین صورت، نقطه‌های برخورد این سه قطر، P و Q و R، رأس‌های مثلثی را تشکیل می‌دهندکه در درون شش‌ضلعی واقع است (شکل ۳۲). مساحت‌های دو چهارضلعی $ABCD$ و $BCDE$ برابرند و، بنابراین، دو مثلث ABP و EPD هم، مساحت‌هایی برابر دارند، زیرا



شکل ۳۲

$$S_{ABP}=S_{ABCD}-S_{BCDP}=S_{BCDE}-S_{BCDP}=S_{EPD}$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$S_{BCR}=S_{EFR} \text{ و } S_{AQF}=S_{CQD}$$

از برابری مساحت‌های مثلث‌ها، به دست می‌آید:

$$AP\cdot BP=EP\cdot DP،$$
$$CQ\cdot DQ=AQ\cdot FQ،$$
$$ER\cdot FR=BR\cdot CR$$

و اگر این رابطه‌ها را، در هم ضرب کنیم:

$$AP\cdot BP\cdot CQ\cdot DQ\cdot ER\cdot FR=AQ\cdot BR\cdot CR\cdot DP\cdot EP\cdot FQ$$

ولی این، ممکن نیست، زیرا داریم:

$$AP>AQ،\ BP>BR،\ CQ>CR،\ DQ>DP،$$
$$ER>EP،\ FR>FQ$$

یعنی، حاصل‌ضرب سمت راست، از حاصل‌ضرب سمت چپ کوچکتر است. تناقض حاصل، ثابت می‌کندکه قطرهای AD، BE و CF از یك نقطه می‌گذرند (یعنی $PQ=QR=RP=0$).

راه‌حل دوم. این راه‌حل، بر اساس استفاده از تبدیل هندسی است: تجانس. چون مساحت‌های چهارضلعی‌های $ABCD$ و $BCDE$ برابرند، بنابراین، مساحت‌های مثلث‌های ABD و BDE هم برابرند (هر کدام از آن‌ها، به اندازهٔ مساحت مثلث BCD، ازچهارضلعی متناظرخود، کمتراست). این دو مثلث، درقاعدهٔ BD مشترك‌اند. برابری مساحت‌ها، به معنای برابری دو ارتفاعی است که از رأس‌های A و E بر قاعدهٔ BD فرود می‌آیند: یعنی نقطه‌های A و E، از BD به یك فاصله‌اند. به این ترتیب: $AE \parallel BD$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد: $CE \parallel BF$ و $AC \parallel DF$. بنابراین، مثلث‌های BDF و ACE متشابه‌اند.

P را نقطهٔ برخورد قطرهای AD و BE می‌گیریم. به تجانسی توجه می‌کنیم که به‌مرکز P و ضریب $PE:PB$ باشد. در این تجانس، نقطهٔ B به نقطهٔ E، نقطهٔ D به نقطهٔ A، خط راست DF به خط راست AC و خط راست BF به خط راست EC تبدیل می‌شود.

چون F، نقطهٔ برخورد خطهای راست DF و BF است، بنابراین، ضمن تجانس، به نقطهٔ برخورد خطهای راست AC و EC، یعنی به نقطهٔ C، تبدیل می‌شود. به این ترتیب، نقطه‌های F، P و C روی یک خط راست‌اند و این به معنای آن است که، قطرهای AD ، BE و CF، از نقطهٔ P می‌گذرند.

۳۰. اگر $a+b$ و a^2+b^2 بر d بخش‌پذیر باشند، آن وقت عدد

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$$

هم بر d بخش‌پذیر است. از این‌جا، باید عددهای

$$2a^2=2a(a+b)-2ab \quad \text{و} \quad 2b^2=2b(a+b)-2ab$$

هم بر d بخش‌پذیر باشند.

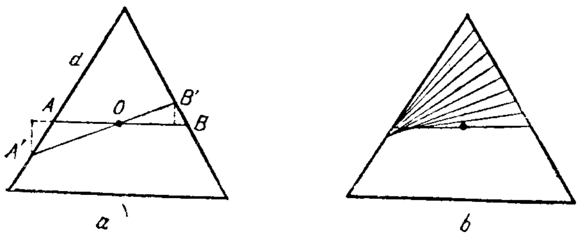
ولی، اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند، a^2 و b^2 هم نسبت به‌هم اول می‌شوند و، بنابراین، نمی‌توانند به‌طور هم‌زمان، بر عدد $d>2$ بخش‌پذیر باشند. [در این‌جا، از قضیهٔ اصلی حساب استفاده کردیم (ضمیمهٔ ۲).]

۳۱. a) C را انتهای دیگر قطری از دایره می‌گیریم که از A گذشته است. AMC، زاویه‌ای قائمه است. چون $MK=KB$ و $PK \parallel MC$، بنابراین، خط راست PK، پاره‌خط راست BC را در وسط آن قطع می‌کند: $BH=HC$. به این ترتیب، همهٔ خطهای راست PK، از نقطهٔ H وسط پاره‌خط راست BC می‌گذرند.

b) از a) نتیجه می‌شود که، همهٔ نقطه‌های P، روی محیط دایره‌ای قرار دارند که به قطر AH رسم شود. چون زاویهٔ HBA قائمه است، این دایره از نقطهٔ B هم می‌گذرد.

۳۲. پاسخ: $d=\frac{2}{3}$.

اگر پاره‌خط راستی تمامی مثلث را جاروکند، در یکی از موقعیت‌های



شکل ۳۳

خود، از مرکز مثلث می‌گذرد. ثابت می‌کنیم، از بین پاره‌خطهای راستی که از مرکز مثلث می‌گذرند و دو انتهای هر یک از آن‌ها، بر ضلع‌های مثلث تکیه‌دارند، پاره‌خط راست AB، موازی با ضلع مثلث، از همه کوتاه‌تر است.

$A'B'$ را پاره‌خط راستی می‌گیریم که دو انتهای آن بر همان ضلع‌ها تکیه داشته باشد، از مرکز مثلث بگذرد و، در ضمن $OB'<OA'$ (شکل ۳۳). در این صورت $AA'>BB'$ و روشن است که، حتی تصویر این پاره‌خط بر خط راست AB، طولی بیشتر از $\frac{2}{3}$ دارد. بنابراین، پاره‌خط راستی که بتواند تمامی مثلث را جاروکند، طولی کمتر از $\frac{2}{3}$ ندارد.

از طرف دیگر، با پاره‌خط راست به طول $\frac{2}{3}$ می‌توان تمامی مثلث را جارو کرد. برای این منظور، باید ثابت کرد، از هر نقطهٔ P واقع در درون مثلث می‌توان پاره‌خط راستی به طول $\frac{2}{3}$ عبور داد، به نحوی که دو انتهای آن روی ضلع‌های مثلث باشد. از نقطهٔ P، دو خط راست می‌گذرانیم که با نزدیک‌ترین و دورترین ضلع مثلث به P، موازی باشند. این خطهای راست، به وسیلهٔ محیط مثلث به دو پاره‌خط راست محدود می‌شوند که اولی طولی بیشتر از $\frac{2}{3}$ و دومی طولی کمتر از $\frac{2}{3}$ دارد. پاره‌خط اول را دور نقطهٔ P دوران می‌دهیم تا بر پاره‌خط دوم منطبق شود؛ این پاره‌خط، در یکی از

موقعیت‌های بینابینی بر پاره‌خط راستی به‌طول $\frac{2}{3}$ منطبق می‌شود که دو انتهای آن بر ضلع‌های مثلث قرار دارد.

▽ یادآوری می‌کنیم که، با وجود روشن بودن گزارهٔ اخیر، برای اثبات دقیق، باید پیوستگی روندکار اثبات شود (ضمیمهٔ ۵).

۳۳. فرض می‌کنیم، بتوانیم مهره‌های دومینو را طوری روی صفحه قرار دهیم که هریك از خط‌های راست افقی یا قائم، که صفحه را به خانه‌ها تقسیم می‌کنند، دست کم، یکی از مهره‌های دومینو را قطع کند.

۱۰ خط راست ازاین گونه وجود دارد. هریك ازاین خط‌های راست، صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند که، هر بخش، شامل تعداد زوجی خانه است. در هر یك ازاین بخش‌ها، چند مهرهٔ دومینو وجود دارد که «بریده» نشده‌اند. این مهره‌ها، تعداد زوجی از خانه‌ها را اشغال می‌کنند. بقیهٔ خانه‌ها به وسیلهٔ مهره‌های دونیم‌شده، پر شده‌اند. وچون، تعداد این‌خانه‌ها زوج است بنابراین، تعداد مهره‌های دونیم شده هم باید زوج باشد.

به این ترتیب، هریك از ۱۰ خط راست، دست‌کم دوتا از مهره‌های دومینو را نصف می‌کند و چون، هر مهره، تنها به وسیلهٔ یك خط راست می‌تواند نصف شود، درنتیجه تعداد مهره‌های دونیم شده، از ۲۰ کمتر نیست. در حالی‌که، تعداد کل مهره‌ها، فقط ۱۸ تا است.

▽ جالب است، در این‌باره بررسی کنید که، برای چه مستطیل‌هایی با بعدهای $m\times n$ (m، عددی زوج)، گزارهٔ مشابه درست است؟

۳۴. می‌توان عددها را به‌ردیف صعودی درنظر گرفت:

$$a_1<a_2<\dots<a_n$$

این عددها را درنظر می‌گیریم:

$$a_1,\quad a_2,\quad \dots\ a_{n-2},\quad a_{n-1},\quad a_n$$

$$a_1+a_n,\quad a_2+a_n,\ \dots\ a_{n-2}+a_n,\quad a_{n-1}+a_n,$$

$$a_1+a_{n-1}+a_n,\quad \dots\quad \dots\ a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$

$$\dots\quad \dots\quad \dots\ \dots$$

$$a_1+a_2+\dots+a_n$$

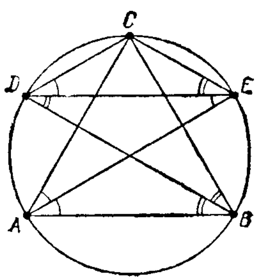
روشن است که، در این‌جا، هرعدد از عدد قبلی بزرگتر است؛ بنابراین، همهٔ این عددها، با هم فرق دارند. تعداد آن‌ها برابر است با

$$n+(n-1)+\dots+1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

یادآوری می‌کنیم که، n عدد طبیعی نخستین را می‌توان مثالی برای n عدد مختلف گرفت که، ازآن، بیش از $\frac{1}{2}n(n+1)$ مجموع متفاوت نمی‌توان به دست آورد (این مجموع‌ها، عبارتند از همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا $1+2+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$).

۳۵. از زاویه‌های برابر (شکل ۳۴ را ببینید)، نتیجه می‌شود که، نقطهٔ A، روی محیط دایره‌ای است که ازنقطه‌های C و D و E گذشته است؛ نقطهٔ B هم روی محیط همین دایره قرار دارد و، در ضمن $AB\parallel DE$.

۳۶. قدرنسبت تصاعد را d می‌گیریم وفرض می‌کنیم، $a=m^2$ یکی از جمله‌های آن باشد (m، عددی طبیعی است). در این صورت، عدد



شکل ۳۴

$$(m+kd)^2=m^2+2mkd+k^2d^2=a+d(2mk+k^2d)$$

هم، جمله‌ای ازهمان تصاعد است (به ازای هرعدد طبیعی k). به این ترتیب، بی‌نهایت جمله، درتصاعد، وجود داردکه هرکدام مجذوریك عدد طبیعی‌اند.

۳۷. پاسخ: نمی‌توان.

با رقم a، ۹ زوج تشکیل می‌شود (با هـر یك از ۹ رقم بقیه). اگر بخواهیم، برای هرزوج، ضلعی از ۴۵ ضلعی را، متناظر با آن، داشته باشیم، باید a را دست‌کم درپنج رأس آن قرار داد. چون باده رقم سروکارداریم، بنابراین برای‌جادادن آن‌ها، به ۵۰ رأس نیازداریم. به‌این ترتیب، نمی‌توان رقم‌های از ۰ تا ۹ را، به ترتیبی که مساله خواسته است، قرارداد (ضمیمهٔ ۹).

▽ از طرف دیگر، اگر n زوج باشد، عددهای ۰، ۱، ...، n را می‌توان دررأس‌های یك $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ضلعی‌منتظم، طوری‌قراردادکه، برای هر دو عدد، ضلعی پیدا شودکه این دو عدد در دو انتهای آن باشند.

۳۸. پاسخ: $a_{1,2}=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1}$، $b_{1,2}=\mp\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}$، $p=-1$، $q=\frac{1}{4}$ (روی هم، دو گروه ضریب‌ها).

با قراردادن $x=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید:

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)^{20}+\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{2}+q\right)^{10}=0$$

از آن‌جا $a=-2b$. اکنون، اتحاد به‌این صورت در می‌آید:

$$(2x-1)^{20}=(-2bx+b)^{20}+(x^2+px+q)^{10}$$

ضریب x^{20} را، در دو طرف برابری، محاسبه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$2^{20}=2^{20}b^{20}+1 \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}$$

و اتحاد، به این صورت در می‌آید:

$$(x-\frac{1}{2})^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

از آن‌جا $x^2+px+q=(x-\frac{1}{2})^2$، یعنی $p=-1$ و $q=\frac{1}{4}$.

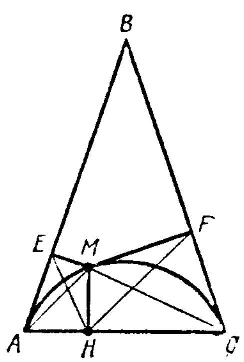
۳۹. پاسخ: 2×3^n. بعد از گـام اول، مجموع همهٔ عددها بـرابر $3\times 2=6$ می‌شود.

مجموع همهٔ عددها را، بعدازگام n ام، برابر S_n می‌گیریم. به سادگی ثابت می‌شود کـه بعد از گـام $(n+1)$ ام، مجموع همهٔ عـددها، برابر $2S_n+S_n=3S_n$ خواهد شد.

به این ترتیب، مجموع عددها، در هرگام سه برابر می‌شود، یعنی در گام nام، برابر است با 2×3^n.

۴۰. پاسخ: کمانی از دایره، که بر ساق‌های مثلث در نقطه‌های A و C (دوانتهای قاعده) مماس است.

ABC را مثلث مفروض $(AB=BC)$. M را نقطه‌ای ازمکان مجهول و E و F و H را، به ترتیب، تصویرهای نقطهٔ M برضلع‌های AB و BC و AC می‌گیریـم (شکل ۳۵). چهارضلعی‌های $AEMH$ و $CHMF$ متشابه‌اند: زاویه‌های متناظر بـرابـرند و، بنابـه شرط، دو ضلع مجاور، متناسب‌اند



شکل ۳۵

$\left(\frac{EM}{MH}=\frac{MH}{MF}\right)$؛ در ضمن، مثلث‌هایی که در این چهارضلعی‌ها، به وسیلهٔ قطرها پدید آمده‌اند، متشابه‌اند: مثلث EMA با HMC، و مثلث AMH با مثلث CMF. از آن‌جا

$$\widehat{AMC}=\widehat{AMH}+\widehat{HMC}=\widehat{HMC}+\widehat{CMF}=\widehat{HMF}$$

به این ترتیب، زاویهٔ AMC، مقداری ثابت دارد و، بنابراین، نقطهٔ M، روی کمان دایره‌ای است که پاره‌خط راست AC را احاطه کرده است. می‌توان تحقیق کرد که، هر نقطه از این کمان، به کمان مطلوب تعلق دارد.

▽ اگر بخواهیم، این مکان را در تمامی صفحه، و نه فقط در درون مثلث، پیدا کنیم، آن وقت قطعه‌هایی از یک هذلولی، به این کمان دایره، اضافه می‌شود.

۴۱. پاسخ: زاویه‌های مثلث، ۹۰ درجه، ۴۵ درجه و ۴۵ درجه.

h_a و h_b را، طول ارتفاع های وارد بر ضلع‌های به طول a و b می‌گیریم. بنابر شرط مساله، $a\leqslant h_a$ و $b\leqslant h_b$؛ ولی در هر مثلثی $h_a\leqslant b$ و $h_b\leqslant a$، به نحوی که

$$a\leqslant h_a\leqslant b\leqslant h_b\leqslant a$$

یعنی $a=b=h_a=h_b$ و، بنابراین، با مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، سروکار داریم.

۴۲. فرض می‌کنیم $m(m+1)$، برابر توان k ام یك عددطبیعی باشد. چون m و $m+1$ نسبت به هم اول‌اند، بنابراین، هرکدام از آن‌ها، باید برابر توان k ام عددی طبیعی باشد. ولی این، ممکن نیست: اگر $m=a^k$، آن وقت

$$(a+1)^k>(a+1)a^{k-1}=a^k+a^{k-1}>m+1,\quad (k>1)$$

۴۳. پاسخ: از عدد ۱، یك واحد بیشتر از عدد ۲، به دست می‌آید. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع رقم‌های آن بر ۹ (ضمیمهٔ ۳). بنابراین، در مسالهٔ ما، عدد ۱، از عددهایی

به دست می‌آید که در تقسیم بر ۹، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند، یعنی از عددهای ۱، ۱۰، ۱۹، ۲۸، ۳۷، ...، ۹۹۹ ۹۹۹ ۹۹۱، ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ و عدد ۲، از عددهایی که در تقسیم بر ۹، به باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسند، یعنی از عددهای

۲، ۱۱، ۲۰، ۲۹، ۳۸، ...، ۹۹۹ ۹۹۹ ۹۹۲

۴۴. گروه n عدد x_1، x_2، ...، x_n را هرطور انتخاب کنیم، اگر همهٔ آن‌ها با هم برابر نباشند، بعد از چند گام، بزرگ‌ترین عدد گروه، کوچک‌تر؛ و کوچک‌ترین عدد گروه، بزرگ‌تر می‌شود. از این‌جا روشن است که، بزرگ‌ترین عدد گروه، نمی‌تواند همیشه عددی درست باشد، البته به شرطی که گروهی از عددهای درست و برابر $(a, a, \dots, a)$ به دست نیاید.

فرض کنید، از گروه‌عددهای z_1، z_2، ...، z_n، عددهای برابر به دست آید:

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z_2+z_3}{2}=\dots=\frac{z_{n-1}+z_n}{2}=\frac{z_1+z_n}{2}$$

آن وقت، عددهای z_i، یك در میان باهم برابر می‌شوند که، در حالت فرد بودن n، غیر ممکن است.

فرض می‌کنیم، n، عددی زوج باشد. ببینیم، از چه گروهی، می‌توان به گروه عددهای $(a, b, a, b, \dots, a, b)$ رسید. فرض کنید.

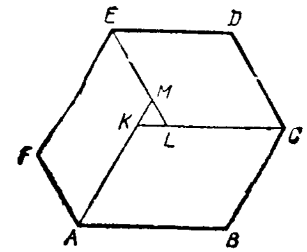
$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2}=\dots=\frac{y_n+y_{n-1}}{2}=a;$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{y_4+y_5}{2}=\dots=\frac{y_n+y_1}{2}=b$$

در این صورت

$$y_1+y_2+\dots+y_n=2an;\quad y_2+y_3+\dots+y_n+y_1=2bn$$

یعنی $2an=2bn$ و $a=b$.



شکل ۳۶

به این ترتیب، نمی‌توان به‌گروهی از عددهای دو به‌دو مختلف رسید و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۵. a) مقدار هریك از زاویه‌های شش‌ضلعی برابر ۱۲۰ درجه و، بنابراین، ضلع‌های روبه‌رو، با هم موازی‌اند. در ضمن، می‌توان فرض کرد $AB \geqslant DE$ (شکل ۳۶).

اکنون، متوازی‌الاضلاع‌های $ABCK$، $CDEL$ و $AFEM$ را می‌سازیم. اگر نقطه‌های K، L و M منطبق بر هم نباشند، هر زاویهٔ مثلث KLM برابر ۶۰ درجه می‌شود، یعنی

$$KL=LM=KM$$

و بنابراین

$$AB-DE=CD-FA=FE-BC$$

b) می‌توان فرض کرد $a_1>a_4$. مثلث‌متساوی‌الاضلاع KLM را، با این ضلع‌ها می‌سازیم:

$$KL=LM=MK=a_1-a_4=a_3-a_6=a_5-a_2$$

KL را به اندازهٔ $LC=a_4$، LM را به اندازهٔ $ME=a_6$ و MK را به اندازهٔ $KA=a_2$ امتداد می‌دهیم و متوازی‌الاضلاع‌های $AKCB$، $CLED$ و $AFEM$ را می‌سازیم. $ABCDEF$ همان شش‌ضلعی مطلوب است.

۴۶. پاسخ: $x=y=0$.

x و y را عددهای درستی می‌گیریم که درمعادلهٔ مفروض صدق کنند.

بعد از مجذور کردن‌های متوالی، به دست می‌آید:

$$\sqrt{x}=k \text{ و } \sqrt{x+\sqrt{x}}=m$$

که در آن‌ها، m و n، عددهایی درست‌اند؛ در ضمن

$$m^2=k(k+1) \qquad (*)$$

برای $k>0$ باید داشته باشیم: $k^2<m^2<(k+1)^2$، در این صورت، به نابرابری‌های $k<m<k+1$ می‌رسیم که به معنای درست نبودن عدد m است. یعنی $k=0$ و بنابراین $x=0$.

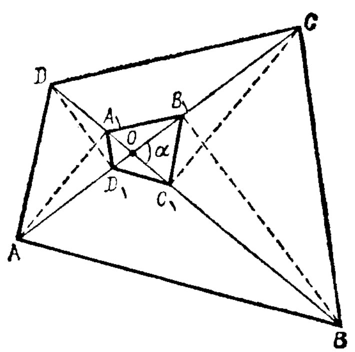
▽ متناقض بودن برابری (*) را، از مسالهٔ ۴۲ هم می‌توان نتیجه گرفت.

۴۷. A_1، B_1، C_1، D_1 را پای عمودهایی می‌گیریم که، به‌ترتیب، از رأس‌های A، B، C و D بر قطرهای BD و AC رسم شده‌اند. فرض می‌کنیم، دو قطر، در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر برابر α باشد (شکل ۳۷). در این صورت داریم:

$$OA_1=OA.\cos\alpha;\ OB_1=OB.\cos\alpha;$$

$$OC_1=OC.\cos\alpha;\ OD_1=OD.\cos\alpha$$

بنابراین، مثلث‌های A_1OB_1، B_1OC_1، C_1OD_1 و D_1OA_1 با مثلث‌های AOB، BOC، COD و DOA متشابه‌اند و، ضریب تشابه، برابر است با



شکل ۳۷

$\cos\alpha$. ازاین‌جا، نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی‌های $ABCD$ و $A_۱B_۱C_۱D_۱$ هم، متشابه یکدیگرند.

▽ یادآوری می‌کنیم که می‌توان چهارضلعی دوم را، ازچهارضلعی اول، با تبدیل‌های زیر به دست آورد: تقارن نسبت به نیمساز زاویهٔ حادهٔ بین دوقطر و، سپس، تجانس به مرکز O و ضریب $\cos\alpha$.

۴۸. پاسخ: n برابر است با عددی اول و یا $n=۹$.

اگر n را بتوان به صورت $n=ab$ ($a\geqslant ۳$، $b\geqslant ۳$ و $a\neq b$) نشان داد، آن وقت، در حاصل ضرب $۱\times ۲\times \ldots\times (n-۱)$، عامل‌های a، $۲a$، b و $۲b$ وجود دارد و، بنابراین $(n-۱)!$ بر $n^۲=a^۲b^۲$ بخش‌پذیر می‌شود.

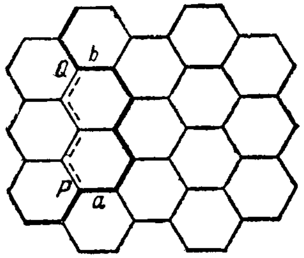
اگر $n=p^۲$ و p عددی اول باشد، آن وقت به‌ازای $p^۲-۱\geqslant ۴p$، در حاصل‌ضرب $(p^۲-۱)!=۱\times۲\times۳\times\ldots\times(p^۲-۱)$، عامل‌های p، $۲p$، $۳p$ و $۴p$ وجود دارد و بر $n^۲=p^۴$ بخش‌پذیر است. (نابرابری $p^۲-۴p-۱\geqslant ۰$، برای هرعدد اول $p\geqslant ۵$ برقرار است.)

دو امکان باقی می‌ماند: n عددی اول باشد (که در این‌صورت $(n-۱)!$، حتی بر n هم بخش‌پذیر نیست) و یا $n=۹$ (که در این صورت $۸!$، بر ۹ بخش‌پذیر است، ولی بر ۸۱ بخش‌پذیر نیست).

▽ بنابرقضیهٔ ویلسون، به‌ازای هرعدد اول p، عدد $(p-۱)!$، همیشه در تقسیم برعدد p، باقی‌مانده‌ای برابر $p-۱$ می‌دهد.

۴۹. پاره‌خط‌های راستی راکه، حشره، روی آن‌ها حرکت می‌کند، به ترتیب شماره‌گذاری می‌کنیم. یکی ازسه پاره‌خط جهت‌دار شبکه را درنظر می‌گیریم و آن‌را افقی می‌نامیم. ثابت‌می‌کنیم، یا شماره‌های همهٔ پاره‌خط‌های راست افقی مسیرعددهایی فرد و یا، همهٔ این شماره‌ها، عددهایی زوج‌اند.

a و b را دوپاره‌خط راست افقی مجاور می‌گیریم، به این مفهوم‌که، مسیربین a و b، شامل پاره‌خط‌های راستی با دوجهت دیگرباشند. این وضع ممکن نیست که، حشره، نوار قائمی از شش‌ضلعی‌ها را، ابتدا در «جائی» و سپس «به صورت برگشت» در«جای دیگر» قطع کند (آن طورکه درشکل ۳۸ نشان داده شده است، زیرا در این حالت، می‌توان راه‌کوتاه‌تری برای



شکل ۳۸

حشره پیدا کرد (مسیری‌که P و Q را با نقطه‌چین به هم وصل کرده است). از این‌جا نتیجه می‌شود که، تعداد پاره‌خط‌های راست بینابینی، بین a و b، عددی فرداست و، حشره، روی این‌پاره‌خط‌های راست، دریك جهت حرکت می‌کند. به این ترتیب، همهٔ پاره‌خط‌های افقی مسیر، یا شماره‌ای فرد دارند و یا شماره‌ای زوج (وحشره، روی آن‌ها، در یك جهت حرکت می‌کند).

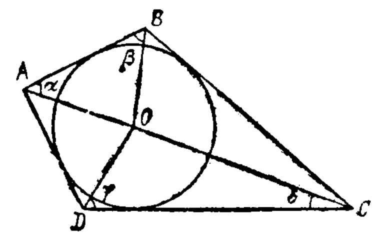
دربارهٔ پاره‌خط‌های راست مسیر، که در یکی از دو جهت دیگر قرار دارند، همین وضع درست است. از آن جا که، تنها با سه جهت سروکار داریم، یا همهٔ پاره‌خط‌های با شمارهٔ زوج و یا همهٔ پاره‌خط‌های با شمارهٔ فرد، در یك جهت‌اند. تعداد این گونه پاره‌خط‌ها برابر ۵۰ می‌شود.

▽ هر مسیری از حشره روی شبکه را می‌توان، با آغاز از یك‌گره، به وسیلهٔ «واژه‌ای» شامل حرف‌های p و q و r داد (هر حرف، متناظر است با پاره‌خط راستی از مسیر که در یکی از سه جهت ممکن باشد). جالب است، به شرح واژه‌ای بپردازیم که متناظر باشد با مسیری بسته (که به نقطهٔ آغاز برگشته است) و یا مسیری‌که خودش را قطع نکرده باشد.

۵۰. O را مرکزدایرهٔ محاط در چهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم (شکل ۳۹). داریم:

$$\widehat{AOB}=۱۸۰^\circ-\alpha-\beta\text{، }\widehat{COD}=۱۸۰^\circ-\gamma-\delta$$

در ضمن $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{۱}{۲}(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D})=۱۸۰^\circ$. بنابراین



شکل ۳۹

$$\widehat{AOB}+\widehat{COD}=360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=180^\circ$$

۵۱. می‌دانیم

$$k^n-b^n=(k-b)\,(k^{n-1}+k^{n-2}\,b+\dots+b^{n-1})$$

یعنی k^n-b^n بر $k-b$ بخش‌پذیر است.

به‌این ترتیب $(k^n-b^n)-(k^n-a)=a-b^n$ بر $k-b$ بخش‌پذیر است؛ ولی این تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $a=b^n$.

۵۲. پاسخ: 2^{n-2} کسر.

روشن است که، در هر حال، درکسرحاصل، x_1 در صورت کسر قرار می‌گیرد. به همین ترتیب، تقریباً روشن است که، x_2، در هرحال، درمخرج کسر واقع می‌شود (علامت تقسیم، که قبل از x_2 قرار دارد، یا به خود x_2 مربوط است و یا به عبارتی شامل x_2).

بقیهٔ حرف‌های x_3، x_4، ...، x_n، بسته به‌نوع پرانتز گذاری، می‌توانند در صورت یا در مخرج قرار گیرند؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که، روی هم، 2^{n-2} کسر مختلف به دست می‌آید: هریك از $n-2$ حرف x_3، x_4، ...، x_n می‌توانند بدون ارتباط با حرف‌های دیگر، در صورت یا در مخرج باشد.

این حکم را، باروش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. به ازای $n=3$، می‌توان دو کسر به دست آورد:

$$(x_1:x_2):x_3=\frac{x_1}{x_2\cdot x_3} \text{ و } x:(x_2:x_3)=\frac{x_1x_3}{x_2}$$

یعنی، به ازای $n=3$، حکم درست است.

فرض می‌کنیم، حکم، برای $n=k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، به ازای $n=k+1$ هم درست است.

فرض می‌کنیم، عبارت $x_1:x_2:\dots:x_k$، در یکی از حالت‌ها، بعد از قراردادن پرانتزها، به صورت کسر A درآید. اگر دراین عبارت، به‌جای x_k قرار دهیم $x_k:x_{k+1}$، آن وقت، x_{k+1} درجایی واقع می‌شود که x_k در آن جانیست (اگر x_k در صورت باشد، x_{k+1} به مخرج می‌رود و بر عکس).

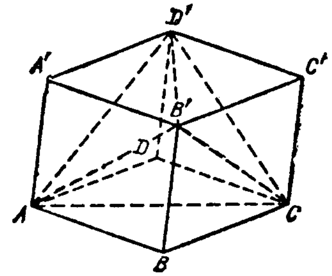
اکنون ثابت می‌کنیم، می‌توان x_{k+1} را در همان جایی قرار داد که x_k درآن‌جا است. درکسر A، بعداز گذاشتن پرانتزها، به ناچار به عبارتی به صورت $(p:x_k)$ می‌رسیم که، درآن، p، یا حرف x_{k-1} است و یا شامل چندحرف؛ $(p:x_k)$ رابه صورت $((p:x_k):x_{k+1})=p:(x_k\cdot x_{k+1})$ تغییر می‌دهیم، روشن است که، در این صورت، به همان کسر A می‌رسیم که، درآن، به‌جای x_k، عبارت $x_k\cdot x_{k+1}$ قراردارد. حکم به‌طور کامل ثابت‌شد.

۵۳. به سادگی دیده می‌شود که، مکعب را می‌توان به ۵ چهار وجهی تقسیم کرد. در شکل ۴۰، این چهاروجهی‌ها، عبارتند از

$$AA'B'D',\ AB'BC,\ ACDD',\ B''C'D'C,\ ACD'B'$$

ثابت می‌کنیم که مکعب را نمی‌توان به تعدادکمتری چهاروجهی تقسیم کرد. فرض کنید، مکعب را به چند چهار وجهی تقسیم کرده باشیم. دست‌کم دو چهاروجهی وجود دارد که، قاعده‌های آن‌ها، بروجه $ABCD$ از مکعب قراردارند. به‌همین ترتیب، دست‌کم دوچهاروجهی وجود دارد که، قاعده‌های آن‌ها، بروجه $A'B'C'D'$ واقع‌اند.

روشن است که این چهار وجهی‌ها، با دوتای اولی فرق دارند، زیرا در یك چهاروجهی نمی‌توان دو وجه موازی پیدا کرد. به این ترتیب، با ۴ چهار وجهی سروکار داریم. حجم آن‌ها، روی هم، از $\frac{2}{3}a^3$ تجاوز نمی‌کند، یعنی کمتراز حجم مکعب است. بنا براین، مکعب را نمی‌توان به‌۴ چهاروجهی



شکل ۴۵

تقسیم کرد.

۵۴. پاسخ: $۱۶۸۱=۴۱^۲$.

فرض کنید، عدد $n^۲$، با شرط مساله سازگار باشد، در این صورت

$$n^۲=۱۰۰a^۲+b،\ ۰<b<۱۰۰$$

به این ترتیب $n>۱۰a$ و بنابراین: $n\geqslant ۱۰a+۱$؛ یعنی

$$b=n^۲-۱۰۰a^۲\geqslant ۲۰a+۱\Rightarrow ۲۰a+۱<۱۰۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $a\leqslant ۴$.

به‌ازای $n=۴$، تنها عدد $n=۱۰a+۱=۴۱$ باشرط مساله سازگار است؛ اگر $n>۴۱$، آن وقت $n^۲-۴۰^۲\geqslant ۴۲^۲-۴۰^۲>۱۰۰$.

▽ مسالهٔ ۲۴۴، دنبالهٔ این‌مساله است.

۵۵. $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، $S_۴$ و $۲p_۱$، $۲p_۲$، $۲p_۳$، $۲p_۴$ را، به‌ترتیب، مساحت و محیط مثلث‌های ABE، BCE، CDE و DAE فرض می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{p_۱}{S_۱}+\frac{p_۳}{S_۳}=\frac{p_۲}{S_۲}+\frac{p_۴}{S_۴}$$

چون $ABCD$، ذوزنقه است. بنابراین $S_۱=S_۳=S$. چون $ABCD$ یك چهارضلعی محیطی است، پس $AB+CD=BC+AD$. اگر به دوطرف این برابری، مجموع دو قطر را اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$۲p_۱+۲p_۳=۲p_۲+۲p_۴$$

برای این‌که به‌برابری موردنظر برسیم، کافی‌است دوطرف برابری اخیر را، بر $۲S$ تقسیم و از رابطه‌های ناشی از برابری‌های زیر استفاده کنیم:

$$\frac{S_۲}{S}=\frac{S}{S_۴}=\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{AB}{CD}=\frac{p_۲}{p_۴}$$

$$\frac{p_۲}{S}=\frac{p_۴}{S_۴};\ \frac{p_۴}{S}=\frac{p_۲}{S_۲}$$

۵۶. پاسخ حداقل مقدار s_{min} برابر است با $-\left[\frac{n}{۲}\right]$، یعنی $-\frac{n}{۲}$ وقتی n زوج باشد و $-\frac{n-۱}{۲}$ وقتی n فرد باشد.

a) مقدار s، مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی عددهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را می‌توان به این صورت نوشت:

$$s=\frac{۱}{۲}[(x_۱+x_۲+\dots+x_n)^۲-x_۱^۲-x_۲^۲-\dots-x_n^۲]$$

ازاین‌جا، معلوم می‌شود که $s\geqslant -\frac{n}{۲}$.

اگر n عددی زوج باشد، نیمی از عددهای x_k را برابر ۱ ونیم دیگر را برابر ۱− می‌گیریم؛ به دست می‌آید: $S=-\frac{n}{۲}$. اگر n عددی فردباشد، چون s عددی درست است، $s\geqslant -\frac{n-۱}{۲}$. حداقل مقدار s وقتی به دست می‌آید که، بین عددهای x_k، به تعداد $\frac{n+۱}{۲}$ برابر ۱ و به تعداد $\frac{n-۱}{۲}$ برابر ۱− وجود داشته باشد.

b) به مسالهٔ a) منجر می‌شود: هر یك از عددهای x_k را، می‌توان

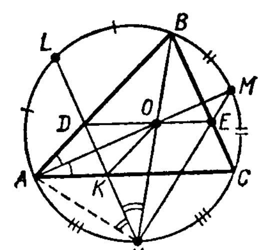
پشت سرهم، با ۱ یا ۱— عوض کرد، به‌نحوی که مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها، زیادتر نشود (قانون تعویض: x_k را برابر ۱— قرار می‌دهیم وقتی که مجموع بقیهٔ عددها غیرمنفی باشد؛ و برابر ۱ قرار می‌دهیم وقتی که مجموع بقیهٔ عددها منفی باشد). بنابراین، دراین‌جاهم، همان پاسخ بخش a) به دست می‌آید.

۵۷. فرض کنید $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_9$، عددهایی باشند که روی کارت‌ها نوشته شده‌اند. اگر $a_1+a_9>a_2+a_8$، آن وقت اولی، عدد a_9 را در خانهٔ ۲ می‌گذارد (شکل ۴۱)؛ دومی یکی از دو کارت a_1 یا a_2 را در یکی‌از خانه‌های ۱ یا ۴ می‌گذارد. اگر $a_1+a_9<a_2+a_8$، آن وقت اولی عدد a_1 را در خانهٔ ۲ و دومی عدد a_9 یا a_8 را در یکی از خانه‌های ۱ یا ۴ می‌گذارد. اگر $a_1+a_9=a_2+a_8$، اولی می‌تواند هرکدام از دو برنامهٔ فوق را، به دلخواه اجرا کند (در این حالت، اگر بازی درست انجام شود، نتیجهٔ کار، مساوی خواهد شد).

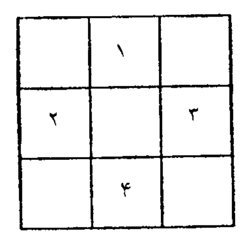
۵۸. L، M و N را وسط ضلع‌های AB، BC و CA و O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، D و K را نقطه‌های برخورد پاره‌خط راست LN با ضلع‌های AB و AC می‌گیریم (شکل ۴۲).

ثابت می‌کنیم، چهارضلعی $ADOK$، لوزی است (که در ضمن، مسالهٔ ۲۳۷ هم حل می‌شود). برای این منظور، کافی است ثابت کنیم، قطرهای AO و DK، محورهای تقارن این چهارضلعی هستند.

درواقع $AM \perp LN$، زیرا $\widehat{LB}+\widehat{BM}+\widehat{AN}=180^\circ$، بنابراین



شکل ۴۲



شکل ۴۱

نقطه‌های D و K، نسبت به خط راست AM، قرینهٔ یکدیگرند (AM، نیمساز زاویهٔ BAC است)؛ همچنین، نقطه‌های A و O، نسبت به خط راست LN، قرینهٔ یکدیگرند (LN، نیمساز زاویهٔ ANB است).

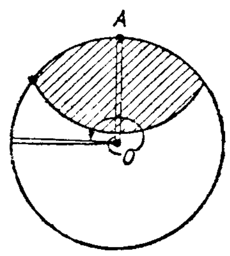
از این جا نتیجه می‌شود: $DO \parallel AC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد $EO \parallel AC$ که، در آن، E را نقطهٔ برخورد پاره‌خط راست MN با ضلع BC گرفته‌ایم. به این ترتیب، نقطه‌های D، O و E، روی خط راستی قرار دارند که با AC موازی است.

۵۹. اگر شمارهٔ «بلیت خوشبختی» برابر A باشد، آن وقت بلیت با شمارهٔ $A'=999999-A$ هم یک «بلیت خوشبختی» است و، در ضمن، $A\neq A'$. از طرف دیگر داریم:

$$A+A'=999999=1001\times999=13\times77\times999$$

بنابراین، مجموع شماره‌های همهٔ «بلیت‌های خوشبختی» بر ۱۳ بخش پذیر است.

۶۰. اگر ناوچه، در نقطهٔ A به دایرهٔ K، که به وسیلهٔ نورافکن روشن می‌شود، وارد شود، آن وقت بعد از فاصلهٔ زمانی $\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{a}{v}$، در فاصله‌ای از نقطهٔ A قرار می‌گیرد که از $\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{a}{v}\cdot\frac{v}{8}$ تجاوز نمی‌کند، یعنی در یکی از نقطه‌های اشتراک دایرهٔ K با دایرهٔ به شعاع $\frac{5\pi a}{16}<a$ و مرکز A (این بخش مشترک دو دایره، در شکل ۴۳، هاشور خورده است). به سادگی دیده



شکل ۴۳

می‌شود که، در این مدت، پرتو نورافکن به اندازهٔ زاویه‌ای برابر $\frac{5\pi}{2}$ می‌-چرخد، همهٔ بخش هاشورخورده را در معرض دید قرار می‌دهد. بنابراین، ناوچه نمی‌تواند خودرا از دید نورافکن مخفی نگاه دارد.

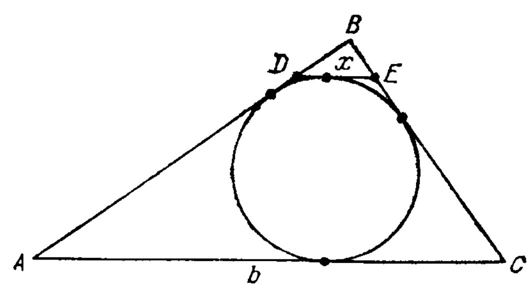
▽ با استدلالی ظریف‌تر، می‌توان ثابت کرد که، کمترین سرعت ناوچه برای عبوراز دریاچه، برابر $v_{min}=v\cos\beta$ است که، در آن، β عبارت است از ریشهٔ معادلهٔ $2\pi+\beta=tg\beta$ $(0<\beta<\frac{\pi}{2})$: $v_{min}\approx 0/131v$.

۶۱. یکی از افراد را در نظر می‌گیریم. اگر چنین تقسیمی از افراد ممکن باشد، آن وقت، بقیهٔ ۹۹ نفررا باید بتوان به زوج‌هایی تقسیم کرد که، هرکدام ازآن‌ها، بافرد انتخابی، به‌نگهبانی بپردازند. ولی این ممکن نیست، زیرا ۹۹، عددی فرد است.

▽ مسالهٔ کلی رامی‌توان به‌این‌ترتیب طرح کرد: به‌ازای چه‌مقدارهایی از n، می‌توان ازعضوهای مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ دستگاهی ازسه‌تایی‌ها را طوری جداکرد که، هردو عضو، درست در یک سه‌تایی قرار گیرد. این دستگاه، به دستگاه «سه‌تایی‌های شتینر» معروف است.

۶۲. طول پاره خط راست مجهول‌را x و طول قاعدهٔ AC از مثلث ABC را b می‌گیریم (شکل ۴۴). محیط مثلث BDE، برابر $2p-2b$ می‌شود (بااستفاده از ویژگی‌مماس‌های بردایره).

ازتشابه مثلث‌های BDE و ABC به‌دست می‌آید:



شکل ۴۴

$$x=\frac{1}{p}b(p-b)=\frac{1}{p}\left[\frac{p^2}{4}-\left(b-\frac{p}{2}\right)^2\right]$$

حداکثر مقدار x برابراست با $\frac{p}{4}$ و وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$b=\frac{p}{2}$$

۶۳. به‌سادگی ثابت می‌شودکه، برای هر i و k، داریم:

$$x_{ii}=0,\quad x_{ik}=-x_{ki}$$

اگر n معادلهٔ $x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}=0$ را، با ثابت نگه داشتن i و j $(k=1, 2, \ldots, n)$ باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$nx_{ij}=s_i-s_j$$

که در آن، s_j، مجموع همهٔ عددهای به‌صورت x_{jk} $(k=1, 2, \ldots, n)$ است.

اکنون $a_i=\frac{s_i}{n}$ می‌گیریم، در این‌صورت $x_{ij}=a_i-a_j$؛ همان چیزی که می‌خواستیم.

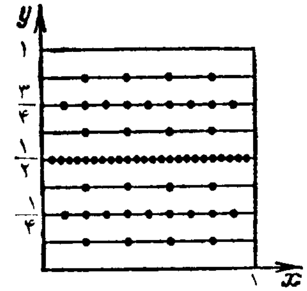
۶۴. پاسخ: می‌توان.

درمربع $0\leqslant x\leqslant 1$، $0\leqslant y\leqslant 1$ وروی خط راست $y=\frac{1}{2}$، به‌تعداد $c_0=200$ نقطه‌به‌طوریکنواخت قرارمی‌دهیم: $\left(\frac{k}{201}, \frac{1}{2}\right)$، $k=1, 2, \ldots, 200$.

سپس، روی هریک ازخط‌های راست $y=\frac{1}{4}$ و $y=\frac{3}{4}$، به‌تعداد $c_1=100$ نقطه قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{k}{101}, \frac{1}{4}\right) \text{ و } \left(\frac{k}{101}, \frac{3}{4}\right),\quad k=1, 2, \ldots, 100$$

این روند را، برای $m=2, 3, \ldots, 7$، روی هریک از خط‌های راست



شکل ۴۵

$y=(2l-1)2^{-m-1}$ $(1\leqslant l\leqslant 2^m)$ تکرار می‌کنیم و c_m نقطهٔ

$$\left(\frac{k}{c_m+1}, \frac{2l-1}{2^{m+1}}\right),\ c_m=[200\times 2^{-m}]$$

را قرارمی‌دهیم (به‌ازای $m=7$، روی هریك از ۱۲۸ خط‌راست متناظر آن، یك نقطه قرار می‌گیرد). تعدادکل نقطه‌ها، روی‌هم، چنین می‌شود:

$$\sum_{m=0}^{7} 2^m c_m = 200+2\times 100+4\times 50+8\times 25+16\times 12+32\times 6+64\times 3+128=1704$$

این ساختمان، به‌وسیلهٔ شکل ۴۵ روشن شده است.

روشن است که، هیچ یك از مستطیل‌های به‌مساحت $\frac{1}{200}$ رانمی‌توان درفاصلهٔ بین این‌نقطه‌ها جا داد. اگرخط راست $y=\frac{1}{2}$ را قطع‌کند، قاعـدهٔ آن از $\frac{1}{201}$ بیشترنیست؛ اگرخط راست $y=\frac{1}{2}$ را قطـع نکند، آن وقت به‌طورکامل در بالا ویا به‌طور کامل در پایین این‌خط راست قرارمی‌گیرد. در ضمن، اگر خط راست $y=\frac{3}{4}$ یا $y=\frac{1}{4}$ را قطع‌کند، ارتفاع آن از $\frac{1}{2}$ و قاعدهٔ آن از $\frac{1}{101}$ بیشترنیست و غیره. اگرمستطیل، به‌طورکامل بین‌خط‌های

راست به‌صورت $y=\frac{n}{256}$ $(n=1, 2, \ldots, 256)$ قرار گیرد. آن‌وقت ارتفاع آن، از $\frac{1}{256}$ تجاوز نمی‌کند.

۶۵. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را، عددهای مفروض می‌گیریم، به‌نحوی‌که، به ردیف صعودی، نسبت به‌بخش کسری آن‌ها، $\alpha_i=x_i-[x_i]$، شماره گذاری شده باشند.

k عدد اول‌را، درجهت کوچکتراز خود، وبقیه را درجهت بزرگتر از خود گرد می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود، حداکثر خطایی‌که درنتیجهٔ گرد‌کردن به‌دست می‌آید، بامحاسبهٔ یکی‌از دومجموع زیر، مشخص می‌شود:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k \text{ و } x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n$$

قدرمطلق خطای اول برابراست با

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k\leqslant k\alpha_k$$

وقدرمطلق خطای دوم

$$(1-\alpha_{k+1})+\ldots+(1-\alpha_n)\leqslant(n-k)(1-\alpha_{k+1})$$

بنابراین، باید k را طوری انتخاب کنیم‌که نابرابری‌های زیر برقرار باشند:

$$k\alpha_k\leqslant\frac{1}{4}(n+1) \text{ و } (n-k)(1-\alpha_{k+1})\leqslant\frac{1}{4}(n+1)$$

برای این‌منظور، کافی‌است، بزرگترین مقدار k را پیداکنیم که، به‌ازای آن، نابرابری اول برقرار باشد: دراین‌صورت $\alpha_{k+1}>\frac{n+1}{4(k+1)}$ و، بنابراین، نابرابری دوم هم برقرار خواهد بود:

$$1-\alpha_{k+1}<1-\frac{n+1}{4(k+1)}\leqslant\frac{n+1}{4(n-k)}$$

زیرا $1 \leqslant \frac{(n+1)^2}{2(k+1)(n-k)} = \frac{n+1}{2(n-k)} + \frac{n+1}{2(k+1)}$، به‌ازای $0<k<n$.

▽ وقتی n عددی فرد باشد، این ارزیابی خطاً دقیق است. مثلا برای

$$x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{2}$$

ولی وقتی n عددی زوج باشد؛ می‌توان این ارزیابی خطا را، با تبدیل $\frac{n+1}{4}$ به $\frac{n+1}{4}-\frac{1}{n+1}$، اندکی بهتر کرد. مثلاً

$$x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{n}{2(n+1)}$$

۶۶. جهان‌گرد می‌تواند از رستوران در هر مسیری حرکت کند، تنها با این شرط که، از میدان، خیابانی‌را برای عبور انتخاب کند که، قبلاً، به‌تعدادی فرد از آن گذشته است. به‌سادگی دیده می‌شود که، چنین خیابانی، برای هر تقاطعی، به‌جز ایستگاه، وجود دارد (در واقع، تعداد ورودهای جهان‌گرد به تقاطع، یکی بیشتر از تعداد خروج او از آن است)؛ همچنین، چنین مسیری، نمی‌تواند او را دوبار از خیابانی عبور دهد. چون تعداد خیابان‌ها محدود است، جهان‌گرد سرآخر به ایستگاه می‌رسد.

۶۷. a) راه حل اول. هر دو عضو کمیسیون، در بیش از یک نشست، با هم برخورد نمی‌کنند. در هر نشست، به‌تعداد $C_{10}^2=45$ زوج وجود دارد. چون این افراد در ۴۰ نشست شرکت کرده‌اند، بنابراین از عضوهای کمیسیون‌ها، می‌توان به‌تعدادی که از 40×45، یعنی ۱۸۰۰ کمتر نیست، زوج تشکیل داد. ولی از ۶۰ نفر (و یا کمتر از آن) می‌توان حداکثر به‌تعداد C_{60}^2، یعنی $\frac{59}{2}\times 60$ زوج تشکیل داد که از ۱۸۰۰ کمتر است.

راه حل دوم. فرض می‌کنیم، N، تعداد افراد کمیسیون از ۶۰ بیشتر

نباشد. در این صورت، چون $6 > \frac{40}{N}\times 10$، بنابراین فردی پیدا می‌شود که، دست‌کم، در هفت نشست حضور داشته است. تعداد همهٔ افرادی که، این شخص، با آن‌ها برخورد دارد (در هر نشست با ۹ نفر)، برابر است با $7\times 9>59$. تناقض.

b) این مساله هم، کاملاً شبیه a) حل می‌شود (هریک از دو راه حل).

▽ ارزیابی بی‌صورت مساله، در بخش b)، کاملاً دقیق است: ۳۰ کمیسیون ۵ نفری را، با توجه به‌شرط مساله، می‌توان تشکیل داد.

۶۸. پاسخ: b) $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$.

اگر p و q دو عدد طبیعی و نسبت به‌هم اول باشند، هر عدد درست z به‌صورت $z=px+qy$ نشان داده می‌شود (ضمیمهٔ ۲). همهٔ این گونه نمایش‌ها، از یک z ثابت به‌صورت $z=pa+qb$ و با دستور کلی:

$$z=p(a-qt)+q(b+pt)$$

به‌دست می‌آیند که، در آن، t، عددی است درست؛ در ضمن، نمایش منحصر به‌فردی وجود دارد که، برای آن داشته باشیم: $0\leqslant x\leqslant q-1$.

هر عدد درست z را متناظر با زوج عددهای درست (x, y) قرار می‌دهیم، به‌نحوی که

$$z=px+qy,\quad 0\leqslant x\leqslant q-1$$

در این تناظر، هر عدد، درست با یک زوج متناظر است؛ درضمن، z، تنها وقتی «خوب» است که داشته باشیم: $y\geqslant 0$: اگر $z=px+qy$، عددی، «خوب» باشد، آن وقت، به‌ازای $x=qt+r\geqslant 0$ و $0\leqslant r\leqslant q-1$، این نمایش وجود دارد:

$$z=pt+q(y+t)$$

اکنون یادآوری می‌کنیم، اگر عدد $z=px+qy$، $0\leqslant x\leqslant q-1$

«خوب» باشد، آن‌وقت عدد $z'=(q-1-x)p+(-1-y)q$ «بد» است و برعکس، اگر z «بد» باشد، آن‌وقت z' «خوب» است. نقطه‌های

$$(x, y) \text{ و } (q-1-x, -2-y)$$

نسبت به نقطهٔ $(x_0, y_0)=\left(\frac{q-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ متقارن‌اند، وخودعددهای z و z'، نسبت به نقطهٔ

$$z_0=px_0+qy_0=\frac{1}{2}(pq-p-q)$$

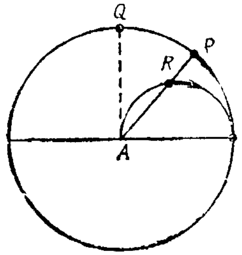
قرینهٔ‌هم‌اند، زیرا $z+z'=pq-p-q=2z_0=c$.

بداین ترتیب، ثابت‌شدکه: a) عدد «خوب» z متناظراست باعدد «بد» (متقارن باآن) $z'=c-z$ و برعکس.

چون کوچکترین‌عدد «خوب» صفراست. بنا براین، بزرگترین‌عدد «بد» c می‌شود؛ وهمهٔ عددهای «بد» روی‌هم:

$$\frac{1}{2}(c+1)=\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$

▽ تعبیرهندسی حل‌این‌مساله، بسیارجالب است: (x, y)رانقطه‌هایی ازیك شبکهٔ واقع برصفحه و $z=px+qy$ را خطهای راستی‌که ازآن‌ها می‌گذرند، بگیرید وغیره.



شکل ۴۶

۶۹. پاسخ: بعد از $\frac{\pi}{200}$ ساعت.

یادآوری می‌کنیم‌که، مسیرموشك، باتوجه به‌شرطهای مساله،دایره‌ای با شعاعی برابرنصف شعاع مسیر هواپیماست (شکل۴۶): مقدارکمان AR، ازنظراندازه، دوبرابرمقدار زاویهٔQAPاست (زاویهٔ‌بین‌مماس و وتر)؛ یعنی اندازهٔ کمان QP، برحسب درجه، برابر نصف کمان AR، برحسب درجه است. بنا براین، طول این دوکمان (برای هروضعR) باهم برابرند. برای رسیدن موشك به‌هواپیما، بایدهواپیما ربع‌دایره وموشك نیمی‌ازمحیط‌دایرهٔ مسیر خود را طی‌کنند.

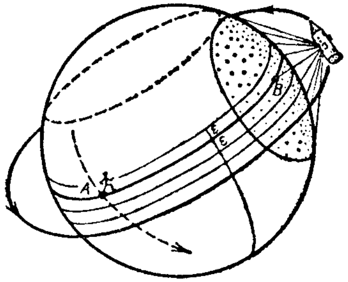
▽ البته، باید منحصر به‌فردبودن مسیرموشك را، باتوجه به‌شرطهای مسأله، ثابت‌کرد (ازشرکت‌کنندگان درالمپیاد،این‌اثبات‌را نخواسته‌بودند). این‌اثبات، نتیجه‌ای ازاین‌حکم‌کلی‌است‌که: اگرتابعی درنقطهٔ $t=0$ مفروض ومشتق‌آن معلوم باشد. خود تابع منحصر به‌فرد است. اگرموشك، درزمان t فاصلهٔ $AR=AQf(t)$ ازنقطهٔ A راطی‌کند (درضمن $f(0)=0$)،آن‌وقت برای سرعت‌آن، درجهت عمود برشعاع داریم: $f'(t)=v\sqrt{1-f^2(t)}$ و

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}}=v \text{ ، } (\arcsin f(t))'=v$$

وازآن‌جا $f(t)=\sin vt$.

۷۰. A و B را دورأس چندوجهی می‌گیریم‌که به‌فاصلهٔ d ازیکدیگر باشند. ازنقطه‌های A و B، دوصفحه عمود برخط راست AB رسم‌می‌کنیم.

روشن است که تمامی چندوجهی بین این‌دو صفحه قرار می‌گیرد. از هررأس چندوجهی، صفحه‌ای عمودبرخط راست AB رسم‌می‌کنیم وازآن‌ها، دوصفحهٔ مجاور را درنظر می‌گیریم. بین این دو صفحه، دست‌کم سه‌یال از چندوجهی وجود دارد. تصویر هریك ازاین یال‌ها برخط راست AB، از طول خود یال بزرگترنیست؛ درضمن روشن است‌که، دربین آن‌ها، یال‌هایی وجود داردکه با AB موازی نیستند، بنا براین، مجموع طول‌های همهٔ این یال‌ها ازسه برابرطول AB، یعنی $3d$ بیشتراست.



شکل ۴۷

به‌طور خلاصه، می‌توان راه‌حل را، این طور بیان کرد: تصویر بدنهٔ چندوجهی روی AB، دست‌کم سه‌بار آن را می‌پوشاند.

۷۱. شعاع سیاره را واحد می‌گیریم. دو نقطه از سطح سیاره را در نظر می‌گیریم که دو سر یك قطر آن باشند (قطب‌ها). از این دو نقطه، نصف‌النهاری به‌نام «نصف‌النهار مبداء» را می‌گذرانیم و آن را به‌کمان‌های برابر به‌طول ε تقسیم می‌کنیم و از هر نقطهٔ تقسیم، مداری عبور می‌دهیم (شکل ۴۷).

برای سفینه، این برنامهٔ جست‌وجو را می‌ریزیم: سفینه در فاصلهٔ ثابت $R>1$، نسبت به مرکز سیاره، روی مدارهایی که مشخص کرده‌ایم پرواز می‌کند؛ در ضمن از نوار «شمالی» آغاز می‌کند و هر بار که به «نصف‌النهار مبداء» می‌رسد، در امتداد آن، خود را به مدار بعدی می‌رساند. فرض کنید: $R=\sqrt{2}$. در این صورت، از سفینه، «کلاهك کروی» به‌شعاع $\frac{\pi}{4}$ دیده می‌شود (همهٔ فاصله‌ها را، در روی سطح کره اندازه می‌گیریم).

از آن‌جا که ε را می‌توان به‌دلخواه کوچك گرفت، تنها باید تحقیق کرد، اگر نسبت سرعت‌ها بزرگتر از ۱۰ باشد، ساکن سیاره نمی‌تواند، در فاصلهٔ زمانی که سفینه یك مدار را دور می‌زند، از دید او خارج شود. و این، تقریباً روشن است. هر مدار از استوا کوتاه‌تر است. مرکز دایرهٔ دید سفینه، با سرعت دست‌کم $\frac{10}{\sqrt{2}}$ برابر سرعت موجود ساکن سیاره، جابه‌جا می‌شود. اگر این موجود، مدار را در نقطهٔ A قطع کند، آن وقت سفینه، در B قرار دارد،

و، بنابراین، یکی از دو کمان $\widehat{AB}$ از مدار از π تجاوز نمی‌کند و، در زمانی که سفینه آن را طی می‌کند، ساکن سیاره می‌تواند از A، به‌فاصله‌ای که بیشتر از $\frac{\pi\sqrt{2}}{10}<\frac{\pi}{4}$ نیست از A دور شود، به‌نحوی که در لحظهٔ بودن در A، باید از سفینه دیده شود (قبل از دور زدن مدار یا بعد از آن).

۷۲. دو سیاره را که از همه به‌هم نزدیك‌ترند، در نظر می‌گیریم. روشن است، اخترشناسانی که روی این دو سیاره باشند، به‌یکدیگر نگاه می‌کنند. $n-2$ سیاره و $n-2$ اخترشناس باقی می‌مانند. اگر دست‌کم یکی از این اخترشناسان به‌یکی از همین دو سیارهٔ انتخابی نگاه کند، آن‌وقت $n-3$ اخترشناس باقی‌مانده، برای مشاهدهٔ $n-2$ سیاره کفایت نمی‌کنند و یکی از سیاره‌ها، بدون مشاهده می‌ماند. ولی، اگر هیچ‌کدام از $n-2$ اخترشناس رو به یکی از دو سیارهٔ انتخابی نداشته باشند، می‌توانیم دوباره به همان استدلال متوسل شویم: از $n-2$ سیاره، دو سیاره را که نسبت به‌دیگران، به‌هم نزدیك‌ترند در نظر می‌گیریم وغیره. چون n عددی فرد است، سرآخر، یك سیاره باقی می‌ماند که هیچ‌کدام از اخترشناسان، تلسکوپ خود را به طرف آن، نشانه نرفته‌است.

۷۳. a) اگر نقطهٔ P روی خط راست AD واقع باشد، درستی گزاره روشن است.

فرض می‌کنیم، نقطهٔ P روی خط راست AD نباشد و O را وسط پاره‌خط راست AD می‌گیریم. نقطهٔ P'، قرینهٔ P نسبت به O را پیدا می‌کنیم. چهارضلعی‌های $BPCP'$ و $P'APD$ متوازی‌الاضلاع‌اند و داریم:

$$AP+PD=AP'+AP>P'B+BP=BP+PC$$

b) بنابر شرط، P نقطه‌ای دلخواه است. P را منطبق بر A می‌گیریم. در این صورت $AD\geqslant AB+AC$. اکنون P را منطبق بر D می‌گیریم. به‌دست می‌آید: $AD\geqslant BD+DC$. از مجموع این دو نابرابری، خواهیم داشت:

$$2AD\geqslant AB+AC+BD+CD$$

از طرف دیگر، همیشه داریم:

$$AD \leqslant AB+BD \text{ و } AD\leqslant AC+CD$$

در ضمن، درهریك ازاین دونابرابری، تنها وقتی به علامت برابری می‌رسیم که، سه نقطه، بر یك خط راست باشند. از مجموع دو نابرابری اخیر، به دست می‌آید:

$$2AD \leqslant BD+AB+AC+CD$$

از مقایسهٔ این‌نابرابری با نابرابری قبل نتیجه می‌شود:

$$2AD=BD+AB+AC+CD$$

از آن‌جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که، نقطه‌های A و B و C و D، روی یك خط راست‌اند وهمهٔ نابرابری‌های قبلی، برابری‌اند و،درنتیجه، نقطه‌های B و C، روی پاره‌خط راست AD واقع‌اند و در ضمن $AB=CD$.

۷۴. پاسخ: چنین عددهایی برای x و y وجود ندارد.

فرض می‌کنیم: $x\geqslant y$. در این صورت

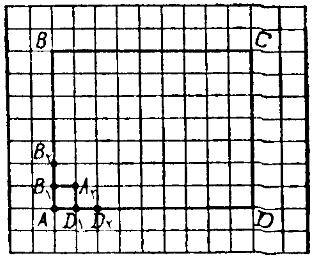
$$x^2 < x^2+y \leqslant x^2+x < (x+1)^2$$

بنابراین x^2+y، که بین‌دومجذورکامل متوالی قراردارد، نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

۷۵. a) کافی‌است ثابت‌کنیم، kامین‌نفر ازکلاس‌هشتم، قدی بلندتراز kامین نفر از کلاس هفتم دارد. A را kامین نفر کلاس هفتم، از لحاظ‌قد، فرض می‌کنیم. در این صورت، با خود A، دست کم k دانش‌آموز کلاس هفتم وجود دارد که از A کوتاه‌تر نیستند. همهٔ دانش‌آموزان‌کلاس هشتم، که پشت سر این k نفر قراردارند، از A بلندترند. بنابراین، k امین نفرکلاس هشتم، از لحاظ قد، از A بلندتر است.

b) این مساله هم، به مسالهٔ a) منجر می‌شود:کافی است همان استدلال را، برای هر دو ستون، داشته باشیم.

۷۶. مستطیل $ABCD$ را روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی با اندازه‌های $m\times n$ درنظرمی‌گیریم (شکل۴۸)،کوتاه‌ترین‌مسیرهایی را که از رأس‌های B_1، D_1، B_2، D_2 و A_2، روی خطهای شبکه به C می‌رسند، بــه ترتیب،



شکل ۴۸

b_1، d_1، b_2، d_2 و a_2 می‌نامیم. درواقع، باید ثابت‌کنیم: $\frac{d_1}{b_1}=\frac{n}{m}$. اثبات را، با استقرا روی $m+n$ می‌دهیم (ضمیمهٔ۱)؛ در ضمن، اجباری نیست‌که نسبت $\frac{n}{m}=k$ را عددی درست فرض‌کنیم.

آغاز استقرا، $m=1$ یا $n=1$، روشن است. اکنون فرض می‌کنیم $m>1$ و $n>1$. بنا به‌فرض استقرا که دربارهٔ مستطیل‌های با اندازه‌های کوچکتر $n\times(m-1)$ و $m\times(n-1)$ در نظر گرفته‌ایم، داریم:

$$\frac{d_2}{a_2}=\frac{n-1}{m} \text{ و } \frac{a_2}{b_2}=\frac{n}{m-1}$$

بنابراین

$$\frac{d_1}{b_1}=\frac{d_2+a_2}{b_2+a_2}=\frac{\frac{d_2}{a_2}+1}{\frac{b_2}{a_2}+1}=\frac{\frac{n-1}{m}+1}{\frac{m-1}{n}+1}=\frac{n}{m}$$

▽ درواقع، ضمن حل این مساله، ثابت‌کردیم:

$$C_{m+n-1}^{m-1}=nC_{m+n-1}^{m}=(m+n-1)C_{m+n-2}^{m-1}$$

(در مسالهٔما $n=km$). بااطلاع از دستور مربوط بــه C_n^m (ضمیمهٔ ۱۰)، می‌توان درستی این برابری‌ها را، به سادگی، تحقیق‌کرد. برعکس، می‌توان از این برابری‌ها، دستور مربوط به C_n^m را بیرون آورد.

۷۷. حکم مساله را، با روش استقرا ثابت می‌کنیم. به ازای $n=۱$، درستی حکم روشن است. فرض می‌کنیم، برای n عدد $a_۲$، $a_۳$، ...، $a_{n+۱}$، مجموع s' به صورت

$$\pm a_۲ \pm a_۳ \pm \cdots \pm a_{n+۱}$$

وجود داشته باشد، به نحوی که $۰ < s' \leqslant a_۲$.

ولی در این صورت از دو حال بیرون نیست: یا $۰ \leqslant s' \leqslant a_۱$ که از آن‌جا

$$۰ \leqslant s = a_۱ - s' \leqslant a_۱$$

و یا $a_۱ < s' \leqslant a_۲ \leqslant ۲a_۱$، که در این صورت

$$s = s' - a_۱ \leqslant a_۲ - a_۱ \leqslant a_۱$$

که درهرحال، درستی حکم مساله ثابت می‌شود.

۷۸. حکم مساله را، برای هر nضلعی محدب به مساحت S و محیط P ثابت می‌کنیم. طول ضلع‌های این n ضلعی را $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n می‌گیریم:

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = P$$

مستطیلی با مساحت S وقاعدهٔ به طول P درنظر می‌گیریم؛ ارتفاع این مستطیل، برابر $\frac{S}{P}$ می‌شود.

اکنون این مستطیل را، به‌کمك پاره‌خط‌های راست‌قائم، به n مستطیل با قاعده‌های برابر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n تقسیم می‌کنیم وهر یك از آن‌ها را، متناظر با یك ضلع n ضلعی و در درون آن قرار می‌دهیم. بعضی از مستطیل‌ها، در بخشی، روی هم قرار می‌گیرند و بعضی‌ها ممکن است به بیرون از n ضلعی بروند؛ بنابراین، از آن‌جاکه مجموع مساحت‌های آن‌ها برابر S و مساحت چندضلعی هم برابر S است، این مستطیل‌ها نمی‌توانند، به طور کامل، سطح چندضلعی را بپوشانند. هر نقطه‌ای از سطح چندضلعی را، که به وسیله این مستطیل‌ها پوشیده‌نشده باشد، می‌توان به‌عنوان مرکز دایرهٔ به‌شعاع $\frac{S}{P}$ انتخاب

کرد.

▽ برای چهارضلعی می‌توان مساله را به‌طریق دیگری حل کرد، ولی برخی از شرکت‌کنندگان در المپیاد، آن را با روشی حل کرده‌اند که از آن می‌توان برای nضلعی هم استفاده کرد.

۷۹. هرمسیر را با تعداد پاره‌خط‌های راستی بیان می‌کنیم که، ازطریق آن‌ها، می‌گذرد. n را طول کوتاه‌ترین مسیری می‌گیریم که از A به B می‌رود. حکم را، با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

برای $n=۱$، به جز کوتاه‌ترین مسیر AB، مسیری وجود دارد که از A به چهارراه $C \neq A$ می‌رود که از B به اندازهٔ ۱ فاصله داردو از B نمی‌گذرد.

$n>۱$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، D نزدیکترین چهار راه به A، در کوتاه‌ترین مسیر از A به B باشد. بنابر فرض استقرا، دو مسیر غیر متقاطع p و q از D به B وجود دارد. از A در مسیر l حرکت می‌کنیم، به نحوی که از D عبور نکند. اگر این مسیر، با مسیرهای p و q برخوردی نداشته باشد، همه چیز ثابت شده است. ولی اگر مثلاً با p برخورد داشته باشد، ازآن به بعد، باید مستقیماً روی p به سمت B رفت. این مسیر، q را قطع نخواهد کرد.

۸۰. h^* و PH را، به ترتیب، ارتفاع‌هایی از چهار وجهی می‌گیریم که از رأس‌های A و P گذشته باشند. h_a، h_b و h_c را ارتفاع‌های مثلث ABC و PL را، ارتفاع مثلث PBC فرض می‌کنیم.

داریم: $h^* \cdot S_{PBC} = HP \cdot S_{ABC}$؛ و چون $HP \leqslant h^*$، بنابراین $S_{PBC} \leqslant S_{ABC}$. از این‌جا به‌دست می‌آید: $PL \leqslant h_a$ و از آن‌جا

$$HL < PL \leqslant h_a$$

به‌این‌ترتیب، فاصلهٔ H تا خط راست BC از h_a کوچکتر است، به نحوی‌که نقطهٔ H، در درون نواری قرارمی‌گیردکه به وسیلهٔ دوخط راست موازی و به فاصلهٔ h_a از خط راست BC به‌وجود آمده است.

به همین ترتیب، ثابت می‌شودکه H، از AC و AB هم به فاصله‌ای، به ترتیب کمتر از h_b و h_c قرار دارد.

به این ترتیب، نقطهٔ H، بـه اشتراك هر سه نوار تعلق دارد، یعنی در درون مثلث $A_1B_1C_1$ قرار دارد که نقطه‌های A، B و C، وسط ضلع‌های آن هستند. برعکس، اگر H نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث $A_1B_1C_1$ باشد، و نقطهٔ P را نزدیك به H طوری انتخاب کنیم که، خط راست PH، عمود بر صفحهٔ ABC باشد، آن وقت فاصلهٔ از نقطهٔ P تا ضلع‌های مثلث ABC، از ارتفاع‌های متناظر کمتر می‌شود و PH، کـوچکترین ارتفاع چهار وجهی $PABC$ در می‌آید.

۸۱. هر یك از نقطه‌های مفروض را بـه وسیلهٔ دایره‌ای بـه شعاع $\frac{1}{2}$ دور می‌زنیم. مجموع قطرهای این دایره‌ها برابر است با ۱۰۰.

هر جا دو دایره با هم متقاطع در آیند، به جای آن‌ها، دایره‌ای قرار می‌دهیم که شامل این دو دایره شود و کوچکترین قطر ممکن را داشته باشد. به این ترتیب، مقدار مجموع قطرها افزایش پیدا نمی‌کند، ولی تعداد دایره‌ها کمتر می‌شود.

اگر ایـن روند را ادامه دهیم، سرانجـام، به دستگاهی از دایره‌هـا می‌رسیم کـه دو به دو نسبت به هم غیرمتقاطع‌اند و مجموع قطرهای آن‌ها از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. یادآوری می‌کنیم که، فاصلهٔ هر نقطه تا محیط دایره، از $\frac{1}{2}$ کمتر نیست.

r را کوچکترین فاصلهٔ بین دایره‌ها می‌گیریم. اگر $r>1$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر $r \leqslant 1$، آن‌وقت هر دایره را با دایره‌ای هم مرکز آن عوض می‌کنیم، به نحوی که شعاع آن به اندازهٔ $\frac{1}{2}-\frac{r}{3}$ کمتر باشد.

دستگاه دایره‌هایی که به این ترتیب به‌دست می‌آید، با شرط‌های مساله، سازگار است.

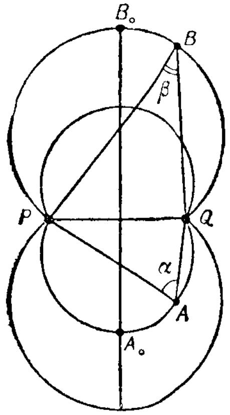
۸۲. پاسخ: $\dfrac{2d}{cotg\frac{\alpha}{2}+cotg\frac{\beta}{2}}$ کیلومتر در ثانیه.

فرض کنید، هواپیما در یك ثانیه از نقطهٔ P تا نقطهٔ Q پرواز کند: $PQ=r$. باید، با شرط ثابت بودن $AB=d$، حداقل مقدار ممکن r را پیدا کنیم. به‌جای این حداقل می‌توان به‌جست و جوی حداکثر مقدار $\frac{d}{r}$ رفت و. در ضمن، راحت‌تر است که r را ثابت بگیریم.

اکنون می‌توانیم، مساله را، به این صورت تنظیم کنیم: بین همهٔ نقطه‌های A و B از فضا، که از آن‌ها، پاره‌خط راست PQ، به ترتیب، با زاویه‌های α و β دیده می‌شود، دو نقطه‌ای را پیدا کنیم که، برای آن‌ها، فاصلهٔ AB، حداکثر مقدار ممکن باشد.

چون $\widehat{PAQ}=\alpha$، بنابراین نقطهٔ A روی کمان‌های در خور α قرار دارد که از P و Q گذشته‌اند (دو کمان) و، به‌همین ترتیب، نقطهٔ B روی کمان‌های درخور زاویهٔ β قرار دارد که از P و Q گذشته‌اند (باز هم دو کمان) (شکل ۴۹). به سادگی ثابت می‌شود: به حداکثر فاصلهٔ AB وقتی می‌رسیم که، دو نقطهٔ A و B «متقابل قطری» باشند (در شکل، نقطه‌های A_0 و B_0). برای چنین موقعیتی از A و B خواهیم داشت:

$$\frac{2d}{r}=cotg\frac{\alpha}{2}+cotg\frac{\beta}{2}$$



شکل ۴۹

که از آن، پاسخ مساله به‌دست می‌آید.

۸۳. پاسخ: ۳۰.

برنامه‌ای را که بازی‌کن دوم باید اجرا کند تا به این مجموع برسد، شرح می‌دهیم. عددها را، به زوج‌های (۲، ۱)، (۴، ۳)، ...، (۲۰، ۱۹) تقسیم می‌کنیم. هر بار که اولی، علامتی را جلو یك عدد می‌گذارد، به جز ۱۹ و ۲۰، دومی باید عدد دیگر همان زوج را، باعلامت مخالف، نشانه‌گذاری کند. اگر اولی علامتی را جلو یکی از دو عدد زوج آخر، یعنی (۲۰، ۱۹) قرارداد، دومی‌همان علامت را جلو عدد دیگر زوج قرارمی‌دهد. روشن است که مجموع نهائی، از لحاظ قدرمطلق، حداقل برابر می‌شود با

$$۱۰+۲۰\underbrace{-۱-۱-\dots-۱}_{\text{۹ بار}}=۳۰$$

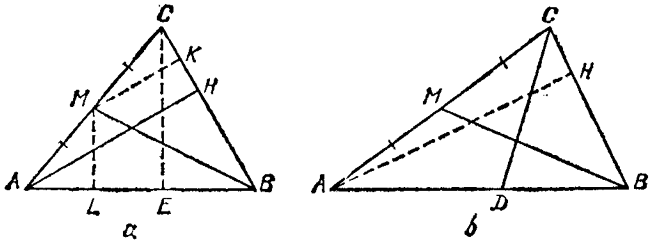
اکنون ثابت می‌کنیم، بازی‌کن اول، می‌تواند مانع آن شود که دومی بیش از ۳۰ را به‌دست آورد، به شرطی که درهر حرکت خود، جلو بزرگترین عدد ازعددهای باقی‌مانده، علامتی را بگذارد که مخالف علامت مجموع، در آن لحظه، باشد(اگرمجموع برابر صفر بود، بایدعلامت مثبت‌را انتخاب کند).

یکی از مرحله‌ها را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، kامین حرکت، آخرین حرکتی باشد که، درنتیجهٔ آن، مجموع تغییرعلامت داده است (واین شامل حرکت‌هایی است که، قبل‌ازآن، مجموع برابر صفراست). در $k-۱$ حرکت اول، آگاهانه، ازعددهای ۲۰، ۱۹، ۱۸، ...، $۲۰-(k-۱)$ استفاده شده است، به‌نحوی که حداکثر قدرمطلق مجموع، که می‌تواند بعد از حرکت k ام به دست آید برابر است با

$$۲۰-(k-۱)+۲۰-k=۴۱-۲k$$

در هریك از $۱۰-k$ حرکت بعدی، مقدارمجموع دست‌کم یك واحدکاهش پیدا می‌کند، زیرااولی، هربار،ازقدرمطلق مجموع، بزرگترین عددباقی‌مانده را، مثلاً m، کم می‌کند، در حالی‌که دومی نمی‌تواند، بیش از $m-۱$، به آن اضافه کند. در نتیجه، مجموع نمی‌تواند از

$$۴۱-۲k-(۱۰-k)=۳۱-k\leqslant ۳۰$$



شکل ۵۰

تجاوز کند.

۸۴. a) مقدار زاویهٔ B از مثلث قائم‌الزاویه برابر یا کوچکتر از ۳۰ درجه است، برحسب آن که، ضلع رو به‌روی به‌زاویهٔ B، طولی برابر با نصف طول وتر و یا کوچکتر از آن داشته باشد.

اگر از این مطلب، در مثلث‌های BMK وBML استفاده‌کنیم (شکل ۵۰، a: $MK\perp BC$)، به‌دست می‌آید: $\widehat{MBC}=۳۰^\circ$. زیرا

$$BM=AH=۲MK$$

و $\widehat{MBA}<۳۰^\circ$، زیرا $BM=AH\geqslant EC=۲ML$. بنابراین

$$\widehat{B}=\widehat{MBC}+\widehat{MBA}<۶۰^\circ$$

یادآوری می‌کنیم که «حاده‌بودن زاویه‌های‌مثلث» ضرورت دارد؛ بدون آن، حکم مساله درست نیست.

b) از مسالهٔ a) نتیجه می‌شود: $\widehat{B}\leqslant ۶۰^\circ$. بنابراین،کافی است ثابت کنیم، ضلع AC از دوضلع دیگرکوچکتر نیست: دراین‌صورت

$$\widehat{A}\leqslant\widehat{B}\leqslant ۶۰^\circ ,\quad \widehat{C}\leqslant\widehat{B}\leqslant ۶۰^\circ$$

(درهرمثلث، زاویهٔ بزرگتر، رو به‌رو به ضلع بزرگتراست) وازاین‌نابرابری‌ها بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=۶۰^\circ$$

برای اثبات، توجه می‌کنیم که BM، کوچکترین میانه‌است، زیرا میانهٔ وارد بر BC از ارتفاع $AH=BM$ کوچکتر نیست، و میانهٔ وارد برضلع AB از نیمساز CD کوچکتر نیست (آخر، نیمساز CD، ضلع AB را به نسبت $\frac{AC}{BC}$ تقسیم می‌کند؛ شکل ۵۰، b). ولی‌درهرمثلث، میانهٔ بزرگترمتناظر است باضلع کوچکتر: کافی‌است توجه‌کنیم که، مرکزثقل مثلث ABC (نقطهٔ برخورد میانه‌ها) باراس C، در یك طرف عمود منصف AC قرار دارند.

۸۵. a) اگر مجموع دو عدد a و b، تنها از رقم‌های ۹ تشکیل شده باشد، به معنای آن است که، ضمن جمع دو عدد، در هیچ مرتبه‌ای، مجموع رقم‌ها از ۹ بیشتر نشده است. بنا براین، اگر $S(x)$ را به‌معنای مجموع‌رقم‌های عدد x بگیریم، باید داشته باشیم:

$$S(a+b)=S(a)+S(b)$$

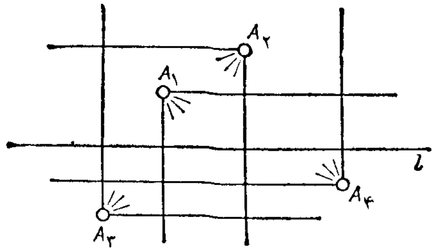
ولی اگر $S(a)=S(b)$، آن‌وقت $S(a+b)$ عددی زوج است و نمی‌تواند برابر با 1967×9 باشد.

b) اگر رقم آخر عدد a برابر صفر نباشد، آن وقت مجموع آن با رقم آخر b، برابر ۱۰ می‌شود و، بنا براین، باید مجموع رقم‌ها در هریك ازنه مرتبهٔ بعدی برابر ۹ باشد. ازاین‌جا نتیجه می‌شود

$$2S(a)=9\times 9+10=91$$

که ممکن نیست.

۸۶. a) خط راست l را طوری رسم می‌کنیم که، درهرنیم صفحه‌ای



شکل ۵۱

که به دست می‌آید، دو نورافکن وجود داشته باشد. روشن است که (شکل ۵۱)، با دو نورافکنی که در یکی از نیم صفحه‌ها قرار دارد، می‌توان تمامی نیم‌صفحهٔ دیگر را روشن کرد.

b) صفحه‌ای رسم می‌کنیم که، از بین هشت نقطهٔ مفروض، چهار نقطه در یك طرف، وچهارنقطه درطرف دیگر آن قرار گیرند. بااستفاده ازمسالهٔ a)، می‌توان به سادگی ثابت کرد، نورافکن‌هایی درچهارنقطهٔ یکی ازنیم فضاها قراردارند، می‌توانند تمامی نیم فضای دیگررا روشن کنند.

این‌مساله‌را می‌توان تعمیم داد: nزاویهٔ دلخواه α_1، α_2، ...، α_n را باشرط

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=360^\circ$$

می‌توان در n نقطهٔ مفروض‌صفحه طوری قرارداد که تمامی‌صفحه را بپوشانند.

۸۷. a) پاسخ: نمی‌توان.

هیچ دوعددی ازعددهای ۰، ۱، ۲، ۸، ۹ نمی‌توانند مجاورهم باشند؛ بنا براین، این‌عددها، باید یك درمیان‌قرار گیرند. ولی عدد ۷ را نمی‌توان در هیچ‌کدام از ۵ جای باقی‌مانده قرار داد؛ همچنین، برای ۳ هم جایی پیدا نمی‌شود (امتحان کنید!).

b) پاسخ: نمی‌توان.

استدلال را می‌توان شبیه a) انجام داد. هیچ دوعددی‌ازعددهای ۱، ۲، ۳، ۱۱، ۱۲، ۱۳ نمی‌توانند مجاورهم باشند؛ از بین این عددها، تنها ۱ می‌تواند درمجاورت ۴ وتنها ۱۲ می‌تواند درمجاورت ۱۰ قرار گیرند. دراین صورت ۱۰ و ۴ درکنارهم قرار می‌گیرند که شرط مساله را نقض می‌کند.

▽ جالب‌است که برای ۱۴عدد (وظاهراً برای هر $n \geqslant 14$)، می‌توان برای مساله جوابی پیداکرد:

۱۲، ۸، ۳، ۶، ۲، ۵، ۱، ۴، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۱۳، ۹، ۱۲

۸۸. عدد 5^{1000} به ۵ ختم شده است. فرض کنید، kامین رقم این‌عدد، ازراست به‌چپ، برابر ۰ وهمهٔ بقیهٔ‌رقم‌های سمت راست آن مخالف ۰ باشد. به این عدد، عدد $5^{1000}\times 10^{k-1}$ را اضافه می‌کنیم. دراین صورت، عددی به

دست می‌آید که بر 5^{1000} بخش‌پذیر است و k رقم آخر آن مخالف صفر است. با ادامهٔ این روند، می‌توان عددی به دست آورد که ۱۰۰۰ رقم آخر آن مخالف صفر باشد. اکنون، همهٔ رقم‌ها، به‌جز ۱۰۰۰ رقم آخر را حذف می‌کنیم. روشن است که عدد حاصل، بازهم بر 5^{1000} بخش‌پذیر است.

۸۹. پاسخ: $(0,-1)$، $(-1,-1)$، $(0,0)$، $(-1,0)$، $(5,2)$، $(-6,2)$.

اگر دوطرف معادله را ۴ برابر، سپس، به‌هردوطرف یك واحد اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$(2x+1)^2=(2y^2+y)^2+$$
$$+3y^2+4y+1=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y)$$

اگر y عددی درست وغیرازعددهای ۱−، ۰، ۱ و ۲ باشد، آن‌وقت

$$3y^2+4y+1>0 \text{ ، } y^2-2y>0$$

درضمن

$$(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2$$

این نابرابری‌ها نشان می‌دهند که $(2x+1)^2$، بین دو مجذور کامل متوالی قرار دارد و این، برای عددهای درست x ممکن نیست. اگر درمعادله مقدارهای $y=-1$، $y=0$، $y=1$ و $y=2$ قرار دهیم، پاسخ به‌دست می‌آید.

۹۰. پاسخ: ۲۹۵۲ جمله.

ثابت می‌کنیم، طول دنباله (تعداد جمله‌ها)، وقتی جملهٔ دوم آن برابر n و بزرگترین جمله باشد، از $d_n=\frac{3(n+1)}{2}$ تجاوز نمی‌کند و، درضمن، برای دنبالهٔ

$$n-1،\ n،\ 1،\ n-1،\ n-2،\ 1،\ \ldots،\ 1،\ 1$$

تعداد جمله‌ها، درست برابر با d_n است.

استدلال را با استقرا انجام می‌دهیم. برای $n\leqslant 4$، درستی حکم به

سادگی قابل تحقیق است ($d_1=2$، $d_2=3$، $d_3=6$، $d_4=7$). حداکثر طول دنباله‌ای را ارزیابی می‌کنیم که این‌طور آغاز شده است:

$$a،\ n،\ n-a،\ a،\ \ldots\ (a<n)$$

وفرض می‌کنیم؛ حکم موردنظر، برای عددهای کوچکتر از n درست باشد.

به ازای $1\leqslant a<\frac{n}{2}$، طول دنباله از $d_{n-a}+1$ تجاوز نمی‌کند. زیرا اگر جملهٔ اول a را برداریم، می‌توان آغاز دنباله را این‌طور نوشت:

$$n-2a،\ n-a،\ \ldots$$

به‌ازای $\frac{n}{2}\leqslant a<n-1$، طول دنباله از d_a+2 تجاوز نمی‌کند (کافی است دوجملهٔ اول را برداریم). بنابراین، باید تحقیق کنیم که، برای این‌مقدارهای a، این، نابرابری‌ها برقرارند:

$$d_{n-a}+1\leqslant d_n،\ d_a+2\leqslant d_n$$

به ازای $a=n-1$، برای دنبالهٔ

$$n-1،\ n،\ 1،\ n-1،\ n-2،\ 1،\ n-3،\ \ldots،\ 1،\ 1$$

کافی است سه جملهٔ اول‌را برداریم ودو جملهٔ بعدی را جابه‌جا کنیم و، سپس دربارهٔ برابری $d_n=d_{n-3}+3$ تحقیق کنیم.

اگر این استدلال کلی را دربارهٔ $n=1967$ بکار بریم، پاسخ به‌دست می‌آید.

$$d_{1967}=\left[\frac{3\times 1968}{2}\right]=2952$$

۹۱. اگرشاه ازگوشهٔ چپ وپایین صفحه، روی قطر بـه طرف گوشهٔ راست وبالای‌صفحه برود، به ناچار دریکی‌ازحرکت‌ها، زیرضربهٔ رخ سفید قرارمی‌گیرد.

برای اثبات، کافی است توجه کنیم‌که، بعد ازحرکت اول شاه، باید

همهٔ رخ‌های سفید، بالای سومین ردیف افقی وسمت راست سومین ردیف قائم باشند.

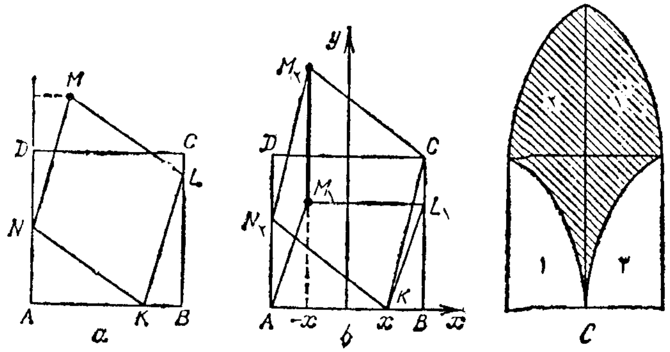
به همین ترتیب، قبل ازحرکت شاه بـه‌گوشهٔ راست بـالا، باید همهٔ رخ‌ها، زیرردیف ۹۹۸ افقی وسمت چپ ردیف ۹۹۸ قائم واقع باشند.

شاه، روی‌هم، قبل ازآخرین‌حرکت خود درروی قطر، ۹۹۷حرکت انجام می‌دهد. درضمن، هررخ، به ازای حرکت شاه، باید دوحرکت داشته باشد (تغییرردیف افقی وردیف قائم‌که درابتدا روی آن‌ها قراردارد)؛ ولی تعداد رخ‌ها برابر۴۹۹است، درحالی‌که باید ۴۹۹ × ۲ حرکت انجام‌دهد و ۹۹۷ < ۹۹۸ = ۴۹۹ × ۲.

۹۲. پاسخ: $S =$ ۱.

K، L وNرا رأس‌هایی ازلوزی می‌گیریم‌که، به‌ترتیب، برضلع‌های AB، BC وAD ازمربع واقع‌اند.(شکل ۵۲، a). طول پاره‌خط راست KB، برابر است با فاصلهٔ ازنقطهٔ M تا خط راست AD. بنابراین، اگر نقطهٔ K را ثابت نگه داریم، آن وقت موضع‌نقطهٔ M، پاره‌خط راست M_1M_2 را، که بـا ضلع AD مـوازی است، پرمی‌کند. در ضمن، نقطهٔ M_1، پایین‌ترین موضع‌نقطهٔ M، متناظر با حالتی است‌که N_1 برA منطبق‌باشد؛ به همین ترتیب، نقطهٔ M_2، با حالت $L_2 = C$ تطبیق می‌کند.

برای این‌که موضع نقطه‌هـای M_1 و M_2 را معین‌کنیم (دررابطه با



شکل ۵۲

موضع نقطهٔ K)، دستگاه محورهای‌مختصات را، به‌آن‌گونه‌که درشکل ۵۲، b دیده می‌شود، درنظرمی‌گیریم.

به سادگی‌می‌توان محاسبه‌کردکه، اگرطول نقطهٔK برابر $x > 0$ باشد، آن وقت، خواهیم داشت:

$$M_1 = (-x, \sqrt{2x}) \text{ و } M_2 = (-x, \sqrt{1-2x}+1)$$

با استفاده ازتقارن مجموعهٔ نقطه‌های M، نسبت به محور OY، معلوم می‌شودکه، این مجموعه، به‌صورت شکلی درمی‌آیدکه هاشورزده‌ایم، برای محاسبهٔ مساحت، لزومی‌ندارد ازمحاسبهٔ انتگرالی استفاده‌کنیم؛ درشکل ۵۲، c، دوشکلی‌که با عددهای ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند، برابرند.

۹۳. ابتدا یادآوری‌می‌کنیم‌که، عدد k، نسبت به عدد ۱۰ اول است. درواقع، عددی وجود داردکه با رقم ۱ آغازمی‌شود و بر k بخش‌پذیراست؛ مقلوب چنین عددی هم، بر k بخش‌پذیراست و به رقم ۱ ختم می‌شود.

اکنون، عددی را انتخاب می‌کنیم‌که با ۵۰۰ آغاز شود و بر k بخش‌پذیر باشد:

$$\overline{500abc\ldots z}$$

(a، b، c، ...، z، رقم‌های‌این عددند). دراین‌صورت، باید هریك ازعددهای زیر، بر k بخش‌پذیر باشند:

۱) عدد $\overline{z\ldots cba005}$

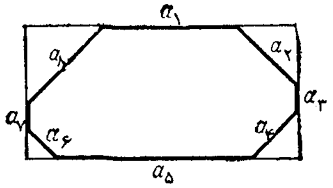
۲) مجموع دوعدد

$$\begin{array}{r} z\ldots cba00500\ldots\ldots0 \\ +\quad 500abc\ldots z \\ \hline \end{array}$$

یعنی عدد $\overline{z\ldots cba01000ab\ldots z}$

۳) مقلوب عدد اخیر، یعنی عدد $\overline{z\ldots ba00010ab\ldots z}$

۴) تفاضل این دوعدد



شکل۵۳

$$z \ldots ba0100ab \ldots z -$$
$$z \ldots ba0001ab \ldots z$$

یعنی عدد ۹۹۰۰...۰.

به‌این ترتیب دیده می‌شود که عدد ۹۹، بر k بخش‌پذیر است.

۹۴. a_1، a_2، ...، a_8 را، به‌ترتیب، طول ضلع‌های هشت‌ضلعی می‌گیریم (شکل۵۳). از برابری زاویه‌ها، بلافاصله نتیجه می‌شود که، ضلع‌های روبه‌رو، باهم‌موازی‌اند. دوضلع روبه‌روی a_1 و a_5 و همچنین‌دوضلع‌روبه‌روی a_3 و a_7 را ادامه می‌دهیم، مستطیلی به‌دست می‌آیدکه، از آن،می‌توان هشت‌ضلعی را «با بریدن گوشه‌ها» به‌دست آورد.

از برابری ضلع‌های روبه‌رو درمستطیل، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_8}{\sqrt{2}}+a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}=\frac{a_6}{\sqrt{2}}+a_5+\frac{a_4}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_5-a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a_8+a_2-a_6-a_4\right)$$

چون a_i عددی درست است و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ عددی گنگ، بنابراین $a_5=a_1$ به‌همین ترتیب، برابری بقیهٔ ضلع‌های روبه‌روهم ثابت می‌شود.

۹۵. پاسخ: $17^{14}>31^{11}$.

نابرابری‌های زیر، درستی پاسخ را نشان می‌دهند:

$$17^{14}>16^{14}=2^{56}>2^{55}=32^{11}>31^{11}$$

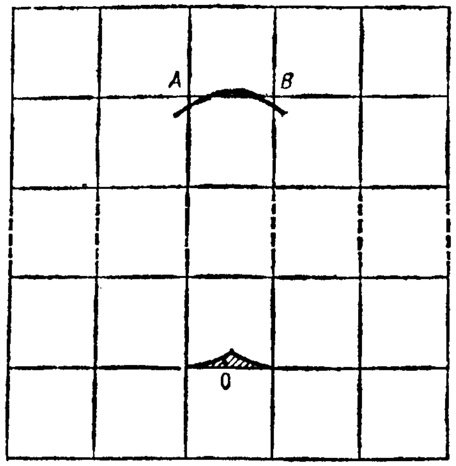
۹۶. پاسخ: ۸۰۰ یا ۷۹۹.

خط‌های راست شبکه را افقی وقائم‌می‌نامیم. دایرهٔ به‌قطر ۲۰۰، وقتی که ازگره‌های شبکه عبورنکند وبرخط‌های راست شبکه مماس نباشد، ۲۰۰ خط‌راست افقی و ۲۰۰ خط راست قائم را قطع می‌کند و، درضمن هرکدام ازآن‌ها را دوبار. بنابراین، حداکثر تعداد نقطه‌های برخورد برابراست با ۸۰۰. این ۸۰۰ نقطه، محیط دایره را به ۸۰۰ بخش تقسیم می‌کنند. هریك ازاین بخش‌ها دردرون یکی ازخانه‌ها قراردارد. بنابراین، حداکثر ممکن برای تعداد خانه‌ها، ۸۰۰ است.

با وجود این، ممکن است، دوبخش ازاین بخش‌ها متعلق به یك خانه باشند، یعنی‌محیط دایره خانه‌ای رادوبارقطع کند (شکل۵۴). ثابت می‌کنیم، ازاین‌گونه خانه‌های «خاص» بیش ازیکی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ببینیم، وقتی محیط دایره ضلع AB ازخانه‌ای را دوبارقطع می‌کند، نقطهٔ O، مرکزدایره، درکجا می‌تواند قرار گیرد؟

فاصلهٔ مرکز O ازدایرهٔ به قطر ۲۰۰، تا هریك ازنقطه‌های A و B، از ۱۰۰ بیشتر، ولی فاصلهٔ آن ازخط راست AB از ۱۰۰ کمتراست؛ بنابراین، نقطهٔ O، در بیرون دایره‌های به‌شعاع ۱۰۰ و به مرکزهای A و B، بین‌خط‌های قائم شبکه‌که از A و B می‌گذرند ودر درون نوار به عرض ۲۰۰ با محور



شکل۵۴

افقی AB واقع است. همهٔ این نقطه‌ها، درون‌دومثلث منحنی‌الخط را پر می‌کنند (یکی ازاین مثلث‌ها را، روی شکل، هاشور زده‌ایم).

روشن‌است که، برای پاره‌خط‌های راست‌متفاوت AB، چنین‌مجموعه‌هایی، دارای نقطه‌های مشترك نیستند و، بنابراین، بیش از يك خانهٔ «خاص» نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۹۷. ابتدا ثابت می‌کنیم، می‌توان گروهی از دانشجویان را انتخاب کرد که، در آن، با هرزبان، درست دو نفر آشنا باشند.

هر دانشجو را با حرف اول زبانی که می‌داند، معرفی می‌کنیم: a به معنای دانشجوئی است که زبان انگلیسی را می‌داند، ولی با دو زبان دیگر آشنا نیست؛ if دانشجویی است که با دوزبان اسپانیائی‌وفرانسوی آشناست ولی انگلیسی نمی‌داند؛ و aif یعنی دانشجوئی که هر سه زبان را می‌داند.

N_a، N_i، N_f، N_{ai}، N_{if}، N_{af} و N_{aif} را به معنای تعداد دانش‌آموزان هر نوع می‌گیریم.

اگر $N_{ai}\neq 0$، $N_{af}\neq 0$ و $N_{if}\neq 0$، آن وقت گروه موردنظر (ai, af, if) است.

اگر یکی ازعددها، مثلاً N_{ai}، برابرصفر، N_{af} مخالف صفر و N_{if} مخالف صفر باشد، آن وقت $N_a\neq 0$ و $N_i\neq 0$ و گروه موردنظر ما، چنین می‌شود:

$$(af, if, a, i)$$

اگر $N_{ai}=N_{af}=0$، $N_{if}\neq 0$ و $N_{aif}\neq 0$، آن وقت، این گروه را انتخاب می‌کنیم:

$$(aif, uf, a)$$

اگر $N_{aif}=0$، $N_{if}\geqslant 2$، گروه

$$(if, if, a, a)$$

و اگر $N_{if}=1$، گروه (if, a, a, i, f) را انتخاب می‌کنیم.

اگر $N_{ai}=N_{af}=N_{if}=0$، می‌توان یکی از این سه گروه را انتخاب کرد:

$$(aif, a, i, f) \text{ یا } (a, i, f, a, i, f) \text{ یا } (aif \text{ و } aif)$$

دنبالهٔ کارروشن است. ازاین گروه‌ها، که در هرکدام از آن‌ها هرزبان را درست دو نفر می‌داند، پنج بار انتخاب می‌کنیم، اولین گروهی به دست می‌آید که، در آن، با هر زبان درست ۱۰ نفرآشنایی دارد. بعد دومین گروه از این گونه را درست می‌کنیم و غیره.

▽ در حالت کلی، وقتی درگروهی از دانشجویان، با هر يك از سه زبان درست n نفرآشنا باشند، برای هر عدد زوج $p<n$، می‌توان گروهی انتخاب کرد که، درآن، با هر زبان، p نفرآشنا باشد (شرط زوج بودن p، شرطی لازم است).

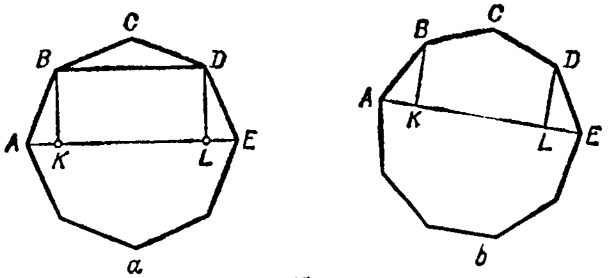
۹۸. برای اثبات، کافی است از این اتحادها استفاده کنیم:

$$\frac{2k}{x^2-k^2}=\frac{1}{x-k}-\frac{1}{x+k},$$

$$\frac{11}{(x-11+k)(x+k)}=\frac{1}{x-11+k}-\frac{1}{x+k}$$

۹۹. پاسخ: $n=9$.

a_n راطول ضلع‌و D_n و d_n را، به ترتیب، طول بزرگترین‌وکوچکترین قطر n ضلعی می‌گیریم. برای $n=4$ و $n=5$، همهٔ قطرها برابرند. برای $n=6$ و $n=7$ داریم $D_n-d_n<a_n$. برای $n=8$ (شکل ۵۵،a)، عمودهای BK و DL را ازدوانتهای قطر کوچکتر BD برقطر بزرگتر AE فرود می‌آوریم. به‌سادگی روشن می‌شود که $\widehat{ABK}=22/5^\circ<30^\circ$.



شکل ۵۵

بنا براین

$$AB = a_{۸} > ۲AK = D_{۸} - d_{۸}$$

برای $n = ۹$ (شکل ۵۵، b)داریم: $\widehat{ABK} = ۳۰^\circ$ و بنا براین

$$AB = a_{۹} = ۲AK = D_{۹} - d_{۹}$$

سپس، فرض می‌کنیم، n ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط باشد. روشن است که، به ازای $n > ۹$، داریم: $D_n \geqslant D_{۹}$ و $d_n < d_{۹}$. بنا براین

$$D_n - d_n > D_{۹} - d_{۹} = a_{۹} > a_n$$

۱۰۰. ثابت می‌کنیم $۱۴ < a_{۱۰۰} < ۱۸$. برای $k > ۱$ داریم:

$$a_k^{۲} = a_{k-۱}^{۲} + ۲ + \frac{۱}{a_{k-۱}^{۲}}, \quad (a_k > ۱)$$

بنا براین $a_{k-۱}^{۲} + ۲ < a_k^{۲} < a_{k-۱}^{۲} + ۳$.

اگـر در نابرابری اخیر، $k = ۲، ۳، \ldots، n$ بگیریم و، سپس، همهٔ نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنیم (با درنظر گرفتن $a_{۱} = ۱$)، به‌دست می‌آید:

$$۲n - ۱ < a_n^{۲} < ۳n - ۲$$

از آنجا $\sqrt{۲n - ۱} < a_n < \sqrt{۳n - ۲}$ که، به‌ازای $n = ۱۰۰$:

$$۱۴ < a_{۱۰۰} < ۱۸$$

▽ بدون دشواری می‌توان ثابت کرد، که، دنبالهٔ $\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ بـه سمت حدی میل می‌کند و، در ضمن، می‌توان این حد را پیدا کرد.

۱۰۱. مثلث $A'B'C'$ را به موازات خود منتقل می‌کنیم تا نقطهٔ O' بر نقطهٔ O منطبق شود. رأس‌های مثلثی را که به این طریق به دست می‌آید، مثل سابق، A'، B' و C' می‌نامیم.

چون $\widehat{A_{۱}OB_{۱}} = \widehat{A'OB'}$ و $\dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{OB_{۱}}{OA_{۱}}$ (بنا بر فـرض)، بنا براین دو مثلث $A_{۱}OB_{۱}$ و $B'OA'$ متشابه‌اند و

$$\widehat{OA_{۱}B_{۱}} = \widehat{OB'A'} \text{ و } \widehat{OB_{۱}A_{۱}} = \widehat{OA'B'}$$

چون بر چهارضلعی $OA_{۱}CB_{۱}$ می‌توان یك دایره محیط کرد (به قطر OC)، بنا براین

$$\widehat{B_{۱}CO} = \widehat{OA_{۱}B_{۱}} \text{ و } \widehat{A_{۱}CO} = \widehat{OB_{۱}A_{۱}}$$

در نتیجه مثلث‌های $A_{۱}OC$ و $C'_{۱}OA'$ و، همچنین، مثلث‌های BOC و $C'_{۱}OB_{۱}$ باهم متشابه‌اند، یعنی پاره‌خط راست OC' بر خط راست OC قرار دارد و

$$OC.O'C'_{۱} = OA.O'A'_{۱} = OB.O'B'_{۱}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان مثلث‌های $B'OC'$ و $C'OA'$ را موردمطالعه‌قرارداد.

۱۰۲. اثبات را، با استقرای روی n می‌دهیم. به‌ازای $n = ۱$، درستی حکم روشن است. فرض می‌کنیم، حکم برای $n = k$ درست باشد.

$a < (k+۱)!$ می‌گیریم. a را به $k+۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$a = d(k+۱) + r$$

که در آن $d \leqslant k!$ و $r < k+۱$. بنا برفرض استقرا داریم:

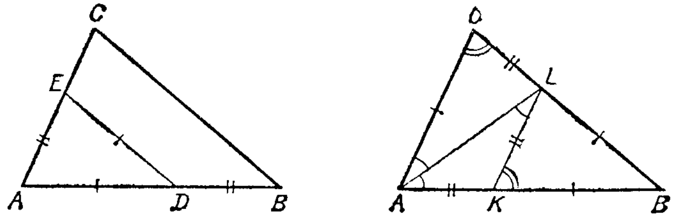
$$d = d_{۱} + d_{۲} + \cdots + d_l$$

که در آن، d_iها مقسوم‌علیه‌های مختلف عدد $k!$ هستندو $l \leqslant k$. دراین‌صورت

$$a = d_{۱}(k+۱) + d_{۲}(k+۱) + \cdots + d_l(k+۱) + r$$

در این مجموع، بیش از $k+۱$ جمله وجـود ندارد و، هر کدام از آن‌ها، مقسوم‌علیهی از $(k+۱)!$ هستند؛ در ضمن، همهٔ آن‌ها با هم فرق دارند.

۱۰۳. با انتقال موازی، نقطه D را بـه نقطهٔ B می‌رسانیم؛ در این صورت، مثلث ADE منجر به مثلث KBL می‌شود، که در آن $KL \| AC$ و،



شکل ۵۶

به‌جز آن، $KB=LB$ (شکل ۵۶).

اگر فرض کنیم: $\widehat{KAL}=\widehat{KLA}=\alpha$، آن وقت خواهیم داشت:

$$\widehat{BKL}=2\alpha,\quad \widehat{BAC}=\widehat{BCA}=2\alpha$$

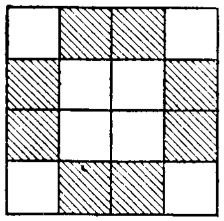
دو مثلث ACL و BKL با هم برابرند و

$$\widehat{ALC}=\widehat{KLB}=2\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{5}$$

و $LC=AK=BD$، یعنی طول پاره‌خط راست BD، برابر است با طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع $R=AC$.

۱۰۴. از نقطهٔ A، عمود AH را بر صفحهٔ BCD و، سپس، از نقطهٔ H، عمودهای HK، HL و HM را، به ترتیب، برضلع‌های BC، BD و CD فرود می‌آوریم. هر یك از هرم‌های $ABKL$، $ACKM$ و $ADML$ به وسیلهٔ کرهٔ متناظر خود پوشیده می‌شود.

۱۰۵. a) به سادگی دیده می‌شود که، هرخط راست موازی باضلع یا قطر مربع، تعداد زوجی از هشت خانهٔ هاشور خورده در شکل ۵۷ را قطع می‌کند. بنابراین، تعداد منفی‌های واقع در این خانه‌ها را، نمی‌توان از زوج به فرد یا از فرد به زوج تغییر داد (ضمیمهٔ ۱۳).



شکل ۵۷

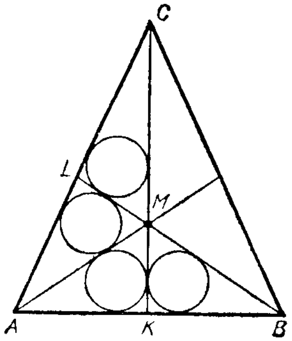
b) ازمربع ۸ × ۸ می‌توان مربع ۴ × ۴ را طوری جدا کرد که علامت منفی در آن، شبیه حالت مسالهٔ a) قرار گرفته باشد و، در نتیجه، این مساله، به‌همان مسالهٔ قبل منجر می‌شود.

۱۰۶. هرشش مثلثی که بارسم میانه‌ها، دریك مثلث، به‌وجود می‌آیند، مساحتی برابر دارند. از برابری شعاع‌های دایره‌های محاطی و با توجه به دستور $S=pr$، برابری محیط‌های چهار تا از این مثلث‌ها ثابت می‌شود.

از برابری محیط‌های دو مثلث AMK و BMK (شکل ۵۸)، نتیجه می‌شود*: $MK=MB$، یعنی MK ارتفاع مثلث AMB است و در نتیجه $AC=BC$.

اگر شعاع دایره‌های محاط در مثلث‌های ALM و AKM برابر باشند، آن وقت این مثلث‌ها برابرمی‌شوند (به عنوان مثلث‌هایی که مساحت‌ها، قاعده‌ها و محیط‌های برابر دارند)؛ درضمن $AL=AK$، یعنی $AC=AB$ و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

اگر محیط‌های دو مثلث CLM و KMB برابر باشند. آن وقت، با استفاده از برابری طول‌های دو مماسی که از یك نقطه بر دایره‌ای رسم می‌شوند، اگر x را فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ تماس با دایرهٔ متناظر بگیریم، به دست می‌آید:



شکل ۵۸

*) بدون شك، از این چهارمثلث با محیط برابر، دست‌کم دوتا، چسبیده به یك ضلع‌اند. و در اینجا، آن‌ها را چسبیده به ضلع AB گرفته‌ایم.

$$CL+LM+CM=۲CL+۲x=۲BK+۲x$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $AC=AB$.

۱۰۷. اثبات حکم این مساله، اثبات نامتناهی بودن مجموعهٔ عددهای اول را، که به‌اقلیدس تعلق دارد، به‌یاد می‌آورد (ضمیمهٔ ۲).

فرض می‌کنیم، معادلهٔ $x^۲+x+۱=py$، تنها برای تعداد محدودی از عددهای اول $p_۱$، $p_۲$، ...، p_m، دارای جواب‌های درست (x, y) باشد. $P=p_۱p_۲\dots p_m$ می‌گیریم. دراین‌صورت، عدد $P^۲+P+۱$، بر هیچ‌کدام ازعددهای $p_۱$، $p_۲$، ...، p_m بخش‌پذیر نیست و، بنابراین، دارای مقسوم‌علیه‌اول q است‌که برابر با هیچ‌کدام ازاین عددها نیست. ولی معادلهٔ

$$x^۲+x+۱=qy$$

دارای جواب درست $\left(P, \frac{P^۲+P+۱}{q}\right)$ است. تناقض حاصل، درستی‌حکم مساله را ثابت می‌کند.

۱۰۸. پاسخ: حداکثر عدد $c_۱$، برابر ۲۴ است.

اگر همهٔ داوران در انتخاب مقام‌اول، هم‌رأی باشند، آن وقت $c_۱=۹$.
اگر داوران، مقام اول را به دو نفر داده باشند، آن وقت یکی‌از دو نفراز ۵ داور مقام اول را گرفته است واز چهارداور بقیه، مقامی‌که او، ازچهارم پایین‌تر نبوده است؛ بنابراین

$$c_۱\leqslant ۵\times ۱+۴\times ۴=۲۱$$

اگر داوران به ۳ نفر مقام اول را داده باشند، چون بقیهٔ مقام‌هایی‌که این ۳ نفر از داوران دریافت کرده‌اند، از چهار تجاوز نمی‌کنند، مجموع مقام‌های همهٔ این سه هنرمند، از

$$۱\times ۹+۳\times ۹+۴\times ۹=۷۲$$

بیشتر نیست و، بنابراین $c_۱\leqslant ۲۴$. در حالتی که از بین داوران، به چهار هنرمند، مقام اول را داده باشند، مجموع کل مقام‌های آن‌ها حداکثر برابر

۹۰ ومجموع نمره‌های یکی از آن‌ها، حداکثر ۲۲ می‌شود. حالتی‌که ۵ نفر یا بیشتر، مقام اول را گرفته باشند، ممکن نیست (مقام‌های اول تا چهارم برای آن‌ها کفایت نمی‌کند).

به این ترتیب $c_۱\leqslant ۲۴$. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مثالی برای $c_۱=۲۴$ ساخت.

فرض‌کنیم، داوران، به هر یك از سه هنرمند بهتر مقام‌های

۴، ۴، ۴، ۳، ۳، ۳، ۱، ۱، ۱

به‌هریك از سه هنرمند بعدی مقام‌های

۶، ۶، ۶، ۵، ۵، ۵، ۲، ۲، ۲

و به بقیه مقام‌های دلخواهی بدهند. در این صورت ردیفی به دست می‌آید که در آن $c_۱=۲۴$.

۱۰۹. برای هر m $(۱\leqslant m\leqslant n)$، بین m زوج (a_k, b_k) $(۱\leqslant k\leqslant m)$، یکی‌از نابرابری‌های $a_k\geqslant b_k$ یا $b_k\geqslant a_k$، دست‌کم برای $\frac{m}{۲}$ زوج برقرار است.

مثلاً فرض کنید $b_k\geqslant a_k$، دست‌کم در $\frac{m}{۲}$ زوج برقرار باشد. اگر b_i را، کوچکترین عدد از بین عددهای b_k بگیریم، آن وقت $b_i\leqslant\frac{۲}{m}$. به‌این ترتیب $a_i+b_i\leqslant ۲b_i\leqslant\frac{۴}{m}$ و چون $i\leqslant m$، بنابراین

$$a_m+b_m\leqslant a_i+b_i\leqslant\frac{۴}{m}$$

۱۱۰. حکم مساله رامی‌توان با استقرای روی n، تعداددانش‌آموزان، ثابت‌کرد. ولی دراین‌جا آن‌را براساس قضیهٔ زیر (که تقریباً روشن است) ثابت‌می‌کنیم: مجموع ۲^k حاصل‌ضرب $x_۱x_۲\dots x_k$، که در آن $(x_۱, x_۲, \dots, x_k)$ عبارتند از همهٔ انتخاب‌های ممکن از عددهای ۱+ و ۱−، برابر است با

صفر (برای اثبات کافی است، k برابری $0=(-1)+1$ را درهم ضرب و سمت چپ را به همهٔ روش‌های ممکن ضرب جمله‌ها منجر کنیم). به‌دانش‌آموزان، شماره‌های از ۱ تا n را می‌دهیم. برای هرفهرستی ازشماره‌های $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_k$ (دراین‌جا $k<n$)، مجموع وزن وزنه‌هایی‌را، که روی آن‌ها، این فهرست نوشته شده است، با $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ نشان می‌دهیم، در ضمن وزنه‌های یکی ازکفه‌ها را (که درابتدا سنگین‌تراست) بـا علامت مثبت و وزنه‌های کفهٔ دیگررا بـا علامت منفی درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت، حکم موردنظر به‌این‌صورت درمی‌آید: برای چندجمله‌ای به صورت

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n+a_{12}x_1x_2+$$

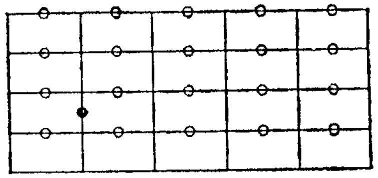
$$+a_{13}x_1x_3+\dots+a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n+a_{123}x_1x_2x_3+\dots$$

$$\dots+a_{n-2\,n-1\,n}x_{n-2}x_{n-1}x_n+\dots+a_{12\dots n}x_1x_2\dots x_n$$

که درآن، مجموع ضریب‌ها، مثبت‌است، همیشه می‌توان گروه x_1، x_2، ...، x_n را ازعددهای ۱+ و ۱− طوری درنظر گرفت که مقدار $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ منفی باشد [$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ اختلاف وزن‌کفه‌های ترازورا نشان می‌دهد، به شرطی‌که $x_i=-1$ برای‌آن دانش‌آموزانی‌کـه وزنهٔ خود را جا به‌جا کرده‌اند و $x_i=1$ برای بقیهٔ دانش‌آموزان]. این باقی‌می‌ماندکه توجه‌کنیم، مجموع‌مقدارهای $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ درهرانتخابی- حتی‌مجموع‌مقدارهای هـر یك از جمله‌هـای تشکیل دهندهٔ آن- بـرابـر صفر است؛ بنابـراین $f(1, 1, \dots, 1)>0$، دراین‌صورت باید انتخابی پیدا شودکه، برای‌آن، مقدار f منفی باشد (ضمیمهٔ ۹).

۱۱۱. پاسخ: حداقل تعداد پاسبان‌ها برابر $(m-1)(n-1)$ است.

اگرپاسبان‌ها به صورتی‌که مورد نظراست، مستقرشده باشند، آن وقت شبکهٔ خیابان‌ها، به k قطعه تقسیم می‌شودکه شامل مسیرهای بسته نیستند، در غیراین صورت، مسیربسته‌ای پیدا می‌شودکه، درطول آن، حتی یك پاسبان وجود ندارد. اگرقطعهٔ باقی‌ماندهٔ شبکه، شامل p چهارراه باشد، آن وقت در آن، درست $p-1$ پاره‌خط راست ازخیابان‌هـا وجود دارد (مسالهٔ ۸ را



شکل ۵۹

ببینید). چون روی هم به تعداد mn چهارراه داریم، بنابراین. تعداد پاره‌خط‌های راستی‌که، درآن‌هـا، پاسبان وجود ندارد، برابر $mn-k$ می‌شود. تعدادکل پاره‌خط‌های راست‌خیابان‌ها برابر $2mn-m-n$ است. بنابراین، تعداد پاره‌خط‌های راستی‌که اشغال می‌شود برابراست با

$$mn-m-n+k\geqslant(m-1)(n-1)$$

نمونهٔ استقرار $(m-1)(n-1)$ پاسبان. درشکل ۵۹ نشان داده شده است.

۱۱۲. از K به نقطهٔ O، مرکزدایرهٔ محاطی‌مثلث ABC وصل می‌کنیم وامتداد می‌دهیم، تادایره را در L قطع کند. وسط‌پاره‌خط راست AC را D و نقطهٔ برخورد AC با BL را E می‌نامیم. کافی است ثابت‌کنیم $ED=DK$ (دراین صورت، DO؛ خط راستی می‌شودکه وسط دوضلع مثلث EBK را به هم وصل‌کرده است).

توجه می‌کنیم: تجانسی به‌مرکز B که دایرهٔ محاطی مثلث ABC را به دایرهٔ محاطی خارجی‌آن (مماس بر AC وامتدادهای BA و BC) تبدیل می‌کند، نقطهٔ L را به نقطه E منجرخواهدکردکه، درضمن. نقطهٔ تماس ضلع AC با دایرهٔ محاطی خارجی خواهد بود. با توجه به برابر بودن طول‌هـای دو مماسی‌کـه ازیك نقطه بر دایره‌ای رسم می‌شوند، دو مجموع $AK+AE$ و $CK+CE$ باهم برابردرمی‌آیند (هرکدام‌برابربا پاره‌خطی‌ازخط‌های‌راست BA و BC هستند و، خود این دوپاره‌خط راست، با هم‌برابرند: دوپاره‌خط راستی‌که این نقطه‌های تماس دو دایرهٔ محاطی ومحاطی خارجی با خط‌های راست BA و BC قراردارند)، درنتیجه

$$AK+AE=CK+CE \quad \text{و} \quad AE=KC$$

۱۱۳. همهٔ برابری‌های

$$a_1 = 0,\ |a_2| = |a_1+1|,\ \dots,\ |a_{n+1}| = |a_n+1|$$

را مجذورو، سپس، با هم جمع می‌کنیم. بعد ازساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$a_{n+1}^2 = 2(a_1+a_2+\dots+a_n)+n \geqslant 0$$

وازآن جا $a_1+a_2+\dots+a_n \geqslant -\frac{n}{2}$.

راه‌حل دیگر را (با استقرا)، می‌توان با توجه به این نکته به دست آورد که: اگر زوج جمله‌های متوالی را $a_n \geqslant 0$ و $a_{n+1} = -a_n - 1$، با مقدارمتوسط $-\frac{1}{2}$ بگیریم، به‌دنبالهٔ قابل قبولی منجر می‌شود.

▽ $-\frac{n}{2}$، برای مجموع عددها در این دنباله، ارزیابی دقیقی است. به‌عنوان مثال، می‌توان هرانتخابی راکه به جملهٔ -1 ویا (وقتی‌که n عددی فرد باشد)، به صفرختم می‌شود، درنظر گرفت.

۱۱۴. $\widehat{ABC}=\beta$، $\widehat{ABD}=\beta_1$ و $\widehat{DBC}=\beta_2$ می‌گیریم. اگــر از قضیهٔ سینوس‌ها در دومثلث AOB و BOC استفاده‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AB}\cdot\frac{BC}{OC}\cdot\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

چون AB و BC گویا هستند. کافی است گویا بودن نسبت سینوس‌ها را ثابت کنیم.

به‌کمک قضیهٔ کسینوس‌ها و با توجه به گویا بودن طول ضلع‌ها وقطرها، نتیجه می‌شودکه $\cos\beta$، $\cos\beta_1$ و $\cos\beta_2$ عددهایی گویاهستند. به عنوان نمونه

$$\cos\beta = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

به این ترتیب، عدد $\sin\beta_1 \sin\beta_2$ هم گویا درمی‌آید، زیرا

$$\cos\beta = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2$$

ودرنتیجه، با توجه به برابری $\sin^2\beta_2 = 1-\cos^2\beta_2$، نسبت $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$ هم، عددی گویا می‌شود.

۱۱۵. روی خط راست BC، نقطهٔ C_1 را طوری انتخاب می‌کنیم کــه چهارضلعی ABC_1E متوازی‌الاضلاع باشد دراین‌صورت، مثلث‌های ABE، BEC و BEC_1، محیطی برابر پیدامی‌کنند. ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه دونقطهٔ C و C_1 برهم منطبق‌اند. بنابراین $BC=AE$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود $BC=ED$.

۱۱۶. حداکثرسرعت گرگ را v می‌گیریم. ازنقطه‌ای‌که گرگ درآن جا ایستاده است، دوخط راست موازی با قطرهای مربع رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌های راست را با محیط مربع $C_4C_3C_2C_1$ می‌نامیم. چون‌سرعت جابه‌جایی‌هریك ازنقطه‌های C_1، C_2، C_3 و C_4، از مقدار $v\sqrt{2} < \frac{3}{2}v$ بیشتر نیست، بنا براین، سگ‌ها‌می‌توانند درهرلحظه دراین چهار نقطه باشند ودرنتیجه، مانع فرار گرگ بشوند.

۱۱۷. $\overline{abcd}$ را چهاررقم آخر می‌گیریم. دردنباله، به ناچار باید ردیف $abcd0$ وردیف $abcd1$ وجود داشته باشد (درغیراین‌صورت، با اضافه‌کردن ۰ یا ۱، به انتهای آن، ویژگی a) برقرار می‌شودکــه درنتیجه ویژگی b) را نقض می‌کند). بنا براین، در دنباله، سه باربــه ردیف $abcd$ برمی‌خوریم و چون، ۰ یا ۱ نمی‌تواند بیش ازیکبار درجلوآن قرارگیرد، بنا براین، جلویکی ازاین ردیف‌ها، هیچ رقمی وجود ندارد.

▽ برای هر n (ودرحالت خاص، برای $n=5$)، می‌توان 2^n رقم ۰ و ۱ را روی محیط دایره طوری قراردادکــه، ضمن حرکت درجهت عکس عقربه‌های ساعت، به هر«واژهٔ» به طول n از ۰ و ۱، درست یکبار برخوردکنیم. همین حکم دربارهٔ حرف‌های الفبا هم، برای $k \geqslant 2$ حرف، درست است (دراین‌صورت، تعداد واژه‌های به طول n، برابر k^n است).

۱۱۸. اگردونابرابری اول را درهم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$(a+b)^2 < ab+cd$$

ولی $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ و بنابراین $ab+cd \geqslant 4ab$ یعنی $cd \geqslant 3ab$.

اگردونابرابری دوم وسوم را درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$ab(ab+cd) > (a+b)^2 cd \geqslant 4abcd$$

ازآنجا $ab+cd > 4cd$، یعنی $ab > 3cd$.

به این ترتیب، به‌طور هم‌زمان، به‌دست می‌آید:

$$ab > 3cd \text{ و } cd > 3ab$$

که ممکن نیست.

۱۱۹. پاسخ: $a=5$.

فرض کنید $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ که در آن a، b و c عددهایی درست‌اند $(a>0)$ و $0<x_1<1$ و $0<x_2<1$.

$f(0)$ و $f(1)$، عددهایی درست ومثبت‌اند، بنابراین $f(0)f(1) \geqslant 1$، یعنی $a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \geqslant 1$.

اکنون توجه می‌کنیم که همیشه $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$، درضمن برابری تنها برای $x=\frac{1}{2}$ ممکن است. چون عددهای x_1 و x_2 مختلف‌اند و $x_1(1-x_1)$ و $x_2(1-x_2)$ عددهایی مثبت، بنابراین

$$x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) < \frac{1}{16}$$

بنابراین $a^2 > 16$ و $a > 4$.

به ازای $a=5$، معادلهٔ درجه دوم $5x^2-5x+1=0$ به‌دست می‌آید که دارای دوریشهٔ مختلف در بازهٔ $[0, 1]$ است.

۱۲۰. حکم مساله را می‌توان با استقرا حل کرد.

حکم به ازای $n=1$ درست است: $1=\frac{1}{1\times 1}$؛ برای عبور از $n-1$ به n، باید همهٔ کسرهای $\frac{1}{pq}$ را، که در آن‌ها p و q نسبت به‌هم اول‌اند، $p<q$ و $p+q=n$، حذف کنیم و، درعوض، همهٔ کسرهای به صورت $\frac{1}{pn}$ را، که در آن $p<n$ و p و n نسبت به‌هم اول‌اند، اضافه کنیم.

فرض کنید $\frac{1}{pq}$ یکی از کسرهای حذف شده باشد. چون

$$\frac{1}{pq}=\frac{1}{p(n-p)}=\frac{1}{pn}+\frac{1}{(n-p)n}$$

بنابراین، حذف آن ازمجموع، به وسیلهٔ دو کسر جدید $\frac{1}{pn}$ و $\frac{1}{(n-p)n}$ (که با شرط، سازگارند) جبران می‌شود. به این ترتیب، با عبور از $n-1$ به n، مقدار مجموع تغییر نمی‌کند.

۱۲۱. از دستگاه نقطه‌های مفروض، دونقطه را انتخاب می‌کنیم که فاصلهٔ بین آن‌ها، بیشترین مقدار باشد: این نقطه‌ها را A و B می‌نامیم.

ثابت می‌کنیم، هریک از زاویه‌های XAY (یا XBY)، که در آن X و Y دو نقطه از نقطه‌های مفروض‌اند، از ۱۲۰ درجه کوچکتر است. درواقع، ضلع AB در هریک ازمثلث‌های AXB و AYB، بزرگترین ضلع است، بنابراین

$$\widehat{AXB} > 120^\circ \text{ و } \widehat{AYB} > 120$$

یعنی $\widehat{XAB} < 60^\circ$ و $\widehat{YAB} < 60^\circ$. وچون درهرکنج سه وجهی، هرزاویهٔ مسطح کوچکتر ازمجموع دوزاویهٔ دیگراست، بنابراین

$$\widehat{XAY} < \widehat{XAB} + \widehat{YAB} < 120^\circ$$

به این ترتیب، باید شماره‌گذاری را از A آغاز و به B ختم کرد. یادآوری می‌کنیم که، همهٔ فاصله‌های بین نقطه‌های مفروض تا نقطهٔ A، با هم

فرق دارند. درواقع، اگرداشته باشیم: $AX=AY$، آن وقت مثلث AXY متساوی‌الساقین می‌شود و، درضمن، $\widehat{XAY}>120^\circ$؛ و روشن است که چنین وضعی ممکن نیست. نقطه‌های مفروض را شماره‌گذاری می‌کنیم: $A_1=A$، A_2 نزدیکترین نقطهٔ دستگاه به A، A_3 نزدیکترین نقطه به A از بین بقیهٔ نقطه‌ها، ...، A_k نزدیکترین نقطه به A که هنوزشماره‌ای نگرفته‌اند، ...، $A_n=B$. ثابت می‌کنیم، این شماره‌گذاری، با شرط مساله سازگاراست.

چون $\widehat{A_1A_iA_n}>120^\circ$ (به ازای $1<i<k\leqslant n$)، بنابراین کافی است ثابت کنیم $\widehat{A_iA_jA_k}>120^\circ$ $(1<i<j<k<n)$.

چون در دستگاه نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_k، نقطه‌های A_1 و A_k بیشترین فاصله را نسبت به هم دارند، بنابراین $\widehat{A_iA_kA_j}<120^\circ$ (این مطلب را، در ابتدای حل، ثابت کردیم).

ثابت می‌کنیم $\widehat{A_kA_iA_j}<120^\circ$، درواقع، چون $\widehat{A_1A_iA_j}>120^\circ$ و $\widehat{A_1A_iA_k}>120^\circ$، اگـرفرض کنیم $\widehat{A_kA_iA_j}\geqslant 120^\circ$، آن وقت مجموع زاویه‌های مسطحه در کنج سه وجهی به‌رأس A_i از ۳۶۰ درجه بیشترمی‌شود.

به این ترتیب $\widehat{A_iA_jA_k}>120^\circ$ به‌ازای هر $1\leqslant i<j<k\leqslant n$.

▽ دراین مساله، درواقع ثابت کردیم که نسبت «$\widehat{A_iA_jA_k}>120^\circ$» همان ویژگی‌هایی را داردکه نسبت «A_j بین A_i و A_k قراردارد»(برای نقطه‌های واقعی بـرخط راست)؛ یعنی این نسبت، امـکان «مرتب کردن» یك مجموعه مفروض را به دست می‌دهد. مقدار ۱۲۰ درجه را نمی‌توان بـا مقدار کمتری عوض کرد.

۱۲۲. پاسخ: ۱۰۸، ۱۳۵، ۱۸۰، ۱۱۷.

x_1، x_2، x_3، x_4 را عددهای مجهول، S را مجموع آن‌ها و a را رقم سمت چپ هریك ازآن‌ها فرض می‌کنیم. روشن است که

$$100a\leqslant x_i<100(a+1)\ \ (i=1, 2, 3, 4)$$

با استفاده ازاین نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$x_i+300a\leqslant S<x_i+300(a+1)$$

ازآن‌جا

$$1+\frac{300a}{x_i}\leqslant\frac{S}{x_i}<1+\frac{300(a+1)}{x_i}$$

بنابراین

$$1+\frac{3a}{a+1}\leqslant\frac{S}{x_i}<4+\frac{3}{a}$$

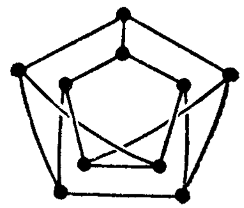
به‌ازای $a=1$ به‌نابرابری $2/5\leqslant\frac{S}{x_i}<7$ و به‌ازای $a\geqslant 2$ نابرابری $3<\frac{S}{x_i}<5/5$ به دست می‌آید. تحقیق می‌کنیم.

چون $\frac{S}{x_i}$ به‌ازای سه تا ازعددها، عددی درست است، بنابراین حالت $a\geqslant 2$ ممکن نیست (بین ۳ و ۵/۵ تنها دوعدد درست وجود دارد). به‌این ترتیب $a=1$ وخارج قسمت‌های درست را باید بین عددهـای ۳، ۴، ۵، ۶ جست وجوکرد. ولی ۳ و ۶ نمی‌توانند بـاهم، دوتا ازخارج‌قسمت‌ها باشند، زیرا نسبت هردوعدد بین ۱۰۰ و ۱۹۹ از ۲ کمتراست. دوحالت باقی می‌ماند: ۱) سه خارج قسمت ۳ و ۴ و ۵ هستند؛ ۲) سه خارج قسمت ۴ و ۵ و ۶ هستند. درهردوحالت، S بر ۶۰ بخش‌پذیراست: $S=60k$. درحالت اول، عددهای مجهول به‌صورت $12k$، $15k$، $20k$ و $13k$ درمی‌آیند.

تنها به‌ازای $k=9$، رقم اول همهٔ عددها برابرمی‌شوند که، ازآن‌جا، جواب به‌دست می‌آید. درحالت دوم، گروه عددهـای $10k$، $12k$، $15k$، $23k$، به‌ازای هیچ مقداری از k، با شرطهـای مساله سازگارنیستند. زیرا نسبت دوعدد $23k$ و $10k$ از ۲ بزرگتراست.

۱۲۳. پاسخ: ۱۰ شهر.

ازهرشهر A می‌توان حداکثربه سه شهر پروازکرد و، ازهرکدام ازسه شهراخیر، به‌جز A، تنها به‌دوشهرمی‌توان با هواپیما پروازکرد. به‌این ترتیب، تعداد شهرها، نمی‌توانند از $1+3+3\times 2$، یعنی ۱۰ بیشترباشد.



شکل ۶۰

درشکل ۶۰ نشان دادیم که چگونه می‌توان درکشوری که ۱۰ شهردارد، این خطهای هوائی را برقرار کرد.

▽ گراف شکل ۶۰، اغلب به عنوان نمونه مورد استفاده قرارمی‌گیرد وبه نام «گراف پترسن» معروف است.

۱۲۴. a) $ABCDE$ را پنج ضلعی محدب مفروض به ضلع a، و K راوسط قطر بزرگتر آن AD می‌گیریم؛ دراین‌صورت $\widehat{AKE}=\widehat{EKD}=90^\circ$.
چون $AC \leqslant AD$، بنابراین $\widehat{BAC}>\widehat{DAE}$ ودرنتیجه $\widehat{BAK}>\widehat{KAE}$. از این‌جا معلوم می‌شودکه، نقطه‌های A و B، دریك طرف خط راست EK قرار دارند. به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شودکه نقطه‌های C و D هم دریك طرف خط EK واقع‌اند. ازاین‌جا، بلافاصله، به دست می‌آید: $\widehat{BKA}<90^\circ$ و $\widehat{CKD}<90^\circ$.

فرض می‌کنیم $\widehat{BKC}\geqslant 90^\circ$، دراین صورت $BK<a$ و $CK<a$، و ازآن‌جاکه $AK<a$ و $KD<a$، بنابراین $\widehat{AKB}>60^\circ$ و $\widehat{CKD}>60^\circ$ (ضلع بزرگ‌ترمثلث، روبه‌روبه زاویهٔ بزرگ‌ترآن‌است)؛ ولی این‌ممکن‌نیست، زیرا

$$\widehat{AKB}+\widehat{BKC}+\widehat{CKD}=180^\circ$$

ودرنتیجه $\widehat{BKC}<90^\circ$. ثابت کردیم که نقطهٔ K، باشرطهای مساله سازگار است.

b) اگرروی امتداد پاره خط راست EK، نقطهٔ M را خیلی نزدیك به نقطهٔ K انتخاب‌کنیم،آن وقت، همهٔ زاویه‌های AMB، BMC، CMD،

DME و EMA، حاده می‌شوند، بنابراین، نقطهٔ M نمی‌تواند به هیچ‌کدام ازنیم دایره‌های به قطرضلع‌های پنج ضلعی متعلق باشد.

۱۲۵. اگرنفراول، عدد ۱− را جلو x (با توان واحد) قراردهد ودر حرکت بعدی خود، در جای خالی باقی مانده، قرینه عددی را بگذاردکه دومی درنوبت خود انتخاب‌کرده است، آن وقت به چند جمله‌ای

$$x^3-ax^2-x+a=(x^2-1)(x-a)$$

می‌رسد؛ و ریشه‌های این چندجمله‌ای، ۱ و ۱− و a، عددهایی درست‌اند.

۱۲۶. پاسخ: ۹۰ بازی.

فرض‌کنیم، بین هرسه تیم، دو تیم وجود داشته باشدکه بازی خود را انجام داده‌اند. تیم A را درنظرمی‌گیریم که‌کمترین تعداد بازی‌ها را انجام داده باشد و، تعداد این بازی‌ها را، k می‌گیریم. هر یك از k تیمی‌که با A بازی کرده‌اند، وخود تیم A، دست‌کم k بازی داشته‌اند. از $(19-k)$ تیمی که با A بازی نکرده‌اند، هر کدام با هر یك از $(18-k)$ تیم باقی‌مانده بازی داشته‌اند، در غیر این‌صورت، سه تیم پیدا می‌شود که، در بین آن‌ها، هیچ دوتیمی با هم بازی نکرده‌اند. به‌این ترتیب، دو برابر همهٔ بازی‌هایی که باید تیم‌ها انجام داده باشند، دست کم برابر است با

$$k^2+k+(19-k)(18-k)=2k^2-36k+18\times 19=$$
$$=2(k-9)^2+180\geqslant 180$$

نمونه حالتی که، طبق شرطهای مساله، درست ۹۰ بازی انجام شده باشد، به این ترتیب به دست می‌آیدکه ۲۰ تیم را به دو گروه ۱۰ تیمی تقسیم کنیم، تیم‌های هرگروه، همه با هم بازی کرده‌اند، ولی هیچ تیمی از گروه اول با هیچ تیمی از گروه دوم بازی نکرده است.

▽ اگر هر تیم را با یك نقطه نشان دهیم و هر دو تیمی راکه باهم بازی نکرده‌اند، به وسیلهٔ پاره‌خط راستی به هم وصل کنیم، یك گراف به دست می‌آیدکه، با رعایت شرطهای مساله، گرافی بدون مثلث خواهد بود. می‌توان ثابت کردکه، در چنین گرافی، اگر n رأس داشته باشد، حداکثر

$\left[\frac{n^2}{4}\right]$ یال وجود دارد.

راه‌حلی‌که در مساله انتخاب کرده‌ایم، شبیه اثبات «پیش قضیهٔ مربوط به صلیب» است‌که در حل ۱۵۶ و ارزیابی ۲۴۶، C) آورده‌ایم.

۱۲۷. نابرابری مساله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}>1$$

و یا

$$n\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{\pi}{n}\right)>1-\cos\frac{\pi}{n+1}$$

یعنی

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}$$

و نابرابری اخیر درست است، زیرا

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin\frac{2\pi n}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{n+1}>\sin\frac{\pi}{2(n+1)},$$

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\geqslant\sin\frac{n\pi}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

در این‌جا، از نابرابری $|n\sin\alpha|\geqslant|\sin n\alpha|$ استفاده کرده‌ایم که به سادگی، و به کمک استقرا، ثابت می‌شود.

۱۲۸. $a_{i_1}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$ می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم a_{i_2} بزرگترین عدد در مخرج کسر با صورت a_{i_1}؛ a_{i_3} بزرگترین عـدد در مخرج کسر با صورت a_{i_2}؛ و به طور کلی، a_{i_k} بزرگترین عدد در مخرج کسر با صورت $a_{i_{k-1}}$ باشد.

روشن است‌که، سر آخر، به $a_{i_1}:a_{i_{r+1}}=a_{i_r}$ می‌رسیم.

اگر شماره‌های ۱، ۲، ...، n را روی محیط دایره‌ای قرار دهیم، آن

وقت i_{k+1} و i_k (همچنین i_r و i_1) یا در مجاورت هم و یا یك در میان قرار می‌گیرند، یعنی $r\geqslant\frac{n}{2}$.

مجموع مفروض، بزرگتر است از

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\dots+\frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}+\dots+\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right)=\frac{1}{2}S$$

اگر از نابرابری واسطه‌ها استفاده کنیم (ضمیمهٔ ۸)، آن وقت

$$\frac{S}{r}\geqslant\sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\cdot\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}\cdots\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}}=1$$

یعنی S از r کمتر نیست. بنابراین، مجموع مفروض، از $\frac{n}{4}$ بزرگتر است.

▽ می‌توان نابرابری قوی‌تری را ثابت کرد:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2}\qquad(*)$$

(این فرضیه را، شاپیرو، ریاضی‌دان امریکایی، در سال ۱۹۵۴ مطرح کرد). در واقع، این نابرابری به تدریج برای عددهای فرد $n\leqslant 11$ و عددهای زوج $n\leqslant 12$ ثابت شد، ولی برای عددهای زوج $n\geqslant 14$ و عددهای فرد $n\geqslant 27$ نادرست از آب درنیامد (ابتدا، مثال‌های نقض‌کنندهٔ عددهای بزرگ n به‌دست آمد). ارزیابی‌دقیق $\gamma_n\frac{n}{2}$، که باید در $(*)$ به جای $\frac{n}{2}$ قـرار داد، برای هر n، نامعلوم بود، ولی و. گ. درین‌فلد، یکی از شرکت‌کنندگان موفق درالمپیاد، درسال ۱۹۶۹ موفق شد به نتیجهٔ جالبی برسد: او بهترین ارزیابی را بـرای $\gamma\cdot\frac{n}{2}$ پیدا کـرد، که برای هرمقدار n درست است. این عدد، $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$، عبارت است از عرض نقطهٔ برخورد مماس مشترك نمودار

تابع‌های $y=e^{-x}$ و $y=\frac{2}{e^{\frac{x}{2}}+e^{x}}$ با محور Oy: $\gamma\approx 0/989$.

۱۲۹. فرض می‌کنیم، مساله حل شده است. چون خط راست CY بر خط راست AX عمود است، بنابراین $BX\|CY$. K را نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های راست AB و XY می‌گیریم. روشن است که دو مثلث KBX و CKY برابرند. درنتیجه $CK=KB$.

برای رسم، کافی است از وسط پاره‌خط راست CB، عمودی بر خط راست AB رسم کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ X و Y قطع کند.

۱۳۰. سه‌عدد را x، y و $\frac{1}{xy}$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

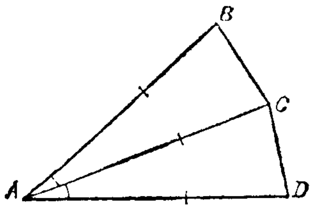
$$x+y+\frac{1}{xy}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$$

این نابرابری را، بعد از تبدیل‌های ساده، می‌توان این طور نوشت:

$$(x-1)(y-1)\left(\frac{1}{xy}-1\right)>0$$

۱۳۱. پاسخ: حداکثر دو ضلع. نمونه‌ای ازچندضلعی راکه، دو ضلع آن برابر با قطر بزرگتر است، در شکل ۶۱ ببینید.

فرض می‌کنیم، تعداد چنین ضلع‌هایی، بیشتر از ۲ باشد. دو ضلع AB و CD از این ضلع‌ها را، که رأس مشترکی ندارند، در نظر می‌گیریم (این انتخاب ممکن است، زیرا وقتی چندضلعی دارای قطر باشد، مسلماً مثلث نیست). در این صورت، دست‌کم یکی از قطرهای AC یا BC، طولی بزرگتر از



شکل ۶۱

طول ضلع AB دارد. اگر این قطرها، در نقطهٔ K یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت

$$AC+BD=AK+KC+BK+KD>AB+CD=2AB$$

۱۳۲. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. دو عدد را زیر هم می‌نویسیم و آن‌ها را، به صورت ستونی، با هم جمع می‌کنیم. چون آخرین رقم مجموع، عددی فرد است، بنابراین، ضمن جمع نخستین رقم‌ها، مجموعی فرد به دست می‌آید. بنابراین، از مرتبهٔ قبل، واحدی بـه این مرتبه، ضمن جمع، منتقل نشده است. و این به معنای آن است کـه، مجموع رقم‌ها در ستون دوم و، همچنین، مجموع رقم‌ها درستون ماقبل آخر، از ۱۰ کمتر است. توجه می‌کنیم که ازستون دوم به مرتبهٔ سوم هم، واحدی منتقل نشده است، زیرا این وضع تنها وقتی پیش می‌آیدکه مجموع رقم‌های مرتبهٔ دوم برابر ۹ باشد ومجموع رقم‌های‌مرتبهٔ اول بزرگتر از ۱۰؛ ولی دراین صورت، درمرتبهٔ دوم مجموع، رقم ۰ به دست می‌آید.

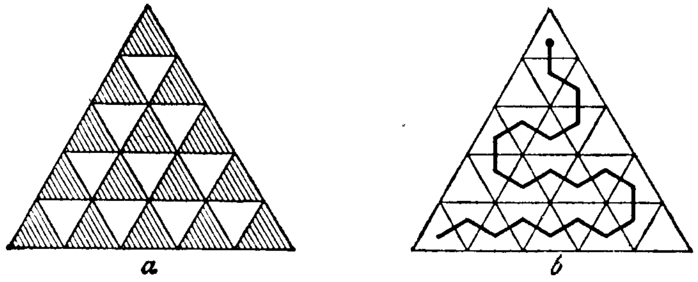
اکنون، دورقم آخرودورقم اول را، ازعدد مفروض حذف می‌کنیم و ازهمین‌استدلال، برای عدد۱۳ رقمی، سپس۹ رقمی وبالاخره ۵ رقمی‌تکرار می‌کنیم، به این نتیجه می‌رسیم کـه، به مرتبهٔ وسط مجموع، واحدی ازمرتبهٔ قبل منتقل نشده است. ولی رقم‌های وسط دوجملهٔ جمع، با هم برابرند ورقم وسط مجموع، عددی زوج می‌شود.

همان طورکـه ازحل مساله دیده می‌شود، این‌حکم برای هرعددی‌که $4k+1$ رقم داشته باشد، درست است. مثال‌هـای ساده‌ای (مثل ۲۱+۱۲، ۶۰۵+۵۰۶، ...) نشان‌می‌دهندکه حکم، برای عددهایی‌که باتعداد رقم‌های دیگری باشند، درست نیست.

۱۳۳. b) مثلث‌ها را به دورنگ درمی‌آوریم، شبیه شکل۶۲،a.

تعداد مثلث‌های سیاه، به‌اندازهٔ k، ازتعداد مثلث‌های سفید بیشتراست.

بنابراین تعداد مثلث‌های سفید برابر $\frac{1}{2}(k^{2}-k)$ وتعداد مثلث‌های‌سیاه‌برابر



شکل ۶۲

$\frac{1}{2}(k^2+k)$ است. در «زنجیره»، رنگ مثلث‌ها، یك درمیان سیاه و یك در میان سفید است. بنابراین تعداد مثلث‌های سیاه «زنجیره» نمی‌تواند از $\frac{1}{2}(k^2-k)+1$ بیشتر باشد. درنتیجه، تعداد کل مثلث‌های «زنجیره»، از

$$\frac{1}{2}(k^2-k)+\frac{1}{2}(k^2-k)+1=k^2-k+1$$

بیشتر نیست. درشکل ۶۲، b نمونهٔ «زنجیره‌ای» داده شده است که، در آن، تعداد مثلث‌ها، درست برابر k^2-k+1 است.

۱۳۴. طول پاره‌خط‌های راست مفروض را $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم، با هیچ سه پاره خط راستی ازاین پنج پاره‌خط، نتوان مثلثی با زاویه‌های حاده ساخت. درهرمثلثی که یکی اززاویه‌های آن حاده نباشد، مجذورضلع بزرگتر، ازمجموع مجذورهای دوضلع دیگربزرگتر ویا با آن برابراست. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$c^2\geqslant a^2+b^2,\ d^2\geqslant c^2+b^2,\ e^2\geqslant d^2+c^2$$

که اگر آن‌ها را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$e^2\geqslant a^2+2b^2+c^2\geqslant a^2+2ab+b^2$$

یعنی $e\geqslant a+b$، یعنی ازپاره‌خط‌های راست e، a و b نمی‌توان مثلثی تشکیل داد.

۱۳۵. راه حل اول. فرض می‌کنیم $\widehat{BAC}<45^\circ$، دراین صورت

$$\widehat{ACH}>45^\circ,\ \widehat{BCH}<45^\circ;\ \widehat{CBA}>45^\circ,\ BC<AC$$

بنابراین، میانهٔ CP دردرون مثلث ACH قرارمی‌گیرد و با میانهٔ BM درنقطهٔ K متعلق به پاره خط راست OM برخورد دارد (O را نقطهٔ برخورد BM، AD و CH گرفته‌ایم). ازاین جا، با توجه به $PK=\frac{1}{2}KC$

$$OH:OC<\frac{1}{2}$$

ولی بنابه‌ویژگی نیمساز زاویهٔ مثلث

$$OH:OC=AH:AC$$

یعنی $AH<\frac{1}{2}AC$ و، بنابراین $\widehat{ACH}<30^\circ$. تناقض.

راه حل دوم. ثابت می‌کنیم، اگرداشته باشیم: $\widehat{BAC}<45^\circ$، آن‌وقت $\widehat{ACB}>90^\circ$. نقطهٔ B_1 را روی خط راست AB طوری انتخاب می‌کنیم که $HB_1=AH$. نیمساززاویهٔ AB_1C، که آن را B_1F می‌نامیم، ازنقطهٔ O می‌گذرد (در این نقطه، دونیمساز دیگر از زاویه‌های مثلث AB_1C به هم رسیده‌اند). بنابه‌ویژگی نیمساز

$$AF:FC=AB_1:B_1C$$

ولی $AB_1:B_1C>1$، زیرا $\widehat{B_1AC}<45^\circ$. به این ترتیب، نقطهٔ B_1 بین نقطه‌های A و B قرارمی‌گیرد و، بنابراین $\widehat{B_1CA}>90^\circ$.

۱۳۶. همهٔ زوج رقم‌های ممکن را، که درعددهای مختلف دریك مرتبه واقع‌اند، در نظرمی‌گیریم، چون زوج عددها ۱۰، بنابراین همهٔ این گونه زوج‌ها برابر $10n$ است. درضمن، زوج رقم‌های مختلف، یعنی زوج (۱،۲) درهرردیف از۴ کمتر واز۶ بیشتر نیست، به‌نحوی که، از بین $10n$ زوج انتخابی، تعداد کل زوج‌های (۱، ۲)، بین $4n$ و $6n$ قراردارد.

ازطرف دیگر، چون هردوعدد، در m مرتبهٔ خود برهم منطبق‌اند، بنابراین

هردو عـدد، $n-m$ زوج (۲ ، ۱) می‌دهد. بـه این ترتیب، تعداد کل چنین زوج‌هایی برابر است با $10(n-m)$ درنتیجه

$$4n \leqslant 10(n-m) \leqslant 6n \Rightarrow \frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}$$

۱۳۷. ثابت می‌کنیم، ازبین هر ۱۹۹ عدد درست، می‌توان ۱۰۰ عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد. درضمن تنها ازاین دو گزارهٔ درست استفاده می‌کنیم: بین‌هرسه عدد، یادوعدد زوج وجود دارد ویا دوعدد فرد (که روشن است)؛ ازاین هر ۹ عدد درست، می‌توان ۵ عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

گزارهٔ کلی زیررا P_m می‌نامیم: ازبین هر $2m-1$ عدد درست می‌توان m عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها بر m بخش‌پذیر باشد (به زبان‌دیگر، می‌توان mعدد انتخاب کرد که، واسطهٔ حسابی آن‌ها، عددی‌درست باشد). ابتدا، یك پیش قضیه ثابت می‌کنیم.

پیش قضیهٔ۱. اگر گزاره‌های P_k و P_m درست باشند، گزارهٔ P_{km} هم درست است.

فرض کنید $2km-1$ عـدد درست مفروض باشد. از این عددها، با توجه به P_m، می‌توان m عدد را، با واسطهٔ حسابی درست، انتخاب کرد؛ از بقیهٔ $2km-m-1$ عدد، دوباره m عدد ازاین‌گونه جدا می‌کنیم؛ سپس‌از بقیه $2km-2m-1$ عدد، بازهم یك‌گروه m عددی با همین ویژگی درنظر می‌گیریم و غیره. وقتی‌که این روند انتخاب را $2k-1$ بارتکرارکنیم، به تعداد $2km-(2k-1)m-1=m-1$ عدد باقی می‌ماند، یعنی‌می‌توانیم $2k-1$ باراز P_m استفاده‌کنیم. اکنون واسطه‌هـای حسابی را در $2k-1$ گروه انتخابی پیدا می‌کنیم (این واسطه‌ها، عددهایی درست‌اند). ازبین این واسطه‌ها، با توجه به p_k، می‌توان k عدد انتخاب‌کرد، به نحوی‌که مجموع آن‌ها بر k بخش‌پذیرباشد. دراین صورت روشن است‌که، مجموع km عدد ازعددهای اولیه‌که در k گروه وارد شده‌اند، بر km بخش‌پذیرمی‌شود، پیش‌قضیهٔ۱ ثابت شد.

چون $100=2\times2\times5\times5$، با توجه به P_2 و P_5 وسه باراستفاده ازپیش قضیه۱، درستی P_{100} روشن می‌شود. تنها این مانده است‌که P_5 را مورد آزمایش قراردهیم.

باقی‌مانده‌های تقسیم ۹ عدد مفروض بر ۵ را r_1، r_2، ...، r_9 می‌نامیم:

$$0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots \leqslant r_9 \leqslant 4$$

حالتی‌که بین r_iها $(1 \leqslant i \leqslant 9)$، ۵ عدد برابروجود داشته باشد، یا حالتی که بین آن‌ها، سه عدد برابر پیدا نشود (وبنابراین، به همهٔ باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۲، ۳، و ۴ برخوردکنیم)، روشن است. دوحالت می‌ماند: وقتی‌که باقی‌مانده‌ای دربین r_iها، ۳ بار ویا ۴ بارتکرارشده باشد. درضمن می‌توان این باقی‌مانده را $r=0$ گرفت؛

اگر $r \neq 0$، می‌توان به هر ۹ عدد، $5-r$ را اضافه‌کرد (بااین‌اضافه‌کردن، شرط «مجموع ۵ عدد باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد»، تغییر نمی‌کند).

اگرپیش قضیهٔ مفید زیررا درنظر داشته باشیم، می‌توانیم خودرا از آزمایش حالت‌های مختلف خلاص‌کنیم.

پیش قضیه۲. ازهر q عدد درست، می‌توان چند عدد انتخاب‌کرد، به نحوی‌که مجموع آن‌ها بر q بخش‌پذیر باشد.

(برای‌اثبات پیش قضیه دربارهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_q، کافی‌است q عدد زیررا درنظربگیریم:

$$a_1;\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \dots,\ a_1+a_2+\dots+a_q$$

این عددها، درتقسیم بر q، یا به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند ویا دست‌کم دوتا ازآن‌ها، باقی مانده‌های برابر پیدا می‌کنندکه، دراین صورت، تفاضل آن‌ها بر q بخش‌پذیرمی‌شود.)

بنابرپیش قضیهٔ۲، ازبین ۵ باقی‌ماندهٔ r_i که مخالف صفرند، می‌توان چند عدد (از۲ تا ۵) انتخاب‌کرد، به‌نحوی‌که مجموع آن‌ها بر ۵ بخش‌پذیر باشدو، سپس، به‌تعدادی‌که‌لازم‌است، ازباقی‌مانده‌های‌صفربه آن‌هااضافه‌کرد.

▽ می‌توان ثابت‌کرد، گزارهٔ p_n، برای هرعدد طبیعی n درست‌است

(با توجه به‌پیش‌قضیهٔ۱، کافی است آن را برای عددهای اول n ثابت کنیم).
بررسی‌مسألهٔ زیرمی‌تواند جالب باشد: حداقل‌عدد طبیعی $F_d(n)$ چقدر باشد تا ازهر $F_d(n)$ بردار با مختصات درست بتوان چند بردارانتخاب کرد، به نحوی که درمجموع بردارها، همهٔمختصات، بر n بخش‌پذیر باشند؟ (دراین‌جا، n عددی‌طبیعی و d، تعداد بعدهاست: $d=۲$ برای بردارهای واقع برصفحه، $d=۳$ برای بردارهای واقع درفضا.)

۱۳۸. راه حل اول. P را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با ضلع BC و PQ را قطردایـرهٔ محاطی مثلث می‌گیریم. در حل مسالهٔ ۱۱۲ ثابت کردیم $AQ \| MO$، بنا بـراین $AEOQ$ متوازی‌الاضـلاع است، بـه نحـوی کـه $OQ=AE=r$.

راه حل‌دوم. a، b و c را، به‌ترتیب، طول ضلع‌های مقابل به راس‌های A، B و C ازمثلث می‌گیریم. می‌توان فرض کرد $b>c$. ازنقطهٔ O عمود OP را بر BC رسم می‌کنیم. دراین صورت

$$MC=\frac{a}{۲};\ PC=\frac{a+b-c}{۲};\ HC=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲a};$$

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{HC-MC}{PC-MC}=\frac{۲HC-a}{b-a}=$$

$$=\frac{a^۲+b^۲-c^۲-a^۲}{a(b-c)}=\frac{b+c}{a};$$

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=۱$$

که ازآن‌جا $AE=r$.

۱۳۹. اگرعدد k بصورت $k=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}$ وعدد t شامل $m>n$ رقم برابر۹ باشد: $t=\underbrace{۹۹\ldots۹}_{m}=۱۰^m-۱$، آن وقت

$$kt=\overline{a_n a_{n-1}\ldots(a_0-۱)\underbrace{۹۹\ldots۹(۹-a_n)(۹-a_{n-1})\ldots(۹-a_1)(۱۰-a_0)}_{m\ \text{رقم}}}$$

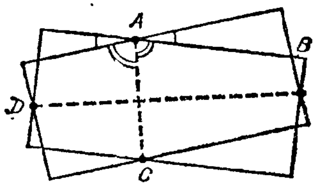
که مجموع رقم‌های آن با مجموع رقم‌های عدد t یکی است: این مجموع برابراست با $۹m$.

۱۴۰. a و b را طول ضلع‌های هریك ازمستطیل‌ها می‌گیریم. اگر محیط‌هـای دومستطیل درهشت نقطه یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت روی‌هرضلع هرمستطیل، دونقطهٔ برخورد بادوضلع مجاورمستطیل‌دیگروجود دارد. اگـرروی ضلعی، کمترازدونقطهٔ برخورد وجود داشته باشد، آن وقت روی هـم، کمترازهشت نقطهٔ برخورد به‌دست می‌آید. بنابراین، ضلع یکی ازمستطیل‌ها، نمی‌تواند دوضلع موازی را دردیگری قطع کند.

A و C را نقطه‌های‌برخورد ضلع‌های به طول a، B و D را نقطه‌های برخورد ضلع‌های به طول b می‌گیریم (شکل۶۳). به سادگی ثابت می‌شود که پاره‌خط‌های راست AC و BD، نیمسازهای بین ضلع‌هایی هستندکه، به ترتیب، از A و C، و B و D گذاشته‌اند. بنابراین $AC \perp BD$. مساحت S، از چهارضلعی $ABCD$، برابراست با $AC \cdot BD$ وچون $AC \geqslant b$ و $BD \geqslant a$، بنابراین $S \geqslant \frac{۱}{۲}ab$.

۱۴۱. ثابت می‌کنیم، هرعددی‌ازاین گونه، بر ۱۱۱۱۱ بخش‌پذیراست و، بنابراین، نمی‌تواند توانی از۲ باشد. برای این منظور، توجه می‌کنیم که $۱۰^۵$، ضمن تقسیم بـر ۱۱۱۱۱، بـه باقی مانـدهٔ واحد مـی‌رسد، زیـرا $۱۰^۵=۹\times ۱۱۱۱۱+۱$. بنابراین. هریك ازعددهای حاصل، درتقسیم بر ۱۱۱۱۱، به‌همان باقی‌مانده‌ای‌می‌رسدکه درتقسیم‌مجموع‌همهٔ عددهای واقع برکارت، به‌آن می‌رسیم.

درضمن، به سادگی ثابت می‌شودکه، هریك ازاین‌گونه عددها، بر۹



شکل۶۳

بخش‌پذیر است. ولی مجموع عددهای واقع برکارت‌ها، برابر است با

$$\frac{11111+99999}{2}(10^5-1)$$

یعنی، این مجموع، بر ۱۱۱۱۱ بخش‌پذیر است.

۱۴۲. $D_1=\{0, 1, \dots, 9\}$ را مجموعهٔ ده رقم، $A_1=\{0, 2, \dots, 8\}$ را مجموعهٔ رقم‌های زوج و $B_1=\{1, 3, \dots, 9\}$ را مجموعهٔ رقم‌های فرد می‌گیریم. به‌طور کلی، برای هر n، D_n را به معنای مجموعهٔ همهٔ عددهایی که تعداد رقم‌هایشان از n تجاوز نمی‌کند، و A_n و B_n را، زیرمجموعه‌های از D_n می‌گیریم که، به ترتیب، مجموع رقم‌های هریك ازعضوهای آن‌ها، زوج وفرد باشد ($D_n=A_n\bigcup B_n$). اگرعددی را هم‌که ازصفرها تشکیل شده است به حساب آوریم، B_n و A_n به تعداد $5\times 10^{n-1}$ عضوخواهند داشت. مجموع همهٔ عضوهای x ازمجموعهٔ X را $\sum x$ با شرط $x\in X$ می‌نامیم. باید ثابت‌کنیم، $\sum a^k$ با شرط $a\in A_n$، برابراست با $\sum b^k$ با شرط $b\in B_n$؛ این مجموع را با $S_n^{(k)}$ نشان می‌دهیم.

به ازای $n=2$، $k=1$، حکم مساله، منجربه برابری روشن زیرمی‌شود (که در آن. $a\in A_1$، $p\in A_1$، $b\in B_1$، $q\in B_1$):

$$\sum(10a+p)+\sum(10b+q)=\sum(10a+q)+\sum(10b+p)$$

هردوطرف برابرند با $5(\sum 10d+\sum r)$ به شرط $d\in D_1$، $r\in D_1$، $S_2^{(1)}=5(10+1)(1+2+\dots+9)$، زیرا هریك ازرقم‌های a، b، p و q، دراین یا آن مجموع، ۵ بارتکرار شده است.

عمل‌های بعدی را روی نمونهٔ $n=3$ روشن می‌کنیم. مجموع را به شرط $a\in A_1$، $p\in A_2$، $b\in B_1$، $q\in B_2$ (ودرضمن $d\in D_1$، $r\in D_2$) پیدامی‌کنیم:

$$\sum(10a+p)^2+\sum(10b+q)^2=50\times 10^2(\sum a^2+\sum b^2)+$$

$$+2\times 10(\sum a.\ p+\sum b.\ q)+5\sum p^2+5\sum q^2=$$

$$=10^2\sum d^2+2\times 10(\sum a\cdot\sum p+\sum b\cdot\sum q)+5\sum r^2=$$

$$=5\times 10^2\sum d^2+20\sum dS_2^{(1)}+5\sum r^2$$

به همین ترتیب، مجموع $\sum(10a+q)^2+\sum(10b+p)^2$ را هم، می‌توان تبدیل کرد. دراین‌جا، ازاتحادهای زیراستفاده کرده‌ایم:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,\ \sum uv=\sum u.\ \sum v$$

(در دومی، مجموع نسبت به همهٔ $u\in U$ و $v\in V$).

اکنون، حکم کلی را، با استقرای روی n، ثابت می‌کنیم. درضمن، از دستورهای زیرهم، استفاده خواهیم کرد:

$$(x+y)^k=x^k+C_k^1x^{k-1}y+C_k^2x^{k-2}y^2+\dots+C_k^{k-1}xy^{k-1}+$$

$$+y^k=x^k+\sum C_k^l x^{k-l}y^l+y^k;$$

$$\sum uv=\sum u\sum v$$

(در دستور اول، مقدارهای C_k^l، ضریب‌های دوجمله‌ای ($1\leqslant l<k-1$)، در استدلال‌ها، نقشی ندارند). فرض می‌کنیم، برای عددهای n رقمی وهر $1\leqslant k<n$، برابری لازم ثابت شده باشد:

$$\sum p^j=\sum q^j=S_n^{(j)},\ (p\in A_n\ ,\ q\in b_n)$$

مجموع توان‌های kام عددها از A_{n+1} را ($k<n+1$) تبدیل می‌کنیم (در این‌جا، مجموع‌ها را باشرط $a\in A_1$، $p\in A_n$، $b\in B_1$، $q\in B_n$، $d\in D_1$، $r\in D_n$ و $1\leqslant j<k-1$ درنظر گرفته‌ایم):

$$\sum(10a+p)^k+\sum(10b+q)^k=$$

$$=5\times 10^{n-1}\times 10^k(\sum a^k+\sum b^k)+$$

$$+\sum C_k^j\cdot 10^{k-j}(\sum a^{k-j}p^j+\sum b^{k-j}q^j)+5(\sum p^k+\sum q^k)=$$

$$=5\times 10^{n+k-1}\sum d^k+\sum_j C_k^j\cdot 10^{k-j}S_k^{(j)}\sum d^{k-j}+5\sum r^k$$

روشن است که مجموع توان‌های kام عددها از B_{n+1} هم، با همین عبارت بیان می‌شود (تنها باید جای حرف‌های p و q را عوض کرد).

▽ اتحادهای مشابهی. برای هردستگاه عددنویسی به مبنای d درست است، به شرطی که d، عـددی زوج باشد؛ مثلاً درعددنویسی به مبنای ۲، کـه برای عددهای نه چندان بزرگ n، می‌توان به‌طورمستقیم موردتحقیق قرارداد.

۱۴۳. دستگاه بردارهای واحد $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_m$ (بـا مبداء مشترك O) را متقارن می‌گوییم، وقتی‌که ضمن دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2k\pi}{m}$ (بـه ازای مقداری‌مثل $k<m$) برخودش‌منطبق شود. مجموع بردارهای چنین‌دستگاهی به روشنی، برابر o است، زیرا این مجموع، ضمن دوران بـه اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2k\pi}{m}<2\pi$ تغییرنمی‌کند.

درحالت خاص، بردارهایی‌که به رأس‌های متوالی یك mضلعی منتظم منتهی می‌شوند، دستگاهی متقارن را تشکیل می‌دهندکه، درآن، $k=1$.

همهٔ بردارهای واحد به مبداء O را در معرض تبدیل $\mathbf{e}\to D^l\mathbf{e}$ قرار می‌دهیم (l، مضرب دوران‌است): زاویهٔ بین‌جهت اولیهٔ Ox با $\mathbf{e}$ را l برابر می‌کنیم و بردارحاصل را با $D^l\mathbf{e}$ نشان می‌دهیم. ضمن تبدیل D^l، هردستگاه متقارن به دستگاهی متقارن منجرمی‌شود، تنها با این شرط‌که kl بر m بخش‌پذیرنباشد (زاویهٔ $\frac{2k\pi}{n}$، بین بردارهای مجاور $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_{i+1}$، l برابرمی‌شود؛ اگر از $\frac{2kl\pi}{m}$مضرب 2π را کم کنیم، معلوم‌می‌شودکه، زاویهٔ بین $D^l\mathbf{e}_i$ و $D^l\mathbf{e}_{i+1}$ برابر $\frac{2r\pi}{m}$ است‌که، درآن، r عبارت است ازباقی‌ماندهٔ تقسیم kl بر m).

درحالتی‌هم‌که kl بر m بخش‌پذیرباشد (ودرحالت خاص، به‌ازای $k=m$)، آن وقت همهٔ بردارهای $D^l\mathbf{e}_i$، دریك بردارمتحد می‌شوند.

بعد ازاین نکته‌هـا، به حل مساله می‌پردازیم. فرض می‌کنیم توانسته باشیم رأس‌های یك nضلعی‌منتظم را، باچند رنگ، طوری رنگ‌کرده باشیم که راس‌های هم‌رنگ، تشکیل چندضلعی‌های منتظم داده باشند. l ضلعی، q_1

ضلعی، q_2ضلعی، ...، q_sضلعی، که، درآن‌ها $l<q_1<q_2<\ldots<q_s$. دستگاه متقارن بردارهـایی را که به رأس‌های nضلعی رسیده‌اند، می‌توان به $s+1$ دستگاه متقارن‌شامل l، q_1، q_2، ... و q_s بردار تقسیم‌کرد. تا این‌جا، هیچ تناقضی وجود ندارد: مجموع بردارهای هریك ازاین دستگاه‌ها و، همچنین، مجموع کل آن‌ها، برابر بردار o است ولی اگرهمهٔ بردارها را درمعرض تبدیل با مضرب دوران l قرار دهیم، تناقض پدید می‌آید: همهٔ l بردار دستگاه اول دریك بردارمتحد می‌شوند، به نحوی که مجموع آن‌هـا، مخالف o است، وبقیهٔ دستگاه‌ها ـ از q_i بردار ($i=1$، ۲، ...، s) و ازهمهٔ n بردارـ منتظم باقی می‌مانند، چون زاویهٔ بین بردارهای مجاور درآن‌ها

$$\frac{2\pi l}{q_1}<2\pi,\quad \frac{2\pi l}{q_2}<2\pi,\quad \ldots,\quad \frac{2\pi l}{n}<2\pi$$

به نحوی‌که، مجموع درآن‌ها، برابر o باقی می‌ماند.

▽ اگر بردارهارا همچون‌عددهای‌مختلط درنظربگیریم، اندیشهٔ «دوران با ضرب l» یـا «دوران ازمرتبهٔ l» روشن‌ترمی‌شود: تبدیل D^l، خیلی ساده، یعنی به توان رساندن $z\to z^l$ ازعـدد مختلط z، $|z|=1$، دستگاه متقارن بردارها، عبارت است ازتصاعد هندسی u، uz، uz^2، ...، uz^n کـه، درآن، $|u|=1$ و z برابراست با یکی ازریشه‌های nام واحد ($z\neq1$)؛ اگرآوند (آرگومان) عدد z ـ زاویهٔ بین بردارهای مجاوردستگاه ـ برابر $\frac{2k\pi}{m}$ باشد، آن وقت می‌توان ثابت‌کردکه، چنین دستگاهی، شامل‌بردارهایی است‌که به رأس‌های $\frac{m}{d}$ضلعی‌منتظم‌می‌روندکه، درآن، d مقسوم‌علیهی از m است، $d<m$؛ درضمن به هررأس، d بردارمی‌رود.

حل این مساله نشان می‌دهدکه، هرتقسیمی ازمجموعهٔ عددهای درست $\mathbf{Z}$ را به چند تصاعد حسابی غیرمتقاطع (که ازهردوطرف نامتناهی باشند). تنها با این روش می‌توان انجام داد: $\mathbf{Z}$ به d تصاعد با قدر نسبت‌های برابر d تقسیم‌می‌شود، سپس ممکن است یکی (یا چند تا) ازآن‌ها به تصاعدهایی

با قدرنسبت‌های برابرتقسیم‌شود وغیره. کاربرد عددهای‌مختلط درحل مساله‌های‌نظری مربوط به عددها را، «روش مجموع‌های مثلثاتی» گویند.

۱۴۴. این‌مساله را می‌توان باروش‌استقراحل کرد. به‌ازای $n=1$ باید عدد ۲ را انتخاب کرد. اگر $A=2^n.B$، عـددی n رقمی و بر 2^n بخش‌پذیر باشد، آن وقت، یکی ازعددهای $A+2\times 10^n$ یا $A+1\times 10^n$ بر 2^{n+1} بخش‌پذیرخواهد بود، زیرایکی‌ازعددهای $B+5^n$ یا $B+2\times 5^n$ زوج‌است.

$\triangledown$ برای هر n، تنها یك جواب بـه دست می‌آید؛ ازاین‌گذشته، همهٔ عددهای n رقمی، که ازرقم‌های ۱ و ۲ تشکیل شده باشند، ضمن تقسیم بر n، به باقی مانده‌هـای مختلف می‌رسند. با استفاده ازاین نکته، می‌توان راه حل دیگری برای مساله پیداکرد.

۱۴۵. مسالهٔ a) نتیجه‌ای ازمسالهٔ b) است، بنابراین تنها به حل این مسالهٔ کلی‌ترمی‌پردازیم.

نقطه‌هـای D_k و B_k ازخط راست OA_k بـه یك فاصله‌انـد. بنابراین $S_{OA_kB_k}=S_{OA_kD_k}$. اگر n برابری‌ازاین‌گونه را درهم‌ضرب کنیم وهرمساحت را به‌صورت ضرب قاعدهٔ A_kB_k یا A_kD_k درنصف ارتفاع متناظربنویسیم (این ارتفاع، برابراست با فاصلهٔ از نقطهٔ O تا ضلع چندضلعی)، به برابری موردنظر می‌رسیم: طول ارتفاع‌ها، درحاصل ضرب‌ها، حذف می‌شوند.

$\triangledown$ درمسالهٔ a)، با توجه به شرط‌ها، نیروهای $\overrightarrow{A_kC_k}$ که درنقطه‌های A_k برصفحهٔ سخت $A_1A_2A_3$ اثرمـی‌کنند، یکدیگـررا خنثا می‌کنند، زیرا صفحه بی‌حرکت می‌مانـد؛ مجموع نیروها (به عنوان بردارهـا) و مجموع گشتاورهای آن‌ها برابرصفراست، زیراگشتاورهریك ازاین نیروهـا، نسبت به نقطهٔ O، برابرصفراست.

برای مثلث، برابری حاصل ضرب‌هائی‌که در صورت مساله آمده، نه تنها لازم، بلکه درضمن کافی است تا خط‌های راست A_kC_k دریك نقطهٔ O به‌هم برسند.

۱۴۶. a) پاسخ: ۱۱ پرسش.

اگرهمهٔ ۱۰ عدد واقع دریك سطر، ویکی ازعددهـای واقع درسطر

دیگررا بدانیم، به سادگی می‌توانیم بقیهٔ عددها را بازسازی‌کنیم. ولی اگر تنها از ۱۰ عدد اطلاع داشته باشیم، نمی‌توانیم همهٔ‌عددها را، به‌صورت یك‌ارزشی، پیداکنیم؛ ازیك طرف، درهرستون، باید دست‌کم یکی ازعددها را بشناسیم، درغیراین‌صورت می‌توان به هردوعـدد این ستون، عدد دلخواه x را اضافه‌کرد، بدون این‌که شرط مساله به هم بخورد؛ ازطرف دیگر، دست کم دریکی ازستون‌هـا باید هردوعدد را بشناسیم، زیرا درغیراین صورت، می‌توان عدد دلخواه y را، به عنوان تفاضل دوعدد درهرستون درنظر گرفت و، سپس، جدول را ساخت.

b) اثبات را می‌توان با روش‌استقرای ریاضی‌داد. $m\leqslant n$ می گیریم واستقرا را نسبت بـه $m+n$ می‌دهیم. اگردریکی از n ستون، همهٔ عددهـا مجهول باشند، آن وقت روشن است کـه، عددها، به صورت یك ارزشی به دست نمی‌آیند. واگردرهریك از n ستون عددهای معلومی وجود داشته باشد، آن وقت (با توجه به این‌که تعدادکل $m+n-2$ عدد معلوم، از $2n-2$ تجاوزنمی‌کند)، ستونی پیدا می‌شودکـه درآن، تنها یك عدد معلوم است، و بقیهٔ جدول $m\times(n-1)$، کـه بعد ازحذف این ستون باقی می‌مانـد، تنها شامل $m+(n-1)-2$ عدد معلوم است و، بنابر فرض استقرا، نمی‌توان جدول را به صورت یك ارزشی بازسازی‌کرد.

$\triangledown$ ارزیابی مربوط به این مساله، دقیق است: جدول به صورت

$$\begin{array}{llll} x_1 & x_2, & \cdots & x_n, \\ x_1+y_1, & x_2+y_1, & \cdots & x_n+y_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1+y_{m-1}, & x_2+y_{m-1}, & \cdots & x_n+y_{m-1} \end{array} \quad (*)$$

رامی‌توان، به‌وسیلهٔ $m+n-1$ عددواقع‌درسطراول‌وستون‌اول، بازسازی‌کرد.

پاسخ به پرسش ظریف‌تر ــ چه انتخاب Γ ازعددهای جدول $m\times n$ برای این منظورمناسب است ــ می‌تواند به زبان نظریهٔ گراف‌ها، تنظیم شود (ضمیمهٔ ۱۱).

«گراف دوبخشی» Γ را با $m+n$ رأس A_1، ...، A_m، B_1، ...، B_n درنظرمی‌گیریم که، در آن، برخی ازرأس‌های A_i با برخی از رأس‌های B_j مربوط باشد؛ به این ترتیب، مجموعه‌ای مثل Γ اززوج‌های (i, j) – عضو-های جدول $m \times n$، به‌دست می‌آید $(j=1, \dots, n;\ i=1, \dots, m)$. برای این‌که، به وسیلهٔ این انتخاب Γ اززوج عددها، بتوان تمامی جدول را به صورت یك ارزشی بازسازی کرد، لازم و کافی است که، گراف Γ، مرتبط باشد. دردرخت با $m+n$ رأس، با توجه به مسالهٔ ۸، باید درست $m+n-1$ یال وجود داشته باشد. اگر Γ، یك درخت باشد، آن وقت هر گروه $m+n-1$ عددی را، که خانه‌های $(i, j)\in\Gamma$ را اشغال کرده‌اند، می‌توان طوری تکمیل کرد که، جدول حاصل، شکل موردنظر (*) را داشته باشد.

۱۴۷. شکل‌های F_1 و F_2 را که ازشکل مفروض F (اجتماع دایره‌ها) با انتقال به اندازهٔ بردارهای به طول ۰/۰۰۱ و با زاویهٔ ۶۰ درجه بین آن‌ها، به دست آمده‌اند، در نظر می‌گیریم.

سه شکل F، F_1 و F_2، یکدیگر را نمی‌پوشانند و در درون مربع به ضلع ۱/۰۰۱ قراردارند. بنا براین، مساحت S هریك ازآن‌ها، کمتراست از

$$\frac{1}{3}(1/001)^3 < 0/34$$

▽ به همین ترتیب، برای مسالهٔ فضایی مشابه ایـن مسالهٔ، می‌توان ارزیابی $\frac{1}{4}(1/001)^2 < 0/26$ را به دست آورد.

درروی صفحه، می‌توان ارزیابی را دقیق‌تر کرد و، مثلاً، ثابت کرد که

$$S < 0/287$$

۱۴۸. مقدارآب ظرف‌های A، B و C را، به ترتیب، a، b و c لیتر می‌گیریم $(0 < a \leqslant b \leqslant c)$. کافی است با چندبار جابه‌جایی آب ظرف‌ها، به آن‌جا برسیم که، در یکی از ظرف‌ها، کمتر از a لیتر آب وجود داشته باشد (با تکراراین روند، می‌توانیم مقدارآب را دریکی از ظرف‌ها، مرتباً کاهش

دهیم تا بـه صفر برسد). از تقسیم b بر a بـه دست می‌آید: $b = ad + r$ $(0 \leqslant r < a)$. از B و C در ظرف A آب می‌ریزیم (در A، a، $2a$، 2^2a، 2^3a، ...، 2^ka لیترآب خواهد بود) تا جایی‌که از B به اندازهٔ da لیترآب خارج شده باشد؛ درنتیجه، در B به اندازهٔ $r < a$ لیتر باقی‌می‌ماند. این عمل ممکن است، زیرا هر عدد طبیعی را می‌توان (و در ضمن تنها به یك طریق) به صورت‌مجموع بعضی‌ازعددهای ۱، ۲، 2^2، ...، 2^l، ... نوشت: بخش‌های متناظر 2^ka، باید از B و بقیهٔ آن از C ریخته شود.

در ضمن، مقدار آبی که از C ریخته می‌شود، باید از مقدار آبی که از B ریخته می‌شود، بیشتر نباشد. به این ترتیب، آبی‌که در C وجود دارد، کفایت می‌کند.

۱۴۹. این شرط که ریشه‌های سه‌جمله‌ای‌های

$$f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1 \text{ و } f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$$

حقیقی‌اند و، نسبت به هم، به طور متناوب قرار دارند، هم‌ارز با این است که نمودارهای $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ درنقطهٔ (x_0, y_0)، واقع در زیر محورطول، یکدیگررا قطع کرده باشند: $y_0 < 0$. اگر معادلهٔ $f_1(x) = f_2(x)$ را حل کنیم، به دست می‌آید:

$$x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1},\quad y_0 = R(p_1 - p_2)^2$$

که در آن داریم:

$$R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1)$$

▽ عبارت R، تنها وقتی برابر صفر می‌شود که f_1 و f_2 ریشه‌ای مشترك (و احتمالاً مختلط) داشته باشند. این چندجمله‌ای شامل ضریب‌های دو چندجمله‌ای f_1 و f_2 را (از هر درجه‌ای)، «برآیند» آن‌ها گویند.

۱۵۰. اگر صفحه‌ها موازی باشند، درستی حکم روشن است. اکنون فرض می‌کنیم، دو صفحه، موازی نباشند در این صورت، تصویرجسم برخط راست l، فصل مشترك دوصفحه را می‌توان به‌عنوان تصویرهریك ازتصویرها: ی

جسم بر این یا آن صفحه، بر خط راست l به دست آورد. (همه‌جا، صحبت بر سر تصویر قائم است: مجموعهٔ پای عمودها.) ولی تصویر هر دایره بر خط راستی واقع در صفحهٔ خودش، برابر است با قطر دایره.

۱۵۱. در نتیجهٔ هر عمل، مجموع S از حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی عددهای مجاور افزایش می‌یابد. درواقع، در این مجموع، $ab+bc+cd$ به $ac+cb+bd$ تبدیل می‌شود و اگر $(a-d)(b-c)<0$، آن وقت $ab+cd<ac+bd$. ولی، مجموع S، به تعداد محدودی می‌تواند مقدارهای مختلف را اختیار کند (ضمیمهٔ ۱۳).

۱۵۲. مساله کلی b) را حل می‌کنیم. فرض کنید، خط راست l محیط چند ضلعی محیطی را در دو نقطهٔ R و Q قطع و این محیط را به دو بخش برابر تقسیم کند. در این صورت، اگر O را مرکز دایرهٔ محاطی چند ضلعی بگیریم، خط شکستهٔ شامل پاره‌خط‌های راست OR و OQ، مساحت چندضلعی را به‌دو بخش برابر تقسیم خواهد کرد (این مطلب، شبیه دستور $S=\frac{1}{2}Pr$ برای مساحت یك چندضلعی محیطی به محیط P ثابت می‌شود). ولی می‌دانیم، خط راست PQ هم، مساحت چندضلعی را نصف می‌کند، بنابراین نقطهٔ O برخط راست PQ واقع است.

▽ حل این مساله جالب است که: برای مثلث و برای n ضلعی محیطی، چند خط راست از این گونه وجود دارد؟

۱۵۳. حکم مساله، برای n عدد، با شرط $n>4$، درست است و با برهان خلف ثابت می‌شود. فرض می‌کنیم، مجموع یا تفاضل هردوعدد دلخواه از عددهای مختلف

$$a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<a_n$$

بین بقیهٔ $n-2$ عدد وجود داشته باشد. چون $a_n+a_i>a_n$، بنابراین باید داشته باشیم: $a_n-a_i=a_{n-i}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$. وقتی $n=2k$ عددی زوج باشد، به دست می‌آید: $a_n-a_k=a_k$، یعنی تفاضل a_n و a_k در بین بقیهٔ عددها وجود ندارد. وقتی $n=2k+1$ عددی فرد باشد. زوج (a_{n-1}, a_i)

را در نظر می‌گیریم: برای آن‌ها

$$a_{n-1}+a_1=a_n,\ a_{n-1}+a_i>a_n\ (2\leqslant i\leqslant n-2)$$

و بنابراین باید برابری $a_{n-1}-a_i=a_{n-i-1}$ برقرار باشد و، در حالت خاص $a_{n-1}-a_k=a_k$ که بازهم به تناقض می‌رسد.

۱۵۴. a) ۱۲ راس دوازده‌ضلعی را، به ۶ جفت رأس روبه‌رو تقسیم می‌کنیم: A_1A_7، A_2A_8، A_3A_9، ...، A_6A_{12}. در هر عمل، در هر زوج، تنها یکی از رأس‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، در جفت‌های A_2A_8، ...، A_6A_{12}، بعد از عمل $(2k-1)$ ام علامت‌های مختلف و بعد از عمل $(2k)$ام علامت‌های یکسان وجود خواهد داشت (در جفت A_1A_7، همه چیز برعکس است). به این ترتیب، حالتی پیش نمی‌آید که در جفت A_2A_8 علامت‌های مختلف و در جفت A_3A_9 علامت‌های یکسان داشته باشیم.

b) چهار گروه و درهر گروه سه رأس را در نظر می‌گیریم: $A_1A_5A_9$، $A_2A_6A_{10}$، $A_3A_7A_{11}$ و $A_4A_8A_{12}$ و مثل حالت قبل استدلال می‌کنیم. فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی هر گروه، در هر عمل تغییر می‌کند و در دو گروه $A_2A_6A_{10}$ و $A_3A_7A_{11}$ فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی، یکسان است.

c) رأس‌ها را به‌سه گروه $A_1A_4A_7A_{10}$، $A_2A_5A_8A_{11}$ و $A_3A_6A_9A_{12}$ تقسیم و به‌همان ترتیب استدلال می‌کنیم.

▽ به طور کلی می‌توان روشن کرد، اگر درهر عمل k رأس متوالی یك n ضلعی را تغییرعلامت دهیم، پشت سرهم چه وضعی پیش می‌آید. پاسخ این است: هر گروه ε_1، ε_2، ...، ε_n از عددهای $\varepsilon_k=\pm1$ در رأس‌های nضلعی را با گروه d عدد

$$(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

به‌ترتیب زیر مقایسه می‌کنیم (d، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك n و k است):

$$x_i=\varepsilon_i\,\varepsilon_{i+d}\dots\varepsilon_{i+n-d}$$

در این صورت، دو گروه (ε_i) و (ε'_i)، تنها درحالتی به یکدیگر منجر

می‌شوند که یا گروه‌های متناظر آن‌ها (x_i) و (x'_i) یکی باشند و یا $\frac{k}{d}$ عـددی زوج و گروه‌های (x_i) و (x'_i) متقابل باشند: $x_i = -x'_i$ (برای هر i).

۱۵۵. می‌توان از روش «نصف کردن» استفاده کرد. مربع بزرگ K_0 را از صفحه شامل $2^n \times 2^n$ خانه جدا می‌کنیم، به نحوی که همهٔ خانه‌های سیاه را فرا گیرد و بیش از چهار برابر آن‌ها، خانهٔ سفید داشته باشد. در این صورت، مساحت خانه‌های سیاه، کمتر از $\frac{1}{5}$ مساحت مربع K_0 است. K_0 را به چهار مربع K_1، و در هر کدام $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ خانه، تقسیم می‌کنیم. در هریك از مربع‌های K_1، خانه‌های سیاه، بیش از $\frac{4}{5}$ مساحت را پر نمی‌کنند، به نحوی که یا با هـر دو شرط ۱) و ۲) سازگار است و یا می‌توان آن را دوباره به چهار مربع K_2 تقسیم کرد و غیره، تا جایی که مربع‌های 2×2 به‌دست آید که، از آن‌ها، همهٔ مربع‌های سفید را کنار می‌گذاریم و مربع‌های شامل یك، دو یا سه خانهٔ سیاه را نگه می‌داریم.

▽ شبیه این مساله را می‌توان برای خط راستی که به پاره‌خط‌های راست واحد تقسیم شده است (با مقدارهای ثابت $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$)، و برای فضا که به مکعب‌های واحد تقسیم شده است (با مقدارهای ثابت $\frac{1}{9}$ و $\frac{8}{9}$) تنظیم کرد.

۱۵۶. پاسخ: کمترین تعداد A_n از مکعب‌ها که با شرط سازگار باشند، برابر است با

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{2} n^2 & (\text{برای } n \text{ زوج}) \\ \frac{1}{2}(n^2+1) & (\text{برای } n \text{ فرد}) \end{cases}$$

درحالت‌های خاص: $A_2 = 2$، $A_3 = 5$، $A_4 = 8$، $A_5 = 12$، $A_{10} = 50$.

اثبات این که با تعداد کمتری مکعب، نمی‌توان به نتیجهٔ مطلوب رسید،

به این صورت است: برای تنظیم مکعب‌های کوچك که با شرط مساله سازگار باشند، در هرخانه ازوجه پایینی مکعب اصلی عددی را می‌نویسیم که نشان دهد چند مکعب کوچك روی آن خانه قرار دارد. اکنون از یك پیش قضیه استفاده می‌کنیم.

پیش قضیه. درجدولی $n \times n$ عددهای درست غیرمنفی را قرار داده‌ایم؛ درضمن، برای هرجفت سطر و ستونی که، در برخورد آن‌ها، عدد صفر قرار دارد، مجموع $2n-1$ عدد موجود در آن‌ها (که «صلیبی» را تشکیل داده‌اند)، از n کمتر نیست. در این صورت، مجموع همهٔ عددهای جدول، از $\frac{n^2}{2}$ کمتر نخواهد بود.

اثبات ایـن پیش قضیه، با استدلالی خیلی شبیه حل مساله ۱۲۶ به دست می‌آید.

اگر کمترین مجموع را در سطرها و ستون‌ها بـرابر $m<n$ بگیریم (فرض کنید، این کمترین مجموع، متعلق بـه سطر اول باشد)، آن وقت، در این سطر، حداقل $n-m$ صفر وجود دارد؛ و در هر یك $n-m$ ستونی که از آن‌ها آغاز می‌شود، حداقل مجموع عددها برابر $n-m$ است. ولی درهر یك از m ستون بقیه، مجموع عددها، از m کمتر نیست و، به این ترتیب، مجموع کل، حداقل برابر است با

		۴	۳	۵
		۳	۵	۴
		۵	۴	۳
۱	۲			
۲	۱			

$n=5$

					۶	۷	۸	۹	۱۰
					۷	۸	۹	۱۰	۶
					۸	۹	۱۰	۶	۷
					۹	۱۰	۶	۷	۸
					۱۰	۶	۷	۸	۹
۱	۲	۳	۴	۵					
۲	۳	۴	۵	۱					
۳	۴	۵	۱	۲					
۴	۵	۱	۲	۳					
۵	۱	۲	۳	۴					

$n=10$

شکل ۶۴

$$(n-m)^2+m^2 > \frac{n^2}{2}$$

نمونهٔ استقرار ۱۲ مکعب واحد در مکعب ۵×۵×۵ و ۵۰ مکعب واحد در مکعب ۱۰×۱۰×۱۰ را درشکل ۶۴ داده‌ایم که، در آن، عدد واقع در خانه، شمارهٔ قشری را نشان می‌دهد که، مکعب واحد، در روی این خانه، واقع شده است. به‌همین ترتیب، می‌توان نمونهٔ لازم برای بقیهٔ مقدارهای n را ساخت.

۱۵۷. باید برای هر نقطهٔ (x, y) از صفحه، نقطهٔ (m, n) را، با مختصات درست، طوری پیدا کنیم که، به‌ازای آن، مقدار $f_a(x-m, y-n)$، حداقل مقدار ممکن باشد و مرز بالای این حداقل

$$\bar f_a(x, y) = \min_{m,n} f_a(x-m, y-n)$$

را پیدا کنیم. مقدار $\sqrt{f_a(x_1-x_2, y_1-y_2)}$ را فاصلهٔ بین نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌نامیم. شبیه فاصلهٔ عادی

$$\sqrt{f_0(x_1-x_2, y_1-y_2)} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

یادآوری می‌کنیم که، برای این فاصله، ارزیابی دقیق، چنین است:

$$\bar f_0(x, y) \leqslant \frac{1}{2}$$

در واقع، برای هر مربع $m-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant m+\frac{1}{2}$، $n-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant n+\frac{1}{2}$، فاصلهٔ از هر نقطهٔ (x, y) آن تا مرکز (m, n) آن، از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ بیشتر نیست؛ در ضمن، برای هر رأس این مربع، این فاصله برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، یعنی $\bar f_0(x_0, y_0)=\frac{1}{2}$.

بقیهٔ «فاصله‌های» $\sqrt{f_a}$ $(0<a<2)$ را هم مورد بررسی قرار می-

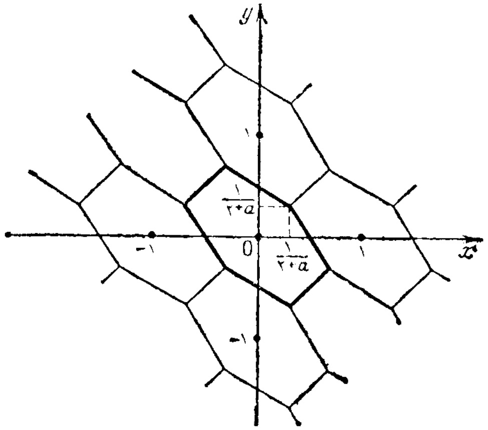
دهیم. صفحه را به شکل‌های $\Phi_{m,n}$ با معیار زیر تقسیم می‌کنیم: نقطهٔ (x, y) به $\Phi_{m,n}$ تعلق دارد، وقتی که «فاصلهٔ» از آن تا (m, n) کمتر (یا نه بیشتر) از فاصلهٔ آن تا هر نقطهٔ دیگر شبکه باشد (منظور از شبکه، مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست است). کافی است شکل $\Phi_{0,0}$ را بامرکز $(0, 0)$ پیدا کنیم؛ بقیهٔ به‌کمک آن، با انتقال مرکزها روی بردار بامختصات (m, n) به‌دست می‌آیند؛ چون ضمن این انتقال‌ها، «فاصلهٔ» $\sqrt{f_a}$ حفظ می‌شود، بنابراین نظامی هم که به‌وسیلهٔ آن، نقطه‌های حوزه با این یا آن مرکز انتخاب می‌شوند، حفظ می‌شود. اکنون از این نکته استفاده می‌کنیم که مجذور فاصله، f_a، تابع درجه دومی از مختصات است. مجموعهٔ نقطه‌هایی که به $(0, 0)$ نزدیکترند تا به (m, n)، یك نیم صفحه را تشکیل می‌دهند؛ نابرابری

$$x^2+axy+y^2 \leqslant (x-m)^2+a(x-m)(y-n)+(y-n)^2$$

هم‌ارز است با نابرابری خطی

$$(2m+an)x+(2n+am)y \leqslant m^2+amn+n^2$$

برای این‌که شکل $\Phi_{0,0}$ را پیدا کنیم، باید اشتراك همهٔ این نیم صفحه‌ها را نسبت به همهٔ مقدارهای (m, n)، به جز $(0, 0)$ به‌دست آوریم. برای این منظور، کافی است تنها شش تا از آن‌ها را، که متناظر با شش زوج



شکل ۶۵

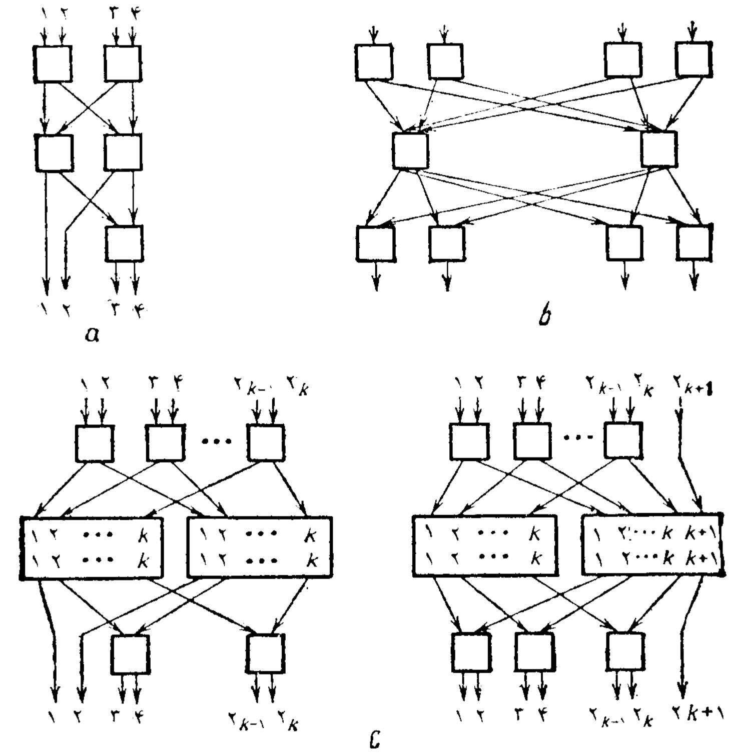
$(\pm 1, 0)$؛ $(0, \pm 1)$، $(1, -1)$ و $(-1, 1)$ هستند، در نظر بگیریم.
این مطلب وقتی روشن می‌شود که قانع شویم، اشتراك این شش نیم صفحه (این اشتراك، یك شش ضلعی محدب است: $-1 \leqslant 2x+ay \leqslant 1$، $-1 \leqslant ax+2y \leqslant 1$، $-1 \leqslant x-y \leqslant 1$) با تصویرهای خود، ضمن انتقال موازی روی بردارهای (m, n)، برخورد ندارد (اگر دقیق‌تر بگوییم، با آن‌ها، تنها در بخشی از مرزها مشترك است؛ شکل ۶۵). به این ترتیب، $\Phi_{0,0}$ نمی‌تواند کوچکتر از این شش‌ضلعی باشد و، بنابراین، بر آن منطبق است. ماکزیمم $f_a(x, y)$ به‌ازای $(x, y) \notin \Phi_{0,0}$، در رأس‌های این شش‌ضلعی به دست می‌آید، زیرا ضمن حرکت پاره‌خطی از هر خط راست

$$x = b+ut, \quad y = c+vt$$

مجذور فاصلهٔ $f_a(b+ut, c+vt)$، به صورت سه جمله‌ای درجه دومی به t بستگی دارد که، در آن، ضریب t^2 برابر $u^2+auv+v^2$ و مثبت است، به نحوی که f_a دردو انتهای پارخط به‌ماکزیمم خود می‌رسد. با پیدا کردن مختصات رأس‌ها (شکل ۶۵) و قرار دادن آن‌ها در عبارت f_a، ارزیابی دقیقی برای f_a، به دست می‌آید: $\bar{f}_a \leqslant \frac{1}{a+2}$. همین ارزیابی برای $a=2$ هم درست است، وقتی که $f_2(x, y)$، به طور ساده عبارت است ازمجذور فاصلهٔ بین $x+y$ و نزدیکترین عدد درست: $\bar{f}_2(x,y) \leqslant \frac{1}{4}$.

▽ اندیشهٔ اصلی حل این مساله ــ تقسیم صفحه به حوزه‌هایی شامل مرکزهای مفروض، به‌نحوی‌که هر نقطه متناظر با نزدیکترین مرکز باشد ــ در مساله‌های مختلف آنالیز، هندسه و نظریهٔ عددها کاربرد دارد.

۱۵۸. ابتدا حداقل کلیدهای تبدیل لازم را تخمین می‌زنیم (ارزیابی از پایین). چون هر کلید تبدیل می‌تواند در دوموقعیت قرار گیرد، بنابراین طرح شامل m کلید، می‌تواند 2^m موقعیت مختلف داشته باشد. اگربخواهیم، هر $n!$ اتصال مختلف n ورودی و n خروجی برای تعداد m کلید تحقق یابد:



شکل ۶۶

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{array}$$

که در آن $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$، هر تبدیلی از عددهای ۱، ۲، ...، n است، باید نابرابری $n! \leqslant 2^m$ برقرار باشد، یعنی، تعداد کلیدها در طرح «همه کاره»، حداقل برابر $\log_2(n!)$ باشد.

درحالت خاص، برای $n=3$ به‌دست می‌آید: $6 \leqslant 2^m$، یعنی $m=3$؛ به‌سادگی روشن می‌شود‌که، طرح مربوط به شکل ۸، b (درصورت مساله)، نمونه‌ای از «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۳» است. برای $m=4$ به دست می‌آید: $24 = 4! \leqslant 2^m$، ازآنجا $m \geqslant 5$. درواقع، طرح همه‌کارهٔ با ۵ کلیدرامی‌توان ساخت: تحقیق کنید، طرح شکل ۶۶، a، به ازای $32 = 2^5$ وضع مختلف

کلید، همهٔ ۲۴ تبدیل ممکن از مجموعهٔ {۴، ۳، ۲، ۱} را تحقق می‌بخشد.

اثبات طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۸، که در شکل ۸، c (در صورت مساله) داده شده است؛ درعمل ممکن نیست: عدد !۸، عدد خیلی بزرگی‌است، ولی می‌توان قانون ساده‌ای را پیداکرد و، به‌کمك آن، روشن کرد که هرتبدیل مفروض φ از ۸عنصر $k\to i_k$ ($k\in\{1, 2, \ldots, 8\}$)، روی طرح وجود دارد. این قانون باید نشان دهد که، از طریق هر بلوك ـ A یا B ـ هریك از ۸ ارتباط $k\to\varphi(k)=i_k$ تحقق می‌یابد. درضمن باید این شرطها هم برقرار باشند:

اگر $k-l=4$ یا $i_k-i_l=4$، آن وقت ارتباطهای $k\to i_k$ و $l\to i_l$ باید از بلوك‌های مختلف A و B بگذرند.

روشن است که، این شرطها، برای نبودن «چسبندگی» (موقعیتی که در آن، درشبکهٔ تلفنی، دوورودی به‌یك خروجی، یا برعکس، مربوط شده باشد)، لازم و کافی است.

قانون مورد نیاز ما، چنین است:

دو زوج $j\to\varphi(j)$ و $l\to\varphi(l)$ را «مجـاورهای» زوج $k\to\varphi(k)$ می‌نامیم، وقتی‌که داشته باشیم: $|k-j|=4$ و $|\varphi(k)-\varphi(l)|=4$، در این صورت، همهٔ زوج‌های $k\to\varphi(k)$ بـه گـروه هایی (دورهایی) تقسیم می‌شوند که، برای هرکدام ازآن‌ها، دو «مجاور» وجود دارد؛ درضمن این دورها، شامل تعداد زوجی از این زوج‌ها خواهند بود. درهردور، به تناوب، ارتباط $k\to\varphi(k)$ از طریق بلوك A و یا از طریق بلوك B تحقق می‌یابد، بنا براین، «مجاورها» ازطریق بلوك‌های مختلف، به هم ارتباط پیدا می‌کنند.

اکنون از «همهٔ کاره‌های مرتبهٔ ۴» بلوك‌های A و B، «همه کارهٔ مرتبهٔ ۸» تمامی طرح نتیجه می‌شود:

به همین ترتیب، می‌توان «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ 2^{k+1}» را باآغاز از دو «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ 2^k» و، بازهم، 2×2^k کلید ساخت. اگراز «طرح همه کارهٔ مرتبهٔ ۴» با ۵ عضو آغازکنیم (واین البته، بهتر ازآن است که از کلید همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۲ آغازکنیم و، به جای شکل ۶۶، a از طرح همه‌کارهٔ

مـرتبهٔ ۴ ـ شکل ۶۶، b ـ از ۱۰ عضـو را بـه دست آوریم)، آن وقت به‌ازای $n=2^k$، طرح شامل $2n\log_2 n-\frac{11n}{4}$ کلیدخواهد بود (و درحالت خاص $n=8$، ۲۶ کلید)، که برای هر $n\neq 2^k$، ارزیابی از بالا را، برای تعداد کلیدها درطرح «همه کارهٔ مرتبهٔ n» از ردیف $4n\log_2 n$ می‌دهد. تنها بهتر است، بـرای ساختن طرح (شکل ۶۶، c)، از «همهٔ کارهٔ مرتبهٔ k» به همه‌کارهٔ $2k$ و $2k+1$ برویم وارزیابی ازبالارا، تا $n\log_2 n$ بهبود بخشیم.

توجه‌کنیم که، برای مقدارهای بزرگ n، داریم:

$$\log_2 n\approx n(\log_2 n-\log_2 e)$$

۱۵۹. نقطهٔ برخورد خطهای راست QN و CD را R ومرکز مستطیل $ABCD$ را O می‌نامیم. از $OM=ON$ نتیجه می‌شود: $PC=CR$ و، بنا براین، مثلث PNR متساوی الساقین است (NC، هم ارتفاع و هم میانهٔ این مثلث است).

حکم مساله، از برابری‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\widehat{MNP}=\widehat{NPR}, \quad \widehat{QNM}=\widehat{QRP}$$

۱۶۰. $[a_1, b_1]$ را، پاره‌خط راستی با حداقل انتهای راست فرض می‌کنیم. اگرتعداد پاره‌خطهای شامل نقطهٔ b_1، از ۷ بیشترباشد، مساله حل شده است. اگـر این تعداد، کمتر یا برابر ۷ باشد، آن وقت دست‌کم ۴۳ پاره‌خط راست وجود دارد که در سمت راست $[a_1, b_1]$ قرارگرفته‌اند، در بین آن‌ها، نقطهٔ $[a_2, b_2]$ را، با حداقل انتهای راست در نظـر می‌گیریم. در این صورت یا b_2 متعلق بـه ۸ پاره‌خط راست است و یا ۳۶ پاره‌خط راست وجـود دارد کـه در سمت راست b_2 قـرار دارنـد. بـا ادامـهٔ این استدلال، یا به نقطه‌ای برخورد می‌کنیم که به ۸ پاره‌خط راست تعلق دارد ویا ۷ پاره‌خط راست $[a_1, b_1]$، $[a_2, b_2]$، ...، $[a_7, b_7]$ پیدا می‌شوندکه برخـوردی با هم ندارند. درسمت راست این ۷ پاره‌خط راست، دست‌کم $50-7k$ پاره‌خط راست دیگروجودخواهدداشت، یعنی‌دست کم یك پاره‌خط

راست $[a_8, b_8]$ در سمت راست $[a_7, b_7]$ پیدا می‌شود.

$\triangledown$ درست به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که در بین $mn+1$ پاره‌خط واقع بریك خط راست یا $m+1$ پاره‌خط دو به‌دو نامتقاطع وجود دارد و یا $n+1$ پاره‌خطی که دارای نقطهٔ مشترك‌اند. دراین‌جا، مسالهٔ دیگری شبیه این مساله را می‌آوریم: از بین $mn+1$ عددطبیعی می‌توان یا زنجیره‌ای از $m+1$ عدد طبیعی انتخاب کردکه، هرکدام از آن‌ها، بر عدد قبلی خود بخش‌پذیر باشد ویا $n+1$ عددکه، از آن‌ها، هیچ‌کدام بردیگری بخش‌پذیر نباشد. این‌ها، حالت‌های خاصی از قضیهٔ کلی دیلواورس‌اند: در هرمجموعهٔ مرتب جزئی،که دارای $mn+1$ عضو است، یا زنجیره‌ای از $m+1$ عضو وجود داردکه به ردیف صعودی‌اند و یا $n+1$ عضوکه دوبه‌دو نسبتی باهم ندارند.

برای این‌که، این قضیه را، در مورد مسالهٔ مربوط به پاره‌خط‌ها به کاربریم، باید این طور به حساب آوریم که: یك پاره‌خط وقتی «بزرگتر» از دیگری است که، به طورکامل، درسمت راست آن واقع باشد؛ دراین‌صورت، پاره‌خط‌های «دوبه‌دو نامتقاطع»، بناچار نقطهٔ مشترکی خواهند داشت (این نقطهٔ مشترك، عبارت است ازسمت چپ‌ترین نقطه ازانتهاهای راست آن‌ها).

۱۶۱. پاسخ: $x=1972$.

به سادگی می‌توان نوشت:

$$4^{27}+4^{1000}+4^{x}=2^{54}(1+2\times 2^{1945}+2^{2x-54})$$

و برای این‌که مقدار داخل پرانتز مجذور کامل باشد، باید داشته باشیم:

$$2x-54=2\times 1945 \Rightarrow x=1972$$

اکنون اگر فرض‌کنیم $x>1972$، آن‌وقت.

$$2^{2(x-27)}<1+2\times 2^{1945}+2^{2(x-27)}<(2^{x-27}+1)^2$$

یعنی عدد مفروض، بین مجذورهای دو عدد متوالی قرار می‌گیرد.

۱۶۲. ابتدا درستی این دو گزاره را ثابت می‌کنیم:

الف) اگر a^k+b^k بر a^n+b^n بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $a^{k-n}-b^{k-n}$ هم بر a^n+b^n بخش‌پذیر است.

ب) اگر a^t-b^t بر a^n+b^n بخش‌پذیر باشد، آن وقت $a^{t-n}+b^{t-n}$ هم بر a^n+b^n بخش‌پذیر است.

این دو گزاره، با توجه به این که a و b نسبت به‌هم اول‌اند، ازاتحادهای زیر نتیجه می‌شوند:

$$a^k+b^k=a^{k-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{k-n}-b^{k-n});$$
$$a^t-b^t=a^{t-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{t-n}+b^{t-n})$$

ضمن تقسیم m بر n می‌توان نوشت:

$$m=qn+r,\ (0\leqslant r<n)$$

اگر q مرتبه، n را از m کم‌کنیم، r به دست می‌آید.

ازشرط‌مساله‌و گزاره‌های‌الف)وب)نتیجه می‌شود که: $a^r+(-1)^q b^r$ بر a^n+b^n بخش‌پذیراست.ولی $0\leqslant|a^r+(-1)^q b^r|<a^n+b^n$. بنابراین $r=0$ (و در ضمن، q عددی است فرد).

۱۶۳. فرض می‌کنیم، دربرخی سطرهای جدول، به عددهای یکسان برخوردکنیم. دربین این سطرها، بالاترین سطر را با شمارهٔ n، و عددهای برابر دراین سطر را با p و q نشان می‌دهیم.

چون در $(n-1)$امین سطر، عددهای برابر وجود ندارد، باید p و q ازعددهای r و s این سطر و با عمل‌های متفاوت به دست‌آمده باشند: فرض کنید $p=r^2$ و $q=s+1$؛ در این صورت $s=r^2-1$.

در مسیر از بالاترین عدد a به طرف s، می‌توان هم به مجذورکردن و هم به اضافه‌کردن یك واحد، برخورد کرد. بزرگترین عددی که مجذور شده است، می‌تواند $r-1$ باشد (زیرا $s=r^2-1$). و این به‌معنای آن است که، عدد s، می‌تواند ازآخرین مجذورکاملی که در مسیر واقع است ودست کم بعد از $r^2-1-(r-1)^2=2r-2$ گام به‌دست‌آمده باشد؛ درضمن، در هر گام، یك واحد اضافه شده است. به این ترتیب، عدد s، از عدد a،

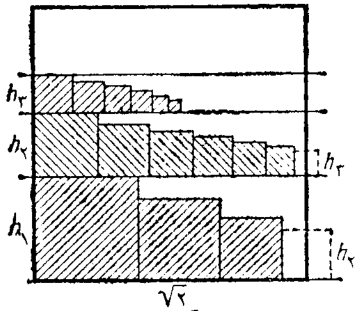
دست‌کم بعد از $2r-1$ گام به دست آمده است (یعنی $2r-1\geqslant n-2$).
ولی عـدد r هم، درهمان سطر s واقع است و برای رسیدن از a به چنین عددی، دست‌کم $a+2r-1>r$ گام لازم است. به این ترتیب، درمسیر به دست آمدن s، مجذور کردنی وجود نداشته است، به نحوی که q در انتهای سمت راست قرار دارد و کوچکترین عدد در سطر nام است؛ چیزی که با فرض $p=q$ تناقض دارد.

▽ با تجزیه و تحلیل راه‌حل‌مساله، روشن می‌شود که، عمل مجذور-کردن را، می‌توان با هرتابع f که مقدارهای طبیعی را قبول می‌کند عوض کرد، به شرطی‌که داشته باشیم:

$$f(n+1)-f(n)>n+1$$

۱۶۴. مربع‌ها را بـه ردیف نزولی ضلع‌ها و با آغاز از بزرگترین مربع $x\times x$، ازچپ بدراست، روی‌ضلع‌پایینی مربع به مساحت $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم (شکل ۶۷)؛ وقتی به‌جایی رسیدیم که جایی برای مربع بعدی نمانده باشد ـ یعنی از ضلع سمت راست مربع به ضلع $\sqrt{2}$ خارج شود ـ به ضلع بالای مربع چپ می‌رویم، این ضلع را به صورت خط راست افقی ادامه می‌دهیم و ردیف جدید را آغاز می‌کنیم. ضلع مربع‌هایی را که به ضلع‌سمت چپ‌مربع به‌ضلع $\sqrt{2}$ چسبیده‌اند، به‌ترتیب، $x=h_1$، h_2، h_3، ... می‌گیریم. باید ثابت کنیم، ارتفاع

$$h=h_1+h_2+h_3+\cdots<\sqrt{2}$$



شکل ۶۷

یعنی، این مربع‌های سمت چپ، از ضلع بالایی مربع به ضلع $\sqrt{2}$، بیرون نمی‌روند.

مجموع مساحت‌های این مربع‌هارا ارزیابی می‌کنیم. درذهن خود،هر مربع‌سمت‌چپ به‌ضلع h_k را ($k=2, 3, \ldots$) به‌انتهای‌ردیف‌قبلی ($k-1$)ام منتقل می‌کنیم. این مـربع از ضلع سمت راست مربع بـه ضلع $\sqrt{2}$ بیرون می‌زند، بنابراین بعد از ایـن روند، مساحت مربع‌های ردیف ($k-1$) ام، کمتر از $h_k(\sqrt{2}-x)$ نخواهد بود؛ درضمن درردیف اول، مربع بزرگتر سمت چپ را به‌حساب نمی‌آوریم. به این ترتیب، مجموع مساحت‌های همهٔ مربع‌ها ـ که بنابر فرض برابر واحد است ـ کمتر از

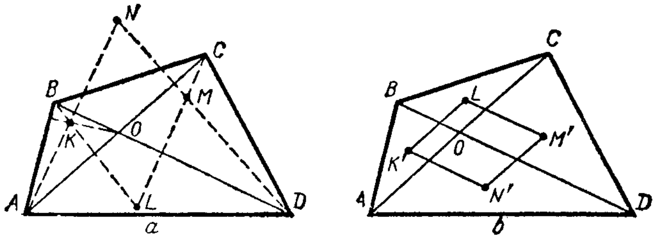
$$x^2+(\sqrt{2}-x)(h_2+h_3+\cdots)=x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x)$$

نخواهد بود. از این‌جا می‌توان h را ارزیابی کـرد. چون $\sqrt{2}-x>0$، بنابراین از نابرابری $x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x)\leqslant 1$ نتیجه می‌شود:

$$h\leqslant\frac{1-x^2}{\sqrt{2}-x}+x=3\sqrt{2}-\sqrt{2}\left(2-x\sqrt{2}+\frac{1}{2-x\sqrt{2}}\right)\leqslant\sqrt{2}$$

زیرا مقدار داخل پرانتز به صورت $t+\frac{1}{t}$ است واز ۲ کمتر نیست (برابری تنها به‌ازای $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ممکن است).

۱۶۵. K، L، M و N را، بـه ترتیب، محل برخـورد ارتفاع‌های مثلث‌های AOB، BOC، COD و DOA می‌گیریم. این نقطه‌ها، رأس‌های یك متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند، زیـرا دو ضلع آن روی خط‌های



شکل ۶۸

راستی قرار دارند که از A و C بر BD عمود شده‌اند و دو ضلع دیگر آن روی خط‌های راستی که از B و D بر AC عمود شده‌اند (شکل ۶۸، a).

نقطه‌های K'، L'، M' و N'، محل برخورد میانه‌های مثلث‌های AOB، BOC، COD و DOA، رأس‌های متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که دو ضلع آن موازی BD هستند و پاره‌خط راست AC را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند و دوضلع دیگر آن با AC موازی‌اند و BD را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند (شکل ۶۸، b).

روشن است که، ضلع‌های متناظر این دومتوازی‌الاضلاع، برهم عمودند. ثابت می‌کنیم که متوازی‌الاضلاع‌ها متشابه‌اند؛ از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که، اگر یکی از آن‌ها را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، نه تنها ضلع‌ها، بلکه قطرهای آن‌ها هم باهم موازی می‌شوند، یعنی $K'M' \perp KM$ (و $L'N' \perp LN$). برای اثبات تشابه دو متوازی‌الاضلاع، باید نسبت ضلع‌ها برابر باشند. طول ضلع‌های $K'L'$ و KN برابرند با $\frac{1}{3}AC$ و $\frac{1}{3}BD$.

تصویر ضلع KL بر BD، بر تصویر پاره‌خط راست AC بر BD، منطبق است. بنابراین

$$KL = AC \cdot cotg\varphi$$

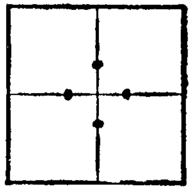
که در آن، φ، زاویهٔ حادهٔ بین خط‌های راست AC و BD است. به همین ترتیب

$$KN = BD \cdot cotg\varphi$$

به این ترتیب، ضلع‌های دو متوازی‌الاضلاع به نسبت $AC:BD$ هستند، یعنی با هم متشابه‌اند.

در حالتی کـه φ، زاویه‌ای قائمه باشد، نقطه‌های K، L، M و N برهم منطبق می‌شوند و مساله مفهوم خود را از دست می‌دهد.

۱۶۶. هرخط راست، مربع را به دوذوزنقه (یا دو مستطیل)، با نسبت مساحت‌های ۲:۳ تقسیم می‌کند. پاره‌خط راستی هم که وسط دوضلع روبه‌روی



شکل ۶۹

مربع را به هم وصل می‌کند (که در ضمن، از وسط ساق‌های ذوزنقه‌ها هم می‌گذرد)، به وسیلهٔ ساق مایل ذوزنقه، به‌همین نسبت قطع می‌شود؛ و این، از آن‌جا ناشی می‌شود که، مساحت ذوزنقه برابراست با حاصل‌ضرب ارتفاع در پاره‌خط راستی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند.

از این‌گونه نقطه‌ها، که پاره‌خط راست بین وسط دوضلع روبه‌روی مربع را به نسبت ۲:۳ تقسیم می‌کنند، روی هم چهار تا وجود دارد (شکل ۶۹) و، بنابراین، از بین ۹ خط راست مفروض، دست‌کم سه تا از یکی از این نقطه‌ها می‌گذرند (ضمیمهٔ ۹).

۱۶۷. با استفاده از قضیهٔ مربوط بـه زاویه‌های محاطی، مجموع سه زاویهٔ A_1، A_3 و A_5 را می‌توان به عنوان نصف مقدار زیر در نظر گرفت:

$$(360^\circ - \widehat{A_7A_1A_1}) + (360^\circ - \widehat{A_2A_3A_4}) + (360^\circ - \widehat{A_4A_5A_6}) =$$
$$= 720^\circ + \widehat{A_6A_7}$$

بنابر شرط مساله، نقطهٔ O دردرون هفت ضلعی است و، بنابراین کمان A_6A_7 نمی‌تواند از ۱۸۰ درجه بیشتر و یا با آن برابر باشد، یعنی

$$\widehat{A_1} + \widehat{A_3} + \widehat{A_5} < 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$$

۱۶۸. چهارمرتبهٔ این تفاضل را، به‌ترتیب ازچپ به‌راست، r_1، r_2، r_3، r_4 می‌نامیم. بازی به دو مرحله تجزیه می‌شود: «آغاز» و «پایان» ــ مرحلهٔ دوم وقتی شروع می‌شود که نفردوم، رقمی را در مرتبهٔ بزرگتر r_1 قرار می‌دهد. روشن است که در مرحلهٔ «آغاز»، نفراول نباید رقم‌های کوچك (از ۰ تا ۳) یا رقم‌های بزرگ (از ۶ تا ۹) را نام ببرد. زیرا نفر دوم، این رقم را، در

r_1 می‌گذارد (رقم کوچکتر را درعدد اول، و رقم بزرگتررا در عدد دوم) و. در این صورت، نفر دوم برنده می‌شود: اگر اختلاف رقم‌های اول از ۳ بیشتر نباشد، اختلاف عددها از ۳۹۹۹ بیشتر نمی‌شود. برعکس، اگر اولی از رقم ۴ (یا ۵) شروع کند، آن وقت، دومی می‌تواند به تفاضلی برسد که از ۴۰۰۰ کمتر نباشد: اودرحرکت خود، $r_1=\binom{4}{*}$ یا $r_1=\binom{*}{5}$ قرارمی‌دهد، سپس همهٔ رقم‌های ۰ (یا ۹) را. اگر اولی نام ببرد، در مرتبه‌های r_2، r_3 و r_4 می‌گذارد، تا وقتی‌که کار به پایان برسد؛ دراین صورت، اولی نمی‌تواند به وضعی بهتراز ($\begin{smallmatrix}4000\\0000\end{smallmatrix}$ یا $\begin{smallmatrix}9999\\5999\end{smallmatrix}$) برسد. برای دومی برنامه‌ای تنظیم کردیم که حکم a) را ثابت می‌کند.

ولی، اگردومی رقم‌های ۴ و ۵ را در مرتبه‌های r_2 تا r_4 قرار می‌داد و، در لحظهٔ مناسب،کار را تمام می‌کرد، آیا نمی‌توانست به تفاضل بیشتری برسد؟ برای این‌که اولی مانع این امر شود، باید مرتبهٔ r_i را با کوچکترین i، که در آن یکی از رقم‌ها عدد و دیگری ستاره است و یا دو عدد مختلف در آن قرار دارد، در نظر بگیرد. اگــر r_i برابر $\binom{*}{4}$ یا $\binom{*}{5}$ باشد، باید رقم ۵ را نام ببرد و اگربا $\binom{4}{*}$ یا $\binom{5}{*}$ روبه‌رو شود، رقم ۴ را (اگرهمهٔ ردیف‌ها بر هم منطبق و یا r_i به صورت $\binom{4}{5}$ باشد، می‌توان هــرکدام از دو عدد، و مثلاً ۵، را نام برد؛ با این برنامه‌ریزی، اولی به موقعیت خطرناك $r_i=\binom{4}{5}$ برخورد نمی‌کند). بعد ازحرکت دومی، اولی می‌تواند ۰ را نام ببرد (وقتی که در r_i، رقم در عدد بالا گــذاشته شده باشد و یا ۹ را (وقتی رقم، در r_i پایین گذاشته شود). بداین ترتیب، برنامهٔ حرکت اولی، برای اثبات b) روشن می‌شود.

$\triangledown$ اگر با عددهایی سروکار داشته‌باشیم که دارای $n \geqslant 1$ رقم باشند، می‌توان ثابت کردکه، به شرط بازی درست، برای تفاضل، عدد $4\times 10^{n-1}$ به دست می‌آید.

۱۶۹. پاسخ: حداکثر مقدار s برابراست با $\sqrt{2}$ و به ازای $x=\sqrt{2}$ و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست می‌آید.

باید روشن‌کنیم که، بدازای چه حداکثری از s، نابرابری‌های

$$x \geqslant s،\ y+\frac{1}{x} \geqslant s،\ \frac{1}{y} \geqslant s$$

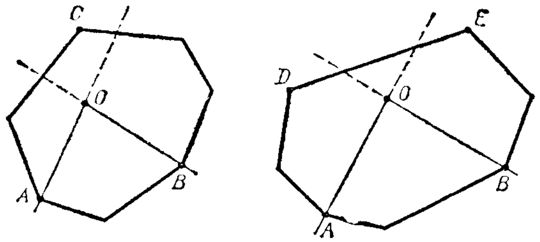
به‌طور هم زمان برقــرارند (درضمن، دست‌کم یکی از آن‌ها باید برابری باشد). s عددی است مثبت و، مثلاً بــرای $s=1$، نابرابری‌ها متوافق‌اند (مثلاً برای $x=1$ و $y=1$ ویا $x=1$ و $y=\frac{1}{2}$). از این نابــرابری‌ها می‌توان نتیجه گرفت:

$$y \leqslant \frac{1}{s}،\ \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{s}،\ s \leqslant y+\frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{s}$$

از آن‌جا $s^2 \leqslant 2$ و $s \leqslant \sqrt{2}$. حالتی وجود دارد کــه هر سه نابرابری، به برابری تبدیل می‌شوند: $y=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و در ضمن $s=\sqrt{2}$.

۱۷۰. حکم، برای مثلث ABC به سادگی ثابت می‌شود: اگر نقطهٔ O دردرون مثلث و، درضمن، مثلث‌های AOB، BOC و COA متساوی‌الساقین باشند، آن وقت از بین زاویه‌های AOB، BOC و COA، دست‌کم دوتا، از ۱۲۰ درجه بیشترند. این زاویه‌ها را AOB و BOC می‌گیریم. دراین‌صورت $AO=BO=OC$.

اکنون با استفاده ازاین‌حالت خاص، به‌عنوان پیش قضیه، حکم مساله را برای چندضلعی ثابت می‌کنیم. اگر A و B دورأس دلخواه از چندضلعی

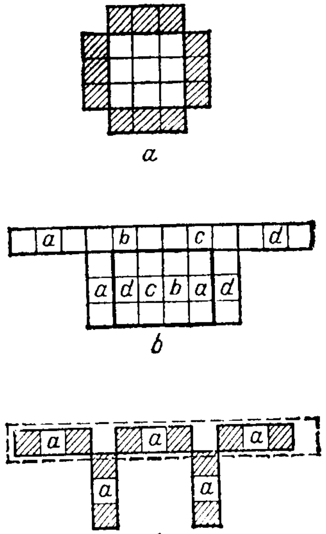


شکل ۷۵

باشند، آن وقت یا در درون زاویه‌ای که از امتدادهای AO و BO در نقطهٔ O تشکیل می‌شود، رأس E از چندضلعی قرار دارد و یا ضلع‌های این زاویه، ضلع ED از چندضلعی را قطع می‌کند (شکل ۷۰). در حالت اول، نقطهٔ O در درون مثلث ABC واقع است و، همان‌طور که در بالا ثابت کردیم، $AO=BO=CO$؛ در حالت دوم، نقطهٔ O در درون مثلث‌های BDE و ADE قرار دارد و بنابراین $AO=DO=EO=BO$.

۱۷۱. پاسخ: نمی‌توان.

یکی از کوتاه‌ترین روش‌هایی را می‌آوریم که ما را به تناقض می‌رساند. دو شکل را «یکسان» می‌نامیم، وقتی که، در آن، تعداد صفرها، واحدها و رقم‌های ۲، یکی باشد. مستطیل‌های هاشورخورده در شکل ۷۱، a را «یکسان» می‌گیریم (مربع ۳×۳، با هر یک از این شکل‌ها، مستطیلی ۴×۳ تشکیل می‌دهد)، بنابراین کافی است از شکل استاندارد برای چهار مستطیل ۴×۳ «یکسان» که در مربع ۳×۳ مشترک‌اند، این مربع را حذف کنیم تا چهار مستطیل باقی‌مانده، «یکسان» باشند). نوار ۱۲×۱ هم دارای همان محتوی



شکل ۷۱

استاندارد مستطیل ۴×۳ است (در شکل ۷۱، b، مستطیل‌های «یکسان»، با یک حرف نشان داده شده‌اند)، یعنی در این نوار پنج تا رقم ۲ وجود دارد. اکنون، مستطیل‌های a را با اندازه‌های ۱×۳ در نظر می‌گیریم (که در مرز صفحهٔ کاغذ نباشند)، که دست کم شامل دو تا رقم ۲ باشند؛ از چنین مستطیل‌هایی در هر مستطیل ۴×۳، که از چهار مستطیل ۱×۳ تشکیل شده و شامل پنج رقم ۲ است، پیدا می‌شود. آن‌ها را، آن‌طور که در شکل ۷۱، c (به صورت نقطه‌چین) نشان داده شده است، در ردیف به صورت مستطیل ۱۲×۱ قرار می‌دهیم. در این نوار، دست کم، ۶×۳، یعنی ۶ رقم ۲ وجود دارد. تناقض.

۱۷۲. پاسخ: کمترین مقدار s برابر است با $1-2^{-\frac{1}{n}}$، و وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم: $x_k=2^{\frac{k}{n}}\left(1-2^{-\frac{1}{n}}\right)$.

فرض می‌کنیم:

$$y_0=1,\ y_k=1+x_1+x_2+\dots+x_k,\ (1\leqslant k\leqslant n)$$

در این صورت $y_n=2$ و $x_k=y_k-y_{k-1}$. اگر هیچ کدام از عددهای مفروض، از s تجاوز نکنند، یعنی

$$\frac{x_k}{y_k}=\frac{y_y-x_{k-1}}{y_k}=1-\frac{y_{k-1}}{y_k}\leqslant s$$

آن وقت $\frac{y_{k-1}}{y_k}\geqslant 1-s$. اگر این نابرابری‌ها را، برای مقدارهای k از ۱ تا n، درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(1-s)^n\leqslant\frac{y_0}{y_n}=\frac{1}{2}\Rightarrow s\geqslant 1-2^{-\frac{1}{n}}$$

s وقتی به این مقدار می‌رسد که، برای هر k، داشته باشیم:

$$2^{-\frac{1}{n}} = 1 - s = \frac{y_{k-1}}{y_k}$$

یعنی وقتی که y_kها، تشکیل یک تصاعد هندسی به‌قدرنسبت $2^{\frac{1}{n}}$ بدهند:

$$y_1 = 2^{\frac{1}{n}},\ y_2 = 2^{\frac{2}{n}},\ \dots,\ y_n = 2$$

که دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$x_k = 2^{\frac{k}{n}} - 2^{\frac{k-1}{n}}$$

۱۷۳. درجدول مسابقه همهٔ عددهای زوج را با ۰ وهمهٔ عددهای فرد را با ۱، نشان می‌دهیم. جدول حاصل را A و عضوهای آن را a_{ij} می‌نامیم $(i, j = 1, \dots, n)$: $a_{ij} = 1$، وقتی تیم‌های iام و jام مساوی کرده باشند و $a_{ij} = 0$ درحالت عکس آن. جدولی کـه باصورت مساله سازگار باشد، متقارن است وعددهای روی قطرها برابرصفر است:

$$a_{ij} = a_{ji},\ a_{ij} = 0 \quad (\text{برای هر } i \text{ و } j) \qquad (1)$$

شرطی‌راکه درجدول ظاهر می‌شود، باتوجه به‌صورت مساله، می‌توان به‌این ترتیب تنظیم کرد: برای هر انتخـاب $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ از صفرها و واحدها، به‌جز $o = (0, \dots, 0)$، دست‌کم یکی ازعددهای

$$y_i = a_{i1}x_i + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \qquad (A)$$

فرداست. برای هر گروهی ازتیم‌ها، انتخاب x را درنظر می‌گیریم. با این شرط‌که، اگر jامین تیم جزو گروه باشد $x_j = 1$، واگر تیم jام جزوگروه نباشد $x_j = 0$؛ درضمن، y_i، برابراست باتعداد تساوی‌هایی‌که تیم iام با این‌گروه داشته است. گروه $(y_1, \dots, y_n)$ را، که از x به‌کمک جدول A وطبق قانون (A) به‌دست می‌آید، Ax می‌نامیم. ازآن‌جاکه، تنها به‌اختلاف بین عددهای زوج و فرد علاقه‌مندیم، بهتر است تنها با درنظرگرفتن دوعدد ۰ و۱، وبه‌حساب‌آوردن $0+0=0$، $0+1=1+0=1$ و $1+1=0$، کار راساده‌کنیم (درضمن، قانون‌های ضرب وهمهٔ قانون‌های دیگرحساب، به‌قوت

خودباقی‌است). دراین‌صورت، y هم، انتخابی از۰و۱ خواهدبود. درضمن، نیاز اصلی‌ما ازجدول، به‌این‌صورت درمی‌آید:

(۲) اگر $x \neq 0$، آنوقت $y = Ax \neq 0$.

این‌گونه جدول A را «روبه‌راه» می‌نامیم.

اکنون‌که، ازبازی هاکی، خودرا به‌طورکامل، به‌جبر رسانده‌ایم، می‌توانیم به‌حل مساله بپردازیم: باید ثابت کنیم، وقتی n عـددی زوج باشد، شرط‌های (۱) و(۲) نمی‌توانند باهم برقرارباشند. جدول A را، باحفظ‌این شرط‌ها، ساده می‌کنیم.

اگر درجدول A، سطردوم را به‌سطراول اضافه‌کنیم، شرط (۲)خراب نمی‌شود: اگر

$$Ax = y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

آنوقت، برای جدول جدید A'، خواهیم داشت:

$$A'x = y' = (y_1 + y_2, y_2, \dots, y_n)$$

واگر $y \neq 0$، آنوقت $y' \neq 0$. همچنین، اگرستون دوم جدول A را به‌ستون اول‌آن اضافه‌کنیم، بازهم شرط (۲) به‌هم نمی‌خورد: اگر

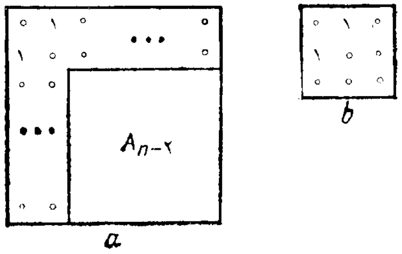
$$Ax = y,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

آنوقت، برای جدول جدید A'' خواهیم داشت:

$$A''x'' = y,\ x'' = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$$

واگر $x \neq 0$، آنوقت $x'' \neq 0$. روشن است کـه، به‌همین ترتیب، می‌توان iامین سطررا به jامین سطر ویا iامین ستون را به jامین ستون اضافه‌کرد؛ همچنین اگر دوتبدیل راباهم وبه‌طور هم‌زمان انجام دهیم، آنوقت، جدول جدید، نه‌تنها نسبت به (۲) بلکه درضمن نسبت به‌تقارن (۱) هم، «روبه‌راه» خواهدبود (درضمن، قانون $1+1=0$، صفرها را درقطرها حفظ‌می‌کند).

اکنون سعی‌می‌کنیم، جدول Aرا ساده‌کنیم. می‌توان فرض کردکه، «دو



شکل ۷۲

تیم اول، باهم بازی کرده‌اند»، یعنی $a_{21}=a_{12}=1$. اگر سطر اول (وهمچنین ستون اول) را به‌سطر (یاستونی) که در آن، واحدها درستون دوم (وسطر متناظر آن) قرار گرفته‌اند، اضافه کنیم، آن‌وقت ازهمهٔ این‌واحدها، خلاص می‌شویم؛ به‌همین ترتیب به‌کمک سطر دوم (وستون دوم)، از واحدهای ستون اول (و واحدهای سطر اول) خلاص می‌شویم و به‌جدول A_{n-2}، به‌صورتی که درشکل ۷۲، a نشان داده شده‌است، می‌رسیم. اگر دوسطر اول و دوستون اول‌را از جدول حذف کنیم، به‌جدول A_{n-2} با اندازه‌های $(n-2)\times(n-2)$ می‌رسیم که، مثل قبل، باشرط‌های (۱) و (۲) سازگار است؛ درواقع برای هر

$$x=(0, 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$$

داریم $Ax\neq 0$ وجدول باقی‌ماندهٔ A_{n-2}، درست به‌همان ترتیب، مختصات

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$$

را تبدیل می‌کند. اگر ساده کردن جدول را، به‌همین ترتیب ادامه دهیم، به جدول‌های A_{n-4}، A_{n-6}، ... می‌رسیم. اگر n عـددی فرد باشد، سرآخر به جدول 3×3 می‌رسیم که، بعد از ساده‌کردن، جدول A_3 در شکل ۷۲، b به دست می‌آید. ولی این جدول «روبه‌راه» نیست: اگر $x=(0, 0, 1)$، آن‌وقت $A_3x=0$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

▽ مضمون این‌مسأله بااین قضیهٔ جبرخطی تفاوتی ندارد که: ماتریس چپ $n\times n$، وقتی n عددی فرد باشد، «روبه‌راه نیست». این‌قضیه، درحوزهٔ دوعنصر ۰و۱، تا حدی دشوارتر می‌شود.

۱۷۴. حل مسألهٔ b) را می‌آوریم. متخصص می‌تواند به این ترتیب عمل کند.

۱°. متخصص، سکهٔ اول‌را درکفهٔ چپ وسکهٔ هشتم را در کفهٔ راست ترازو می‌گذارد وچون کفهٔ راست سنگین‌تراست، قاضی اطمینان پیدا می‌کند که سکهٔ اول تقلبی وسکهٔ هشتم واقعی‌است.

۲°. سکه‌های دوم، سوم وهشتم را درکفهٔ راست و سکه‌های نهم، دهم واول را درکفهٔ چپ می‌گذارد. کفهٔ چپ سنگین‌تراست، وقاضی‌قانع‌می‌شود که سکه‌های دوم وسوم تقلبی وسکه‌های نهم ودهم واقعی‌اند.

۳°. درکفهٔ چپ، سکه‌های چهارم، پنجم، ششم، هفتم،هشتم، نهم‌ودهم؛ و در کفهٔ راست، بقیهٔ سکه‌ها را قرار می‌دهد. کفـهٔ راست سنگین‌تر است وقاضی می‌بیند که درآن، سکه‌های واقعی بیشتر ازکفهٔ چپ است، همچنین، درکفهٔ چپ، تعداد سکه‌های تقلبی‌بیشتر ازکفهٔ راست‌است واین‌ثابت می‌کند که، سکه‌های چهارم، پنجم، ششم وهفتم تقلبی وسکه‌های ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ حقیقی‌اند.

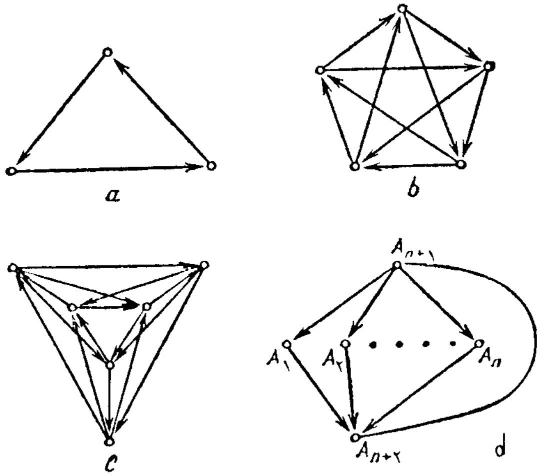
▽ به‌همین ترتیب می‌توان 2^k-1 سکهٔ تقلبی و 2^k-1 سکهٔ حقیقی را، ضمن k مرتبه استفاده از ترازو، ازهم جداکرد (برای هر $k\geqslant 1$).

۱۷۵. فرض می‌کنیم، عدد $D=A^2$، که با شرط‌های مسأله سازگار است، وجود دارد. روشن است کـه عدد A به ۵ ختم شده است، بنابراین $A=10a+5$. ازاین‌جا

$$D=100a(a+1)+25$$

به ۲۵ ختم می‌شود عدد $a(a+1)$ بـه ۲، ۶ یا صفر ختم می‌شود. بنابراین، سومین رقم از سمت راست عدد D برابر ۶ است (۰ بین رقم‌هـای عدد D وجود ندارد. از رقم ۲ هم دوبار استفاده نمی‌شود)، یعنی $D=1000k+625$. می‌بینیم که D، بر $5^3=125$، وبنابراین بر 5^4 بخش‌پـذیر است. یعنی k بخش‌پذیر بر ۵است و، بنابراین، رقم چهارم عدد ازسمت راست بایدبرابر ۰ یا ۵ باشد، که ممکن نیست.

۱۷۶. مسأله بااستقـرا حل می‌شود. برای $n=3$، $n=5$ و $n=6$،



شکل ۷۳

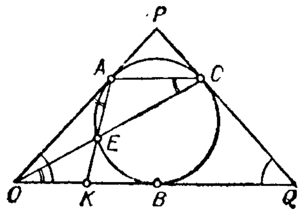
دستگاه لازم پیکان‌ها، درشکل‌های ۷۳، a، b و c نشان داده شده‌است. در شکل۷۳، d یکی‌از روش‌هایی نشان داده شده است که، به‌کمك آن‌می‌توان، ازدستگاه شامل n نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n (که با پیکان‌هایی به‌صورت مورد‌نظر بههم وصل شده‌اند)، بـه‌دستگاه لازم برای $n+2$ نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n، A_{n+1}، A_{n+2} رسید. برای این‌منظور، به‌پیکان‌های موجود، این‌پیکان‌ها را اضافـه می‌کنیم: از A_{n+1} به‌سمت همهٔ نقطه‌هـای A_1، A_2، ...، A_n و، سپس، از هریك ازنقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n به‌سمت A_{n+2} و، سرانجام، از A_{n+2} به‌سمت A_{n+1}.

دراین‌صورت، بنا براصل استقرای ریاضی، حکم مساله برای عددهای فرد $n\geqslant ۳$ و عددهای زوج $n\geqslant ۶$ درست است.

برای $n=۴$، نمی‌توان چنین دستگاهی را پیدا کرد.

۱۷۷. مماس بردایرهٔ مفروض‌را درنقطهٔ C رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخوردآن را باضلع‌های زاویه، P و Q می‌نامیم. چون $AP=PC$، پس مثلث APC و، همـراه با آن، مثلث OPQ متساوی‌الساقین است. بنا براین (شکل ۷۴):

$$AO=CQ=OB=BQ$$



شکل ۷۴

توجه می‌کنیم: $\widehat{OAE}=\widehat{OCA}=\widehat{COQ}$ و $\widehat{AOB}=\widehat{CQB}$. ازتشابه دومثلث OAK و QOC نتیجه می‌شود:

$$\frac{OK}{OA}=\frac{CQ}{OQ}=\frac{۱}{۲}$$

یعنی $OK=\frac{OA}{۲}=\frac{OB}{۲}$. برابری دوزاویهٔ OAE و ACO از قضیهٔ مربوط به‌زاویهٔ بین‌مماس و وتر (زاویهٔ ظلی) نتیجه می‌شود.

۱۷۸. فرض کنید: $f(x)=ax^۲+bx+c$ و $g(x)=cx^۲+bx+a$. چون $f(۱)=g(۱)$ و $f(-۱)=g(-۱)$، بنابـراین $|g(۱)|\leqslant ۱$ و $|g(-۱)|\leqslant ۱$، به‌جزاین، $|c|=|f(۰)|\leqslant ۱$.

فرض می‌کنیم، برای مقداری از x داشته باشیم: $|g(x)|>۲$. دراین‌صورت، اگر رأس سهمـی را با مختصات $(x_۰, g(x_۰))$ بگیریـم، داریم: $|x_۰|\leqslant ۱$ و $|g(x_۰)|>۲$. از طرف دیگر، $g(x)$ را می‌تـوان این‌طور نوشت:

$$g(x)=c(x-x_۰)^۲+g(x_۰)$$

دراین برابری به‌جای x، از بین دوعدد -۱ و ۱، آن‌راکه به $x_۰$ نزدیکتر است، قرار می‌دهیم (برای روشن‌بودن وضع، این عدد را $+۱$ می‌گیریم. دراین‌صورت $|۱-x_۰|\leqslant ۱$ و بنا براین

$$|g(x_۰)|=|g(۱)-c(۱-x_۰)^۲|\leqslant g(۱)+|c|<۱+|c|\leqslant ۲$$

که با نابرابری $g(x)>۲$ متناقض است.

مثال $f(x)=2x^2-1$ نشان می‌دهد که ارزیابی $|g(x)|\leqslant 2$ را نمی‌توان بهتر کرد. (دراین حالت $g(x)=-x^2+2$).

۱۷۹. پاسخ: بزرگترین شمارهٔ ممکن برای برنده، برابر است با ۲۰.

چون بازی‌کن باشمارهٔ k (بدون در نظر گرفتن تنیس‌بازان قوی‌تر)، تنها ممکن‌است به‌دو تنیس‌باز باشماره‌های $k+1$ و $k+2$ ببازد، بنابراین، بعداز هر دور بازی، در بین پیروزشدگان، هیچ‌کس نمی‌تواند بیش از دو ردیف جلوتر رفته باشد؛ بداین ترتیب، شمارهٔ برندهٔ همهٔ دورها، نمی‌تواند از ۲۱ بیشتر باشد. باوجود این، ثابت می‌کنیم، تنیس‌باز با شمارهٔ ۲۱، نمی‌تواند برندهٔ مسابقه باشد. برای این‌منظور، باید بعداز دور اول بازی، شماره‌های ۳ و ۴، شماره‌های ۱و۲ را ازمیدان بیرون‌کرده باشند (درغیراین صورت، شمارهٔ برنده از۲۱ کمتر می‌شود)؛ در دوردوم باید شماره‌های ۵ و ۶، شماره‌های ۳ و ۴ را شکست دهند و غیره تاآن‌جاکه، در دور نهم‌بازی، که شماره‌های ۱۹و۲۰ برشماره‌های ۱۷ و ۱۸ پیروزمی‌شوند. به‌این‌ترتیب، شمارهٔ ۲۱ به‌فینال، که درآن باید دونفر باهم روبه‌رو شوند، نمی‌رسد.

این‌مطلب باقی می‌ماندکه نمونه‌ای از مسابقه را بیاوریم که، درآن، تنیس‌باز شمارهٔ ۲۰ به‌پیروزی می‌رسد. برای این منظور، همهٔ تنیس‌بازان را، به‌دو گروه ۵۱۲ نفری تقسیم می‌کنیم. در گروه اول، شماره‌های ۱۹ و ۲۰ و ۵۱۰ نفراز ضعیف‌ترین بازی‌کن‌ها را قرار می‌دهیم. مسابقهٔ گروه راطوری تنظیم‌می‌کنیم که شمارهٔ ۲۰ برنده شود (روشن‌است که، این‌امر، ممکن‌است). درگروه دوم شماره‌های ۱تا۱۸ وبقیهٔ ضعیف‌ترین بازی‌کن‌ها را قرار می‌دهیم و مسابقه را طوری تنظیم می‌کنیم که نفر شمارهٔ ۱۸ پیروز شود. اگر مسابقه را، به‌شکلی‌که دربالا شرح دادیم، تنظیم‌کنیم، این‌امر ممکن‌است: در دور اول شماره‌های ۳و۴، ازشماره‌های ۱و۲ می‌برند، دردور دوم ۵ و۶از ۳و۴ می‌برند وغیره تاجایی‌که شماره‌های ۱۷و۱۸ از شماره‌های ۱۵ و۱۶ برنده شوند و، بعدازآن، در دورنهم، شمارهٔ۱۸ ازشمارهٔ ۱۷ ببرد. درفینال شماره‌های ۱۸ و۲۰ باهم روبه‌رو می‌شوند و، بنابراین، شمارهٔ ۲۰می‌تواند برنده باشد.

▽ با استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که، اگربا 2^n بازی‌کن سروکار داشته باشیم، بزرگترین شماره‌ای که می‌تواند برنده شود، شمارهٔ $2n$ است.

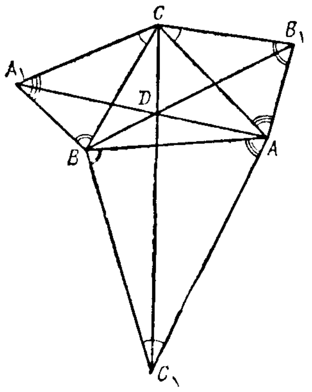
۱۸۰. اگرمعادلهٔ $f(x)=x$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، به‌معنای آن است که به‌ازای همهٔ مقدارهای x، یا $f(x)>x$ (اگر $a>0$) و یا $f(x)<x$ (اگر $a<0$)، ولی دراین‌صورت، یا $f(f(x))>f(x)>x$ ویا $f(f(x))<f(x)<x$؛واین به‌معنای آن‌است که‌معادلهٔ $f(f(x))=x$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

▽ حکم مساله، نه تنها برای سه جمله‌ای درجه دوم، بلکه برای هر تابع پیوسته‌ای درست است.

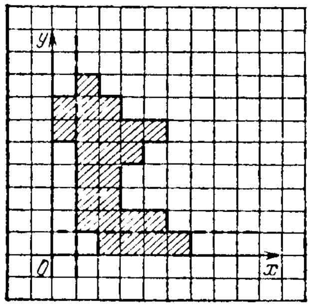
۱۸۱. a) یادآوری می‌کنیم که، اگر، به مجموعهٔ مفروض خانه‌های سیاه، بازهم چند خانهٔ سیاه اضافه کنیم، آن‌وقت بعد از رنگ‌آمیزی، تنها می‌تواند خانه‌های‌سیاه اضافی، حاصل‌شود. به‌مجموعهٔ نخستین Mازخانه‌ها، خانه‌هایی اضافه می‌کنیم تا مربع سیاه $m+m$ خانه‌ای بدست آید.

بعداز $2m-1$ گام، ازمربع (ودرنتیجه، ازM) چیزی‌باقی‌نمی‌ماند.

b) مجموعهٔ خانه‌های سیاه را، که ازM بعداز t گام به‌دست می‌آید، M_t می‌نامیم. بااستقرا نسبت به‌n ثابت می‌کنیم، برای هرمجموعهٔ M از n خانه، M_n مجموعه‌ای تهی‌است. این‌مطلب، به‌ازای $n=1$ روشن‌است.فرض می‌کنیم، حکم، برای مجموعه‌هایی‌که‌کمتر ازn خانه دارند، ثابت‌شده باشد ومجموعهٔ دلخواه M را، شامل n خانه، درنظر می‌گیریم. می‌توانM رادر صفحهٔ مختصاتی Oxy، در ربع $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ در نظر گرفت، به‌نحوی که درنوار $0\leqslant x\leqslant 1$ و $0\leqslant y\leqslant 1$، دست‌کم یک‌خانه ازM وجودداشته باشد (شکل ۷۵). در این صورت، بنابر فرض استقرا، M_{n-1} با ربع $x\geqslant 1$، $y\geqslant 0$ اشتراکی ندارد (خانه‌هایی که در نوار $0\leqslant x\leqslant 1$ قرار دارند، اثری براصل مطلب، به‌ازای $x\geqslant 1$ ندارند). بنابراین، M_{n-1} در نوار $0\leqslant x\leqslant 1$ واقع است. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت‌کردکه M_{n-1} تنها شامل یک خانه است و M_n تهی می‌شود.



شکل ۷۶



شکل ۷۵

۱۸۲. D را نقطهٔ برخورد AA_1 و BB_1 می‌گیریم. چون دو زاویهٔ A_1CA و B_1CB باهم برابرند (شکل ۷۶) و $A_1C:BC = AC:B_1C$، دو مثلث A_1CA و B_1CB باهم متشابه‌اند و، بنابراین زاویه‌های DBC و DA_1C باهم برابر می‌شوند. بداین ترتیب، نقطه‌های B، D، C و A_1 روی محیط یك دایره‌اند. بههمین‌ترتیب، ثابت می‌شود که نقطه‌های A، D، C و B_1 هم روی محیط یك دایره واقع‌اند، یعنی D نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های A_1BC و AB_1C است.

اکنون توجه‌می‌کنیم که

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{ADB_1} = 180^\circ - \widehat{AC_1B}$$

بنابراین نقطه‌های A، D، B و C_1 روی محیط یك دایره‌اند. به این ترتیب، D، نقطهٔ برخورد هر سه دایرهٔ محیط بر مثلث‌هاست و، طبق آن چه قبلاً ثابت‌شد، خط‌راست CC_1 هم ازنقطهٔ D می‌گذرد.

۱۸۳. این مساله را می‌توان با استقرای ریاضی حل‌کرد. در این جا از راه‌حل دیگری استفاده می‌کنیم.

افراد را از ۱ تا N شماره گذاری و فرد با شمارهٔ i را به شرطی با فرد شمارهٔ j آشنا می‌کنیم که داشته باشیم: $|i-j| \leqslant \frac{N}{2}$. به سادگی دیده

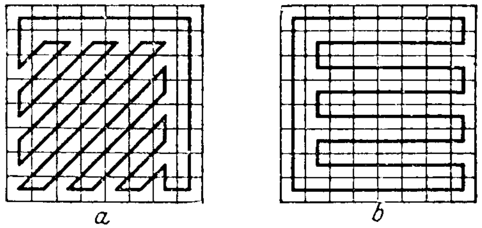
می‌شودکه، در این صورت، تعدادآشناهای یکسان تنها بین‌افراد باشماره‌های k و $N-k$ خواهد بود. به این ترتیب، هیچ سه نفری، تعداد آشناهای مساوی ندارند.

۱۸۴. a) شکل ۷۷، b را ببینید.

b) هر یك از ۲۸ میدان‌کناری را روی صفحهٔ شطرنج جدا می‌کنیم. شاه ضمن دور زدن صفحه، در هر یك ازآن‌ها خواهد بود. این میدان‌ها را بههمان ردیفی که شاه‌دیدن کرده است، شماره‌گذاری می‌کنیم. مسیر شاه به ۲۸ قطعه تقسیم می‌شود: از میدان ۱ به‌میدان ۲، ازمیدان ۲ به میدان۳، ...، ازمیدان ۲۸ به‌میدان ۱. فرض می‌کنیم، مسیر شاه برخوردی با خود نداشته باشد، بنابراین، خانه‌های ۱ و۲، ۲ و۳، ...، ۲۷ و۲۸، ۲۸ و ۱، خانه‌های مجاور حاشیهٔ باریك را تشکیل می‌دهند. (اگر مثلاً خانه‌های ۱ و۲ مجاور نباشند، آن وقت این خانه‌ها، حاشیهٔ کناری را به دوبخش تقسیم می‌کنند و مسیرشاه، ازهرخانهٔ یکی ازاین بخش‌ها، به هرخانهٔ دیگر، بخش «۲ — ۱» را قطع می‌کندکه با شرط مساله درتناقض است.) ولی برای این‌که شاه در خانهٔ مجاور حاشیه بیفتد، باید در یکی از گام‌ها، از خانه‌ای به خانهٔ با رنگ دیگری برود، یعنی حرکت خود را درجهت قائم یا جهت افقی انجام دهد. ازاین‌جانتیجه‌می‌شودکه، درمسیرشاه، کمتر از۲۸ حرکت ممکن نیست.

c) روشن است که، طول مسیر شاه، از ۶۴ کمتر نیست و چنین‌مسیری وجود دارد (شکل ۷۷-b).

از طرف دیگر ثابت کردیم که مسیر شاه، کمتر از ۲۸ پاره خط راست به طول واحد ندارد. بنابراین، شاه می‌تواند حداکثر ۳۶ حرکت قطری داشته باشد، به نحوی‌که تمامی مسیر او از $۲۸ + ۳۶\sqrt{۲}$ بیشتر



شکل ۷۷

نمی‌شود (نمونهٔ چنین مسیری در شکل ۷۷، a داده شده است).

۱۸۵. چون $1 \leqslant \frac{1}{2}bc \leqslant \frac{1}{2}b^2$؛ پس $b \geqslant \sqrt{2}$.

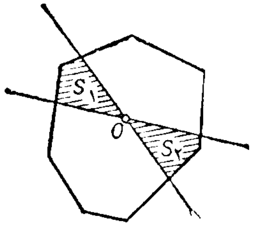
۱۸۶. هر دو خط راستی را که از نقطهٔ O، واقع در درون n ضلعی می‌گذرند و مساحت n ضلعی M را نصف می‌کنند، باهم، در نظر می‌گیریم. در این صورت، بین دوزاویه روبه‌روکه به وسیلهٔ این دو خط راست تشکیل شده است، بخش‌های برابری ازمساحت n ضلعی واقع است (s_1 و s_2 روی شکل ۷۸).

چندضلعی M' راقرینهٔ چندضلعی M نسبت به O فرض‌می‌کنیم. اگر از نقطهٔ O، k خط‌راست طوری عبور کندکه، هرکدام از آن‌ها مساحت را نصف کند، آن وقت در هر یك از $2k$ زاویه کـه بـه وسیلهٔ این k خط راست در صفحه به وجود می‌آید، باید نقطهٔ برخوردی از محیط‌های M و M' وجود داشته باشد.ولی روی‌هرضلع چندضلعی M، بیش‌ازدونقطه ازاین گونه نقطه‌های برخورد وجود ندارد. یعنی، اگر M دارای n ضلع باشد،تعداد نقطه‌های برخورد از $2k$ کمتر و از $2n$ بیشتر نیست، از این جا $k \leqslant n$.

۱۸۷. اگر $x_2 \geqslant x_1$، آن وقت نابرابری نتیجه‌ای ازاتحاد زیر است:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2=$$
$$=4(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)=4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+$$
$$+x_4x_5+x_5x_1)+4x_5(x_2-x_1)+4x_1x_4\,.$$

و اگر $x_2 < x_1$، به همان ترتیب، از اتحاد زیر استفاده می‌شود:



شکل ۷۸

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-(x_1-x_2-x_3+x_4-x_5)^2=$$
$$=4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)+$$
$$4x_3(x_1-x_2)+4x_2x_4$$

▽ به‌طور کلی، نابرابری

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)^2 \geqslant c_n(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1)$$

برای $c_2=2$، $c_3=3$ و $c_4=4$ برقراراست (درضمن، به‌ازای این‌مقدارهای n، نابرابری برای‌همهٔ مقدارهای x_i برقراراست ولزومی ندارد x_iها، مثبت باشند). همچنین، به ازای همهٔ مقدارهای $n \geqslant 5$ ($x_i > 0$)، برای $c_n = 4$ برقرار است. حکم اخیر ازاثباتی‌که برای $n=5$ داشتیم، به‌کمك استقرا به دست می‌آید: اگربه صورت دوری حرکت‌کنیم وشماره‌ها را طوری بگیریم که x_{n+1} کوچکترین باشد، آن وقت

$$(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})^2-(x_1+x_2+\dots+x_n)^2 \geqslant$$
$$\geqslant -4x_1x_n+4x_1x_{n+1}+4x_nx_{n+1}$$

زیرا

$$2x_{n+1}(x_2+\dots+x_{n-1})+(x_{n+1}-2x_1)(x_{n+1}-2x_n) \geqslant 0$$

۱۸۸. پاسخ: ۲۹ متوازی‌السطوح.

یادآوری می‌کنیم که متوازی‌السطوح با معلوم بودن یکی از رأس‌ها و سه صفحهٔ «میانه» (صفحه‌هایی کـه، هر کـدام از آن‌ها، از رأس‌های متوازی‌السطوح به یك فاصله‌اند، یعنی از مرکز متوازی‌السطوح می‌گذرند و با دو وجه آن موازی‌اند)، به‌طور یك ارزشی‌معین می‌شود.

برای چهار نقطهٔ مفروض K، L، M و N، (به شرطی که روی یك صفحه نباشند)، هفت صفحه وجود دارد کـه از این نقطه‌ها به یك فاصله‌اند (آن‌ها، چهاروجهی $KLMN$ را در یال‌های «میانه» قطع می‌کنند). ازاین هفت صفحه، سه صفحه را می‌توان به $C_7^3 = 35$ طریق انتخاب کرد.

ولی ما به سه صفحه‌ای نیاز داریم که در یك نقطه به هم رسیده باشند. بنابراین، از بین این سه‌تایی‌ها، باید آن‌هایی را که با یك خط راست موازی‌اند، کنار گذاشت. از این گونه صفحه‌های سه‌تایی، ۶ مورد وجود دارد: این‌ها گروه‌های سه‌تایی صفحه‌هایی‌هستند که با یکی از ۶ یال چهاروجهی موازی‌اند. با انتخاب یکی از $۲۹ = ۶ - ۳۵$ گروه سه‌تایی از صفحه‌های «میانه»، می‌توانیم به‌وسیلهٔ چهار رأس مفروض، یك متوازی‌السطوح بسازیم؛ برای ایـن منظور، کافی است از چهار نقطهٔ مفروض، صفحه‌هایی موازی با صفحه‌های «میانه» رسم کنیم.

۱۸۹. پاسخ: a) ۱۰ پرسش؛ b) ۱۱؛ c) ۱۲؛ d) ۵۰.

a) ۳۰ عدد را به ۱۰ گـروه سه‌تایی تقسیم می‌کنیم و حاصل‌ضرب عددهای‌هر گروه‌را می‌پرسیم. روشن‌است که با تعداد کمتری پرسش نمی‌توان به نتیجه رسید، زیرا هرعدد باید دریکی‌از گروه‌های سه‌تایی‌وارد شده باشد.

b) حاصل‌ضرب هفت عدد اول را می‌توان به کمك حاصل‌ضرب‌های $a_۱a_۲a_۳$، $a_۱a_۴a_۵$ و $a_۱a_۶a_۷$ پیداکرد؛ و بقیهٔ ۲۴ عدد را، مثل حالت a)، به گروه‌های سه تایی تقسیم می‌کنیم. روشن است کـه، در این حالت‌هم، نمی‌توان با تعداد کمتری پرسش به نتیجه رسید.

c) حاصل‌ضرب ۵ عدداول را ازروی $a_۱a_۲a_۳$، $a_۱a_۲a_۴$ و $a_۱a_۲a_۵$ به دست می‌آوریم و بقیهٔ عددها را به گروه‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم.

از آن‌جا که هرعدد باید دریك‌گروه سه‌تایی وارد شده‌باشد، بنابراین روشن است‌که، تعداد پرسش‌ها نمی‌توانند از ۱۱ کمتر باشد. درضمن، یکی از عددها، درست در دوگروه سه‌تایی وارد شده است (اگر در بیش از دو گروه وارد شده باشد، آن وقت عددی پیدا می‌شود‌که درهیچ‌کدام ازگروه‌ها وارد نشده است). در حاصل‌ضرب ۱۱ گروه سه‌تایی، مجذور این عدد وجود دارد و، بنابراین، حاصل‌ضرب همهٔ این عددها روشن نمی‌شود.

d) با ۵۰ پرسش می‌توان از حـاصل‌ضرب‌های $a_۱a_۲a_۳$، $a_۲a_۳a_۴$، $a_۳a_۴a_۵$، ...، $a_{۵۰}a_۱a_۲$ اطلاع پیداکرد. ازحاصل‌ضرب این‌ها،مکعب حاصل‌ضرب همهٔ عددها به‌دست می‌آید‌که برحاصل‌ضرب خود عددها منطبق است.

کمتر از ۵۰ پرسش کافی نیست. اگر حاصل‌ضرب یکی ازگروه‌های سه‌تایی، ومثلاً $a_۱a_۲a_۳$ را ندانیم، آن‌وقت دونوع انتخاب ازحاصل‌ضرب‌های مختلف وجود دارد که، برای آن‌ها، حاصل‌ضرب همهٔ بقیهٔ سه‌تایی‌ها، یکی است: گروهی که در آن

$$a_۱ = a_۲ = a_۳ = a_۴ = \cdots = a_{۴۸} = ۱$$

و بقیهٔ عددها مساوی ۱ـ باشند و گروهی‌که همهٔ عددها برابر۱ باشند. در گروه اول، حاصل‌ضرب همهٔ سه تایی‌ها، به جز $a_۱a_۲a_۳$ برابر ۱ و در گروه دوم حاصل‌ضرب همه سه‌تایی‌ها برابر ۱ می‌شود.

▽ برای n عدد که، بین آن‌ها، می‌توان از حاصل ضرب سه عدد اطلاع پیداکرد، مثل مساله‌های a) و b) و c)، کمترین تعداد پرسش، برای $n=۳k$ برابر k، برای $n=۳k+۱$ برابر $k+۱$ و برای $n=۳k+۲$ برابر $k+۲$ است. ولی اگر بخواهیم از حاصل‌ضرب عـددهای واقع بر محیط دایره اطلاع داشته باشیم (و در هر پرسش تنها بتوانیم حاصل‌ضرب سه عدد مجاور را مشخص کنیم)، وقتی n بر ۳ بخش‌پذیر باشد، به $\frac{n}{۳}$ پرسش و وقتی n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، به n پرسش نیاز داریم.

۱۹۰. پاسخ: $۱۱ = ۳۶ - ۵^۲$.

رقم آخر عدد $۳۶^k = ۶^{۲k}$ برابر ۶ و رقم آخر ۵^l برابر ۵ است. بنابراین، عدد $|۵^l - ۶^{۲k}|$ یا به ۱ ختم می‌شود (اگر $۶^{۲k} > ۵^l$) و یا به ۹ (یعنی $۵^l > ۶^{۲k}$). برابری $۶^{۲k} - ۵^l = ۱$ ممکن نیست. زیرا دراین صورت باید داشته باشیم:

$$۵^l = (۶^k - ۱)(۶^k + ۱)$$

و عدد $۶^k + ۱$ بر ۵ بخش‌پذیر نیست. به‌ازای $k = ۱$ و $l = ۲$ به‌دست می‌آید:

$$۳۶^k - ۵^l = ۱۱$$

برابری $۵^l - ۶^{۲k} = ۹$ هم ممکن نیست، زیرا ۵^l، به ازای عددهای طبیعی

l، بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۱۹۱. a) پاسخ: نه همیشه. مثلاً، اگر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول ۲، مثلث‌های متساوی‌الساقین به ارتفاع $\frac{1}{10}$ بسازیم، همهٔ ضلع‌های شش‌ضلعی حاصل، بیشتر از واحد است. در حالی‌که طول هر قطر آن از ۲ تجاوز نمی‌کند.

b) پاسخ: همیشه.

بین قطرهای AD، BE و CF، دو قطر پیدا می‌شود که زاویهٔ بین آن، α، از ۶۰ درجه کمتر نیست. این دو قطر را، مثلاً، AD و BE می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع $BEDK$ را می‌سازیم. چون

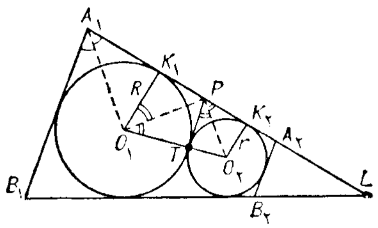
$$BE=DK>2,\ AD>2,\ \widehat{DAK}=\alpha\geqslant 60^\circ$$

بنابراین $AK>2$، ولی $AK\leqslant AB+BK$، بنابراین یا $AB>1$ و یا $ED=BK>1$.

۱۹۲. از تشابه مثلث‌های O_1K_1P و PK_2O_2 (طبق نام‌گذاری‌های شکل ۷۹) به دست می‌آید $K_1P\cdot PK_2=Rr$. همچنین از تشابه مثلث‌های $A_1K_1O_1$ و $A_2K_2O_2$ نتیجه می‌شود: $A_1K_1\cdot K_2A_2=Rr$. اکنون، بدون زحمت، به دست می‌آید:

$$K_1P=PK_2=\sqrt{Rr} \quad \text{و} \quad A_1K_1+K_2A_2\geqslant 2\sqrt{Rr}$$

(واسطهٔ حسابی، از واسطهٔ هندسی، کمتر نیست). بنابراین، اگر نقطهٔ A_2، که برای آن $K_2A_2=\sqrt{Rr}$، بین K_2 و L واقع باشد، آن‌وقت طول کوچکترین ساق ذوزنقه برابر می‌شود با



شکل ۷۹

$$A_1K_1+K_1K_2+K_2A_2=4\sqrt{Rr}$$

و اگر $A_2K_2\geqslant K_2L$، یعنی

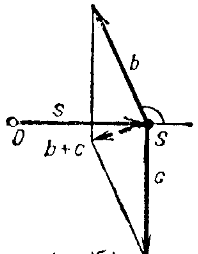
$$\sqrt{Rr}\geqslant\sqrt{Rr}\cdot\frac{2r}{R-r}=q,\ R\geqslant 3r$$

آن وقت

$$A_1A_2>2\sqrt{Rr}+q+\frac{Rr}{q}=\sqrt{Rr}\cdot\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$$

به این ترتیب، به ازای $R>3r$، حداقل طول ساق برابر $4\sqrt{Rr}$ می‌شود. اگر هم $R\leqslant 3r$، آن وقت ذوزنقهٔ با کوچکترین ساق وجود ندارد. درضمن، می‌توان حکم کرد که طول ساق، از $\sqrt{Rr}\cdot\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$ بیشتر است (این ارزیابی، دقیق است).

۱۹۳. همهٔ بردارها را، به مبداء نقطه‌ای مثل O می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، اگر k بردار به مجموع $s=\overrightarrow{OS}$ (شکل ۸۰) و $|s|\geqslant 1$ انتخاب کنیم، آن وقت، از بین بقیهٔ بردارها می‌توان یا یک بردار a را انتخاب کرد که برای آن $|\mathbf{s}+\mathbf{a}|\geqslant 1$ و یا دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را می‌توان درنظر گرفت که برای آن‌ها $|\mathbf{s}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|\geqslant 1$. درواقع، اگر بین بقیهٔ بردارها بردار $\mathbf{a}$ وجود دارد که برای آن $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{s})}\leqslant 120^\circ$، آن‌وقت $|\mathbf{a}+\mathbf{s}|\geqslant 1$. ولی اگر چنین برداری وجود نداشته باشد، آن وقت، چون در هردو طرف خط راست DS، بردارهایی از دستگاه وجود دارد، می‌توان به عنوان $\mathbf{b}$



شکل ۸۰

برداری را انتخاب کرد که، در یکی از دو نیم‌صفحه، بزرگترین زاویه را با s بسازد. به همین ترتیب، بردار c را در نیم صفحهٔ دیگر در نظر می گیریم.
روشن است که یکی از دو زاویهٔ $\widehat{(\mathbf{c},\mathbf{s})}$ یا $\widehat{(\mathbf{b},\mathbf{s})}$ منفرجه است و، بنابراین، $\widehat{(\mathbf{b},\mathbf{c})} > 120^\circ$ مثلا فرض کنید $\widehat{(\mathbf{b},\mathbf{s})} > 90^\circ$ در اینصورت $|\mathbf{s}+\mathbf{b}| < \sqrt{2}$، ولی، $\widehat{(\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{s})} > 12$ و در نتیجه $|\mathbf{s}+\mathbf{b}+\mathbf{c}| \leqslant 1$. به این ترتیب، اگر به دستگاه با مجموع $\mathbf{s}$، ابتدا بردار $\mathbf{b}$ وسپس بردار $\mathbf{c}$ را اضافه کنیم، بعد از هر کام، مجموع از $\sqrt{2}$ کوچکتر است.

$\sqrt{2}$ ثابت کردیم که، در صورت مساله، می‌توان ۲ را با $\sqrt{2}$ عوض کرد. با استدلالی ظریف‌تر می‌توان ثابت کرد که همیشه می‌توان بردارها را طوری شماره گذاری کرد که مجموع k بردار اول آن از $\frac{\sqrt{5}}{2}$ بیشتر نباشد؛ در ضمن، ارزیابی اخیر، کاملاً دقیق است: مثال $2n+1$ بردار که یکی از آن‌ها $(-1, 0)$، n عدد آن‌ها $\left(\frac{1}{n}, \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$ و n عدد دیگر آن $\left(\frac{1}{n}, -\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$ باشند، نشان می‌دهد که عدد $\frac{\sqrt{5}}{2}$ را نمی‌توان کوچکتر کرد.

قضیهٔ مشابهی وجود دارد، که آن را پیش‌قضیه شتینر گویند. و آن را می‌توان درفضای m بعدی ثابت کرد (برای هر «نُرم» وطولی از بردارها)؛ در ضمن، ثابت متناظر شتینر از m تجاوز نمی‌کند.

۱۹۴. پاسخ: از بین عددهای a، b و c، دو عدد برابر ۰ و سومی برابر ± 1 (روی هم، شش جواب).

کافی است در اتحاد مفروض، پشت سر هم قرار دهیم:

$$x=y=z=1;\ x=y=0 \text{ و } z=1;\ x=1 \text{ و } y=-1 \text{ و } z=0$$

به این دستگاه می‌رسیم:

$$|a+b+c|=1,\ |a|+|b|+|c|=1,$$

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2$$

چون $|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$، بنابراین a،bوc هم‌علامت‌اند، یعنی $ab \geqslant 0$، $bc \geqslant 0$، $ca \geqslant 0$ ولی در نابرابری

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| \leqslant 2|a|+2|b|+2|c|=2$$

(برای نابرابری، از $|a-b| \leqslant |a|+|b|$ استفاده کرده‌ایم)؛ برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $ab \leqslant 0$، $bc \leqslant 0$، $ac \leqslant 0$. از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$ab=bc=ac=0$$

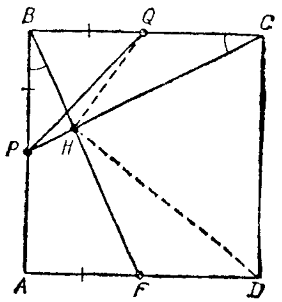
یعنی دو عدد از سه عدد a، b و c برابر صفر و سومی (با توجه به یکی از معادله‌های دستگاه)، از لحاظ قدرمطلق، برابر واحد است.

۱۹۵. F را نقطهٔ برخورد خط راست BH با خط راست AD می‌گیریم (شکل ۸۱) از برابری مثلث‌های ABF و BPC (دریك ضلع‌مجاور به زاویهٔ قائمه و یك زاویهٔ حاده) نتیجه می‌شود:

$$AF=BP=BQ \text{ و } FD=CQ$$

بنابراین، چهارضلعی $QCDF$، یك مستطیل است.

دایرهٔ محیط بر این مستطیل، از نقطهٔ H می‌گذرد، زیرا FC قطر این دایره است و، درضمن $\widehat{FHC}=90^\circ$. چون DQ قطرمستطیل است، بنابراین



شکل ۸۱

$\widehat{DHQ}=90^\circ$.

۱۹۶. برای اثبات کافی است به این نکته توجه کنیم که، ضمن تغییر رنگ هر نقطهٔ «ویژه»، از تعداد پاره‌خط‌های راستی کـه در دو انتهای خود دو رنگ مختلف دارند، دست‌کم یکی کم می‌شود. بنابراین، تجدید رنگ را تنها به تعداد محدودی می‌توان انجام داد و، بعد از آن، نقطهٔ «ویژه‌ای» باقی نمی‌ماند.

۱۹۷. پاسخ: $n=k$ و k برابر ۱، ۸ یا ۹.

اگر n^n دارای k رقم و k^k دارای n رقم باشد، آن وقت

$$10^{k-1}\leqslant n^n<10^k \text{ و } 10^{n-1}\leqslant k^k<10^n$$

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم: $k\geqslant n$. دراین‌صورت $n^n<10^n$، یعنی $n<10$ و $k<10$. کافی است تحقیق کنیم:

$$2^2<10,\ 3^3<100,\ 4^4<1000,\ 5^5<10^4,\ 6^6<10^5,$$

$$7^7<10^6,\ 10^7<8^8<10^8,\ 10^8<9^9<10^9$$

۱۹۸. مثلث ABC را دور نقطهٔ C به اندازهٔ ۹۰ درجه طوری دوران می‌دهیم که نقطهٔ A به نقطهٔ B برود. دراین صورت، نقطهٔ E به نقطهٔ F واقع بر خط راست AC می‌رودکه، برای آن داریم:

$$FB\|CL\|DK \text{ و } FC=BD$$

بنابراین $BL=LK$.

۱۹۹. a) می‌توان.

موش در هر جاکه باشد، باید گربه‌ها را طوری قرار دادکه موش، روی پاره‌خط راست بین آن‌ها و موازی یکـی از قطرهای صفحهٔ شطرنج باشد. با هر حرکت موش، گربه‌ها طوری حرکت می‌کنند که باز هم، مثل قبل، موش در بین آن‌ها، روی خط راستی موازی قطر قرار گیرد.

b) از جایی کـه موش قرار دارد، دو پاره‌خط راست موازی قطرها رسم و خانه‌های این پاره‌خط‌های راست را استثنا می‌کنیم. در یکی از چهار

بخشی‌که به این‌وسیله روی صفحهٔ شطرنج پیدا می‌شود، گربه‌ای وجود ندارد و موش باید در همین بخش، روی مسیر قطری بـه سمت‌کنارهٔ صفحه برود. روشن است‌که گربه‌ها نمی‌توانند به او برسند، زیرا بعد ازهرحرکت گربه‌ها، دربرابر موش و درجهت حرکت او، بخشی ازصفحه وجود داردکه گربه‌ای در آن پیدا نمی‌شود.

۲۰۰. a) برای این‌که ردیف موردنظر را به دست آوریم، در نیمی از سطر، عددهای زوج و در نیم دیگرسطر، عددهای فرد را می‌نویسیم. در این صورت، اگر دو عدد از دو نیمهٔ مختلف سطررا در نظر بگیریم، نصف مجموع آن‌ها، عددی درست نمی‌شود و، بنابراین، برابر با عددی واقع در بین آن‌ها نخواهد بود. سپس، در هریك از دونیمه سطر، مشابه همان عمل را انجام می‌دهیم: هر یك از دونیمه را به دوگروه چهارتایی تقسیم می‌کنیم و در آن‌ها، عددهای بـه صورت $4k$، $4k+2$، $4k+1$ و $4k+3$ را قرار می‌دهیم. در این صورت نصف مجموع دو عدد در هر یك از دو نیمهٔ سمت چپ عددی فرد و در هر یك از دونیمهٔ سمت راست عددی زوج است و، بنابراین، برابر با عددی در بین آن دو عـدد نیست. سپس، هر یك از چهار بخش را، به دو بخش تقسیم می‌کنیم؛ درضمن دراین جا، نقش «زوج» و «فرد» به عهدهٔ عددهایی است‌که در تقسیم بر ۸ به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند و غیره. نتیجهٔ ردیف عددها، به‌این‌صورت درخواهد آمد:

۸، ۲۴، ۱۶، ۳۲، ۴، ۲۰، ۱۲، ۲۶، ۶، ۲۲، ۱۴، ۳۰، ۲، ۱۸، ۱۰، ۲۶،

۷، ۲۳، ۱۵، ۳۱، ۳، ۱۹، ۱۱، ۲۷، ۵، ۲۱، ۱۳، ۲۹، ۱، ۱۷، ۹، ۲۵

b) برای این‌که حکم مساله را برای هرتعداد N عدد ثابت‌کنیم، کافی است اثبات را، برای $N=2^n$ بیاوریم (عددهای اضافی را می‌توان حذف کرد: مثلاً، اگرردیف عددها را برای‌تعداد $2^7=128$ عدد به دست‌آوریم، می‌توان عددهای بزرگتر از ۱۰۰ را از بین‌آن‌ها حذف‌کرد و ردیف لازم را برای $N=100$ عدد به‌دست‌آورد). اندیشهٔ اصلی راه‌حل، در a) نشان داده شد؛ اثبات‌کوتاه‌تر را می‌توان با روش استقرای روی n به دست‌آورد.

حکم مساله برای $n=1$ و $n=2$ درست است: ردیف‌های $(2, 1)$ و $(3, 1, 4, 2)$ به دست می‌آید. اگر $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ ردیف موردنظر $N=2^n$ عدد ۱، ۲، ...، N باشد، آن وقت

$$2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_N, 2a_1-1, 2a_2-1, \ldots, 2a_N-1$$

ردیف مورد نظر برای $2N=2^{n+1}$ عدد خواهد بود: درستی حکم برای هر یك از دو نیمهٔ این ردیف، با توجه به فرض استقرا، با شرط لازم مساله سازگارند.

۲۰۱. پاسخ: ۱۵ عدد (۱۱۱، ۲۲۲، ...، ۹۹۹، ۴۰۷، ۵۱۸، ۶۲۹، ۳۷۰، ۴۸۱، ۵۹۲).

$\overline{abc}$ را عدد مجهول می‌گیریم: بنابر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=6\overline{abc}$$

از آن‌جا

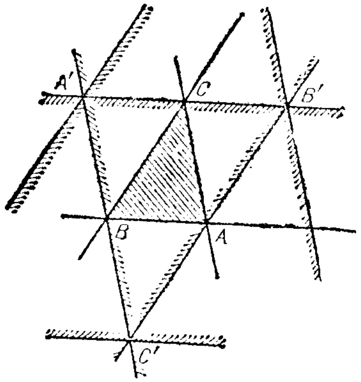
$$222(a+b+c)=6(100a+10b+c)\Rightarrow 7a=3b+4c$$

این معادله را می‌توان، با آزمایش همهٔ حالت‌ها، حل کرد (مثلاً a را، به ترتیب، برابر ۱، ۲، ...، ۹ گرفت و درهر مورد، معادلهٔ حاصل را با توجه به این که b و c دورقم‌اند، حل کرد). ولی با اندکی تغییردرمعادله، می‌توان راه‌حل کوتاه‌تری به دست آورد. معادله را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$7(a-b)=4(c-b)$$

از آن‌جا یا $a=b=c$، و یا $a-b=4$ و $c-b=7$ (که دراین صورت $0\leqslant b\leqslant 2$)؛ و یا $b-a=4$ و $b-c=7$ (که دراین‌صورت $7\leqslant b\leqslant 9$).

۲۰۲. مجموعهٔ رأس‌های چندضلعی مفروض P را درنظر می‌گیریم و، از بین آن‌ها، سه رأس A، B و C را طوری انتخاب می‌کنیم که، مساحت مثلث ABC، حداکثر باشد. (روشن است که، مساحت مثلث ABC، ازمساحت هر مثلثی که بتوان در چندضلعی P جا داد، کمتر نیست. در این‌جا، از



شکل ۸۲

حالت‌های خاص این حقیقت استفاده خواهیم کرد.)

M را نقطه‌ای از چندضلعی P می‌گیریم. چون مساحت مثلث MBC از مساحت مثلث ABC بیشتر نیست، بنابراین M درنواری قرار دارد که، محور تقارن آن، خط راست BC و عرض آن دو برابر ارتفاعی از مثلث ABC است که از رأس A گذشته باشد. اگر به همین استدلال دربارهٔ مثلث‌های MAB و MCA متوسل شویم، معلوم می‌شود که، همهٔ نقطه‌های چندضلعی، متعلق به اشتراك سه نوار حاصل‌اند، مثلث $A'B'C'$ (شکل ۸۲)، که مساحت آن برابر است با $4S_{ABC}=4$.

$\triangledown$ شبیه این استدلال را در مسالهٔ ۸۰ داشتیم. در واقع در آن‌جا، ثابت کردیم، مثلث $A'B'C'$، مجموعهٔ نقطه‌های M است که، برای آن‌ها، همهٔ سه مساحت S_{MAB}، S_{MBC}، S_{MCA} از S_{ABC} تجاوز نمی‌کنند.

۲۰۳. a) تابع f در بازهٔ $[0,1]$ غیرنزولی است، زیرا از $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$ نتیجه می‌شود:

$$f(x)=f((x-y)+y)\geqslant f(x-y)-f(y)\geqslant f(y)$$

به جزاین، برای همهٔ مقدارهای x، داریم: $f(2x)\geqslant 2f(x)$. با توجه به این نکته‌ها، به دست می‌آید:

به‌ازای $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$: $f(x)\leqslant f(1)\leqslant 2x$؛

بەازای $\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}$: $2x\leqslant\frac{1}{2}$ ؛ $f(x)\leqslant\frac{1}{2}f(2x)\leqslant$ ؛

. . . .

بەازای $\frac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{1}{2^n}$: $2x\leqslant\frac{1}{2^n}$ ؛ $f(x)\leqslant\frac{1}{2}f(2x)\leqslant$ ؛

. . . .

و چون $f(0)=0$، پس $f(2x)\leqslant 2x$ (بەازای همهٔ مقدارهای x).

b) پاسخ: درست نیست. مثال

$$f(x)=\begin{cases}0 & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right)\end{cases}$$

این تابع، با همهٔ شرطهای مسالە سازگار است. ولی

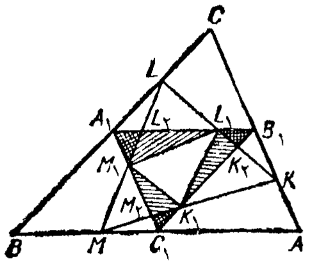
$$f(0/51)=1>1/9\times 0/51=0/969$$

۲۰۴. پاسخ: $\frac{1}{8}$.

با توجه بە نام‌گذاری‌های شکل ۸۳ داریم:

$$\frac{C_1M_2}{M_2M_1}\leqslant\frac{AK}{KC}\leqslant\frac{AB_1}{B_1C}=1$$

بنابراین $C_1M_2\leqslant M_2M_1$ ودر نتیجە $S_{C_1M_2K_1}\leqslant S_{M_2M_1K_1}$. بەهمین ترتیب



شکل ۸۳

ثابت می‌شود: $S_{AL_2M_1}\leqslant S_{L_2L_1M_1}$ و $S_{B_1K_2L_1}\leqslant S_{K_2K_1L_1}$.

S را مساحت بخش مشترك مثلث‌های KLM و $A_1B_1C_1$ می‌گیریم.

از مجموع نابرابری‌های حاصل، بە دست می‌آید:

$$S_{A_1B_1C_1}-S\leqslant S_{K_1M_2M_1}+S_{M_1L_2L_1}+S_{L_1K_2K_1}=$$

$$=S-S_{K_1M_1L_1}\leqslant S$$

از آن‌جا $2S\geqslant S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}$، یعنی $S\geqslant\frac{1}{8}$. اگر نقطهٔ M بر C_1، نقطهٔ L بر C و نقطهٔ K بر A منطبق باشند، آن وقت $S=\frac{1}{8}$.

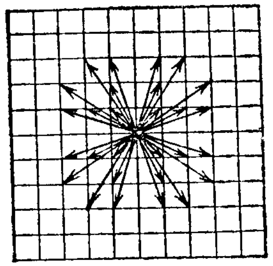
۲۰۵. اگرضمن دوران بە اندازهٔ زاویهٔ α، دور نقطهٔ O، وتر Q_1Q_2 از دایرهٔ بە مرکز O، از وتر P_1P_2 بە دست آید، آن وقت می‌توان نقطهٔ R، محل برخورد خطهای راست P_1P_2 و Q_1Q_2 را از نقطهٔ M وسط وتر P_1P_2، ضمن دوران بە اندازهٔ $\frac{\alpha}{2}$ دور نقطهٔ O (درضمن، نقطهٔ، M، بە نقطهٔ M' از پارەخط راست OR می‌رود) تجانس بە مرکز O و ضریب

$$k=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}=OR:OM=OR:OM'$$

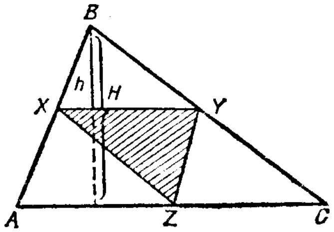
بە دست می‌آید. ازاین نکتەها، برای حل مسالهٔ استفادە می‌کنیم.

a) مثلث $A_2B_2C_2$ با تبدیل‌هایی کە شرح دادیم، از مثلث KLM بەدست می‌آیدکە از وصل وسط ضلع‌های مثلث ABC بەدست آمدە است. چون دومثلث KLMو $A_2B_2C_2$ و،هم‌چنین، دومثلث KLM و ABCمتشابەاند، بنابراین، مثلث‌های ABC و $A_2B_2C_2$ متشابە می‌شوند.

b) چهارضلعی موردنظرمسالە، باتبدیل تشابهی، ازچهارضلعی بەدست می‌آیدکە وسط ضلع‌های $ABCD$ را بەهم وصل کردە است. ولی از وصل وسط ضلع‌های هر چهارضلعی، یك متوازی‌الاضلاع بەدست می‌آید.



شکل ۸۵



شکل ۸۴

۲۰۶. پاسخ: $\frac{1}{4}$.

قبل ازهمه یادآوری می‌کنیم‌که، بازی‌کن دوم، می‌تواند بدون توجه به بازی اولی، خود را به $S_{XYZ} \leq \frac{1}{4}$ برساند. برای این‌منظور، باید Y را طوری انتخاب‌کندکه XY موازی با AC در آید (شکل۸۴). دراین‌صورت، برای هر نقطهٔ Z واقع برضلع AC، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}}=\frac{XY}{AC}\cdot\frac{H-h}{H}=\frac{h(H-h)}{H^2}\leq\frac{1}{4}$$

از طرف دیگر، اگر نفراول، نقطه‌های X و Z را در وسط ضلع‌های AB و AC درنظر بگیرد، می‌تواند به $S_{XYZ}=\frac{1}{4}$ برسد (بدون ارتباط با بازی دومی).

▽ مسالهٔ مشابهی‌که در آن، به‌جای مساحت‌ها، صحبت بر سر محیط‌ها باشد، مساله‌ای دشوارتر است.

۲۰۷. پاسخ: $4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$.

محیط ۳۲ضلعی $A_1A_2\ldots A_{32}$ را به‌صورت مجموع ۳۲ بردار می‌گیریم:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{32}A_1}=0$$

چون با هر۳۲ بردار با جهت‌های مختلف ومجموع ۰، می‌توان یك ۳۲ضلعی محدب ساخت، مساله به این جا منجر می‌شودکه: ۳۲ بردار پیداکنیم که با

شرط‌های زیر سازگار باشند:

الف) ابتدا وانتهای هر بردار، درنقطه‌های گرهی کاغذ شطرنجی باشد؛

ب) هر دو بردار، دارای جهت‌های مختلف باشند؛

ج) مجموع همهٔ بردارها، برابر ۰ باشد؛

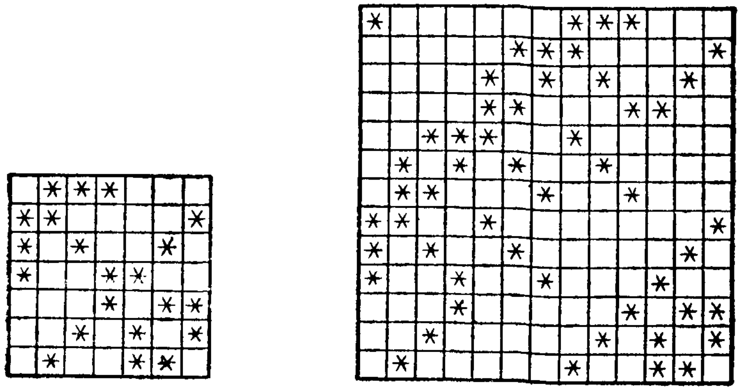
د) با برقراری شرط‌های الف)تا ج)، مجموع طول‌های‌همهٔ بردارها، حداقل ممکن باشد.

همهٔ بردارها را با مبداء مشترك درنظر می‌گیریم. دستگاه ۳۲ بردار شکل ۸۵، با همهٔ شرط‌های الف) تا د) سازگارند. دربین آن‌ها، چهار بردار به طول واحد (آن‌ها را روی شکل ۸۵ نیاورده‌ایم). چهار بردار به طول $\sqrt{2}$ و سه گروه هشت برداری، به ترتیب، به طول $\sqrt{5}$، $\sqrt{10}$ و $\sqrt{13}$ وجود دارد.

▽ به همین ترتیب می‌توان nگروه چهار برداری با جهت‌های مختلف انتخاب کرد، به‌نحوی که $4n$ ضلعی محدبی که با ضلع‌هایی به طول این بردارها و با رأس‌هایی واقع در نقطه‌های گرهی صفحهٔ شطرنجی ساخته می‌شود، حداقل محیط را داشته باشد.

۲۰۸. پاسخ: a) $k=21$؛ b) $k=52$ (شکل ۸۶).

تعداد این گونه‌نقطه‌ها را، درحالت‌کلی، برای مربع $m\times m$ محاسبه



a b

شکل ۸۶

می‌کنیم.

x_i را تعداد نقطه‌های واقع در سطر با شمارهٔ i و $\sum_{i=1}^{m} x_i = k$ می‌گیریم.

اگر در یک سطر، دو نقطه را علامت بگذاریم، آن وقت در هیچ سطر دیگری نمی‌توان دو نقطه را در همین دو ستون علامت گذاری کرد. چون در سطر iام به تعداد x_i نقطه علامت گذاشته شده است، از آن می‌توان به تعداد $\frac{1}{2}x_i(x_i-1)$ زوج ساخت. ولی همهٔ این زوج‌ها باید مختلف باشند، بنابراین تعداد آن‌ها نمی‌تواند از تعداد کل زوج‌های ممکن تجاوز کند، یعنی

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i(x_i-1)}{2} \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant m(m-1)+\sum_{i=1}^{m} x_i = m(m-1)+k$$

از آن جا که

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \geqslant \frac{1}{m}(x_1+x_2+\dots+x_m)^2 = \frac{1}{m}k^2$$

به این نابرابری می‌رسیم:

$$\frac{1}{m}k^2 \leqslant m(m-1)+k$$

و از این نابرابری به‌دست می‌آید:

$$k \leqslant \frac{1}{2}\left(m+m\sqrt{4m-3}\right) \qquad (*)$$

به‌ازای $m=7$ و $m=13$، به‌ترتیب به‌دست می‌آید: $k \leqslant 21$ و $k \leqslant 52$.

▽ دشوارتر از حل مسأله، پیدا کردن مثال‌هایی است که حداکثر مقدار k را تحقق بخشند. راه ساختن آن‌ها را می‌آوریم. در مثال a) به‌عنوان

«شمارهٔ» سطرها (و همچنین ستون‌ها) از سه‌تایی‌های شامل عددهای ۰ و ۱ استفاده می‌کنیم، به‌جز سه‌تایی $(0, 0, 0)$. از این سه‌تایی‌ها، ۷ عدد وجود دارد:

$$(1, 0, 0);\ (0, 1, 1);\ (1, 0, 1);\ (1, 1, 0);\ (1, 1, 1);$$
$$(0, 0, 1);\ (0, 1, 0)$$

خانهٔ محل برخورد سطر (a_1, a_2, a_3) و ستون (x_1, x_2, x_3) را به‌شرطی علامت می‌گذاریم که $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$، عددی زوج باشد.

در مثال b)، به جای «شمارهٔ» سطرها و ستون‌ها، از سه‌تایی‌های شامل عددهای ۰، ۱ و -1، به‌جز سه‌تایی $(0, 0, 0)$ استفاده می‌کنیم؛ درضمن از بین دو «سه‌تایی» که یکی از آن‌ها از ضرب دیگری در -1 پیدا می‌شود، تنها یکی را درنظر می‌گیریم. تعداد این سه‌تایی‌ها برابر است با ۱۳:

$(1, 1, 1)$؛ سه‌تبدیل $(0, 1, 1)$؛ سه تبدیل $(-1, 1, 1)$؛ سه‌تبدیل $(0, 1, -1)$ و سه‌تبدیل $(0, 0, 1)$.

خانهٔ محل برخورد سطر (a_1, a_2, a_3) و ستون (x_1, x_2, x_3) را به شرطی علامت می‌گذاریم که $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

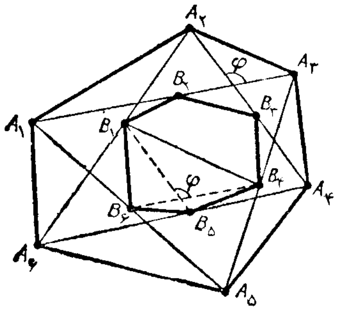
و این، عبارت است از ساختمان صفحه‌های تصویری متناهی برمیدانی از $p=2$ و $p=3$ عضو: ستون‌ها متناظر با نقطه‌ها و سطرها متناظر با خط‌های راست صفحهٔ تصویری هستند. ویژگی موردنظر ما در جدول، منجر به این می‌شود که، از هردو نقطه یك خط راست بگذرد و هردو خط راستی دریك نقطه به‌هم برسند[خط راست (a_1, a_2, a_3) وقتی شامل نقطهٔ (x_1, x_2, x_3) است که $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$، نسبت به جدول p، برابر با ۰ باشد].

می‌توان ثابت کرد: نابرابری $(*)$ وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:

$$m = p^2+p+1$$

که در آن، p عددی طبیعی است؛ درضمن

$$k = (p+1)(p^2+p+1)$$



شکل ۸۷

پاسخ به این پرسش که: آیا برای این گونه m و k، می‌توان جدول متناظر را پیدا کرد، بسیار دشوار است. این منجر به مسالهٔ وجود صفحه‌های تصویری متناهی مرتبهٔ p می‌شود که هنوز حل نشده است. در حالت‌هایی که p عددی اول یا توانی از یك عدد اول باشد، پاسخ به این پرسش مثبت است.

۲۰۹. مساحت چهارضلعی $B_1B_4B_5B_6$ (شکل ۸۷) برابر است با $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$، زیرا قطرهای چهارضلعی اول موازی قطرهای چهارضلعی دوم و برابر نصف آن‌ها هستند: B_1B_5 موازی A_2A_4 و برابر نصف آن، B_4B_6 موازی A_1A_3 و برابر نصف آن. درضمن می‌دانیم، اگر طول قطرهای یك چهارضلعی محدب را d_1 و d_2 و زاویه بین دو قطر را φ بنامیم، مساحت چهارضلعی با دستور $S=d_1d_2\sin\frac{\varphi}{2}$ بیان می‌شود. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که، مساحت چهارضلعی $B_1B_2B_3B_4$ هم، برابر $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $A_1A_4A_5A_6$ است.

۲۱۰. به‌ازای $n=1$، چهار عدد ۱۱، ۲۱، ۱۲، ۲۲ با شرط‌های مساله سازگارند.

a' را به معنای عددی می‌گیریم که از a، با تبدیل رقم ۱ به ۲ و ۲ به ۱ در آن، به دست آمده باشد؛ همچنین $a\,b$ را به این معنا می‌گیریم که عدد b را کنار a نوشته‌ایم. فرض کنید، مجموعهٔ A_n شامل 2^{n+1} عدد 2^n

رقمی باشد، به نحوی که هردوتا از آن‌ها، دست‌کم در 2^{n-1} مرتبهٔ خود، با هم فرق داشته باشند. مجموعهٔ A_{n+1} را درنظر می‌گیریم که از عددهای aa و aa' تشکیل شده باشد $(a\in A_n)$. همهٔ این عددها 2^{n+1} رقمی‌اند و روی هم، 2^{n+2} عدد را معرفی می‌کنند. به جز این، هر دو عدد، دست‌کم در 2^n مرتبهٔ خود، باهم تفاوت دارند. درواقع، عددهای aa و aa' و، هم‌چنین، عددهای aa و bb'، به‌ازای هر a و b، درست در 2^n مرتبه، باهم متفاوتند (در مرتبه‌هایی که در آن‌ها، a و b برهم منطبق‌اند، a' و b' با هم فرق دارند و برعکس)؛ عددهای aa و bb، بنابر فرض استقرا، دست‌کم در 2^n مرتبهٔ خود، با هم فرق دارند. حکم ثابت شد.

۲۱۱. همهٔ چندضلعی‌ها را بر یك خط راست تصویر می‌کنیم. تصویر هرکدام از چندضلعی‌ها، به صورت یك پاره‌خط راست درمی‌آید و، درضمن، با توجه به‌شرط مساله، هر دو پاره‌خط، دارای نقطه‌ای مشترك‌اند. از این جا، می‌توان نتیجه گرفت که، همهٔ این پاره‌خط‌های راست، نقطهٔ مشترکی دارند (برای این‌که دراین‌مورد قانع‌شوید، کافی‌است خط‌راست مفروض‌را همچون یك محورعددی درنظر بگیرید و کوچکترین عددرا، در بین عددهای نمایندهٔ انتهای راست این‌پاره‌خط‌ها انتخاب‌کنید). خط راستی‌که ازنقطهٔ مشترك‌این پاره‌خط‌های راست، عمودبرآن‌ها رسم شود،همهٔ چندضلعی‌ها راقطع‌می‌کند.

۲۱۲. بدون این‌که به‌کلی‌بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$a\geqslant b\geqslant c$$

در این‌صورت $c(a-c)(b-c)\geqslant 0$ و از آن‌جا

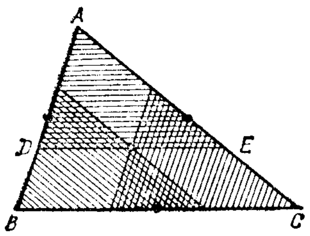
$$a^3+abc\geqslant ac^2+bc^2$$

و کافی است ثابت کنیم:

$$a^3+b^3+2abc\geqslant ab(a+b)+a^2c+b^2c$$

ولی نابرابری اخیر را، می‌توان به این صورت نوشت:

$$(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0$$



شکل ۸۸

▽ به سادگی دیده می‌شود، که نابرابری، تنها وقتی به‌برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم: $a=b=c$.

۲۱۳. اگر یکی از مگس‌ها در رأس A قرار گیرد، آن وقت مرکز ثقل مثلثی که ازمگس‌ها تشکیل می‌شود، درمثلث ADE قراردارد (شکل۸۸) که در آن $\frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۳}$. چون یکی ازمگس‌ها، ازهمهٔ رأس‌ها می‌گذرد، بنابراین مرکز ثقل «مثلث مگس‌ها» باید متعلق به سه مثلثی باشد که روی شکل‌ها شور زده‌ایم. تنها نقطهٔ مشترك این سه مثلث، مرکز ثقل مثلث مفروض است.

۲۱۴. تعداد صفرها را p، تعداد واحدها را q و تعداد دوها را r می‌گیریم. درهر گام، هرسه عدد p q و r به اندازهٔ یك واحد تغییرمی‌کنند: آن‌ها که فردند زوج، و آن‌ها که زوج‌اند فرد می‌شوند. وقتی‌کـه تنها یك رقم روی تختهٔ سیاه باقی می‌ماند، از عددهای p، q و r، یکی برابر ۱ و دوتای دیگر برابره می‌شود. بنابراین، در ابتدا هم، زوج یا فـردبودن یکی از عددها بازوج یا فرد بودن دو عدد دیگـر فرق داشته است؛ و همین عدد است که، سرآخر، روی تختهٔ سیاه باقی می‌ماند.

۲۱۵. $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n رانقطه‌های برخورد خطهای راست باکنارهٔ بالای نوار وآن‌ها را به ردیف (از چپ به‌راست) شماره‌گذاری می‌کنیم؛ همچنین $P_۱$، $B_۲$، ...، B_n را نقطه‌های‌برخورد خطهای راست باکنارهٔپایین و باز هم از چپ به راست، فرض می‌کنیم. مسیرهایی را کـه از نقطه‌های $B_۱$، $B_۲$، ...، B_n آغاز می‌شوند، با شماره‌های ۱، ۲، ...، n شماره‌گذاری می‌کنیم. با توجه به‌قانون ساختمـان مسیر، این ویژگی‌ها به‌دست می‌آید.

۱°. از هر پاره‌خط راست، درست یك مسیر می‌گذرد؛

۲°. مسیرهای مجاور ـ kام و $(k+۱)$ام ـ دررأس‌هایی با هم‌تماس دارند؛ درضمن، مسیرkام همیشه درسمت چپ مسیر $(k+۱)$ام است (برای هر k از ۱ تا $n-۱$). مسیرهای غیر مجاور، دارای نقطهٔ مشترکی نیستند.

۳°. مسیری‌که از B_k آغاز شده است، بهA_k ختم می‌شود.

اکنون به اثبات بخش‌های مختلف مساله می‌پردازیم.

a) همهٔ مسیرهایی را درنظر می‌گیریم کـه از شماره‌های فرد آغاز شده‌اند. بنابر ویژگی۲°، این مسیرها، نقطهٔ مشترکی ندارند و، تعداد آن‌ها، از $\frac{n}{۲}$ کمتر نیست.

b) با دو روش، تعدادکل پاره‌خطهای راست همهٔ مسیرها را محاسبه می‌کنیم، هریك ازپاره‌خطهای راست $B_iA_{n+۱-i}$، یکی ازخطهای راست، به‌وسیلهٔ خطهای راست دیگر، به n پاره‌خط تقسیم می‌شود. بنابراین، تعداد کل این پاره‌خطها برابر $n^۲$ است. باتوجه‌به ویژگی۱°، باید همین‌مجموع $n^۲$، با جمع تعداد پاره‌خطهای همهٔ n مسیر هم، بـه دست آید. بنابراین، دست‌کم یکی از جمله‌های این جمع، از n کمتر نیست.

البته حکم b) را از حکم d) هم می‌توان نتیجه گرفت.

c) تعداد پاره‌خطها را در دومسیر مرزی ـ مسیر اول و مسیر nام ـ ارزیابی می‌کنیم.

این مسیرها، مجموعه‌های منفلبی را، که در سمت چپ مسیر اول و در سمت راست مسیر nام قرار دارند، محدود می‌کنند؛ مسیر اول در درون زاویهٔ $B_۱PA_۱$ و مسیرnام دردرون زاویهٔ B_nPA_n قرار دارند‌که، درآن‌ها، P عبارت استازنقطهٔ برخورد خطهای راست $B_۱A_n$ و$B_nA_۱$. بقیهٔخطهای راست $B_۲A_{n-۱}$، $B_۳A_{n-۲}$، ...، $B_{n-۱}A_۲$ تنها می‌توانند با یکی ازدو مسیر مرزی، پاره‌خط مشترکی داشته باشند (و در واقع، با آن مسیری‌که، نسبت به نقطهٔ P، در طرف دیگراین خط راست باشد). به این ترتیب، دردومسیر مرزی، بیش از $(n-۲)+۴$ پاره‌خط وجود ندارد و، بنابراین، دریکی از آن‌ها، حداکثر $\frac{n}{۲}+۱$ پاره‌خط خواهدبود.

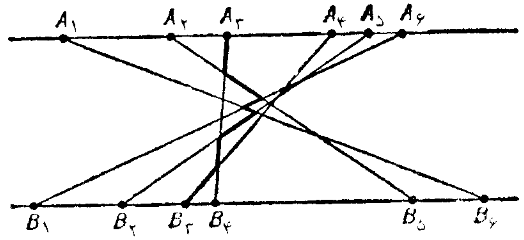
d) مسیر وسط، یعنی مسیر باشمارهٔ $m=\frac{1}{2}(n+1)$ (اگر n عـددی فرد باشد)، یا مسیر $m=\frac{n}{2}$ (اگر n عددی زوج باشد) را درنظرمی‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، این‌مسیر، ازهمهٔ خطهای راست می‌گذرد (شکل ۸۹). درواقع، این مسیر، نوار را به‌دو بخش تقسیم می‌کند؛ هریك ازپاره خطهای راست B_1A_n، B_2A_{n-1}، ...، B_nA_1 ازیك بخش آغاز ودربخش دیگرختم می‌شوند(یکی‌از آن‌ها، ممکن‌است روی‌مرز دو بخش‌واقع باشد) و، بنا براین، بامسیر وسط، دارای نقطهٔ مشترك‌اند و، در نتیجه (بنا برقانون ساختمان مسیر) باآن‌ها، دریك پاره‌خط مشترك است.

▽ دراین مساله، جالب است‌که بتوانیم بهترین ارزیابی از پایین و ازبالارا، برای تعداد پاره‌خطهای طولانی‌ترین مسیر (طولانی، از نظرتعداد پاره‌خطها) پیداکنیم.

۲۱۶. پاسخ: وقتیk عددی زوج باشد می‌تـوان؛ و وقتی k عددی فرد باشد نمی‌توان.

وقتی k عددی زوج باشد، به‌سادگی می‌تـوان نمونهٔ رنگ‌آمیزی را پیداکرد: می‌توان مکعب را ازبلوك‌های ۱ × ۲ × ۲، که یك‌درمیان سیاه و سفیدند، آماده‌کرد.

اکنون فرض می‌کنیم توانسته باشیم مکعب موردنظر را، درحالتی‌که k عددی فرد است، ساخته باشیم. مرکزهای مکعب‌هـای واحد سفید را، به وسیلهٔ پاره خطهای راست، به‌هم وصل می‌کنیم. از هر مـرکز، دوپاره خط خارج می‌شود. این‌دستگاه پاره خطها، یك یا چند خط شکستهٔ بسته به‌وجود



شکل ۸۹

می‌آورند. توجه‌کنیم‌که، تعداد حلقه‌هایی ازخط شکسته،که از پاره‌خطهای باطول برابر تشکیل شده‌اند وسه جهت دو به‌دو عمـود برهم دارند، عددی زوج است (حتی تعداد حلقه‌های هریك ازجهت‌ها هم، زوج است). به این ترتیب، تعداد مکعب‌های سفید، باید عددی زوج باشد. به‌همین ترتیب‌ثابت می‌شودکه، تعداد مکعب‌های واحد سیاه‌هم، زوج است. تناقض.

۲۱۷. a) n_0 را طوری درنظر می‌گیریم‌که 10^{n_0} ازهمهٔ ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x)$ بزرگترباشد. اکنون روشن‌است‌که، به‌ازای هر $n \geqslant n_0$، عددهای a_{10^n} با a_1 برابرمی‌شوند.

b) نتیجهٔ a) را می‌توان دربارهٔ چندجمله‌ای $Q(x)=P(x+d)$ به کاربردکه، درآن، dعددطبیعی بزرگی‌است؛ درضمن‌معلوم می‌شودکه، وقتی $n_0=n_0(d)$ به‌قدرکافی بزرگ باشد، برای هر $n \geqslant n_0$، مجموع رقم‌هادر همهٔ عددهای $Q(10^n)=a_{10^n+d}$ باهم برابر می‌شوند. البته، باید این‌شرط را تحقیق‌کردکه، همهٔ ضریب‌ها در $Q(x)$، هم‌علامت باشند.

اگر $d>0$ را به‌اندازهٔکافی بزرگ بگیریم، ضریب‌های‌چندجمله‌ای

$$Q(x)=P(x+d)$$

همان علامت ضریب بزرگترین درجهٔ چندجمله‌ای

$$P(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_n$$

را خواهند داشت. دو راه برای اثبات می‌آوریم.

۱°. برای چندجمله‌ای $Q(x)$ داریم:

$$Q(x)=p_0(x+d)^n+p_1(x+d)^{n-1}+\dots+p_n=$$
$$=p_0(x^n+C_n^1x^{n-1}d+\dots+C_n^{n-1}xd^{n-1}+d^n)+$$
$$+p_1(x^{n-1}+C_{n-1}^1x^{n-2}d+\dots+d^{n-1})+\dots+p^n=$$
$$=q_0x^n+q_1(d)x^{n-1}+\dots+q_n(d)$$

دراین‌جا، $q_k(d)$ $(k=0, 1, \dots, n)$، یك چندجمله‌ای نسبت به d است. درضمن، $q_k(d)$ ازدرجهٔ k است وجملهٔ بادرجهٔ بزرگترآن، به‌صورت

$p_{۰}C_n^k d^k$ در می‌آید (و $q_{۰}$، به‌طور ساده برابر $p_{۰}$ است). در این صورت، برای عددهای به اندازهٔ کافی بزرگ $d>d_{۰}$، هر یك از عددهای $q_k(d)$ دارای همان علامت عدد $p_{۰}$ خواهند بود.

۲°. اگر درچندجمله‌ای $P(x)$، چند ضریب اول $p_{۰}$، $p_{۱}$، ...، p_{n-k} هم علامت باشند، آن‌وقت، ضمن گذار $P(x)\to P(x+d)=Q(x)$، به چندجمله‌ای جدیدی می‌رسیم که، در آن، ضریب‌های $q_{۰}$، $q_{۱}$، ...، q_{n-k}، با همان علامت باقی می‌مانند وضریب بعدی

$$q_{n-k+۱}=p_{۰}C_n^{n-k+۱}d^{n-k+۱}+p_{۱}C_n^{n-k}d^{n-k}+\dots+$$
$$+p_{n-k}d+p_{n-k+۱}$$

وقتی d به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، به‌همان علامت درمی‌آید. به‌این‌ترتیب، بعد از $n-۱$ گذار، می‌توانیم از هر چندجمله‌ای $P(x)$، به چندجمله‌ای دیگری برسیم که، در آن، همهٔ ضریب‌ها، دارای علامت $p_{۰}$ باشند.

∇ دراین‌جا، تنها ازاین حقیقت استفاده کردیم که، عدد C_n^k، یعنی ضریب بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n=\sum_{k=۱}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$، عددی مثبت است (ضمیمهٔ ۱۶).

۲۱۸. حالت کلی‌را درنظر می‌گیریم، وقتی‌که n تیم درمسابقه شرکت کرده باشند.

a) پاسخ: $k=n-۲$، با شرط $n\geqslant ۳$ (در حالت خاص، به‌ازای $n=۲۰$، داریم: $k=۱۸$).

کل امتیازهایی‌که، ضمن مسابقهٔ جهانی به‌دست می‌آید برابر $n(n-۱)$ و برای مسابقهٔ اروپایی برابر $k(k-۱)$ است (برای برد ۲، برای تساوی ۱ و برای باخت ۰ امتیاز).

x را مقدار امتیازهای قهرمان اروپا در بازی‌های قهرمانی جهان، و y را مقدار امتیازهای او در بازی‌های با تیم‌های اروپایی فرض می‌کنیم: $y\geqslant x$. فرض کنید، هریك از تیم‌های دیگر، درمسابقهٔ قهرمانی جهان بیشتر از x امتیاز آورده باشند، یعنی دست‌کم $x+۱$ امتیاز. دراین‌صورت

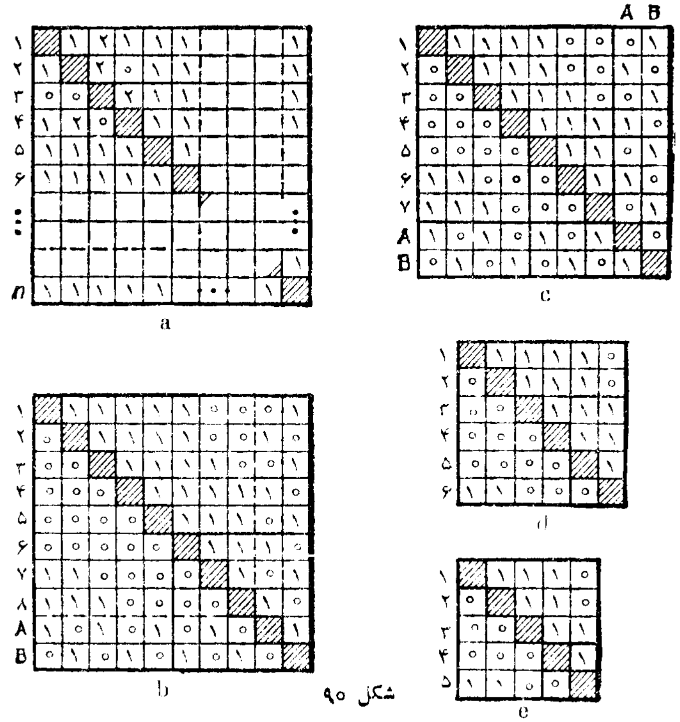
$$x+(n-۱)(x+۱)\leqslant n(n-۱) \Rightarrow x\leqslant n-۲+\frac{۱}{n}$$

و چون x عددی درست است، بنابراین $x\leqslant n-۲$.

هریك ازبقیهٔ تیم‌های اروپائی، بیش‌از $y-۱$ امتیاز نیاورده‌اند (در مسابقهٔ قهرمانی اروپا) و بنابراین

$$y+(y-۱)(k-۱)\geqslant k(k-۱) \Rightarrow y\geqslant k-\frac{۱}{k}$$

وچون y عددی درست است، پس $y\geqslant k$. به‌این ترتیب



شکل ۹۵

a) مسابقهٔ قهرمانی هاکی: n تیم و k=n−۲. تیم‌های ۲، ۴، ...، n، اروپائی و تیم ۳ قهرمان اروپا. b) مسابقهٔ قهرمانی والیبال: n=۸، k=۲. تیم‌های ۶ و ۷ و ۸ اروپائی و تیم ۶، قهرمان اروپا. تیم‌های A و B اضافه شده است. c) مسابقهٔ قهرمانی والیبال: n=۷، k=۳. تیم‌های ۵ و۶ و۷ اروپائی وتیم ۵ قهرمان اروپاست. تیم‌های A وB اضافه‌شده است. d) مسابقهٔ قهرمانی والیبال: n=۶، k=۲. e) مسابقهٔ‌قهرمانی والیبال: n=۵، k=۲.

$$k \leqslant y \leqslant x \leqslant n-۲ \Rightarrow k \leqslant n-۲$$

در شکل ۹۰، a مثالی از یك جدول مسابقه داده شده است ونشان‌می‌دهدکه قهرمان اروپا (تیم سوم) می‌تواند جای آخـر را در مسابقهٔ قهرمانی جهان آورده باشد.

b) پاسخ: اگر $n \geqslant ۸$ عددی زوج باشد، آن‌وقت $k=n-۵$ (ودر حالت خاص، برای $n=۲۰$، $k=۱۵$)؛ اگر $n \geqslant ۷$ عـددی فرد باشد، آن وقت $k=n-۴$؛ واگر $n=۶$ یا $n=۵$، آن‌وقت $k=۲$.

در مسابقهٔ قهرمانی والیبال، تیم برنده ۱ امتیاز وتیم بازنده ۰ امتیاز می‌گیرد، به‌نحوی‌که روی هم، $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ امتیاز وجود دارد. حالتی راکه n عددی زوج است، $n=۲l$، به‌تفصیل بررسی می‌کنیم.

اگرمثل بالا استدلال کنیم (x وy را به‌همان معنای مسالهٔ a) بگیرید)، به‌دست می‌آید:

$$x+(۲l-۱)(x+۱) \leqslant \frac{۲l(۲l-۱)}{۲} = l(۲l-۱) \qquad (۱)$$

$$y+(k-۱)(y-۱) \geqslant \frac{۱}{۲}k(k-۱) \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌شود: $x \leqslant l-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲l}$، یعنی $x \leqslant l-۲$. از نابرابری $y \leqslant x \leqslant l-۲$ ونابرابری (۲) به‌دست می‌آید:

$$k^۲+(۵-۲l)k-۲ \leqslant ۰ \qquad (۳)$$

به‌ازای $l \geqslant ۴$، بزرگترین عدد درست kکه در نابرابری (۳) صدق می‌کند، برابر $۲l-۵$ است (به‌ازای $k=۲l-۵$، نابرابری (۳) برقرار است، ولی به‌ازای $k=۲l-۴$، مقدارسمت چپ نابرابری، مثبت‌می‌شود).

اکنون ثابت‌می‌کنیم، برابری $k=۲l-۵=n-۵$، به‌ازای $l \geqslant ۴$ ممکن است. روی شکل ۹۰، b، جدول مسابقه‌ها برای $n=۸$، $k=۳$ داده شده است (سه‌تیم آخر، اروپائی‌اند). این‌جدول را، مبنای استقرا می‌گیریم

ساختمان‌های بعدی را، به‌کمك استقرا وبا اضافه‌کردن در هرگام، ۲ تیم اروپائی انجام می‌دهیم.

قبل از همـه توجه کنیم کـه، به‌ازای $k=۲l-۵$، به طـور مسلم $x=y=l-۲$. درواقع

$$y \geqslant \frac{(k-۱)(k+۲)}{۲k} = \frac{k}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{k} \Rightarrow y \geqslant l-۲-\frac{۱}{۲l-۵}$$

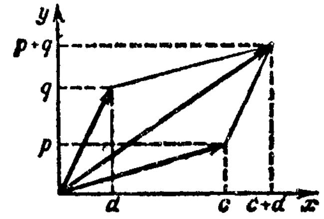
وچون y عددی درست است، بنابراین $x=y=l-۲$. واین، به‌معنای آن است‌که، قهرمان اروپا، به‌همهٔ تیم‌های غیراروپایی باخته است.

اکنون فرض‌می‌کنیم، جدول‌مسابقهٔ قهرمانی با $k=n-۵=۲l-۵$، تحقق پذیرفته باشد. دوتیم اروپائی A و B را باقانون زیر اضافه می‌کنیم: تیم A از همهٔ تیم‌های قبلی ردیف فـرد واز تیم B می‌برد و به‌بقیه می‌بازد؛ تیم B ازتیم‌های سابق ردیف زوج می‌برد و به‌بقیه می‌بازد. هریك ازتیم‌های قبلی، در نتیجهٔ آخر، به‌تعـداد برابر امتیاز می‌آورند و، بنابراین، در مقام آن‌ها تغییری پیش نمی‌آید.

اکنون، قهرمان اروپا $l-۱$ امتیاز، تیم A، $l+۱$ امتیاز و تیم B، l امتیاز آورده‌اند، به‌نحوی‌که قهرمان قبلی اروپا، بازهم درمقام آخر است. درضمن، دربازی‌های اروپائی، تیم A به‌اندازهٔ $l-۲$ امتیاز ($l-۳$ امتیاز دربازی با تیم‌های قبلی، و یك امتیاز دربازی با B) آورده؛ وتیم Bهم در بازی با تیم‌های اروپایی، همان $l-۲$ امتیاز را آورده است، به‌نحوی که قهرمان اروپا تغییر نمی‌کند.

حـالت‌های فـرد بودن n، $n=۲l-۱$، بـرای $l>۴$ و، همچنین، $n \geqslant ۶$ راهم می‌توان، به‌طریق مشابهی موردبررسی قرارداد (شکل‌های ۹۰، c، d و e).

۲۱۹. a) ازبین چهار عددی‌که جـدول ۲ × ۲ را تشکیل داده‌اند، دوعدد بزرگتر را درنظر می‌گیریم. اگراین دوعدد متعلق به‌یك ستون باشند، آن‌وقت، کوچکترین آن‌ها، عدد مطلوب است؛ واگراین دوعدد متعلق به‌یك سطر باشند، آن‌وقت بزرگترین عدد ازبین دوعدد دیگر، همـان عدد مطلوب است (درضمن، با نابرابری‌های غیراکید سروکار داریم).



شکل ۹۱

حالتی باقی می‌ماند که: دوعدد انتخابی روی قطر باشند (واکیداً از دوتای دیگر بزرگتر). ولی این‌حالت ممکن‌نیست. برای این‌که دراین‌مورد قانع شویم، کافی‌است توجه‌کنیم که، کسر $\frac{c+d}{p+q}$، همیشه بین دوکسر $\frac{c}{p}$ و $\frac{d}{q}$ قراردارد (به‌ازای $p>0$ و $q>0$؛ درشکل ۹۱، تعبیرهندسی این‌حقیقت داده شده است). از این حقیقت، که مقدار

$$\frac{a_1+b_1+a_2+b_2}{p_1+q_1+p_2+q_2}$$

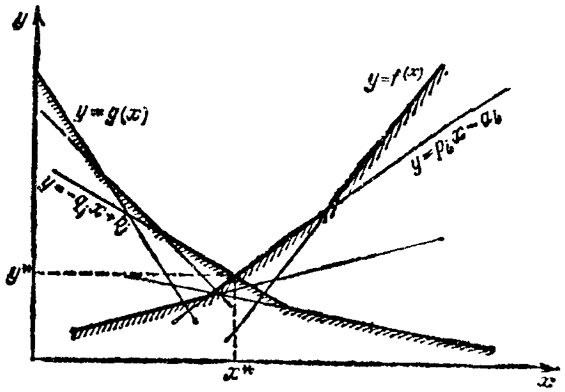
بین $\frac{a_1+b_1}{p_1+q_1}$ و $\frac{a_2+b_2}{p_2+q_2}$ وهمچنین، بین $\frac{a_1+b_2}{p_1+q_2}$ و $\frac{a_2+b_1}{p_2+q_1}$ قرار می‌گیرد، بنابراین دوعدد بزرگتر و دو عدد کوچکتر، نمی‌توانند روی قطر باشند.

b) دو راه حل، برای این‌مساله می‌آوریم که، یکی‌از آن‌ها، ربطی به a) ندارد و، بنابراین، می‌تواند راه‌حل تازه‌ای برای حالت‌خاص a) باشد؛ ولی درراه حل دوم، از a) به‌عنوان یك پیش‌قضیه استفاده شده است.

راه‌حل اول: باید عددی مثل $x^*=\frac{a_k+b_l}{p_k+q_l}$ را در جدول $m\times n$ طوری پیداکنیم که شرطهای

$$\frac{a_k+b_j}{p_k+q_j}\leqslant x^* \text{ (برای همهٔ } j \text{ ها) و } \frac{a_i+b_l}{p_i+q_l}\geqslant x^* \text{ (برای همه } i \text{ ها)}$$

برقرار باشند، شرطها را، این‌طور می‌نویسیم:



شکل ۹۲

$$p_kx^*-a_k\geqslant -q_jx^*+b_j;\quad p_ix^*-a_i\leqslant -q_lx^*+b_l \qquad (*)$$

تابع‌های قطعه به‌قطعه خطی زیررا درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}(p_ix-a_i);\quad g(x)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}(-q_jx+b_j)$$

نمودار هریك ازاین دوتابع، ازپاره خطهـای راست و دونیم خط راست، تشکیل‌شده‌است. اولی‌صعودی یکنوا، ودومی‌نزولی است و، بنابراین، معادلهٔ $f(x)=g(x)$ دارای جواب منحصر بفرد (x^*, y^*) است [نقطهٔ (x^*, y^*) که، درآن، $y^*=f(x^*)=g(x^*)$، بلندترین نقطهٔ برخورد خطهای راست $y=p_ix-a_i$ با خطهای راست $y=-q_jx+b_j$ است؛ شکل ۹۲]. در ضمن، k و l، شمارهٔ تابع‌های خطی $y=p_kx-a_k$ و $y=-q_lx+b_l$ است‌که، ازبرخورد نمودارهای آن‌ها، نقطهٔ (x^*, y^*) به‌دست می‌آید، یعنی آن تابع‌هایی‌که، برای‌آن‌ها داریم:

$$p_kx^*-a_k=\max_{1\leqslant i\leqslant m}(p_ix^*-a_i)=y^*=-q_lx^*+b_l=$$

$$=\max_{1\leqslant j\leqslant n}(-q_jx^*+b_j)$$

برای این مقدارهای k، l و x^*، همهٔ شرطهای لازم (*) برقرارند.

راه حل‌دوم. می‌گوییم، جدول دارای «زین» است، وقتی‌که عضوی‌در

آن وجودداشته باشدکه ازهمهٔ عضوهای هم سطرخودکمتر وازهمهٔ عضوهای هم ستون خود بیشتر نباشد.

پیش قضیه. اگر هر جدول ۲ × ۲، که از جـدول مفروض $m \times n$ با حذف $m-2$ سطر و $n-2$ ستون به دست می آیـد، دارای «زین» باشد، آن وقت تمامی جدول $m \times n$ هم، دارای «زین» است.

این پیش قضیه، مسالهٔ کلی b) را، به حالت خاص a) منجر می کند.

پیش قضیه را ثابت می کنیم. فرض می کنیم جدولی وجود داشته باشد که، در آن، «زین» نباشد، ولی هرجدول ۲ × ۲ در آن، دارای «زین» باشد. درسطر iام این جدول، بزرگترین عدد M_i و درستون iام آن، کوچکترین عدد m_i را نشان می کنیم. به کمك این عـددهای نشان شده، زنجیره ای می سازیم: بزرگترین عدد سطر به کوچکترین عددی که درستون آن قرار دارد و، سپس، از آن به بزرگترین عددی که درسطرعدد اخیرواقع است وغیره. این زنجیره نمی تواند روی یك عضو جدول، به پایان خود برسد (زیرا جدول دارای «زین» نیست)، بنابراین باید یك دور تشکیل بدهد. با عوض کردن شماره ها، یعنی تبدیل سطرها وستون ها بهصورت مناسب، می توان فرض کرد که، این دور، ازعضوهای $M_1 = x_{11}$، $m_1 = x_{21}$، $M_2 = x_{22}$، $m_2 = x_{32}$، …، $m_{r-1} = x_{r,r-1}$، $M_r = x_{rr}$، $m_r = x_{1r}$ تشکیل شده است (شکل ۹۳)؛ درضمن $M_1 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i$. چون جدول ۲ × ۲ در گوشه چپ و بالای جدول اصلـی، دارای «زین» است و، در ضمن $m_1 \leqslant M_1 \leqslant M_2$؛ $m_1 < M_2$ و $M_1 < x_{12}$، بایدداشته باشیم: $M_1 = x_{12} \leqslant M_2$. به همین ترتیب، می توان ثابت کرد [با درنظر گرفتن جدول های ۲ × ۲ درسطرهای پایین (m_2, M_3)، (m_3, M_4)، …] که، همهٔ عضوهای سطراول برابرند با M_1:

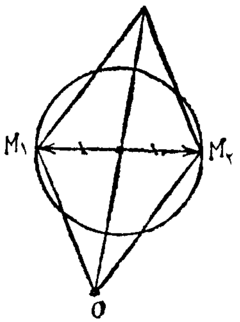
$$x_{11} = x_{12} = \ldots = x_{1r} = M_1$$

دراین صورت، $x_{1r} = m_r$، یك نقطهٔ «زینی» است. تناقض.

▽ جالب این است که، هیات داوران المپیاد، برای مساله b) راه حل دیگری را می شناختند و به راه حل اخیر، یعنی استفادهٔ از a) وپیش قضیه، وقتی پی بردند که ورقه های دانش آموزان شرکت کننده را تصحیح کردند.

$$\begin{array}{|ccccc}
\hline
M_1 & M_1 & \cdots & \cdots & m_r \\
m_1 & M_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & m_2 & M_3 & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & m_{r-1} & M_r \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

شکل ۹۳



شکل ۹۴

۲۲۰. باتوجه بـه یك حقیقت، اندیشهٔ راه حل تلقین می شود: مجموع فاصله های تاانتهای عقربه ها به طور متوسط (درطول زمان) بیشتراز مجموع فاصله های تامرکزهای ساعت هاست. اثبات را می توان به این ترتیب انجام داد. مجموع s_1 و s_2، فاصله های ازنقطهٔ O، مرکز میز، تاانتهای عقربه های دقیقه شمار را، در دو لحظهٔ زمـانی، واقع در ۳۰ دقیقه، در نظر می گیریم، مقدار $s_1 + s_2$، از $2s_0$ بیشتر است (s_0، مجموع فاصله های از O تا مرکز ساعت هاست)، زیرا درهرمثلث OM_1M_2، مجموع طول های دوضلع OM_1 و OM_2 از دوبرابر میانهٔ بین آن هـا بزرگتر است (شکل ۹۴). بنابراین، دست کم یکی از عددهای s_1 یا s_2 از s_0 بیشتراست.

۲۲۱. حل مسالهٔ a) ناشی از دونکتهٔ زیراست:

۱) زیرهرعدد a در m امین سطر ($m \geqslant 2$) عددی به دست می آید که از a کمتر نیست؛

۲) هریك ازاین عددها، از ۱۰۰۰ تجاوز نمی کند.

برای حل b) باید توجه کرد که اگرعدد a، در mامین سطر $m \geqslant 2$، ازعدد b واقع درزیرخودکمتر باشد، آن وقت $b \geqslant 2a$: گروهی ازعددهای a (هرگروه زیر عددهای برابر قرار دارد)، به گروهی ازعددهای b متصل می شود؛ از این جا، و با استقرا، کـه در این مـوقعیت $b \geqslant 2^{m-1}$. ولـی $1000 < 2^{m-1}$ تنها برای $m \leqslant 10$ برقرار است.

نمونه ای از دنبالهٔ عددها کـه، در آن، سطرهای دهم و یازدهم برهم منطبق نیستند، درزیر داده شده است:

$$۰،۱،۲،۲،۴،۴،۴،۴،\underbrace{۸،\dots،۸}_{۸}،\dots،\underbrace{۲۵۶،\dots،۲۵۶}_{۲۵۶}،\underbrace{۴۸۸،\dots،۴۸۸}_{۴۸۸}$$

که برای سطرهای بعد خواهیم داشت:

سطر ۲: ۴۸۸،...،۴۸۸،۲۵۶،...،۲۵۶،...،۸،...،۸،۴،...،۴،۲،۲،۱،۱

سطر ۳: ۴۸۸،...،۴۸۸،۲۵۶،...،۲۵۶،...،۸،...،۸،۴،...،۴،۲،۲،۲،۲

. . . .

سطر ۱۰: ۴۸۸،...،۴۸۸،۲۵۶،... ...،۲۵۶،۲۵۵

سطر ۱۱: ۴۸۸،...،۴۸۸،۵۱۲،... ...،۵۱۲،۵۱۲

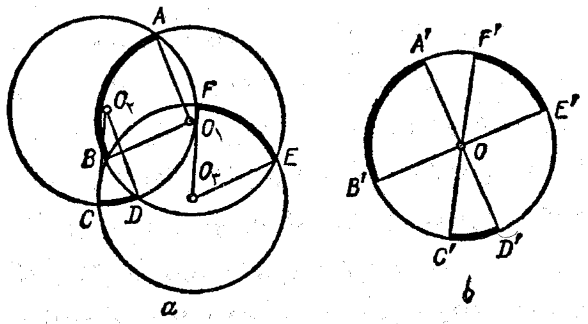
▽ به‌همین ترتیب، برای دنباله‌ای از n عدد $(۲^{k-۱}\leqslant n<۲^{k})$، می‌توان ثابت کرد که $(k+۲)$امین سطر برسطر $(k+۱)$ام منطبق است، ولی ممکن است سطر $(k+۱)$ام برسطر kام منطبق نباشد.

۲۲۲. مساله a) حالت خاصی از b) است و شبیه آن حل می‌شود. اندیشهٔ حل مسالهٔ b) را می‌دهیم.

$O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ را مرکز دایره‌هایی می گیریم که، به ترتیب، شامل کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{EF}$ هستند (شکل ۹۵، a). دراین‌صورت داریم:

$$\overrightarrow{O_۱A}=-\overrightarrow{O_۲D}،\ \overrightarrow{O_۱B}=-\overrightarrow{O_۳E}،\ \overrightarrow{O_۳F}=-\overrightarrow{O_۲C}$$

(به‌عنوان ضلع‌های روبه‌روی لوزی‌ها). بنابراین، اگر قطاع‌های $O_۱AB$،



شکل ۹۵

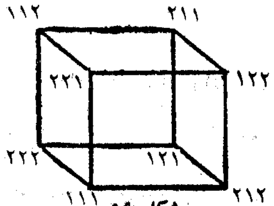
$O_۲CD$ و $O_۳EF$ را به‌مرکز مشترک O منتقل کنیم، سه قطاع به‌دست می‌آید که، همراه با قرینه‌های آن‌ها نسبت به O، دایره را به‌طور کامل پر می‌کنند (شکل ۹۵، b).

۲۲۳. اگر سه جملهٔ اول دنباله را به‌ردیف نزولی درنظر بگیریم، آن وقت، برای همهٔ جمله‌های دنباله، خواهیم داشت:

$$x_k\leqslant x_{k-۲}-x_{k-۱}$$

ودنباله به‌صورت نزولی در می‌آید:

$$x_۱\geqslant x_۲\geqslant x_۳\geqslant\dots\geqslant x_{۲۱}$$



شکل ۹۶

اگر فرض کنیم $x_{۲۱}\geqslant ۱$، آن وقت از $x_{k-۲}\geqslant x_k+x_{k-۱}$، نتیجه می‌شود:

$$x_{۲۰}\geqslant ۱،\ x_{۱۹}\geqslant ۲،\ x_{۱۸}\geqslant ۳،\ x_{۱۷}\geqslant ۵،\ \dots$$

بنابراین، کافی است ۲۱ جملهٔ متوالی دنبالهٔ فیبوناچی را بنویسیم:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...، ۶۷۶۵، ۱۰۹۴۶

$x_۱$ بزرگتر از ۱۰۰۰۰ می‌شود و، این تناقض، ثابت می‌کند که $x_{۲۱}=۰$.

۲۲۴. پاسخ: می‌توان (مثال در شکل ۹۶ داده شده است). درواقع، می‌توان نگاشت مجموعهٔ رأس‌های مکعب را برخودش، طوری به‌دست آورد که، هردو رأس مجاور (که به‌وسیله یالی به‌هم وصل می‌شوند)، به رأس‌هایی بروند که به‌وسیله یالی به‌هم وصل نشده‌اند.

۲۲۵. بنابه‌شرط مساله، مجموع بردارها برابر بردار **o** است، بنابراین

$$\mathbf{b}+\mathbf{c}=-(\mathbf{a}+\mathbf{d})\ \text{و}\ \mathbf{b}+\mathbf{d}=-(\mathbf{a}+\mathbf{c})،\ \dots$$

به‌این ترتیب، سمت‌راست، وهم‌چنین سمت‌چپ نابرابری، نسبت به **a**،**b**،**c** و**d**،

عبارتی متقارن است. در نتیجه، مـی‌توان سمت راست نابرابری را برابر نصف‌مجموع همهٔ مجموع‌های دوبه‌دوی بردارهای مفروض دانست. با توجه به‌این نکته، می‌توان برای چهار بردار مفروض به مجموع o، به‌نحوی نام‌گذاری کرد که خط شکستهٔ شامل بردارهای

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{BC}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{CD}=\mathbf{c},\ \overrightarrow{DA}=\mathbf{d}$$

خودش را قطع کند. برای این‌منظور، کافی‌است که، اگر بردارهای $\mathbf{a}$،$\mathbf{b}$،$\mathbf{c}$ را با یك مبداء O درنظر بگیریم، دریك نیم صفحه قرار گیرند و، درضمن، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ در یك طرف خط راستی باشند که از O موازی $\mathbf{b}$ رسم شده است. دراین صورت

$$|\mathbf{a}+\mathbf{d}|+|\mathbf{c}+\mathbf{d}|=BD+AC\leqslant|\mathbf{b}|+|\mathbf{d}|$$

تنها این می‌ماند که نابرابری زیر را به آن اضافه کنیم:

$$|\mathbf{b}+\mathbf{d}|=|\mathbf{a}+\mathbf{c}|\leqslant|\mathbf{a}|+|\mathbf{c}|$$

۲۲۶. پاسخ: ۱۹۷۶.

همه این نقطه‌های علامت‌گذاری شده، به‌جز نقطهٔ O (مرکز ۱۹۷۶ ضلعی) روی محیط ۹۸۷ دایرهٔ به مرکز O، وروی هریك از ۱۹۷۶ نقطه، قرار دارد. هردایرهٔ دیگر γ، هریك ازاین ۹۸۷ دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ به‌جز این نقطه‌های برخورد، ممکن است نقطهٔ O هم (که یکـی از نقطه‌های علامت‌دار است) روی محیط دایرهٔ γ قرار گیرد. بنابراین، روی چنین دایره‌ای، بیش از ۱ + ۲ × ۹۸۷، یعنی ۱۹۷۵ (از نقطه‌های موردنظر ما) نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۲۲۷. فرض می‌کنیم، بخش باقی ماندهٔ صفحه، شامل k قطعـه باشد. چهار رأس هریك از این قطعه‌ها را (که رأس زاویه‌هایی برابر ۹۰ درجه یا ۲۷۰ درجه‌اند) علامت می‌گذاریم. هریك از این $4k$ نقطه‌ای که علامت گذاشته‌ایم،رأس یکی از n مستطیلی است که جدا کرده‌ایم ویا یکی ازراس‌های مربع اصلی؛ درضمن اگر یك نقطه دوبار علامت‌گذاری شده باشد، به‌معنای

آن است،که در این نقطه، دو مستطیل بدهم وصل شده‌اند. بداین‌ترتیب:

$$4k\leqslant 4n+4\Rightarrow k\leqslant n+1$$

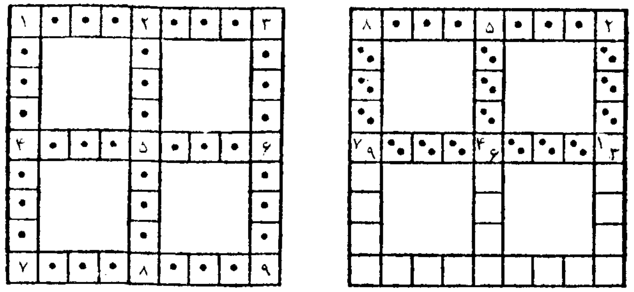
۲۲۸. سه نقطهٔ (x_0, y_0)، (x_1, y_1)، (x_2, y_2) تنها وقتی روی یك خط راست قرار دارندکه داشته باشیم:

$$(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)=0 \qquad (*)$$

اگر x_i و y_i $(i=0, 1, 2)$، تابع‌هایی خطی اززمان t باشند،آن وقت (*)، به صورت معادله‌ای درجه دوم نسبت به t، در می‌آید و نمی‌تواند بیش از دو ریشه داشته باشد.

۲۲۹. a) می‌توان فرض کرد که، حشره، از خانهٔ مرکزی، به سمت راست و به اندازهٔ $k\geqslant 2$ خانه جابه‌جا شود. در هریك از ۴۹ خانهٔ ردیف راست، تعداد خانه‌های افقی را می‌نویسیم که حشره می‌تواند از خانهٔ متناظر به آن جا برود؛ جابه‌جایی بـه سمت راست را مثبت و جابه‌جایی به سمت چپ را منفی به حساب می‌آوریم. روشن است، برای حشره‌ای که درسمت راست‌ترین خانه قرار دارد، جابه‌جائی منفی است و، درضمن، عددهایی که در دوخانهٔ مجاور نوشته می‌شود، بیش از ۲ واحـد باهم اختلاف ندارند. وقتی‌که دوردیف ازخانهٔ مرکزی به راست برویم، باید درجایی «از o عبور کنیم»، بنابراین، یکی ازعددهای نوشته شده، برابر است با ۱، o یا ۱−، یعنی یکی از حشره‌ها باید حداکثر یك خانه جابه‌جا شود.

b). پاسخ: حکم درست نیست. در شکل ۹۷، مثالی داده شده است



شکل ۹۷

که، در آن، همهٔ حشره‌ها، دور از خانهٔ آغازین خود قراردارند(در سمت چپ نشان داده شده است که چه شماره‌ای را به حشره نسبت داده‌ایم؛ و در سمت راست، شماره‌ای که مشخص می‌کند، حشره، از خانهٔ مربوط به کجا می‌تواند پرواز کند).

c) پاسخ: حکم درست است.

این حکم را، درحالت کلی، و برای مستطیل شامل $m\times n$ خانه ثابت می‌کنیم. برای مربع‌های ۱×۱ و ۲×۲ و مستطیل ۲×۱، درستی حکم روشن است (به‌طور کلی، برای مستطیل‌های $n\times$۱ و $n\times$۲، می‌توان حکم را به سادگی، وشبیه a) ثابت کرد). فرض می‌کنیم، بعدهای مستطیل $m\times n$، از ۲ بیشتر باشد: $n\geqslant m>$۲. ثابت می‌کنیم، از این مستطیل (با جدا کردن ردیف‌های کناری)، می‌توان مستطیل کوچکتر π را به دست آورد، که همهٔ حشره‌های آن، دوباره در π فرود می‌آیند و، بنابراین، کافی است قانع شویم که، در π، حشرهٔ موردنظر که «تقریباً بی‌حرکت» است، وجود دارد.

بهتر است فاصلهٔ ρ، بین دو خانهٔ A و B را، با تعداد حرکت‌هایی نشان دهیم که، شاه شطرنج می‌تواند خود را از A به B برساند: مجموعهٔ خانه‌های M (در صفحهٔ شطرنجی) که از خانهٔ مفروض C، به فاصله‌ای حداکثر برابر r قرار داشته باشند (برای هر ... ،۲ ،۱ $=r$)، مربع $(2r+1)\times(2r+1)$ به مرکز خانهٔ C را پر می‌کنند. بنابرشرط، حشره از خانهٔ K به خانهٔ $f(K)$ می‌رود، به نحوی که برای خانه‌های A و B به‌فاصله ۱، داریم: $\rho(f(A),f(B))\leqslant 1$. دراین صورت، برای‌هردوخانهٔ A و B داریم:

$$\rho(f(A), f(B))\leqslant\rho(A, B) \qquad (*)$$

درمستطیلی $m\times n$ $(m\leqslant n)$، خانه‌هایی‌را «مرزی» می‌نامیم که، فاصلهٔ از آن‌ها تا خانه‌هایی از مستطیل، برابر $n-1$ باشد. اگر $m<n$، این خانه‌ها، دو ردیف مرزی را (که متناظر با ضلع‌های کوچکتر مستطیل‌اند) پر می‌کنند؛ و در مربع $n\times n$، این خانه‌ها، چهار ردیف مرزی (حاشیه) را پر می‌کنند. توجه می‌کنیم که، فاصلهٔ ρ بین دو خانه از ردیف‌های مرزی متقابل، برابر $n-1$ و برای هردو خانه دیگر، کمتر از $n-1$ است.

اگر در یکی از ردیف‌های کناری، حتی یک حشره نیفتد، آن وقت با کنار گذاشتن این ردیف، مستطیل لازم π را با اندازهای $m\times(n-1)$ به دست می‌آوریم که، در آن، حشره از هر خانهٔ K به خانهٔ $f(K)$ از π پرواز می‌کند.

در حالت عکس، می‌توانیم به عنوان π، مستطیلی را انتخاب کنیم که با حذف همهٔ ردیف‌های مرزی از مستطیل مفروض، بـه دست آمده است. درواقع، می‌توان چند(دو، سه یاچهار) خانه K_i را طوری نشان گذاشت که، هر ردیف مرزی شامل یکی ازخانه‌های $f(K_i)$ باشد. چون برای هرخانهٔ M از π وهرخانهٔ K_i داریم: $\rho(M, K_i)\leqslant n-2$، بنابراین با توجه به (*)، خواهیم داشت:

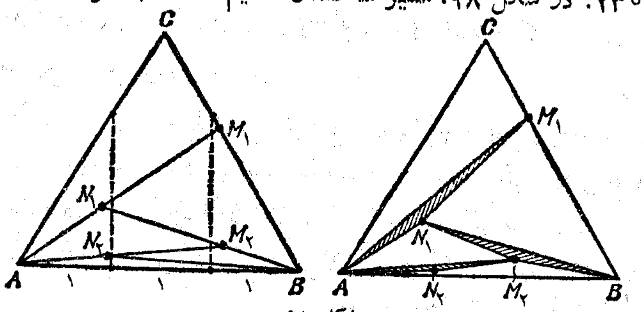
$$\rho(f(M), f(K_i))\leqslant n-2$$

از این‌جا، و با توجه به ردیف‌های متقابل، نتیجه می‌شود که $f(M)$ در π قرار دارد.

اکنون دیگر، برای تکمیل اثبات، می‌توان به‌استقرا، نسبت به $m+n$ و یا نسبت به $n=\max(m, n)$، متوسل شد. از این‌گذشته، درضمن ثابت می‌شود که همیشه، مربعی ۲×۲ وجود دارد که به خودش منجر می‌شود.

▽ این مساله، درواقع، بیان خاصی ازقضیهٔ معروف برائوود است که بنابرآن: هر نگاشت پیوستهٔ یک مجموعهٔ محدب برخودش، دارای یک نقطهٔ بی‌حرکت است.

۲۳۰. در شکل ۹۸، مسیر ساختمان تقسیم، کـه با شرط‌های کلی‌تر



شکل ۹۸

b)، c)، d) سازگار باشد و برای مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۳ داده‌شده است.

ضمن‌عبور ازشکل سمت چپ به‌شکل‌سمت راست، هریك ازنقطه‌های M_2، M_3، ...، N_1، N_2، N_3، ...، به‌سادگی خودرا پایین می‌کشد تا مثلث‌های تکمیلی خیلی باریك‌تر AM_kN_k، BN_kM_{k+1} را بسازند ($k = 1, 2, \dots$).

۲۳۱. مثال a) به سادگی به دست می‌آید: کافی است «بلوك»

$$1, 2, 3, \dots, n$$

را n مرتبهٔ پشت سر هم بنویسیم؛ i امین عدد هر تبدیل را می‌توان از iامین بلوك انتخاب کرد.

به عنوان مثالی برای b)، می‌توان این دنباله را در نظر گرفت.

$$\underbrace{1, 2, \dots, n,\ 1, 2, \dots, n,\ \dots,\ 1, 2, \dots, n}_{n-1},\ 1$$

در واقع، اگر در تبدیل $(k_1, k_2, \dots, k_n)$، دست‌کم دو عدد مجاور k_j و k_{j+1} به ترتیب صعودی باشند، آن وقت این دو عدد را می‌توان ازیك بلوك $(1, 2, \dots, n)$، که در ردیف jام قرار دارد، انتخاب کرد؛ درضمن، عدد ۱ آخر هم لازم نخواهد شد ولی اگر هیچ دو جملهٔ متوالی به ترتیب صعودی نباشند، به ناچار به‌صورت

$$n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$$

است؛ در این صورت باید از بلوك jام $n-j$ را انتخاب‌کرد وعدد ۱ آخر دنباله هم به درد می‌خورد.

c) برای هر عدد k (از ۱ تا n)، آن را کــه برای نخستین‌بار در «دنبالهٔ عام» با آن برخورد می‌کنیم، علامت می‌گذاریم. یکی ازاین عددهای علامت دار، در nامین جــا از آغاز، و یا کمی دورتـر قـرار دارد. برای مشخص بودن وضع، این عدد را n می‌گیریم. قبل ازآن، دست‌کم، $n-1$

عدد وجود دارد. بعد از آن، دنباله‌ای قرار داردکه باید، برای تبدیل‌های عددهای $(1, 2, \dots, n-1)$ «عام» باشد و، با روش استقرایی،فرض را بر این‌می‌گیریم‌که طول آن، از $\frac{1}{2}n(n-1)$ کمتر نباشد. به‌این ترتیب، برای به‌دست‌آوردن‌تبدیل‌های مختلف n عدد، طول دنبالهٔ‌عام از $n+\frac{1}{2}n(n-1)$، یعنی $\frac{1}{2}n(n+1)$ کمتر نیست.

d) یادآوری می‌کنیم، اگرعدد n، دردنبالهٔ عام مرتبهٔ n [یعنی دنبالهٔ عامی که بتوان ازآن، همهٔ تبدیل‌های n عدد را به‌دست آورد]، تنها یکبار آمده باشد، آن وقت، چه قبل از آن و چه بعد از آن، باید دنبالهٔ عامی از مرتبهٔ $(n-1)$ وجود داشته باشد. این نکته به ما امکان می‌دهد تا، نسبت به c)، ارزیابی دقیق‌تری از تعداد جمله‌های دنبالهٔ عام داشته باشیم.

کــوتاه‌ترین طول دنبالهٔ عام مرتبهٔ n را با l_n نشان می‌دهیم. در این صورت $l_2 = 3$. ثابت‌می‌کنیم $l_3 = 7$ (نمونه‌های ۱۲۱۳۱۲۱ یا ۱۲۳۱۲۳۱) اگر عددی، و مثلاً ۳، تنها یکبار در دنباله‌آمده باشد، آن وقت طول آن، از $2l_2 + 1 \geqslant 7$ کمتر نیست. در حالت دیگر، عددی را در نظر می‌گیریم که، برای نخستین‌بار، درجای سوم یا بعدتر، با آن رو به‌رو می‌شویم (فرض کنید، این عدد ۳ باشد). به دنبال‌آن، یکبار دیگر با ۳ برخورد می‌کنیم و، هم‌چنین، یك دنبالهٔ عام‌هم (به دنبال ۳) وجود دارد، به نحوی‌که طول‌تمامی آن از

$$2+1+1+l_2 = 4+l_2 = 7$$

کمتر نیست. به‌همین ترتیب، می‌توان قانع شد که $l_4 = 12$. مثال

۱۲۳۴۱۲۳۱۴۲۳۱ یا ۴۱۲۳۴۱۲۴۳۱۴۲

ارزیابی: اگر عــددی تنها یکبار در دنباله آمــده باشد، آن وقت، طول آن نمی‌تــواند از $2l_3 + 1 = 15$ کمتر باشد؛ در حــالت دیگر، از $3+1+1+l_3 = 12$ کمتر نیست.

با همین استدلال می‌توان ثابت کرد:

$$l_n \geqslant \frac{1}{2}\,n(n+1)+n-2$$

e) می‌توان ثابت کـرد که، دنبالهٔ عام مرتبهٔ n را می‌تـوان با طول n^2-2n+4، به صورت زیر نوشت:

$$n\underbrace{12\ldots(n-1)\,n}\ \underbrace{12\ldots(n-2)\,n\,(n-1)}\ \ldots$$

$$\ldots\underbrace{12n3\ldots(n-1)}\ 1n2 \qquad (*)$$

که در آن، در هر یك از$(n-2)$ بلوك، عدد n ابتدا در آخر، سپس، قبل‌از $(n-1)$، بعد از آن قبل از $(n-2)$، ...، و سرانجام قبل از ۳ مـی‌آید؛ به جز این، عدد n در ابتدا و $1n2$ در انتها آمده است (به ایـن ترتیب، مثال دیگری برای $n=4$ پیدا می‌شود). برای این منظور، کافی است قانع شویم‌که، از سمت چپ، از k امین باری کـه n در $(*)$ وارد شده است، می‌توان با حذف، هردنباله‌ای‌از$(k-1)$عددمختلف را(بین$1, 2, \ldots, n-1$) پیدا کرد؛ و همچنین از سمت راست، هردنباله‌ای از $n-k$ عدد. واقع این است که هر دو بخش راست و چپ، بعد از حذف همهٔ nها، به این‌صورت در می‌آیند:

$$\underbrace{\underbrace{12\ldots m}\ \underbrace{12\ldots m}\ldots\underbrace{12\ldots m}}_{r-1\ \text{مرتبه}}\ 12\ldots r$$

که در آن $r\leqslant m=n-1$. واین دنباله، دارای ویژگی زیر است [ویژگی «دنبالهٔ عام» (m, r)]: از این‌دنباله، می‌توان با حذف، هردنباله‌ای را با r عدد مختلف (از بین ۱، ۲، ...، m) به‌دست آورد.

۲۳۱. $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ می‌گیریم، به نحوی‌که $n=2m$ یا $n=2m+1$.

عددهای مفروض را، به صورت زیر شماره‌گـذاری می‌کنیم: $x_0=1$ را

«مبدا» عـددها می‌گیریم، سپس، از x_0 در جهت حرکت عقربه‌های ساعت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ واز x_0 درخلاف جهت‌حرکت عقربه‌های‌ساعت $x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-m+1}$ (و x_{-m}، اگر n عددی فرد باشد).

a) اگر اختلاف هر دوعدد مجاور، بیش از ε نباشد، آن وقت

$$x_1\geqslant 1-\varepsilon \qquad x_{-1}\geqslant 1-\varepsilon$$
$$x_2\geqslant 1-2\varepsilon, \qquad x_{-2}\geqslant 1-2\varepsilon,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$x_{m-1}\geqslant 1-(m-1)\varepsilon, \qquad x_{-m+1}\geqslant 1-(m-1)\varepsilon,$$
$$x_m\geqslant 1-m\varepsilon, \qquad (x_{-m}\geqslant 1-m\varepsilon)$$

این نابرابری‌ها را باهم جمع می‌کنیم، همچنین برابری $x_0=1$ را هم در این جمع درنظر می‌گیریم، با توجه به این کـه، مجموع همهٔ عددها برابر صفر است، به دست می‌آید:

$$0\geqslant n-(1+2+\ldots+(m-1)+m+(m-1)+\ldots$$
$$\ldots+2+1)\,\varepsilon=n-m^2\varepsilon$$

از آن‌جا $\varepsilon\geqslant\frac{n}{m^2}\geqslant\frac{4}{n}$ (زیرا $m^2\leqslant\frac{n^2}{4}$).

▽ این ارزیابی برای حالتی‌که n عددی زوج باشد، دقیق است. در حالت $n=2m+1$، می‌توان آن را، با استفاده از x_{-m}، دقیق‌تر کرد:

$$\varepsilon\geqslant\frac{n}{m^2+m}=\frac{4n}{n^2-1}$$

b) در این‌جا می‌توان از نتیجه‌گیری a)، دوبار استفاده کرد. فرض کنید، بزرگترین اختلاف عددهای مجاور، ازلحاظ قدرمطلق، برابر ε باشد. با توجه به a: $\varepsilon\geqslant\frac{4}{n}$. ازطرف دیگر، تفاضل‌های «به‌معیاردرآمدهٔ» عددهای

مجاور از گروه $(x_1, x_2, \dots, x_n)$، یعنی عدد $y_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{\varepsilon}$ هم، به نوبهٔ خودبا همهٔ شرط‌های‌مسالهٔ a) سازگارند؛ بنا براین، برای‌مقداری‌از k داریم:

$$\left|\frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2}-x_k\right|=\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{2}-\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right|=$$

$$=\left|y_{k+1}-y_k\right|\cdot\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\frac{8}{n^2}$$

(در این‌جا، گاهی لازم می‌شود، اندیس را، به اندازهٔ n کم یا زیاد کنیم، زیرا عددها، روی محیط یك دایره‌اند.)

c) و d) نشان می‌دهیم که چگونه، برای‌هر n، بهترین ارزیابی ممکن از بالا، برای مقدار δ به دست می‌آید ، δ عبارت است از حداکثر ممکن برای قدرمطلق تفاضل بین یك عدد واقع برمحیط دایره و واسطهٔ حسابی دو عدد مجاور آن، و سپس، انتخاب بهین را (باکمترین مقدار δ) می‌سازیم. درضمن، انتخاب (x_k) را می‌توان متقارن به حساب‌آورد: $x_k=x_{-k}$، زیرا با تغییر x_k به $\frac{x_k+x_{-k}}{2}$، همهٔ ویژگی‌هایی که در شرط مساله آمده‌است و هم ارزیابی

$$|x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}|\leqslant 2\delta$$

حفظ می‌شود. قبل از آن‌که خود عددهای x_k را ارزیابی کنیم، تفاضل‌های $x_{k-1}-x_k$ را، با آغاز از x_0 و سپس با آغاز از نقطهٔ متقابل (وسط گروه)، ارزیابی می‌کنیم. چون $x_1=x_{-1}$

$$x_0-x_1\leqslant\frac{1}{2}|-x_{-1}+2x_0-x_1|\leqslant\delta;$$

$$x_1-x_2\leqslant(x_0-x_1)+|-x_0+2x_1-x_2|\leqslant 3\delta;$$

$$x_2-x_3\leqslant(x_1-x_2)+|-x_1+2x_2-x_3|\leqslant 5\delta;$$

. . . .

$$x_{k-1}-x_k\leqslant(2k-1)\delta \qquad (1)$$

وقتی $n=2m$ زوج باشد،وقتی که تنها عدد x_m، نسبت به x_0، متقابل است، به همان ترتیب، به دست می‌آید:

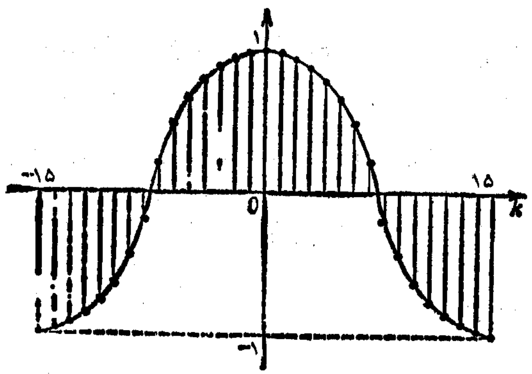
$$x_{m-1}-x_m\leqslant\delta;\quad x_{m-2}-x_{m-1}\leqslant 3\delta;\ \dots;$$

$$x_{m-j}-x_{m-j+1}\leqslant(2j-1)\delta \qquad (2)$$

وقتی $n=2m+1$ فرد باشد ($x_m=x_{-m}$ دوعدد مجاورند)، آن وقت

$$x_{m-1}-x_m\leqslant 2\delta;\quad x_{m-2}-x_{m-1}\leqslant 4\delta;\ \dots;$$

$$x_{m-j}-x_{m-j+1}\leqslant 2j\delta \qquad (2')$$



شکل ۹۹

یادآوری می‌کنیم، اگر k کمتر از $\frac{m}{2}$ باشد، بهترین ارزیابی برای $x_{k-1}-x_k$ عبارت است از (۱)، برای k بیشتراز $\frac{m}{2}$، (۲) یا (۲')؛ برای انتخاب بهینه از عددهای (x_k)، باید نابرابری‌ها بـه برابری تبدیل شوند؛ درضمن، نمودار دنبالهٔ بهینه، روی قطعه‌ای ازسهمی قرار دارد (شکل ۹۹). برای این که این مطلب را ثابت کنیم، و ارزیابی دقیقی از δ برای هر n

بدهیم، باید به طور جداگانه، چهار حالتی را که متناظر باقی‌مانده‌های n در تقسیم بر ۴ هستند، درنظر بگیریم مثلاً فرض کنید $n=4l+2$، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$x_k=x_{-k}\geqslant 1-s_k\delta$$

که در آن، s_k عبارت است از مجموع نخستین k عدد در سطر

$$1,\ 3,\ \ldots,\ 2l-1,\ 2l+1,\ 2l-1,\ \ldots,\ 3,\ 1$$

ارزیابی دقیق δ از این شرط به دست می‌آید که، مجموع همهٔ x_kها، برابر صفر باشد و انتخاب $x_k=x_{-k}=1-s_k\delta$، بهینه خواهد بود. در حالت خاص، برای $n=30$ ($l=7$)، به دست می‌آید:

$$0=x_0+2(x_1+x_2+\cdots+x_{14})+x_{15}\geqslant 30-S\delta$$

که در آن $S=2(s_1+s_2+\ldots+s_{14})+s_{15}$. این مجموع را، بهتر است این‌طور تبدیل کنیم. چون

$$s_{15}=1+3+5+\cdots+11+13+11+\cdots+3+1=$$
$$=7^2+8^2=113=s_1+s_{14}=s_2+s_{13}=\cdots=s_7+s_8$$

آن وقت $S=(2\times 7+1)s_{15}=15\times 113$. به این ترتیب $\delta\geqslant\frac{2}{113}$، درضمن، $\delta=\frac{2}{113}$ تنها برای انتخاب زیر به دست می‌آید (که روی شکل نشان داده شده است):

$$x_k=x_{-k}=1-s_k\delta=$$

$$=\begin{cases}1-k^2\delta & (\text{به‌ازای } 0،\ 1،\ \ldots،\ 7)\\ 1-(113-(15-k)^2)\delta=-1+(15-k)^2\delta & (k=8,\ldots,15)\end{cases}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان مرزهای دقیق δ را، برای هر n به‌دست‌آورد و قانع شد که، برای همهٔ مقدارهای n، نابرابری $\delta\geqslant\frac{16}{n^2}$ برقرار است

، هرچه n بزرگتر باشد، این ارزیابی به مقدار دقیق آن نزدیکتر می‌شود).

▽ مسالهٔ زیر، کاملاً شبیه مسالهٔ اخیر است: مطلوب است حداکثر مقدار ممکن تفاضل، بین ماکزیمم و می‌نیمم تابع متناوب T، به شرطی که مشتق آن، از لحاظ قدرمطلق، از واحد تجاوز نکند. این مساله، حتی از حالت «ناپیوستهٔ» آن، ساده‌تر است. در این‌جا هم، نمودار تابعی که دارای حداکثر «نوسان» باشد، از قطعه سهمی‌ها تشکیل شده است.

۲۳۳. ابتدا، به ذکر بعضی نکته‌ها می‌پردازیم که به هرمقدارعددطبیعی n مربوط می‌شوند. روی هم، 2^n ترتیب ازعددهای ۱+ و ۱− درراس‌های nضلعی منتظم وجود دارد. دو تبدیل را وقتی هم‌ارز به حساب می‌آوریم که بتوان، با توجه به شرط مساله، یعنی تغییر علامت‌ها در رأس‌های n ضلعی منتظم، از یکی به دیگری (و برعکس) رسید. هردو عمل ازاین گونه، «قابل جابه‌جائی»اند: نتیجهٔ کار، به‌ردیف این عمل‌ها بستگی ندارد؛ تکرار دوبار متوالی از یك عمل را می‌توان حذف کرد، زیرا با حالت نخست خود متحد می‌شود. درضمن، می‌توان خود را تنها به عمل‌هایی محدود کرد که علامت‌ها را در رأس‌های p ضلعی‌های منتظم، که p یعنی تعداد رأس‌های آن‌ها عددی اول است، تغییر می‌دهند. (این p ضلعی‌ها را «مولد» می‌نامیم)؛ مجموعهٔ رأس‌های n ضلعی منتظم را، برای هر n، که بر p بخش‌پذیر باشد، می‌توان به تعداد $\frac{n}{p}$ از p ضلعی‌های مولد تقسیم کرد.

قبل از این‌که دورتر برویم، مساله‌های مشخص را درنظر می‌گیریم.

a) برای $n=15$، روی‌هم هشت p ضلعی‌مولد وجوددارد: ۵مثلث و ۳ پنج‌ضلعی. ترتیبی را که تنها شامل عددهای ۱+ باشد، E می‌نامیم. هر ترتیب هم ارز E، با توجه به یکی از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ شامل ۸ pضلعی معین‌می‌شود؛ تعدادزیرمجموعه‌های مختلف (با به‌حساب آوردن مجموعهٔ درستی) برابر است با 2^8 و این، از تعداد کل 2^{15} ترتیب، کمتر است. بنابراین ترتیب‌هایی وجود دارد که هم‌ارز E نیستند.

b) برای $n=30$، تعداد کل p ضلعی‌های مولد، برابر است با

$$15+10+6=31$$

برای حل مساله، به نکته‌های دیگری نیاز داریم. می‌توان به تعدادکمتری از مولدها اکتفا کرد: مثلاً ازهردومثلث (وپنج‌ضلعی) که نسبت به‌مرکز متقارن‌اند، می‌توان تنها یکی‌رادرنظر گرفت، زیرا تغییرعلامت‌ها درآن و، هم‌چنین، در سه (پنج) «دوضلعی» شامل‌رأس‌های‌آن، باتغییرعلامت‌درسه‌ضلعی (پنج‌ضلعی) متقارن آن، هم‌ارز است. از این جا، تعداد مولدها برابر $3+5+15$، یعنی ۲۳ می‌شود و بنا براین 2^{23} ترتیب هم‌ارز E بـه دست می‌آیدکه از 2^{30} کمتر است.

c) سعی می‌کنیم، برای هر n، تعداد $T(n)$، یعنی تعداد ترتیب‌های هم‌ارز E را پیداکنیم. توجه کنیم، تعداد ترتیب‌های هم‌ارز با ترتیب دیگر A از ۱+ و ۱−، باز هم برابر $T(n)$ است؛ همهٔ آن‌ها، از ضرب جمله به جملهٔ علامت‌های ترتیب A، در هر ترتیبی از گروه هم‌ارزهای E به‌دست می‌آیند. اگر تعداد «گروه‌های هم‌ارز» ـحداکثر تعداد ترتیب‌های دو به‌دو ناهم‌ارزـ را $K(n)$ بنامیم، داریم:

$$K(n)=\frac{2^n}{T(n)}$$

فرض کنید، n شامل s عامل اول باشد:

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s} \qquad (*)$$

$p_1p_2\dots p_s=q$ و $\frac{n}{q}=m$ می‌گیریم. nضلعی منتظم را به q ضلعی‌های منتظم، به تعداد m، تقسیم می‌کنیم. مسالهٔ محاسبهٔ $T(n)$، بـه مسالهٔ ساده‌تر محاسبهٔ

$$T(q)=T(p_1p_2\cdots p_s)$$

منجر می‌شود. درواقع، هر یك ازمولدهای p_i ضلعی، مشمول تنها یکی‌از q ضلعی‌ها می‌شود؛ به زبان دیگر، تغییر علامت‌ها در q ضلعی‌های مختلف، به هم بستگی ندارند، بنا براین

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۶	۱۲	۳	۹
۱	۱۰	۱	۷	۱۳	۴
۲	۵	۱۱	۲	۸	۱۴

شکل ۱۰۰

هر عدد از ۰ تا ۱۴، نسبت به باقی‌مانده‌های خود در تقسیم بر ۵ و بر ۳، به‌صورت یك ارزشی معین می‌شود.

$$T(n)=(T(q))^m,\quad K(n)=(K(q))^m$$

ازحالت $s=2$ آغاز می‌کنیم: فرض‌کنید $n=p_1p_2$. رأس‌های n ضلعی‌را، با عددهای ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$ شماره‌گذاری می‌کنیم. این عددها را، در جدول $p_1\times p_2$ طوری می‌نویسیم که، عددهای یك سطر، در تقسیم بر p_1، وعددهای یك ستون در تقسیم بـر p_2، دارای یك باقی‌مانده باشند. این جدول را می‌توان تشکیل داد، زیرا دوباقی‌ماندهٔ (r_1, r_2)، از تقسیم بر p_1 و p_2، به‌صورت یك ارزشی، شمارهای از ۰ تا n را معین می‌کنند (شکل ۱۰۰). ترتیب عددهای ۱+ و ۱− روی محیط دایره، متناظرند با ترتیب عددهای

$$\sigma(r_1,r_2)=+1 \text{ و } -1$$

در خانه‌های جدول (r_1، شمارهٔ سطر؛ r_2، شمارهٔ ستون): تغییر علامت‌ها در p_1 ضلعی‌ها و p_2 ضلعی‌ها، متناظر است با تغییر علامت‌های σ در سطرها و ستون‌ها. هر ترتیبی ازاین عمل‌ها را می‌توان به این‌جا منجرکردکه، در سطر اول و ستون اول، ۱+ باشد. این‌گونه ترتیب‌ها، دو به‌دو ناهم‌ارزند؛ در واقع، با تغییرعلامت σ در سطرها و ستون‌ها، مقدار حاصل‌ضرب

$$\sigma(r_1,r_2)\,\sigma(0,r_2)\,\sigma(r_1,0)\,\sigma(0,0)$$

تغییرنمی‌کند (انتخاب این‌مقدارها، برای هر(r_1,r_2)، $1\leqslant r_1\leqslant p_1-1$، $1\leqslant r_2\leqslant p_2-1$، گروه هم‌ارزها را معین می‌کند). بنا براین

$$K(p_1p_2)=2^{(p_1-1)(p_2-1)},\quad T(p_1p_2)=2^{p_1+p_2-1}$$

در حالت خاص: $K(15)=2^8$، $T(15)=2^7$، $K(10)=2^4$. برابری اخیر، امکان می‌دهد تا $K(200)$ را پیدا کنیم:

$$n=200=2^3\times 5^2,\ q=10,\ m=20,$$

$$K(200)=(K(10))^{20}=2^{4\times 20}=2^{80}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان $K(n)$ را، برای هر حالتی از s، پیدا کرد. فرض کنید $q=p_1p_2\ldots p_s$؛ شمارهٔ k از ۰ تا $q-1$، به‌صورت یك‌ارزشی به وسیلهٔ باقی‌مانده‌های r_1، r_2، …، r_s در تقسیم q بر p_1، p_2، …، p_s معین می‌شود (قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها: ضمیمهٔ ۲). با تبدیل‌های $\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ ـ به‌تابع‌های در مجموعهٔ انتخاب‌های r_i، $0\leqslant r_i\leqslant p_i-1$ ($1\leqslant i\leqslant s$)، که علامت‌های $+1$ و -1 را می‌پذیرند ـ می‌توان به‌طور هم‌زمان، عمل‌های مربوط به تغییر علامت‌ها را در یك «ردیف»، که از p_i انتخاب تشکیل شده است و در آن‌ها، iامین مختص r_i دلخواه (و از ۰ تا p_i-1 تغییر می‌کند) و بقیهٔ $s-1$ عدد r_i ثابت است (برای هر $i=1, 2, \ldots, s$)، انجام داد. با این عمل‌ها، هر تبدیل به این‌جا منجر می‌شود که، اگر دست‌کم یکی از r_iها صفر باشد $\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_s)=+1$؛ درضمن، این منجرشدن تبدیل‌ها، به هم بستگی ندارند (حاصل‌ضرب 2^n مقدار σ برای انتخاب‌ها، که از تبدیل بعضی مختص‌ها به صفر به دست می‌آیند، تغییر نمی‌کند). پاسخ را، برای $q=p_1p_2\ldots p_s$ و برای هر $n=qm$ به‌صورت (*) می‌نویسیم:

$$K(q)=2^{(p_1-1)\ldots(p_s-1)};\ K(n)=2^{\varphi(n)}$$

که در آن $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$. و در حالت خاص

$$K(30)=2^8;\ T(30)=2^{32}$$

▽ در این‌جا، به‌صورتی نامنتظر، تابع $\varphi(n)$ پدیدار شد که در نظریهٔ عددها، معروف است: این، تابع اولر است و معرف تعداد عددهای طبیعی کوچکتر از n است که نسبت به n اول باشند.

۲۳۴. تنها نقطه‌های واقع بر نیم‌کرهٔ «شمالی» به قطب P را درنظر می‌گیریم (مقدارهای تابع f، متناظر با دوانتهای یك قطر، با هم برابرند). قطب P را، بلندترین نقطهٔ کره به‌حساب می‌آوریم. روشن است که $f(P)=1$ و، برای هر نقطهٔ دیگر M، از کره، داریم: $0\leqslant f(M)<1$.

a) O را مرکز کره بگیرید. فاصلهٔ c_M از نقطهٔ M تا صفحهٔ استوا، برابر است با کسینوس زاویهٔ MOP، به‌نحوی که

$$f(M)=c_M^2=\cos^2\gamma,\ (\gamma=\widehat{MOP})$$

اگر c_1، c_2 و c_3، کسینوس زاویه‌هایی باشند که سه شعاع دو به‌دو عمود برهم OM_1، OM_2 و OM_3 با OP تشکیل می‌دهند، آن‌وقت $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$، زیرا c_1، c_2 و c_3 عبارتند از طول تصویر پاره‌خط راست واحد OP بر سه خط راست دو به‌دو عمود برهم (می‌توان مکعب مستطیل با یال‌های c_1، c_2 و c_3، و قطر $OP=1$ را ساخت).

حل مساله‌های b) و c) بر نتیجه‌ای که از شرط (*) به دست می‌آید، تکیه دارد: Γ_X را نیمی از دایرهٔ عظیمه (به‌جز استوا و نصف‌النهار) می‌گیریم که دو انتهای آن، روی استوا باشد و، برای آن، X را بلندترین نقطه فرض می‌کنیم. در این صورت، برای هر نقطهٔ Y از کمان Γ_X (غیر از خود X) داریم $f(Y)<f(X)$. در واقع

$$f(Y)+f(Y')+f(Q)=f(X)+0+f(Q)=1$$

که در آن، Y' نقطه‌ای از کمان Γ_X است که برای آن $\widehat{YOY'}=90^\circ$؛ و Q، انتهای شعاع عمود بر صفحهٔ Γ_X است.

b) از هر نقطهٔ X کمان Γ_M می‌توان کمان Γ_X مربوط به آن را رسم و، سپس از آن‌ها، Γ_Y را طوری انتخاب کرد که شامل N باشد. دراین‌صورت

$$f(M)>f(Y)>f(N)$$

c) شبیه حالت قبل، برای هر دو نقطهٔ M و N (که در آن، M بالای N است). می‌توان زنجیرهٔ

$$M = X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_r = N$$

را طوری ساخت که X_j (برای $j=1, 2, \ldots, r$) روی $\Gamma_{X_{j-1}}$ باشد (اگر M و N، عرض‌های نزدیك به‌هم داشته باشند، ولی طول جغرافیائی آن‌ها، اختلاف زیادی داشته باشد، آن وقت، باید تعداد بیشتری از گام‌های r را برداشت).

d) اگر برای دو نقطهٔ M و N، واقع بر یك مدار Π و به فاصلهٔ c_1 از صفحهٔ استوا، داشته باشیم $f(M)-f(N)=\varepsilon>0$، آن وقت برای هر دو نقطهٔ M' و N' (که در آن، M' بلندتر از c_1 و N' کوتاه‌تر از c_1 است) خواهیم داشت:

$$f(M')-f(N')\geqslant f(M)-f(N)=\varepsilon$$

یعنی تابع f، روی ارتفاع c_1، «جهشی» به اندازهٔ ε دارد. از (*) نتیجه می‌شود که، در این صورت، برای هر دو نقطهٔ $c_2>c_3\geqslant 0$، با شرط $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$، باید تابع f، «جهشی» که کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ نیست، یا در ارتفاع c_2 و یا در ارتفاع c_3 داشته باشد. اگر زوج‌های (c_2, c_3) از این گونه را، بیش از $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ بگیریم، آن وقت با توجه به شرط $0\leqslant f\leqslant 1$، به تناقض می‌رسیم.

e) از آن چه گفتیم، معلوم می‌شود که تابع $f(M)$ برابر $g(c_M^2)$ است که، در آن، c_M فاصلهٔ نقطهٔ M تا صفحهٔ استوا، و $y=g(x)$، تابعی است صعودی یکنوا از بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ که با این شرط‌ها سازگار است: $g(0)=0$، $g(1)=1$ و به فرض $x_1+x_2+x_3=1$:

$$g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)=1$$

با توجه به شرط اخیر (به‌ازای $x_1=0$) نتیجه می‌شود:

$$g(x_3)=1-g(1-x_3)$$

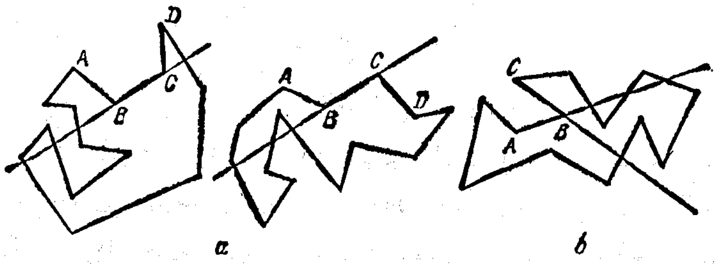
و بنا براین، برای هر x_1 و x_2:

$$g(x_1)+g(x_2)=1-g(1-x_1-x_2)=g(x_1+x_2)$$

ولی تنها تابعی که در این معادلهٔ تابعی صدق می‌کند و، درضمن، با شرط $g(1)=1$ سازگار است، تابع $g(x)=x$ است. این حکم، ابتدا برای x گویا (اول $x=\frac{1}{n}$ و سپس $x=\frac{k}{n}$) و بعد برای همهٔ مقدارهای x (و با توجه به یکنوابودن تابع) ثابت می‌شود.

۲۳۵. خط راستی که با امتداد یك ضلع BC از خط شکسته به‌دست آمده است، برحسب این که دوضلع مجاور آن AB و CD در یك طرف مختلف‌خط راست BC واقع باشند، ضلع‌های دیگرخط شکسته‌را در تعدادی زوج یا تعدادی‌فرد قطع می‌کند (در حالت اخیر، ضلع BC را «زیگزاگ» می‌نامیم). در درواقع، زوج یا فردبودن تعداد برخوردهای خط شکسته با خط راست BC، با این مطلب معلوم می‌شود که بدانیم، نقطه‌های A و D، در یك طرف این خط راست قرار دارند یا دردوطرف آن (شکل ۱۵۱، a) ولی روی هر خط شکستهٔ بسته، تعداد «زیگزاگ‌ها» زوج است: وقتی روی محیط این خط شکسته حرکت می‌کنیم، اگر توجه کنیم که در هر راس به کدام طرف می‌چرخیم ــ به راست یا به چپ ــ روشن می‌شود که تعداد چرخش‌های به راست برابر است با تعداد چرخش‌های به چپ، با توجه به این دو نکته، حکم مساله ثابت می‌شود.

اگر به نکتهٔ زیر توجه کنیم، می‌توان اثبات کوتاه‌تری به‌دست آورد: ضلع‌های زاویه‌ای که از امتداد هر دوضلع مجاور AB و BC حاصل می‌شود، خط شکسته را به‌تعدادی زوج قطع می‌کند (شکل ۱۵۱، b).



شکل ۱۵۱

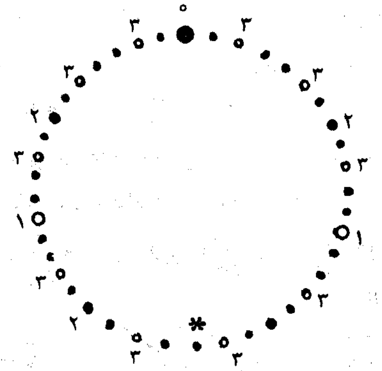
۲۳۶. فرض می‌کنیم در نقطهٔ X، عدد a_X را نوشته باشیم و، درضمن، به تعداد $n_X > ۱$ خط راست از آن بگذرد (این خط‌های راست، نقطهٔ X را به نقطه‌های مفروض دیگر، وصل کرده‌اند). مجموع عددهای واقع بر هر یك از این خط‌های راست، طبق شرط، برابر صفر است. مجموع کل عددهای روی n_X خط راست (که در آن، عدد a_X، n_X بار شرکت دارد) برابر است با

$$s+(n_X-۱)\,a_X=۰$$

که در آن، s عبارت است از مجموع همهٔ عددهایی که روی نقطه‌های جداگانه نوشته شده است.- فرض $s \neq ۰$ به تناقضی آشکار می‌انجامد: برای هر نقطهٔ X علامت عدد a_X با علامت مجموع s این عددها، مخالف است؛ بنابراین $s=۰$ و درنتیجه، برای هر X: $a_X=۰$.

۲۳۷. حکم b) را، ضمن حل مسالهٔ ۵۸، ثابت کردیم. اگر از دو لوزی از این گونه (با رأس‌های B و C) استفاده کنیم، نتیجهٔ a) هم به‌سادگی به دست می‌آید.

۲۳۸. پاسخ: a) بله ممکن است؛ b) ۸ حرکت (هر نفر ۴ حرکت).



شکل ۱۵۲

در شکل ۱۵۲ مثالی از ۴۱ کارت نشان داده شده است؛ کنار هر کارت، عددی را نوشته‌ایم که نشان می‌دهد، بعد از چند حرکت از آخر، این کارت برداشته می‌شود. چنین ترتیبی را می‌توان، به‌راحتی، و از آخر ساخت. به آخرین کارت سیاه باقی‌مانده با شمارهٔ ۰، دو کارت سفید با شمارهٔ ۱،

اضافه می‌کنیم؛ در کنار هرکدام از آن‌ها، دو کارت سیاه با شمارهٔ ۲ (در این طرف و آن طرف) می‌گذاریم؛ کنار هرکدام از کارت‌های سیاه، دو کارت سفید شمارهٔ ۳ قرار می‌دهیم و غیره. روشن است که، با این روش، در هر گام، حداکثر تعداد ممکن کارت‌های متناظر با شماره گذاشته می‌شود. برای هر t، ترتیبی با حداکثر تعداد ممکن $a_t=b_t+w_t$ از کارت‌ها به‌دست می‌آید (b_t کارت‌های سیاه و w_t کارت‌های سفید) که می‌توانند در t حرکت، به یك کارت سیاه تبدیل شوند ($b_۰=۱$، $w_۰=۰$). قانون نوشتن پشت سرهم (b_t, w_t) خیلی ساده است: ضمن عبور از t به $t+۱$، عدد بزرگتر از بین دو عدد b_t و w_t تغییر نمی‌کند، به عدد کوچکتر، دو برابر عدد بزرگتر اضافه می‌شود:

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
b_t	۱	۱	۵	۵	۲۹	۲۹	۱۶۹	۱۶۹	۹۸۵
w_t	۰	۲	۲	۱۲	۱۲	۷۰	۷۰	۴۰۸	۴۰۸
a_t	۱	۳	۷	۱۷	۴۱	۹۹	۲۳۹	۵۷۷	۱۳۹۳

برای حل مسالهٔ a) کافی است یکی از ۴۱ نقطهٔ شکل ۱۵۲ را، که شمارهٔ ۴ داشته باشد، حذف کرد؛ این حذف تاثیری در موقعیت ما، بعد از نخستین حرکت ندارد، مثلاً، برای حفظ تقارن، می‌توان نقطه‌ای را که با علامت * مشخص کرده‌ایم، حذف کرد.

عبور از ۱۰۰۰ کارت به یك کارت را، نمی‌توان با کمتر از ۸ حرکت انجام داد، زیرا، همان‌طور که در جدول دیده می‌شود: $a_۷=۵۷۷<۱۰۰۰$. برای این که مثال مربوط به ۱۰۰۰ کارت را به دست آوریم، می‌توان ابتدا نمونهٔ $a_۸=۱۳۹۳$ را، که با حداکثر ۸ حرکت وجود دارد، در نظر گرفت و، سپس، ۳۹۳ کارت با شمارهٔ ۸ را از آن حذف کرد که برموقعیت‌ما، بعد از حرکت اول تأثیری ندارد. این عمل را می‌توان انجام داد، زیرا ۴۰۸×۲، یعنی ۸۱۶ کارت دارای شمارهٔ ۸ هستند که در بین ۵۷۷ کارتی قرار دارند که شماره‌ای بیش از ۷ ندارند و، دست کم، $۸۱۶-۵۷۷=۲۳۹$ زوج

کارت ردیف هم را تشکیل می‌دهند.

۲۳۹. از تعریف حد دنباله استفاده می‌کنیم (ضمیمهٔ ۲۱). اگر برای هر $n \geqslant N$ و عددی مثل k، نابرابری‌های

$$\left|a_n - \frac{1}{2}a_{n+1}\right| < \varepsilon \quad \text{و} \quad \frac{|a_N|}{2^k} < \varepsilon$$

برقرار باشند، آن وقت، به‌ازای $m \geqslant N+k$ خواهیم داشت:

$$|a_m| < \frac{1}{2}|a_{m-1}| + \varepsilon < \frac{1}{2^2}|a_{m-2}| + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon < \dots$$

$$\dots < \frac{1}{2^{m-N}}|a_N| + \frac{\varepsilon}{2^{m-N+1}} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon <$$

$$< \frac{1}{2^k}|a_N| + 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

۲۴۰. تناظر متقابل و یك به یك f را، بین $n-1$ پاره‌خط راست از مسیر اول و $n-1$ پاره خط راست از مسیر دوم به نحوی برقرار می‌کنیم که مسافرت روی پاره‌خط راست اول به‌قیمتی تمام‌شود، که ازمسافرت روی پاره‌خط راست دوم بیشترنباشد $t_i(A)$ را «دم» i امین مسیری می گیریم ($i=1, 2$) که از شهر A آغاز شده است، یعنی مجموعهٔ شهرهایی که، در i امین مسیر، بعد از شهر A قرار دارند. شهر بلافاصله بعد از A را، در مسیر اول A' و در مسیر دوم A'' می‌نامیم.

f را به این ترتیب معین می‌کنیم. اگر AA'، پاره‌خط مسیراول، چنان باشد که $t_1(A)$ با $t_2(A)$ برخورد دارد (یعنی در شهری مشترك‌اند)، آن وقت فرض می‌کنیم: $f(AA')=AA''$. در حالت عکس، فرض می‌کنیم $f(AA')=BB'$ که، در آن، B عبارت است ازآخرین شهر از $t_1(A)$ در مسیر دوم. توجه کنیم که، در این حالت، $t_1(B)$ هم با $t_2(B)$ برخوردی ندارد؛ درضمن، A، آخرین شهر از $t_2(B)$ در مسیر اول است (از این‌جا، نتیجه می‌شود که، تناظر f، یك به یك است و، درضمن، معکوس آن، f^{-1}

هم، با همین قاعده تعریف می‌شود).

اگر $|a|$ را به معنای قیمت بلیت روی پاره‌خط راست a فرض کنیم، تحقیق می‌کنیم که $|a| \leqslant |f(a)|$. اگر C، شهر برخورد $t_1(A)$ و $t_2(A)$ باشد، آن وقت $|AA'| \leqslant |AC| \leqslant |AA''|$؛ و در حالت دوم

$$|AA'| \leqslant |AB| = |BA| \leqslant |BB''|$$

(در هر دو حالت، نابرابری‌ها، نتیجه‌ای از نظام انجام مسافرت است: برای هر D از $t_1(A)$ داریم: $|DA| \geqslant |AA'|$؛ و برای هر E از $t_2(A)$، برعکس: $|EA| \leqslant |AA''|$).

۲۴۱. دو دایره‌ای را درنظر می‌گیریم که بر دو وجه مجاور یال AB از چندوجهی، محیط باشند. این دو دایره، به‌صورتی یك ارزشی، کرهٔ σ را معین می‌کنند که این دو دایره روی آن قرار گرفته‌اند؛ از این گذشته، همهٔ رأس‌های این دو وجه مجاور هم، روی کره‌اند. اگر BC و BD، دو یال دیگر چند وجهی باشند که از B خارج شده‌اند، آن وقت دایره‌ای هم که از سه نقطهٔ B، C و D می‌گذرد (دایرهٔ محیطی وجه شامل این سه رأس)، به کرهٔ σ تعلق دارد، به نحوی که همهٔ رأس‌های دو وجه متصل به یال BC، روی همان σ واقع‌اند. اکنون به همان ترتیب، می‌توان وجه‌های متصل به یالی را در نظر گرفت که از C خارج شده است و، با همین روش، خود را به هر رأسی از چندوجهی رسانید ــ همهٔ آن‌ها روی یك کرهٔ σ قرار دارند: برای هر یك از این رأس‌ها، می‌توان زنجیره‌ای از یال‌ها ساخت که از یال AB آغاز و به رأس موردنظر ختم شده باشد.

۲۴۲. پاسخ: بله، دومی می‌تواند برنده شود.

برای اثبات، باید برنامهٔ برد را توضیح دهیم. دومی می‌تواند درچهار حرکت خود، طوری عمل کندکه، برای حرکت پنجم اولی، ضریب یکی از توان‌های فرد x، x^{2l+1}، باقی‌مانده باشد. فرض کنید، قبل از حرکت چهارم دومی، به چندجمله‌ای

$$P(x) + * x^m + l * x^{2l+1}$$

رسیده باشیم که، در آن: $P(x)$ چندجمله‌ای معلومی با ضریب‌های عددی است.
عددهای μ و $c>0$ را طوری در نظر می‌گیریم که، به‌ازای هرمقدار λ، برای چندجمله‌ای $F(x)=P(x)+\mu x^m+\lambda x^{2l+1}$ داشته باشیم:

$$cF(1)+F(-2)=0$$

که دراین صورت $F(x)$، دارای ریشه‌ای در بازهٔ $[-2, 1]$ خواهد داشت (ضمیمهٔ ۵ را ببینید). برای این منظور کافی است فرض کنیم:

$$\mu=\frac{P(-2)-cP(1)}{c+(-2)^m} \text{ و } c=2^{2l+1}$$

(روشن است که، به‌جای ۱و ۲−، می‌توان دو عدد دیگر با علامت‌های مختلف را در نظر گرفت). اگر دومی، در حرکت چهارم خود، این مقدار μ را انتخاب کند، وجود ریشه را در معادلهٔ مفروض، تأمین خواهد کرد.

۲۴۳. پاسخ: $\frac{6}{7}$، $\frac{5}{7}$، $\frac{4}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{2}{7}$، $\frac{1}{7}$ و ۰ لیتر.

تحقیق درستی این جواب، دشوار نیست: اگر اولی شیر لیوان خود را، بین ۶ لیوان دیگر به طور برابر تقسیم کند، به هر لیوان $\frac{1}{7}$ لیترشیر می‌رسد و، درضمن، لیوان اولی خالی می‌ماند، یعنی همان عددهای قبلی ظاهر می‌شوند، با این تفاوت که، جای لیوان‌ها، عوض شده است؛ هر لیوان قبلی، نصیب نفر سمت راستی شده است. تنها این می‌ماند که، ثابت کنیم، جواب دیگری وجود ندارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

x را بیشترین مقدار شیری می‌گیریم که، در تمامی مدت جا به‌جایی شیرها، به لیوان Γ، قبل از آن‌که زمان تقسیم آن رسیده باشد، ریخته شده است. در این صورت، بعد از یک‌دور عمل شامل ۷ بار «جا به‌جایی» شیرها (این دور را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد، به‌نحوی که Γ را می‌توان حلقهٔ اول این دور دانست)، در لیوان Γ حداکثر $x=\frac{x}{6}\times 6$ لیترشیر جمع

می‌شود؛ درضمن، خود این مقدار وقتی به‌دست می‌آید که ازهر یک از شش لیوان دیگر، درست $\frac{x}{6}$ لیترشیر به لیوان Γ ریخته شده باشد. به این ترتیب، با توجه به شرط نتیجه می‌شود که، هر لیوان، همان مقدار x لیتر شیر را بخش می‌کند و، بعد ازدریافت k سهم، در آن، $\frac{kx}{6}$ لیتر خواهد بود $(k=1, 2, \ldots, 6)$؛ مقدار x، از این شرط به‌دست می‌آید که، مجموع کل شیرها، برابر ۳ لیتر است.

۲۴۴. a) پاسخ: یک عدد دورقمی ۴۹ و یک عددچهار رقمی ۱۶۸۱ (41^2)، عدد «خاص» است.

فرض می‌کنیم: $(10x+t)^2=100x^2+20xt+t^2$ که، در آن، باید عدد $20xt+t^2$ مجذور کامل عددی طبیعی کوچکتر از ۱۰، و t عدد درستی از ۱ تا ۹ باشد، درضمن $10<x^2$. دراین صورت $x\geqslant 4$ و $xt\leqslant 4$ که تنها برای $x=4$ و $t=1$ ممکن است.

b) پاسخ: بله وجود دارد، $506^2=256036$.

c) برای این‌که، عدد «خاص» لازم، به صورت

$$(10^5x+1)^2=10^{10}x^2+2\times 10^5x+1$$

را به‌دست آوریم، کافی است عدددرست x را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$2\times 10^5x+1=y^2<10^{10} \text{ و } 10^9<x^2<10^{10}$$

می‌توان $x=5\times 10^4-1$ انتخاب کرد (عدد ۲۰ رقمی «خاص» موردنظر چنین است:

$$(4999900001)^2=24999000019999800001$$

که از 49999^2 و 99999^2 تشکیل شده است).

d) برای هر k، عدد «خاص» $4k$ رقمی تنها می‌تواند

$$(10^kx+t)^2=10^{2k}x^2+2\times 10^kxt+t^2$$

به ازای $10^{2k-1} \leqslant x^2 < 10^{2k}$ باشد، از این‌جا

$$x > 3\times 10^{k-1} \quad \text{و} \quad 6\times 10^{2k-1}t < 10^{2k}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $t=1$. درضمن، برابری

$$2\times 10^k x + 1 = (2u+1)^2$$

که با برابری $2^{k-1}\times 5^k x = u(u+1)$ هم ارز است، تنها در سه حالت می‌تواند برقرار شود:

(۱) $u+1$ بر $5\times 10^{k-1}$ بخش پذیر باشد؛

(۲) u بر 2^{k-1} و $u+1$ بر 5^k بخش‌پذیر باشد؛

(۳) u بر 5^k و $u+1$ بر 2^{k-1} بخش‌پذیر باشد.

هر حالت، بیش از یك جواب که با شرط $u<5\times 10^{k-1}$، هم‌ارز با شرط $2u+1<10^k$ سازگار باشد، ندارد [در حالت‌های (۲) و (۳)، کافی است اختلاف دو جواب را درنظربگیریم تا با این شرط تناقض پیدا کند). بنابراین، بیش از ۳ عدد «خاص» وجود ندارد.

▽ با بحثی مفصل‌تر، می‌توان ثابت‌کرد که، از این گونه عدد، بیش از دوتا وجود ندارد.

c) برای‌هر k،دست‌کم یك‌عددخاص $(4k+2)$رقمی،یعنی $z^2=v+w$ وجود داردکه، در آن، $v=25\times 10^{2k-1}$، و w عددی طبیعی بزرگتر از $\sqrt{v}$. فرض می‌کنیم $y=w^2-v$؛ درضمن

$$z^2=4v.\,w^2+y^2=10^{2k+1}w^2+y^2$$

از w^2 و y^2 «تشکیل» شده و عددی خاص است، به شرطی‌که داشته باشیم:

$$0<y^2<10^{2k+1} \quad \text{و} \quad 10^{2k}\leqslant w^2<10^{2k+1}$$

چون $w-1<\sqrt{v}$ و $(w-1)^2\leqslant v-1$، بنابراین

$$y^2<4v=10^{2k+1} \,،\; y<2\sqrt{v}$$

سپس داریم:

$$10^{2k}<v<w^2=v+y<v+2\sqrt{v}<3v<10^{2k+1}$$

▽ در حالت خاص می‌توان به کمك کامپیوتر، عدد زیر را به ازای $k=7$ به‌دست آورد:

$$z=25\times 10^{13}+15811389^2=500000022109321$$

که مجذور آن، عدد ۳۰ رقمی خاصی است

۲۴۵. عددهای مفروض را، به ردیف صعودی می‌نویسیم:

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$$

ثابت می‌کنیم، هر مجموع s، شامل چند تا از این جمله‌ها، در یکی از فاصله‌های بین $\frac{1}{2}b_k$ و b_k قرار داردکه ، در آن، $b_k=a_1+\cdots+a_k$ $(k=1,\ldots,n)$. کافی است ثابت کنیم کـه، هیچ‌کدام از مجموع‌های s، نمی‌تواند، به طـور اکید، بین b_k و $\frac{1}{2}b_{k+1}$ واقع باشد. فرض می‌کنیم:

$$s>b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$$

درضمن، فرض می‌کنیم،s، شامل‌عضوی‌مثل $a_i\geqslant a_{k+1}$ باشد،بنابراین $s\geqslant a_{k+1}$. با جمع‌کردن نابرابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$2s>a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=b_{k+1}\Rightarrow s>b_{k+1}$$

۲۴۶. a) ده‌رقم ۰، ۱، ...، ۹ را، به دو گروه و در هر گروه ۵ رقم، تقسیم می‌کنیم (مثلاً از ۰ تا ۴ در یك‌گروه، و از ۵ تا ۹ درگروه دیگر). کافی است از جعبه‌هایی استفاده‌کنیم‌که، در آن‌ها، هر دو رقم متعلق به یکی از این دو گروه باشند، زیـرا چنین دورقمی، در هر شمارهٔ سه رقمی وجود دارد. (وبه این ترتیب، جعبه‌هایی‌که دورقم آن‌ها، از دو گروه مختلف باشند، خالی می‌ماند).

b) به جز ۱۰ جعبهٔ با شماره‌های ۰۰، ۱۱، ...، ۹۹ کـه حتماً باید

اشغال شوند، دست کم به ۳۰ جعبهٔ دیگر نیاز داریم تا بلیت‌های با رقم متفاوت را در آن‌ها جا دهیم: تعداد چنین بلیت‌هایی روی هم برابر $۷۲۰=۸\times۹\times۱۰$ است و در هر جعبهٔ با شمارهٔ $\overline{pq}(p\neq q)$، بیش از $۲۴=۸\times۳$ تا از این بلیت‌ها وارد نمی‌شود ($\overline{zpq}$، $\overline{pzq}$ و $\overline{pqz}$ که، در آن‌ها، z رقمی دلخواه، مخالف با p و q است).

c) x را کمترین تعداد جعبه‌های اشغال‌شده‌ای می‌گیریم که، شماره‌های آن‌ها، با یك رقم آغاز شده باشند ($x\geqslant ۱$)؛ چون همهٔ رقم‌ها، حقوقی برابر دارند، می‌توان فرض کرد که، کمتر از همه، جعبه‌هایی باشند که با شمارهٔ ۹ آغاز شده‌اند: ۹۹، ۹۸، ...، $\overline{۹y}$ که، در آن، $y=۱۰-x$. در این صورت، هر بلیت با شمارهٔ $\overline{۹pq}$ را، که در آن، $p<y$ و $q<y$، نمی‌توان در جعبه‌های $\overline{۹p}$ و $\overline{۹q}$ قرارداد، یعنی باید جعبهٔ $\overline{pq}$ را اشغال کنند. به این ترتیب، تعداد جعبه‌هایی که باید اشغال شوند، برابر است با دست کم همهٔ $y^۲$ جعبه‌ای که هردو رقم شمارهٔ آن‌ها از ۰ تا $(y-۱)$ است و همچنین، دست کم $x^۲$ جعبه‌ای که شماره‌های آن‌ها با یکی از رقم‌های y تا ۹ آغاز می‌شوند (برای هر یك از این x رقم، دست کم x جعبه لازم است)؛ یعنی تعداد کل جعبه‌ها، نمی‌تواند از این مقدار کمتر باشد:

$$y^۲+x^۲=(۱۰-x)^۲+x^۲\geqslant ۵۰$$

d) و e). برای عددهای طبیعی و مفروض k و s ($k<s$)، $F(k،s)$ را به معنای کوچکترین عدد از عددهای $x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_k^۲$ می‌گیریم که، در آن، $x_۱$، $x_۲$، ...، x_k، عددهایی طبیعی به مجموع s هستند. مقدار $F(k،s)$ را می‌توان برحسب k و s بیان کرد. حداقل مقدار مجموع مجذورها وقتی به دست می‌آید که عددهای x_i «تقریباً برابر» باشند: اگر $s=kq+r$، $۰\leqslant r<k$، آن وقت $(k-r)$ تا از آن‌ها برابر q، و r تای بقیه، برابر $q+۱$ باشند، به نحوی که

$$F(k،s)=(k-r)q^۲+r(q+۱)^۲=kq^۲+r(۲q+۱)$$

بهتر است، مسالهٔ کلی‌تر را مورد بررسی قرار دهیم، وقتی که «بلیت‌ها» k رقمی و با رقم‌های از ۰ تا $s-۱$ باشند (در مسالهٔ ما: $s=۱۰$). ثابت می‌کنیم، حداقل تعداد $M(k،s)$ جعبه‌ها با شماره‌های $\overline{pq}$ ($۰\leqslant p,q<s$) که در آن، می‌توان بلیت‌های، با حذف $(k-۲)$ رقم را جا داد، برابر است با $F(k-۱،s)$.

در حالت خاص مسالهٔ d):

$$M(۴،۱۰)=F(۳،۱۰)=۳^۲+۳^۲+۴^۲=۳۴$$

پاسخ مسالهٔ e) را در این جدول داده‌ایم:

k	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$M(k،۱۰)=F(k-۱،۱۰)$	۵۰	۳۴	۲۶	۲۰	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰

نابرابری $M(k،s)\geqslant F(k-۱،s)$ را می‌توان، با استدلالی شبیه مسالهٔ c) و با استفاده از استقرا روی $k+s$، ثابت کرد:

$$M(k،s)\geqslant \min_{x=۱,۲,\dots,s}\left(M(k-۱،s-x)+x^۲\right)$$

برای جا دادن بلیت‌ها، در $F(k-۱،s)=x_۱^۲+\dots+x_{k-۱}^۲$ جعبه، کافی است شبیه مسالهٔ a)، s رقم را به $k-۱$ گروه (با $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{k-۱}$ رقم) تقسیم کرد و جعبه‌هایی را در نظر گرفت که، در آن‌ها، هر دو رقم از یکی از گروه‌ها انتخاب شده‌اند.

۲۴۷. همهٔ گره‌ها را، به ردیف به شطرنجی، رنگ‌های سیاه و سفید در می‌آوریم. در مرز به جز رأس‌های مربع اصلی، ۹۹×۴ گره وجود دارد که، به طور برابر، بین گره‌های سیاه و سفید تقسیم شده‌اند. فرض کنید، همهٔ آن‌ها، در انتهای خط‌های شکسته واقع باشند. در این صورت، تعداد خط‌های شکسته‌ای که دو انتهای سفید دارند با تعداد خط‌های شکسته‌ای که دو انتهای سیاه دارند، برابر است. بنابراین، تعداد کل گره‌های سفید و سیاه هم، که روی خط‌های شکسته و در درون صفحهٔ شطرنجی قرار دارند، برابر می‌شوند. ولی در درون صفحهٔ شطرنجی، روی هم $۹۹^۲$، یعنی به تعدادی فرد

گره‌وجود دارد که، دست‌کم، یکی از آن‌ها، روی خط‌های شکسته واقع نیست.

۲۸۴. با توجه به شرط مساله، معلوم می‌شود که مقدار

$$s = x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

از ۲ کمتر نیست (زیرا $n \leqslant s$، $m \leqslant s$ و $s < mn$). در حالتی که داشته باشیم: $m = n = 2$، $2 \leqslant s \leqslant 3$، حکم مساله به سادگی قابل تحقیق است. حکم را در حالت کلی، با استقرا روی $m + n = k$ $(k \geqslant 4)$ ثابت می‌کنیم.

$x_1 > y_1$ را، به ترتیب، بزرگ‌ترین عددها بین x_i و y_j می‌گیریم ($1 \leqslant i \leqslant n$، $1 \leqslant j \leqslant m$؛ حالت $x_1 = y_1$ روشن است). برای این که، فرض استقرا را، در مورد برابری

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \dots + x_n = y_2 + \dots + y_m$$

که شامل $k - 1 = m + n - 1$ عدد است، در دو طرف برابری به‌کار بریم (بعد از آن‌که، در صورت لزوم، y_1 را به سمت راست منتقل کنیم)، کافی است برقراری نابرابری

$$s' = y_2 + \dots + y_m < n(m-1)$$

را مورد تحقیق قرار دهیم؛ چون $y_1 > \frac{s}{m}$، بنابراین

$$s' < s - \frac{s}{m} = \frac{mn(m-1)}{m} = n(m-1)$$

۲۴۹. K_1 را بزرگ‌ترین مربع از مربع‌های مفروض، سپس K_2 را بزرگ‌ترین مربع از بین مربع‌هایی که مرکزشان در K_1 قرار ندارد، بعد K_3 را بزرگ‌ترین مربع از بین آن‌هایی که مرکزی در داخل مربع‌های K_1 و K_2 ندارند و غیره، فرض می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، نقطهٔ C، مرکز یك مربع، در بیش از چهار مربع، از مربع‌های K_1، K_2، ...، واقع باشد، دراین‌صورت، مرکزهای دوتا از آن‌ها (K_i و K_j) در یکی از چهار بخش صفحه که به وسیلهٔ محور های تقارن

مربع به مرکز C به وجود آمده‌اند، قرار می‌گیرد. از بین K_i و K_j، آن مربعی که مرکز آن، نسبت به این‌محورها، دورتر است (مثلاً نسبت به مجموع‌ها، یا نسبت به بزرگ‌ترین فاصله‌ها) شامل مرکز دیگری هم می‌شود. ولی این، با قانون انتخاب مربع‌ها، متناقض است.

۲۵۰. $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ را به ترتیب وزن وزنه‌ها می‌گیریم.

a) m_1 را در کفهٔ چپ، بعد m_2 را در کفهٔ راست، m_3 را در کفهٔ چپ، m_4 را در کفهٔ راست و غیره قرار می‌دهیم؛ همان دنبالهٔ مورد نظر $LRLRLR\dots$ به‌دست می‌آید. و این، نتیجه‌ای است از حکم سادهٔ زیر:

پیش‌قضیه. اگر $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} < m_k$، آن وقت، از دو مجموع

$$m_1 + m_3 + m_5 + \dots \text{ و } m_2 + m_4 + m_6 + \dots$$

(که شامل همهٔ n عدد مفروض باشند)؛ آن مجموعی بزرگ‌تر است که، عدد بزرگ‌تر m_k، در آن باشد.

برای اثبات پیش‌قضیه، کافی است در حالت زوج بودن k، نابرابری‌های

$$m_1 < m_2,\ m_3 < m_4,\ \dots,\ m_{k-1} < m_k$$

و در حالت فرد بودن k، نابرابری‌های

$$m_1 > 0,\ m_3 > m_2,\ \dots,\ m_k > m_{k-1}$$

را با هم جمع کنیم.

همین پیش‌قضیه، ولی برای $m_l < m_{l+1} < \dots < m_{k-1} < m_k$ که از $k - l + 1$ عدد تشکیل شده است، برای حل مسالهٔ b) استفاده خواهیم کرد.

b) بهتر است ردیف وزنه‌ها را، که متناظر با واژهٔ مفروض با حرف‌های L و R است، «با آغاز از پایان» واژه شرح دهیم.

همهٔ وزنه‌های با شمارهٔ زوج را در یکی از کفه‌ها، و همهٔ شماره‌های فرد را در کفهٔ دیگر می‌گذاریم، درضمن، سنگین‌ترین وزنهٔ m_n را، در کفه‌ای قرار می‌دهیم که متناظر با آخرین حرف از واژهٔ مفروض باشد؛ سپس، با

عبور از هر حرف به حرف قبلی خود، اگر حرف عوض شده است (از L به R یا از R به L)، سنگین‌ترین وزنه را از بین وزنه‌های باقی‌مانده بر می‌داریم و اگر با تغییر حرف روبه‌رو نیستیم، سبك‌ترین آن‌ها را. درضمن هربار، ردیفی از وزنه‌ها (به ردیف شماره‌ها) باقی می‌ماند که، با عوض‌کردن جای خود، در این یا آن کفه قرار دارند؛ درمورد این ردیف، پیش قضیه را به کار می‌بریم.

۲۵۱. a) پاسخ: چند جمله‌ای‌های $Q_1(x)=x$ و $Q_2(x)=P(x)$ با چندجمله‌ای $P(x)=x^2-\alpha$، به‌ازای هرمقدار دلخواهٔ α، قابل جابه‌جایی‌اند؛ چندجمله‌ای Q از درجهٔ سوم، که با $x^2-\alpha$ قابل جابه‌جایی باشد، به‌ازای $\alpha=0$ ($Q(x)=x^3$) و به‌ازای $\alpha=2$ ($Q(x)=x^3-3x$) وجود دارد.

اثبات این‌که چندجمله‌ای دیگری وجود ندارد، ازراه مقایسهٔ ضریب‌ها به دست می‌آید. مثلاً* برای چندجمله‌ای درجهٔ سوم، اتحاد

$$(x^3+\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3)^2-\alpha=(x^2-\alpha)^3+\beta_1(x^2-\alpha)^2+\beta_2(x^2-\alpha)+\beta_3$$

وقتی برقرار است که‌داشته باشیم: $\beta_1=\beta_3=0$ (مقایسهٔ ضریب‌های x^5، x^3 و x)، $2\beta_2=-3\alpha$ (مقایسهٔ ضریب‌های x^4)، $\beta_2^2=3\alpha^2+\beta_2$ (مقایسهٔ ضریب‌های x^2)، $\alpha=\alpha^3+\beta_2\alpha$ (مقایسهٔ مقدارهای ثابت). از آن‌جا یا $\alpha=0$ و $\beta_2=0$ و یا

$$\beta_2=-\frac{3}{2}\alpha=1-\alpha^2=\beta_2^2-3\alpha^2$$

و این سه معادلهٔ با دومجهول، منجر به جواب $\alpha=2$، $\beta_2=-3$ می‌شوند.

b) به سادگی قابل تحقیق است که اگر چندجمله‌ای‌های قابل جابه‌جایی $P(x)$ و $Q(x)$ را، با هم، به این صورت تبدیل کنیم:

$$P(x)\to P^*(x)=P(x-\gamma)+\gamma \quad \text{و} \quad Q(x)\to Q^*(x)=Q(x-\gamma)+\gamma$$

(γ، عددی دلخواه است)، آن وقت چند جمله‌ای‌های $P^*(x)$ و $Q^*(x)$ هم،

نسبت به یکدیگر، قابل جابه‌جایی‌اند. هرچندجمله‌ای درجهٔ دومی که ضریب بزرگترین درجهٔ آن واحد باشد، می‌توان (با جداکردن مربع کامل آن)، به صورت $P^*(x)=x^2-\alpha$ تبدیل کرد. بنابراین، می‌توان از ابتدا فرض کرد $P(x)=x^2-\alpha$ و شبیه a) عمل کرد.

با توجه به‌اتحاد $(Q(x))^2-\alpha=Q(x^2-\alpha)$، که در آن

$$Q(x)=x^k+\beta_1x^{k-1}+\beta_2x^{k-2}+\dots+\beta_k$$

دستگاه معادله‌هایی برای β_1، β_2، ...، β_k به‌دست می‌آید. قبل‌ازهمه خواهیم داشت: $\beta_1=\beta_3=\dots=0$ و، سپس، معادله‌های به‌صورت $\beta_2=F_2$، $\beta_4=F_4$، ... که، در آن‌ها، تابع‌های F_i به α و به β_{2j} بستگی دارند ($2j<i$)، به نحوی که ضریب‌های β_2، β_4، ... به طور یك ارزشی پیدا می‌شوند (تنها $\left[\frac{k}{2}\right]$ معادله، از بین k معادله‌ای که با برابر قراردادن ضریب‌های x^{2k-2}، x^{2k-4}، ...، x^2 و مقدار ثابت به دست می‌آیند، برای جست وجوی β_{2j} کافی است؛ بقیه، شرط‌هایی اضافی هستند که ممکن است، برقرار نباشند).

c) این چندجمله‌ای‌ها، عبارتند از $P(P(x))$ و $P(P(P(x)))$.

d) به جای $P(Q)$ و $P(Q(R))$ از نمادهای $P\circ Q$ و $P\circ Q\circ R$ استفاده می‌کنیم. طبق شرط $P\circ Q=Q\circ P$ و $P\circ R=R\circ P$، از آن‌جا

$$(Q\circ R)\circ P=Q\circ R\circ P=Q\circ P\circ R=P\circ Q\circ R=P\circ(Q\circ R),$$

$$(R\circ Q)\circ P=R\circ Q\circ P=R\circ P\circ Q=P\circ R\circ Q=P\circ(R\circ Q)$$

می‌بینیم که، چندجمله‌ای‌های $Q\circ R$ و $R\circ Q$، هردو با P قابل جابه‌جایی‌اند؛ و چون از یك درجه هستند (حاصل‌ضرب درجه‌های R و Q)، با توجه به b)، بر هم منطبق‌اند.

e) با روش استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که، برای هر $k\geqslant 2$، چندجمله‌ای P_k از درجهٔ k وجود دارد، به‌نحوی که

$$t^k+\frac{1}{t^k}=P_k\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2 \text{ ، } t^3+\frac{1}{t^3}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

به نحوی که $P_2(x)=x^2-2$ ، $P_3(x)=x^3-3x$. درضمن

$$t^{mn}+\frac{1}{t^{mn}}=P_m\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right)=P_n\left(t^m+\frac{1}{t^m}\right)=$$

$$=P_m\left(P_n\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_n\left(P_m\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_{mn}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

از این اتحادها، نتیجه می‌شود: $P_m\circ P_n=P_n\circ P_m=P_{mn}$.

▽ این چندجمله‌ای‌ها، با تغییر متغیرهای ساده‌ای، ازچندجمله‌ای‌های چبیشف، T_k، که با اتحادهای زیر معین می‌شوند، به دست می‌آیند:

$$\cos k\varphi=T_k(\cos\varphi),\ k=2, 3, \dots,\quad P_k(x)=2T_k\left(\frac{x}{2}\right)$$

۲۵۲. پاسخ: ۸۸.

با هر یك از عددهای ... ،۳ ،۲ ،۱ = k، در دنبالهٔ (a_n)، $2k$ بار برخورد می‌کنیم، زیرا شرط $a_n=k$ هم‌ارز است با

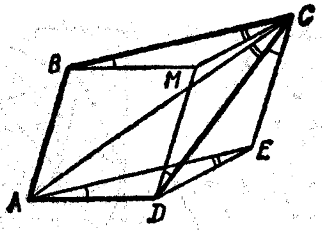
$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2} \text{ یا } k^2-k<n\leqslant k^2+k$$

بنابراین، درمجموع

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{1}{a_{44\times 43+1}}+\dots+\frac{1}{a_{44\times 45}}\right)$$

مقدار هر یك از پرانتزها، برابر است با $2k\times\frac{1}{k}=2$.



شکل ۱۰۳

۲۵۳. E را رأس مثلث ADE می‌گیریم که از انتقال مثلث BMC به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{BA}$ به دست آمده باشد (شکل ۱۰۳). در این صورت $MDEC$ متوازی‌الاضلاع است وزاویه‌های EAD، CMB، CDM و ECD برابر می‌شوند و نقطه‌های A، C، E و D روی محیط یك دایره قرار می‌گیرند. بنابراین، زاویه‌های ACD، AED و BCM هم برابر می‌شوند.

۲۵۴. اگر 1978^m-1 بر $d=1000^m-1$ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت عدد

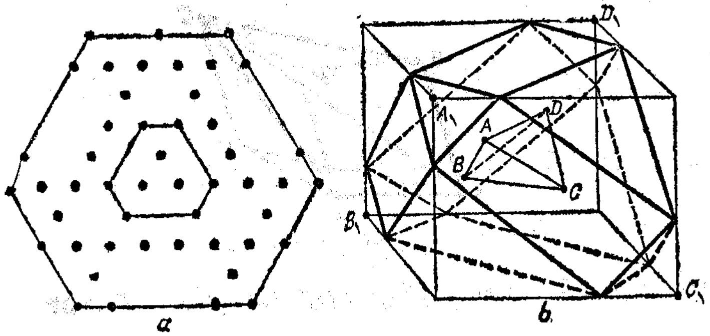
$$1978^m-1000^m=2^m(989^m-500^m)$$

هم باید بر d بخش‌پذیر باشد. ولی این ممکن نیست، زیرا 989^m-500^m از d کوچکتر، و d عددی فرد است.

۲۵۵. a) پاسخ. $n=7$.

مجموعهٔ K_n، از نقطه‌های واقع برخط راست AB تشکیل شده است که از نقطه‌های A و B به فاصله‌هایی که با عددهای درست بیان می‌شوند، قرار دارند؛ درضمن، دو نقطهٔ انتهایی این مجموعه، از وسط پاره‌خط راست AB، به فاصلهٔ $\frac{3^n}{2}$ قرار دارند $(n=1, 2, \dots)$. بنابراین، دو نقطهٔ انتهایی به فاصلهٔ $\frac{1-3^n}{2}$ و $\frac{3^n+1}{2}$ از A واقع‌اند. چون

$$\frac{3^6+1}{2}=365<1000 \text{ و } \frac{3^7+1}{2}=1094>1000$$



شکل ۱۰۴

بنا براین، مجموعهٔ مطلوب K_7 است.

b) چندضلعی‌هایی که پوش‌های محدب (ضمیمهٔ ۱۷) مجموعه‌های K_1، K_2، ... باشند، شش‌ضلعی‌ها هستند (شکل ۱۰۴، a). رأس‌های پوش محدب K_n، به این ترتیب به دست می‌آید: باید هر دو رأس مثلث ABC را در نظر گرفت و، در مورد آن‌ها، n بار عمل «تقارن» را، شبیه مسالهٔ a)، انجام داد. برای این‌که ثابت کنیم، همهٔ نقطه‌های K_n در مرزهای پوش محدب H_n، که از شش «نقطهٔ‌مرزی» ساختمان به دست آمده است، قرار دارند، بهتر است H_n را به عنوان اشتراك سه نواری در نظر بگیریم که، مرزهای هر یك از آن‌ها را، دو ضلع رو به روی شش‌ضلعی H_n تشکیل می‌دهند ($n = 1، 2، ...$). مثلث اولیهٔ ABC را هم، می‌توان همچون اشتراك سه نوار درنظر گرفت: مرزهای یکی از این نوارها عبارتند از خط راست AB و خط راستی که از C موازی با آن رسم شده باشد؛ و به همین ترتیب، دو نوار دیگر. اگر قرینه‌های هر نوار را نسبت به نقطه‌های آن پیدا کنیم، نوار جدیدی به‌دست می‌آید که دارای همان محور تقارن است، ولی پهنای آن سه برابر شده‌است. با استفاده‌ازاین نکته، می‌توان ثابت کرد که K_n ($n = 1، 2، ...$) به هر یك از سه نوار تعلق دارد، که در برخورد H_n را می‌دهند.

مساحت H_n را می‌توان، به‌عنوان ترکیب مساحت مثلث‌های متجانس با ABC، محاسبه کرد. این مساحت، برابراست با $\frac{1}{2}(3^{2n+1}-1)$.

c) مجموعهٔ K_1، به‌جز نقطه‌های K_0، شامل ۱۲ نقطهٔ دیگر است که از قرینهٔ هریك از رأس‌های چهاروجهی $ABCD$ نسبت به رأس‌های دیگر، به‌دست می‌آیند. مکعب L_0 را طوری می‌سازیم که، نقطه‌های A و B و C و D، رأس‌های غیر مجاور آن باشند، سپس، مکعب L_1 را از تجانس L_0 نسبت به مرکزآن و با ضریب ۳، با رأس‌های متناظر A_1، B_1، C_1 و D_1 می‌سازیم ۱۲ نقطهٔ K_1، هرکدام روی یکی از یال‌های مکعب L_1 قرار می‌گیرد و آن را (با به حساب آوردن از رأس‌های A_1، B_1، C_1 و D_1) به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند. از هررأس L_1 سه یال می‌گذرد و روی هر یك از این یال‌ها، یك نقطهٔ مرزی K_1 وجود دارد؛ صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، با رأس متناظر L_1، یك چهاروجهی تشکیل می‌دهد. اگر این چهاروجهی‌ها را از L_1 جدا کنیم، چند وجهی M_1 باقی می‌ماند که پوش محدب K_1 است و۱۴ وجه‌دارد: ۶مستطیل $a \times 2a$ (a، طول یال چهاروجهی $ABCD$است) و۸مثلث‌متساوی‌الاضلاع، ۴ تا به ضلع a و ۴ تا به ضلع $2a$ (شکل۱۰۴،b).

d) حجم چندوجهی ازاین‌طریق به‌دست‌می‌آید که، حجم چهاروجهی‌های جدا شده را ($4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 4 = 18$)، ازحجم مکعب کم کنیم. حجم مکعب برابر است با ۸۱ و، بنا براین، حجم چندوجهی مورد نظربرابر ۶۳ می‌شود.

e) پوش محدب M_n از مجموعهٔ K_n، چندوجهی محدبی است که، رأس‌های آن، در ۱۲ نقطهٔ «مرزی» قرار دارند و، هر یك از این رأس‌ها، از دو رأس چهاروجهی $ABCD$ به دست آمده است. هر رأس M_n روی یکی از یال‌های مکعب L_n قرار دارد، که ازتجانس L_0 نسبت به مرکزخود وبا ضریب 3^n به‌دست آمده و یال مکعب را به‌نسبت $\frac{3^n-1}{3^n+1}$ تقسیم می‌کند.

برای اثبات، بهتر است ۷ نوار را درنظر بگیریم که در برخورد با هم، M_n را می‌سازند: هر یك ازاین نوارها، از راه 3^n برابرکردن نواری به‌دست می‌آید که مرزهای آن، شامل هر چهار رأس چهاروجهی $ABCD$ است. حجم M_n برابر است با

$$\frac{1}{2}(5\times 3^{3n}-3^{n+1})$$

۲۵۶. a) فرض کنید $m\geqslant 2n$. ثابت می‌کنیم، در موقعیت (m, n)، اولی می‌تواند طوری حرکت کند که، موقعیت حاصل، دومی را دچار شکست کند. اگر موقعیت $(m-n, m)$ موجب شکست دومی شود، آن وقت، حرکت موردنظر چنین است.

$$(m, n)\to(m-n, m)$$

ولی اگر موقعیت $(m-n, m)$ موجب برد دومی شود، به معنای آن است که، برای $(m-n, n)$ حرکتی وجود دارد که به باخت طرف‌مقابل می‌انجامد. چون $m-n\geqslant n$، این حرکت باید به صورت

$$(m-n, n)\to(m-kn, n)$$

باشد (k، عددی طبیعی است). ولی دراین صورت، اولی می‌تواند حرکت نخستین خود را، به‌این‌صورت انجام دهد:

$$(m, n)\to(m-kn, n)$$

تا برد او تأمین شود.

راه‌حل این مساله، ازاین جهت جالب است که توانستیم برد اول را در موقعیت (m, n)، بـرای $m\geqslant 2n$، ثابت کنیم، بـدون این که برنامهٔ حرکت‌های او را، مشخص کرده باشیم.

b) پاسخ: $\alpha\geqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

هر موقعیت (m, n) را $(m\geqslant n)$، در تناظر با نقطهٔ $x=\frac{m}{n}\geqslant 1$، از محور عددی، قرار می‌دهیم. بعد از هر حرکت، بـه اندازهٔ عدد درست k، به سمت چپ جابه‌جا می‌شود؛ اگر این نقطه در بازهٔ $0<x<1$ قرار گیرد، در جهت عکس تغییر جا می‌دهد: $x\to\frac{1}{x}$؛ وقتی در نقطهٔ 0 قرار گیرد، طرف دیگر باخته است. بازهٔ $[\frac{1}{\beta}, \beta]$ به طول واحد را روی محور درنظرمی گیریم؛

از $\beta-\frac{1}{\beta}=1$ به دست می‌آید: $\beta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. نقطهٔ $x=\frac{m}{n}$، که در این بازه واقع باشد، متناظر با موقعیت باخت و سمت راست آن متناظر با برد است؛ در واقع، از این نقطه، با حرکت نـوبتی، می‌توان در این بازه قرار گرفت؛ اگر $\beta>x>1$، آن وقت‌حرکت نوبتی، ازبازه بیرون می‌رود؛ اگر $x=1$، آن وقت بـه باخت منجر می‌شود. چون حداکثرتعداد چوب‌کبریت‌ها، کاهش می‌یابد، بعد از چند حرکت، بازی به پایان می‌رسد.

۲۵۷. شرط مساله، با دنبالهٔ $4\{n\sqrt{2}\}$ سازگار است که، در آن،

$$\{x\}=x-[x]$$

عبارت است از بخش‌کسری عدد x $(n=1, 2, \ldots)$. درواقع، اگر p و q دو عدد طبیعی باشند و $p<(4-\sqrt{2})q$، آن وقت

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|2q^2-p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)}>\frac{1}{4q^2}$$

بنابراین، برای $1\leqslant k<m$ داریم:

$$|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}|=|(m-k)\sqrt{2}-l|>\frac{1}{4(m-k)}$$

که در آن

$$l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]<m\sqrt{2}-k\sqrt{2}+1\leqslant(m-k)(\sqrt{2}+1)<$$
$$<(4-\sqrt{2})(m-k)$$

▽ در این‌جا، از این حقیقت استفاده کردیم که، عددگنگ $\sqrt{2}$، به کسرهای با مخرج‌های نه‌چندان بزرگ، بد نزدیک می‌شود.

۲۵۸. چون $f(1)=f(0)=1$، بنابـراین جملهٔ آزاد $P_n(0)$ در چندجمله‌ای

$$P_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots(f(x))}_{n}\ldots))$$

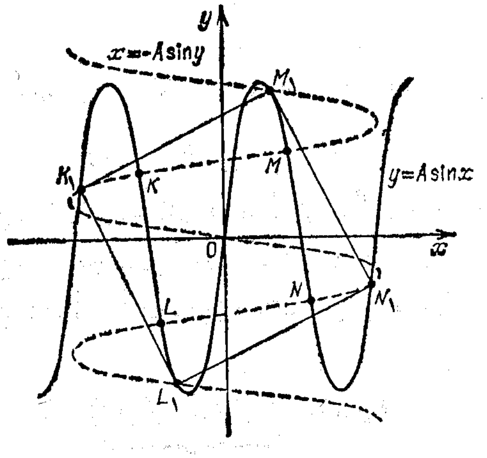
برابر واحد است. در نتیجه، به‌ازای هرمقدار m، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P_n(m)$ بر m، برابر است با واحد.

اگر در این‌جا، m را به $m' = P_k(m)$ تبدیل کنیم، معلوم می‌شود که $P_{n+k}(m)$ و $m' = P_k(m)$، نسبت به‌هم اول‌اند.

▽ از این حقیقت که، دنبالهٔ $(P_n(2))$ وجود دارد، به نحوی که همهٔ جمله‌های آن، نسبت به‌هم اول‌اند، بلافاصله، نامتناهی بودن مجموعهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود.

۲۵۹. M را، نقطهٔ دلخواهی از برخورد نمودار $y = A\sin x$، با مبدل آن $x = -A\sin y$، ضمن‌دوران به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دورمبداء مختصات، می‌گیریم (شکل ۱۰۵). در این صورت، نقطهٔ M ومبدل‌های آن K و L و N، در دوران به اندازه ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه دور O، به نمودار $y = A\sin x$ تعلق دارند، به نحوی که، مربع $MKLN$ در نمودار مفروض، محاط است. اگر A به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، نقطهٔ M، برخورد نمودارها را، می‌توان به‌بیش از ۱۹۷۸ طریق به‌دست آورد که، درضمن، به فاصله‌های مختلف از نقطهٔ O واقع باشند؛ مثلاً به‌ازای

$$A > 1978 \times 2\pi$$



شکل ۱۰۵

می‌توان یکی از نقطه‌های برخورد k امین موج مسیر اصلی و k امین موج مسیر دوران‌یافته را انتخاب کرد (موج را از O درنظرمی گیریم). در این‌جا، از این قضیه استفاده می‌شود که، هر تابع پیوسته‌ای که تغییر علامت بدهد، دارای ریشه است (ضمیمهٔ ۵): از آن، به سادگی، این حقیقت ملموس نتیجه می‌شود که، در بخش‌های موردنظر، نمودارها متقاطع‌اند.

۲۶۰. a) پاسخ: می‌توان.

ابتدا کارت (۸ ،۱) را پیدا می‌کنیم:

$$(5, 19)\to(6, 20)\to(3, 10)\to\dots\to(10, 17)\to(3, 17)\to$$
$$\to(4, 18)\to(2, 9)\to\dots\to(9, 16)\to(2, 16)\to(1, 8)$$

که از آن، به سادگی، کارت‌های (۱۵ ،۱)، (۲۲ ،۱)، ...، $(1, 1+7k)$ (برای هرمقدار طبیعی k) به‌دست می‌آید.

b) پاسخ: نمی‌توان.

با هرچند عمل، همیشه تفاوت دوعدد روی کارت، بر ۷ بخش‌پذیر است.

c) پاسخ: d را بزرگترین مقسوم‌علیه فرد تفاضل $b - a$ می‌گیریم؛ در این‌صورت، از کارت (a, b)، تنها وقتی می‌توان به‌کارت $(1, n)$ رسید که داشته باشیم:

$$n = 1 + dk \quad (k\text{، عددی طبیعی است})$$

لازم بودن این‌شرط، روشن است (شبیه مسالهٔ (b) ثابت می‌شود). برای اثبات کافی بودن شرط، کافی‌است ثابت‌کنیم، از کارت (a, b) می‌توان به‌کارت $(1, 1+d)$ رسید. اگر دو عدد a و b، هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، ردیف عمل‌ها چنین است:

$$(a, b)\to\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ یا } \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

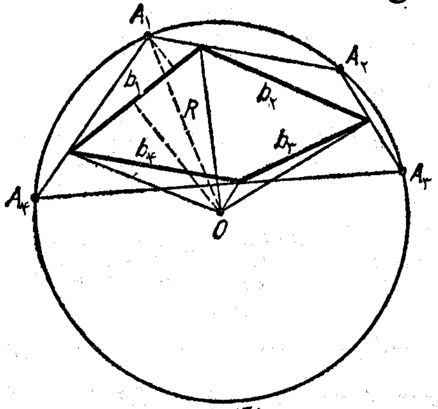
یعنی به زوجی می‌رسیم که تفاضل آن، نصف تفاضل a و b است؛ این عمل را ادامه می‌دهیم تا به زوج $(a, a+d)$ برسیم و، سپس، این عمل‌ها را

انجام می‌دهیم:

$$(a,\ a+d)\to(a+d,\ a+2d)\to(a,\ a+2d)\to\begin{cases}\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}+d\right)\\ \text{یا}\ \left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{a+1}{2}+d\right)\end{cases}$$

که زوجی با همان تفاصل، ولی به وسیلهٔ عـددهایی کوچکتر، می‌دهد (اگر $a>1$). با ادامهٔ این روش، شبیه مسالهٔ a)، سرانجام، به زوج $(1,\ 1+d)$ می‌رسیم.

۲۶۱. A_i را رأس n ضلعی محاطی ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$)، b_i را پاره‌خط راستی که دو نقطهٔ علامت‌گذاری شده را، در روی دوضلعی که از A_i خارج شده‌اند، به هم وصل می‌کند و O را مرکـز دایره می‌گیریم (شکل ۱۰۶)؛ همچنین، s_i و s'_i را مساحت‌های مثلث‌های با قاعدهٔ b_i و رأس‌های A_i و O فرض می‌کنیم، در ضمن، اگر A_i و O در یك طرف خط راستی باشند که از b_i می‌گذرد، علامت s'_i را منفی در نظر می‌گیریم. در این صورت $s_i+s'_i\leqslant\frac{b_iR}{2}$، برای هر i، ومجموع $s'_1+s'_2+\ldots+s'_n$، برابر است با مساحت چند ضلعی با رأس‌های در نقطه‌های علامت‌گذاری شده (علامت + یا − عددهای s'_i، نشان می‌دهد که ضلع b_i، از درون یا از بیرون، از نقطهٔ O دیده می‌شود).



شکل ۱۰۶

به این ترتیب

$$S=s_1+s_2+\ldots+s_n+s'_1+s'_2+\ldots+s'_n\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}R(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

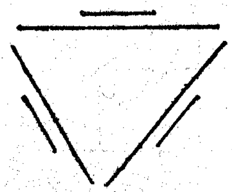
۲۶۲. a) اگر n زوج باشد، همهٔ صفحهٔ شطرنجی را می‌توان به مستطیل‌های 2×1 («دومینو») تقسیم کرد. کسی که بازی را آغاز می‌کند، همیشه امکان حرکت دارد (و بنا براین می‌برد)، به شرطی که از برنامهٔ زیر پیروی کند: اگر مهره در یکی از خانه‌های دومینو (مستطیل 2×1) باشد، آن را به همان خانهٔ دومینو می‌برد (دومینو را «می‌پوشاند»).

اگر n فرد باشد، آن وقت می‌توان همهٔ صفحهٔ شطرنجی را، به‌جز خانهٔ گوشهٔ اول، به دومینو تقسیم کرد. اکنون، اگر دومی از همان برنامه پیروی کند، برنده می‌شود.

b) پاسخ: همیشه آغاز کنندهٔ بازی برنده می‌شود. در حالت زوج‌بودن، برنامهٔ بازی شبیه مسالهٔ a) است. وقتی که n فرد باشد، همهٔ خانه‌ها را، به‌جز خانهٔ گوشه‌ای، به مستطیل‌های 2×1 تقسیم می‌کنیم. اگر صفحه را به‌ردیف صفحهٔ شطرنج رنگ‌آمیزی کنیم، به سادگی قانع می‌شویم که، بازی‌کن دوم نمی‌تواند به این خانهٔ گوشه‌ای برود و، بنا براین، اولی برنده می‌شود (به شرطی که از همان برنامهٔ «پوشاندن» دومینو پیروی کند).

۲۶۳. پاسخ: نه همیشه.

روی شکل ۱۰۷، نمونه‌ای از ۶ پاره‌خط راست داده شده است (۳ پاره‌خط کوتاه و سه پاره‌خط بلند) کـه نمی‌توان آن‌ها را به صورت خط شکسته‌ای (ولو غیر بسته) در آورد که خودش را قطع نکند. درواقع، یکی



شکل ۱۰۷

از پاره‌خطهای راست، پاره‌خط مرزی درخط شکسته نیست، ولی دوانتهای آن را، تنها می‌توان به دوانتهای پاره‌خط راست بلند نزدیك به آن وصل کرد.

۲۶۴. راه‌حل اول. با استفاده ازنابرابری $ab \leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$، برای هر عدد دلخواه $c>0$ داریم:

$$P=(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)=$$

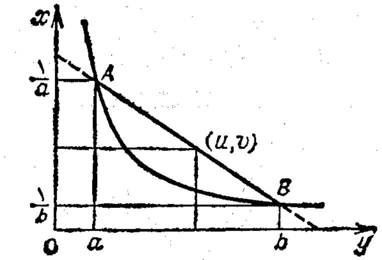
$$=\left(\frac{x_1}{c}+\frac{x_2}{c}+\dots+\frac{x_n}{c}\right)\left(\frac{c}{x_1}+\frac{c}{x_2}+\dots+\frac{c}{x_n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c}+\frac{c}{x_1}+\frac{x_2}{c}+\frac{c}{x_2}+\dots+\frac{x_n}{c}+\frac{c}{x_n}\right)^2$$

یادآوری می‌کنیم، تابع $f(t)=\frac{c}{t}+\frac{t}{c}$ در بازهٔ $[a, b]$ وقتی به حداکثر خود می‌رسد که، t، برابر این یا آن انتهای بازه باشد. c را طوری انتخاب می‌کنیم که این دو مقدار با هم برابر باشند: $f(a)=f(b)$. برای این منظور باید فرض کرد: $c=\sqrt{ab}$. دراین صورت، برای $a\leqslant t\leqslant b$ خواهیم داشت: $f(t)\leqslant\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$. بنابراین

$$P\leqslant\frac{1}{4}n^2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=n^2\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

راه‌حل دوم. روی کمان هذلولی $y=\frac{1}{x}$ در بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$، درنقطه‌های



شکل ۱۵۸

به طولهای x_1، x_2، ...، x_n، وزنه‌هایی با وزنهای برابر قرار می‌دهیم. مرکز جرم این وزنه‌ها، نقطه‌ای است، به ترتیب، با طول و عرض p و q:

$$p=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n),\quad q=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)$$

این مرکز جرم، در مرزهای قطعه‌ای قرار دارد که به وسیلهٔ کمان هذلولی و پاره‌خط راستی‌که دوانتهای‌آن را به هم وصل می‌کند، محدود شده است. روشن است، برای این که مقدار pq به‌حداکثر مقدار خود برسد، باید نقطهٔ (p, q) را،دراین‌قطعه روی پاره‌خط راست مرزبالایی قطعه،جست‌وجو کرد (شکل ۱۵۸). برای نقطه‌های (p, q) از خط راستی که شامل این پاره‌خط راست است، می‌توان qرا به‌عنوان‌یك تابع‌خطی‌نسبت به p نوشت؛ در این صورت، pq سه جمله‌ای درجهٔ دومی از p خواهد بود (که به‌ازای $p=0$، به‌سمت صفرمیل می‌کند). برای این‌که این‌سه جمله‌ای را به‌صورت صریح خود ننویسیم ـ اگر چه، کار دشواری نیست ـ یادآوری می‌کنیم که، به ازای $p=a$ و $p=b$، مقدارهای برابر $a\times\frac{1}{a}=b\times\frac{1}{b}=1$ را قبول می‌کند. بنابراین، به حداکثر مقدار خود، در وسط این دو نقطه می‌رسد که برابر است با $\frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. ازاین‌جا،نابرابری‌مطلوب، به‌دست‌می‌آید. ▽

باتوجه به راه‌حل دوم، می‌توان این نتیجهٔ جنبی‌را به‌دست‌آورد: دوپاره‌خط راستی‌که، بین نقطه‌های برخورد هرخط راست دلخواه باهذلولی $y=\frac{1}{x}$ و محورهای مختصات (که در ضمن مجانب‌های منفی هستند) قرار دارند، باهم برابرند (این دو پاره‌خط راست، روی شکل، با خطچین نشان داده شده‌اند).

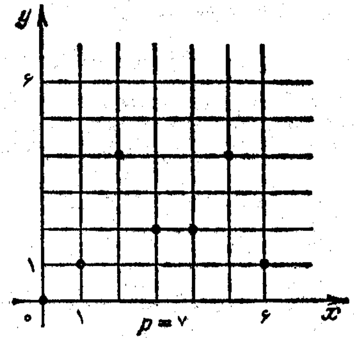
اگر به مسالهٔ اصلی برگردیم، باید یادآوری کنیم که، وقتی n زوج باشد، نابرابری، تخمین دقیق سمت چپ را به‌دست می‌دهد؛ ولی‌وقتی n فرد باشد، می‌توان تا حدی آن را دقیق‌تر کرد. (این مساله، به‌ازای $n=5$، همین چندی پیش، در یکی از المپیادهای داخلی امریکا ـ سال ۱۹۷۷ ـ داده

شده است: مسالهٔ ۱۴۶ ازکتاب «مساله‌های المپیادهای ریاضی درکشورهای مختلف»، ترجمهٔ فارسی، انتشارات فردوس، صفحهٔ ۳۶ را ببینید.)

۲۶۵. به عنوان مجموعهٔ مطلوب می‌توان مجموعه‌ای را درنظر گرفت که از نقطه‌های

$$A_k=(k, r(k)), k=0, 1, 2, \ldots, p-1$$

تشکیل شده باشد؛ منظور از $r(k)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم k^2 بر p است. برای $p=7$، این مجموعه روی شکل ۱۰۹ داده شده است.



شکل ۱۰۹

اگر سه‌نقطهٔ A_l، A_m و A_n بریك‌خط راست باشند $(l<m<n<p)$، باید داشته باشیم:

$$\frac{r(m)-r(l)}{m-l}=\frac{r(n)-r(m)}{n-m}$$

یعنی، برای عددهای درستی مثل a و b، این برابری برقرار باشد:

$$(n-m)(m^2-l^2+ap)=(m-l)(n^2-m^2+bp)$$

اگر جمله‌هایی را که شامل p نیستند به‌سمت چپ ببریم، می‌بینیم که

$$(n-m)(m-l)(n-l)$$

بر p بخش‌پذیر است. ولی از آن‌جا که p، عددی اول است، این امر ممکن نیست.
اگر هم، چهار نقطهٔ A_k، A_l، A_m و A_n رأس‌های یك متوازی‌الاضلاع

باشند، $\overrightarrow{A_kA_l}=\overrightarrow{A_nA_m}$، آن وقت، باید داشته باشیم:

$$l-k=m-n \text{ و } r(l)-r(k)=r(m)-r(n)$$

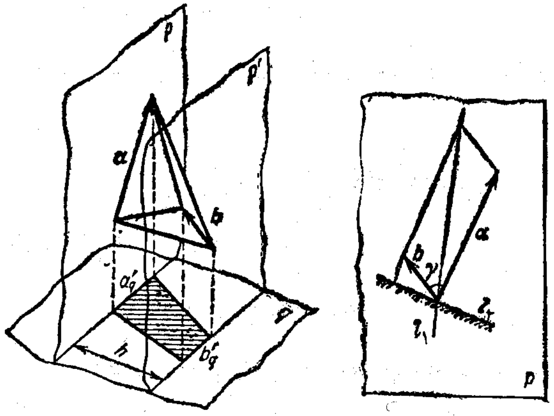
یعنی عدد $(l^2-k^2)-(m^2-n^2)$ بر p بخش‌پذیر است. در این صورت عدد

$$l+k-(m+n)=2l-2m$$

هم‌چنین، چون $p>3$، عدد $l-m$ هم باید بر p بخش‌پذیر باشد، که ممکن نیست.

۲۶۶. از دو یال متقابل a و b در چهاروجهی، صفحه‌های موازی p و p' را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ بین این‌دو صفحه را، h می‌گیریم. تصویرهای چهاروجهی را، بر صفحه‌های q، که بر صفحهٔ p عمودند، درنظر می‌گیریم و، از بین آن‌ها، صفحه‌هایی را پیدا می‌کنیم که، برای آن‌ها، نسبت مساحت تصویرها، کمتر از $\sqrt{2}$ نباشد. تصویر چهاروجهی بر صفحهٔ q، ذوزنقه‌ای است با قاعده‌های $a'q$ و $b'q$ (تصویرهای a و b بر q) و ارتفاع h (در حالت خاصی که تصویرهای یکی از دو یال a یا b، به‌صورت یك نقطه در آید، بـه جای ذوزنقه، با یك مثلث سروکار خـواهیم داشت)؛ مساحت این تصویر برابر است با

$$\frac{1}{2}h(a'q+b'q)$$



شکل ۱۱۵

برای این که ببینیم، این مقدار با شیب یال‌های a و b نسبت به صفحهٔ q، چه رابطه‌ای دارد، بردارهای a و b را (که معرف یال‌های چهاروجهی‌اند) در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱۵). روشن است که می‌توان فرض کرد: $a \geqslant b$؛ درضمن، زاویهٔ γ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند. این بردارها را از یك نقطهٔ O در نظر می‌گیریم، در این صورت به‌جای طول تصویرهای یال‌های چهاروجهی برصفحه q، می‌توانیم در بارهٔ طول تصویرهای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر خط راست صحبت کنیم (خط راستی که بر صفحهٔ موازی p و p' قراردارد). مجموع تصویرها، برخط راست l_1 موازی بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ برابر است با $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$، و بر خط راست l_2 عمود بر $\mathbf{a}$ برابر با $b\sin\gamma$، و نسبت این دو مقدار، از $\sqrt{2}$ تجاوز نمی‌کند:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=a^2+b^2+2ab \geqslant a^2+b^2 \geqslant 2b^2 \geqslant 2b^2\sin^2\gamma$$

▽ یادآوری کنیم که، برای چهاروجهی منتظم، ارزیابی $\sqrt{2}$، بهترین ارزیابی است: مساحت هر تصویری از این چهاروجهی، بین $\frac{a^2}{2}$ و $\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$ قرار دارد (a، طول یال چهاروجهی منتظم است).

۲۶۷. فرض می‌کنیم:

$$f(x)=(x-a_1)^2+\dots+(x-a_n)^2$$

در این سه جمله‌ای درجهٔ دوم، مقدار مجذور کامل را جدا می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(x)=n(x-b_n)^2+f(b_n) \qquad (*)$$

برای تحقیق درستی این برابری، باید توجه داشت که

$$nb_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

به ازای $n=1$، درستی نابرابری مطلوب، روشن است ($C=D$). برای این که، این نابرابری‌ها را با استقرای ریاضی ثابت کنیم، کافی است، نابرابری‌های زیر را ثابت کنیم:

$$0 \leqslant f(b_{n+1})-f(b_n) \leqslant (a_{n+1}-b_{n+1})^2$$

زیرا، اگر به a_1، a_2، ...، a_n، عدد a_{n+1} را اضافه کنیم، مقدار C به‌اندازهٔ $(a_{n+1}-b_{n+1})^2$ و مقدار D به‌اندازهٔ

$$(a_{n+1}-b_{n+1})^2+f(b_{n+1})-f(b_n)$$

ترقی می‌کنند. نابرابری سمت چپ، از برابری (*) و به ازای $x=b_{n+1}$، بلافاصله نتیجه می‌شود؛ نابرابری سمت راست هم، نتیجه‌ای است از برابری‌های

$$(n+1)b_{n+1}=nb_n+a_{n+1},\quad n(b_{n+1}-b_n)=a_{n+1}-b_{n+1},$$

$$f(b_{n+1})-f(b_n)=n(b_{n+1}-b_n)^2=\frac{1}{n}(a_{n+1}-b_{n+1})^2$$

▽ اتحاد (*)، که مجموع مجذورهای فاصله‌های از n نقطه را، بر حسب مجذور فاصلهٔ تا «نقطهٔ مرکزی» آن‌ها (یا «مقدارمتوسط» آن‌ها) می‌دهد، درنظریهٔ احتمال، آمار و در هندسه (مسطحه یا فضایی) کاربردهای زیادی دارد.

۲۶۸. همراه با عدد $\lambda_1=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$، «مزدوج‌های» آن را که در علامت رادیکال‌ها با آن فرق دارند، در نظر می‌گیریم:

$$\lambda_2=1-\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \lambda_3=1+\sqrt{2}-\sqrt{3},\quad \lambda_4=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

اگر $\lambda_1^n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$، آن وقت به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، برای $n=1, 2, 3, \dots$، داریم:

$$\lambda_2^n=q_n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$\lambda_3^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$\lambda_4^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$$

اگر این چهار برابری را با هم جمع و، سپس، مجموع را بر $4\lambda_1^n$ تقسیم کنیم و به سمت حد برویم، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{\lambda_1^n}=\frac{1}{4}$$

زیرا، برای $j=2,3,4$ داریم: $|\lambda_j|<\lambda_1$ و بنابراین: حد $\frac{|\lambda_j|^n}{\lambda_1^n}=0$.

اگر برابری اول را با یکی از سه برابری دیگر جمع و، سپس، دو برابری دیگر را از آن کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\mathop{\text{حد}}_{n\to\infty}\frac{r_n\sqrt{2}}{\lambda_1^n}=\mathop{\text{حد}}_{n\to\infty}\frac{s_n\sqrt{3}}{\lambda_1^n}=\mathop{\text{حد}}_{n\to\infty}\frac{t_n\sqrt{6}}{\lambda_1^n}=\frac{1}{4}$$

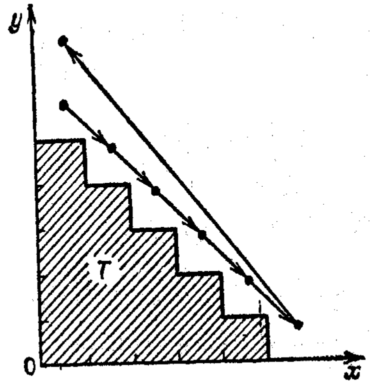
(به این ترتیب، در مجموع $q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$، وقتی n خیلی بزرگ باشد، همهٔ جمله‌ها، به تقریب، با هم برابر می‌شوند)، از این جا به دست می‌آید:

$$\mathop{\text{حد}}_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathop{\text{حد}}_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \mathop{\text{حد}}_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

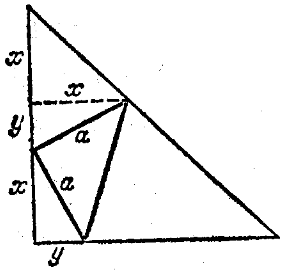
▽ یادآوری می‌کنیم، اگر عبارت $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ را درنظر می‌گرفتیم، به شرطی که a، b، c و d، عددهایی طبیعی باشند، بازهم به‌همان جواب‌ها می‌رسیدیم.

۲۶۹. پاسخ: $\frac{1}{5}$.

باید دو حالت را در نظر گرفت: رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث کوچکتر، یا



شکل ۱۱۲



شکل ۱۱۱

روی وتر مثلث بزرگتر قرار دارد و یا روی یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن. درحالت اول، نسبت‌ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ دو مثلث از $\frac{1}{2}$ و، بنابراین، نسبت مساحت‌های آن‌ها از $\frac{1}{4}$ کمتر نیست. در حالت دوم، مثلث کوچکتر را ثابت می‌گیریم و ازاین نکته استفاده می‌کنیم که، رأس‌های مثلث بزرگتر، روی‌کمانی ازدایره حرکت می‌کنند. در این صورت، جواب مساله، با روش خالص هندسی به دست می‌آید.

مساله راه‌حل دیگری هم دارد: تصویرضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث کوچکتر را روی ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بزرگتر، برابر x و y می‌گیریم (شکل ۱۱۱). در این صورت $x^2+y^2=a^2$ و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بزرگتر، برابر می‌شود با

$$2x+y\leqslant a\sqrt{5}$$

۲۷۰. پاسخ: مجموعهٔ نقطه‌هایی که کانگورو نمی‌تواند «به سمت بی‌نهایت» بجهد، مساحتی برابر ۱۵ دارد؛ این، شکل پله مانند T است که در شکل ۱۱۲ نشان داده شده است.

از هرنقطهٔ بیرون T می‌توان، با گام‌های $(1, -1)$ به حوزهٔ $x\geqslant 5$ رسید و، سپس، گام‌های

$$(-5, 7)+5(1, -1)=(0, 2)$$

را برداشت.

▽ اگر در این مساله، تعداد روش‌های مجاز جهیدن کانگورو را ۳ یا بیشتر بگیریم، شکل‌های جالب‌تری به دست می‌آید.

۲۷۱. ابتدا عضوهای مجلس را، به صورتی دلخواه، به دو گروه تقسیم می‌کنیم. اگر در یکی از گروه‌ها، عضو A، دست‌کم دو دشمن داشته باشد، آن وقت این عضو A، درگروه دیگر بیش ازیک دشمن نخواهد داشت. A را به گروه دیگر می‌فرستیم؛ به این ترتیب، مجموع s، زوج دشمن‌ها در

هر دو گروه، کاهش می‌یابد. چون s، عددی درست و غیرمنفی است، این کاهش‌زوج دشمن‌ها را، می‌توان با تعداد محدودی عمل (شبیه آن چه برای A انجام دادیم) از بین برد که، در نتیجه، تقسیم موردنظر به دست می‌آید.

۲۷۲. به سادگی می‌توان همهٔ کسرهای گویای با مخرج‌های ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... را به‌دست آورد.

برای این که، از زوج (۱ ، ۰)، به کسر $\frac{1}{n}$ برسیم، کافی است n کسر مختلف از این گونه، با مجموعی برابر واحد را انتخاب و، سپس، واسطهٔ حسابی آن‌ها را محاسبه کنیم، مثلاً برای $n=5$

$$\frac{1}{5}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^4}}{5}$$

(چنین انتخابی را، برای هر n، می‌توان داشت)

اکنون یادآوری می‌کنیم که، اگر بتوانیم با برنامه‌ای، از دو عدد (۱ ، ۰) عدد t را به‌دست‌آوریم، با همان برنامه می‌توانیم ازدوعدد (۰ ، ۱)، عدد $t-1$ را به دست‌آوریم، همچنین ازدوعدد $(r ، 0)$ باهمان برنامه، می‌توان $(rt ، 0)$ را پیداکرد. بنابراین، اگر کسر $\frac{1}{n}$ و همهٔ کسرهای $\frac{k}{n-1}$ $(k=1، 2، ...، n-1)$ را بـه دست آورده باشیم، آن وقت می‌تـوانیم $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ و همهٔ $\frac{k}{n}=\frac{n-1}{n}\times\frac{k}{n-1}$ را به دست آوریم.

۲۷۳. بازه‌هایی ازرشته عددهای $\frac{x_m}{m}$ را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که

$$k^2\leqslant m\leqslant (k+1)^2-1، (k=1، 2، 3، \dots)$$

kامین بازه، از $(k+1)^2-k^2=2k+1$ عدد تشکیل‌شده است: عددهای از $\frac{x_{k^2}}{k^2}$ تا $\frac{x_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1}$.

اگر هر عدد $\frac{x_m}{m}$ در kامین‌بازه را با جملهٔ اول‌این‌بازه، که بزرگترین آن‌ها و برابر $\frac{x_{k^2}}{k^2}$ است، عوض کنیم، متوجه می‌شویم که مجموع عددهای این بازه، بیشتر از

$$\frac{(2k+1)x_{k^2}}{k^2}\leqslant\frac{3kx_{k^2}}{k^2}=\frac{3x_{k^2}}{k}$$

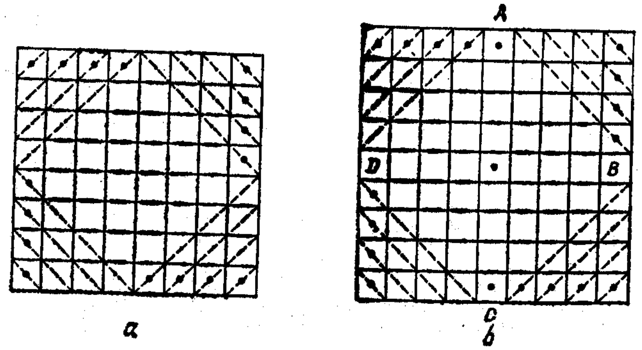
نیست. اکنون، برای هرعدد طبیعی n داریم:

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\dots+\frac{x_n}{n}\leqslant 3\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\dots+\frac{x_{q^2}}{q}\right)$$

که در آن، q کوچکترین عددی است که برای آن داشته باشیم: $q^2>n$.

۲۷۴. نقطهٔ O را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و هر بردار $\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ می‌نویسیم. در مجموع بردارها، هر بردار $\overrightarrow{OM}$ (M، یکی از نقطه‌های مفروض)، به همان تعداد که با علامت «مثبت» آمده باشد، با علامت «منفی» هم وجود دارد، به‌نحوی که مجموع آن‌ها، برابر ۰ می‌شود.

۲۷۵. پاسخ: a) بـرای $n=8$، ۱۶ مهره؛ b) وقتی n زوج باشد $2n$ مهره وقتی n فرد باشد $2n+1$ مهره.



شکل ۱۱۳

وضع استقرار این تعداد مهره، در شکل ۱۱۳، a و b، دیده می‌شود. اثبات این که با تعداد کمتری مهره، ممکن نیست، در حالت زوج بودن n ساده است: روی هـر خط راست موازی با یك قطر، یك مهره و روی خود قطرها دو مهره (درگوشه‌ها)، باید قرار داد.

اثبات دیگر: باید روی هرخط راستی که در شکل‌ها به‌صورت «خط‌چین» آمده‌اند، یك مهره قرار گیرد. این‌استدلال، به خصوص برای حالتی که n عددی فرد است، به درد می‌خورد (شکل ۱۱۳، b): به جز $2n-2$ خط راست «خط چین» (که روی هرکدام، یك مهره قرار دارد)، باید شش خط راست دیگر را هم، که مرکز خانه‌های A، B، C و D را به هم وصل می‌کنند در نظر گرفت؛ برای آن‌ها، دست‌کم ۳ مهرهٔ دیگر هم لازم است.

۲۷۶. پاسخ: $x=\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$ و $y=\frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$.

اگر معادله‌های مفروض را یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم و، سپس، نتیجه‌ها را درهم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$x^2-y^2=a^2-b^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{a^2-b^2}$$

که اگر آن را درمعادله‌های دستگاه اصلی قرار دهیم، به‌دستگاهی ازمعادله‌های خطی می‌رسیم و جواب به سادگی به دست می‌آید. اگر در جواب، a را به x و b را به $-y$ تبدیل کنیم، به همان کسرهای مربوط بـه دستگاه اصلی می‌رسیم؛ واین به ما امکان می‌دهد که به دنبال تحقیق درستی جواب نرویم: از دستورهای جواب، می‌توان دستورهای مشابهی با تبدیل x به a و y به $-b$ به دست آورد.

▽ اگر معادله‌های دستگاه را به این صورت در نظر بگیریم:

$$\frac{x-yf(x^2-y^2)}{\sqrt{1-f^2(x^2-y^2)}}=a,\ \frac{y-xf(x^2-y^2)}{\sqrt{1-f^2(x^2-y^2)}}=b$$

که در آن، f، تابعی دلخواه است که قدرمطلق آن ازواحد تجاوز نمی‌کند،

...وات هیچ چیز تغییر نمی‌کند. اهمیت این مساله در آن است که «تبدیل ...لس»

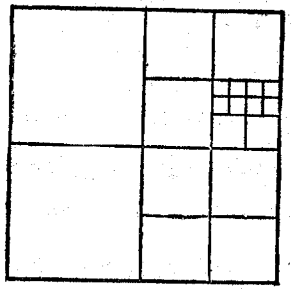
$$(x,y)\to(x',y'),\ x'=\frac{x-vy}{\sqrt{1-v^2}},\ y'=\frac{y-vx}{\sqrt{1-v^2}}$$

...ای نقشی اساسی در نظـریهٔ نسبیت انیشتین است؛ این‌تبدیل x^2-y^2 را ...ت نگه می‌دارد: $x^2-y^2=(x')^2-(y')^2$.

۲۷۷. اگر مربع‌های مفروض را طوری کوچك کنیم که، ضلع هرکدام ... آن‌ها، برابر کـوچکترین عـدد نزدیك به خود، بـه صورت $\frac{1}{2^k}$ بـاشد $(k=1, 2, \ldots)$ آن‌وقت این مربع‌ها را می‌توان، بدون این‌که روی هم‌قرار ...یرند، جاداد (شکل ۱۱۴). چون‌مساحت هرمربع جدید، بیشتر از $\frac{1}{4}$ مساحت ...ربع اصلی است، بنابراین مجموع مساحت‌های آن‌ها ازواحد بیشتر می‌شود، به نحوی‌که تمامی مربع واحد را می‌پوشانند.

۲۷۸. $s=x_1+x_2+\ldots+x_n$ می‌گیریم. چون، برای‌هر $i=1, 2, \ldots, n$، داریم: $x_i\geqslant x_i^2$، بنابراین، نابرابری مطلوب، نتیجه‌ای از نابـرابری $(s+1)^2\geqslant 4s$ است کـه، به روشنی، با نابرابری $(s-1)^2\geqslant 0$ هم‌ارز است.

۲۷۹. چون p و q نسبت به هم اول‌اند، بنابراین هرکدام از آن‌ها، نسبت به $n=p+q$، اول می‌شود. بنابراین، همهٔ عددهای



شکل ۱۱۴

$$\frac{i}{p}, \frac{j}{q}, \frac{i+j}{n} \quad (i=1, 2, \dots, p-1;\ j=1, 2, \dots, q-1)$$

با هم فرق دارند. توجه کنیم که همیشه، $\frac{i+j}{p+q}$ بین $\frac{i}{p}$ و $\frac{j}{q}$ واقع است؛ به این ترتیب روشن است که، همهٔ کسرهای $\frac{i}{p}$ و $\frac{j}{q}$، در بازه‌های مختلف

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], k=1, 2, \dots, n-2$$

قرار دارند.

۲۸۰. $\mathbf{e}_i$ را بردار واحدی می‌گیریم که درجهت خط راست l_i باشد، فرض می‌کنیم $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_{i+1}=c_i$ $(i=1, 2, \dots, 1978)$، $\mathbf{e}_{1979}\mathbf{e}_1=c_{1979}$ (c_i عبارت است از کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{e}_i$ و بردار بعد از آن $\mathbf{e}_{i+1}$). اگر $\overrightarrow{OA_i}=a_i\mathbf{e}_i$ بگیریم شرط عمود بودن خطهای راست $A_{i-1}A_{i+1}$ و l_i، هم‌ارز است با

$$(a_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}-a_{i+1}\mathbf{e}_{i+1})\mathbf{e}_i=0, \quad a_{i-1}c_{i-1}=a_{i+1}c_i \qquad (*)$$

a_1 را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم؛ سپس، a_3، a_5، ...، a_{1979}، a_2، a_4، a_{1978} را طوری در نظر می‌گیریم که هر ۱۹۷۹ شرط (*) برقرار باشند، به جز احتمالاً یکی: $a_{1978}c_{1978}=a_1c_{1979}$. ولی اگر همهٔ ۱۹۷۸ برابری زیر را در هم ضرب کنیم:

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{c_1}{c_2}, \frac{a_5}{a_3}=\frac{c_3}{c_4}, \dots, \frac{a_{1979}}{a_{1977}}=\frac{c_{1977}}{c_{1978}}$$

$$\frac{a_2}{a_{1979}}=\frac{c_{1979}}{c_1}, \frac{a_4}{a_2}=\frac{c_2}{c_3}, \dots, \frac{a_{1978}}{a_{1976}}=\frac{c_{1976}}{c_{1977}}$$

بعد از ساده‌کردن، ۱۹۷۹امین برابری هم پیدا می‌شود.

۲۸۱. مقداری را که در صورت مساله داده شده است:

$$p_k=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\dots+a_{n-k}a_n$$

به سادگی می‌توان محاسبه کرد: دنبالهٔ

$$A_n=(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

از عددهای ۰ و ۱ را می‌نویسیم و، سپس، در سطر بعدی (زیر سطر اول)، همان دنباله را طوری می‌نویسیم که a_1 زیر a_{k+1}، a_2 زیر a_{k+2} و غیره قرار گیرد (درسطردوم، به اندازهٔ k ردیف، به‌سمت راست رفته‌ایم)؛ درضمن $p_k=p_k(A_n)$ برابر است با تعداد ردیف‌هایی‌که، درآن‌ها، در هردوسطر، عدد ۱ قرار دارد.

دنبالهٔ A_n به طول n، وقتی باشرط مساله‌سازگاراست که، همهٔ $p_k(A_n)$ها، به‌ازای $0\leqslant k\leqslant n-1$، فرد باشند.

ساختمان بعدی امکان می‌دهد تا به کمک دو دنبالهٔ A_m و A_n از این گونه، $A_l=A_n\cup A_m$ را به طول

$$l=(2m-1)n-(m-1)=2mn-m-n+1$$

بسازیم. و بلوک $A_m\underbrace{00\dots0}_{m-1}$ از $2m-1$ رقم، هر ۱ را به A_n، ودربلوک شامل $2m-1$ صفر، هر ۰ را به A_n تغییر می‌دهیم و $m-1$ صفر آخر را حذف می‌کنیم. ضمن محاسبه p_k برای A_l با روش فوق، به ازای هرجلو‌رفتن k، هر بلوک A_m در سطر بالا، تنها یك بلوك A_m در سطر پایین گذاشته می‌شود؛ اگر

$$k=(2m-1)q+r \quad \text{یا} \quad k=(2m-1)q-r$$

که در آن $0\leqslant r\leqslant m-1$ و $0\leqslant q\leqslant n-1$، آن وقت

$$p_k(A_l)=p_q(A_n)\cdot p_r(A_m)$$

زیرا درست $p_q(A_n)$ زوج از بلوک‌های A_m وجود دارد و، درضمن، به‌اندازهٔ r ردیف، جلوکشیده‌شده‌اند؛ ازاین‌جاروشن‌می‌شود که دنبالهٔ $A_l=A_n\cup A_m$، همراه با A_n و A_m، باشرط مساله سازگار است.

این‌ساختمان به‌ما امکان‌می‌دهد که‌از $A_4=1101$، پاسخ $A_{25}=A_4\cup A_4$ را، برای مسالهٔ a) پیدا کنیم:

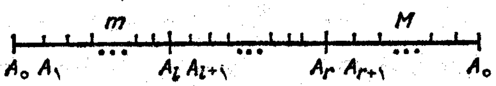
$$A_{25}=\underbrace{1101000}\;\underbrace{1101000}\;\underbrace{0000000}\;\underbrace{1101}$$

سپس، $A_{25}\cup A_{25}$ دارای $2\times 25^2-50+1=1201$ یعنی بیش از ۱۰۰۰ رقم است که در مسالهٔ b) خواسته شده است.

۲۸۲. فرض می‌کنیم، قطرهای چهارضلعی $ABCD$، که در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند، برهم عمود نباشند و، مثلاً، AOB زاویه‌ای حاده باشد. نقطه‌های A' و B'، قرینهٔ نقطه‌های A و B نسبت به O را پیدا می‌کنیم. شعاع‌های دایره‌های محاط در مثلث‌های $A'OB$ و $B'OC$، از شعاع دایرهٔ محاط در مثلث AOB کوچکترند (مساحت همهٔ این مثلث‌ها، یکی است، ولی محیط مثلث AOB کمتر است)؛ بنابراین، مماس‌هایی که از نقطه‌های A و B بر دایره‌های به شعاع r، محاط در زاویه‌های BOC و AOD رسم شوند، نیم‌خط‌های راست OA' و OB' را در نقطه‌ها C و D قطع می‌کنند که، به ترتیب، دورتر از نقطه‌های A' و B' نسبت به O قرار دارند، به نحوی که پاره‌خط راست CD، نمی‌تواند بر دایرهٔ به شعاع r، محاط در مثلث $OA'B'$ مماس شود.

به این ترتیب، خط‌های راست AC و BD بر هم عمودند و، با توجه به برابری شعاع‌های دایره‌های محاطی، این قطرها، محورهای تقارن چهارضلعی $ABCD$ را تشکیل می‌دهند و این، به معنای آن است که چهارضلعی $ABCD$، یك لوزی است.

۲۸۳. a) همهٔ ترتیب‌های ممکن T، از زوج نقطه‌های قرمز (A_l, A_r) را، که پاره‌خط راست A_0A_n را به سه بخش A_0A_l، A_lA_r و A_rA_n تقسیم کرده‌اند، در نظر می‌گیریم؛ بزرگترین طول این بخش‌ها را M و کوچکترین آن‌ها را m می‌نامیم. از بین همهٔ ترتیب‌های T، آن‌هایی را جدا می‌کنیم که، در آن‌ها، مقدار M حداقل باشد و، سپس، از بین ترتیب‌های اخیر، آن را (یا یکی از آن‌هایی را) در نظر می‌گیریم که، برای آن، مقدار m



شکل ۱۱۵

حداکثر باشد. ثابت می‌کنیم که، برای این موقعیت $T=(A_l, A_r)$، شرط مساله، $M-m\leqslant 1$، برقرار است.

فرض کنید، برای این موقعیت، داشته باشیم: $M-m>1$. اگر بخش‌های M و m در ردیف هم باشند، با جابه‌جا کردن مرز قرمز بین آن‌ها روی یکی از پاره خط‌های راست، به ترتیب T' می‌رسیم که، در آن، کوچکترین بخش از m بزرگتر و بزرگترین بخش، کوچکتر از M است که، درواقع، نوع انتخاب T را نقض می‌کند. اگر $m=A_0A_l$ و $M=A_rA_n$، آن وقت، یا در ترتیب (A_{l+1}, A_r)، کوچکترین بخش از m بزرگتر است و یا $A_{l+1}A_r\leqslant m<M-1$، که در این صورت، در ترتیب (A_{l+1}, A_{r+1})، بزرگترین بخش از M کوچکتر است؛ و در هر حال، نوع انتخاب $T=(A_l, A_r)$ نقض می‌شود (شکل ۱۱۵).

b) ترتیبی را در نظر می‌گیریم که، در آن، بزرگترین طول از k بخش Δ_1، Δ_2، ...، Δ_k برابر M و طول کوچکترین بخش برابر $m<M-1$ باشد. فرض کنید $\Delta_i=m$ در سمت چپ $\Delta_j=M$ واقع باشد. انتهای راست بخش Δ_i را، روی یك یا چند پاره‌خط راست، طوری جا به‌جا می‌کنیم که، این بخش، کمتر از $M-1$ (والبته، بزرگتر از M) نباشد. اکنون اگر $\Delta_{i+1}<M-1$، همان عمل را دربارهٔ آن انجام می‌دهیم، سپس به Δ_{i+2} می‌پردازیم و غیره، تا جایی که یا طول همهٔ بخش‌های Δ_i، Δ_{i+1}، ...، Δ_{j-1}، بزرگتر یا برابر $M-1$ نشوند و یا این که موفق شویم $\Delta_j=M$ را، دست کم روی یك پاره‌خط، کاهش دهیم. سپس (اگر بازهم در ترتیب حاصل $M-m>1$)، دوباره همین روند را ادامه می‌دهیم (هر چندبار که لازم باشد)، درضمن، هیچ ترتیبی تکرار نمی‌شود، زیرا ترتیب جدیدی که به دست می‌آید، همیشه «بهتر است»، به این مفهوم که، در آن، یا طول بخش بزرگتر M، کوچکتر است و یا M تغییر نمی‌کند، ولی تعداد بخش‌های برابر M کمتر می‌شود و یا این تعدادهم فرقی نمی‌کند ولی در آن صورت m بزرگتر می‌شود و یا تعداد mهای برابر کاهش می‌یابد. چون تعداد ترتیب‌ها محدود است، بعدازچند روند، به ترتیبی می‌رسیم

که دیگر «کم کردن» ممکن نیست، یعنی $M-m\leqslant ۱$.

۲۸۴. پاسخ: بله، بخش‌پذیر است.

عدد مفروض به روشنی بر ۲۰ بخش پذیر است. بخش‌پذیری آن بر ۹۹ ازاین جا نتیجه می‌شود که $۱+۹۹=۱۰۰$. درضمن

$$۱۹+۲۰+\ldots+۸۰=۹۹\times ۳۱$$

۲۸۵. اگر $S_۱$ و $S_۲$ را، به ترتیب، مجموع مساحت‌های بخش‌های چپ در ردیف‌های زوج و فرد و، به همین ترتیب، $S_۳$ و $S_۴$ را مجموع مساحت بخش‌های سمت راست بگیریم، داریم:

$$S_۲+S_۴=S_۳+S_۱=S_۳+S_۴=S_۱+S_۲$$

۲۸۶. کافی است ثابت کنیم، در هر موقعیتی می‌توان صندوقی را که وزنی بیشتر از ۰/۵ تن ندارد، بارگیری کرد.

۲۸۷. $S_{ABCD}=۲S_{AMPC}$. فرض کنید، $AM=x$ در این صورت

$$S_{AMCD}<۲S_{AMP}\leqslant x(a-x)\leqslant\frac{a^۲}{۴}$$

۲۸۸. پاسخ. نه، جواب ندارد.

از $y^۳=(z^۲-x)(z^۲+x)$ و اول بودن عدد y نتیجه می‌شود که یا $z^۲-x=۱$ و $z^۲+x=y^۳$، یا $z^۲-x=y$ و $z^۲+x=y^۲$. این دستگاه‌ها، درمجموعهٔ عددهای اول، جواب ندارند.

۲۸۹. پاسخ: مرکز دایرهٔ مفروض را O، شعاع آن را R می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $OE=a$. اگر $a\geqslant\frac{R}{\sqrt{۲}}$، آن وقت وتر BD باید بر دایرهٔ به مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sqrt{۲}}$ مماس باشد. اگر $a<\frac{R}{\sqrt{۲}}$، وتر مجهول BD بر قطر AC عمود است.

کافی است توجه کنیم $S_{ABCD}=\frac{۲R}{a}S_{BOD}$ و $S_{BOD}=\frac{۱}{۲}R^۲\sin\varphi$، که

در آن، φ را مقدار زاویهٔ BOD گرفته‌ایم و، سپس، حدکثر مقدار $\sin\varphi$ را در رابطه با موقعیت نقطهٔ E پیدا کنیم.

۲۹۰. A، B و C را، سه نقطهٔ متوالی در ساحل دریاچه می‌گیریم. از شرط مساله معلوم می‌شود که، تنها وقتی A و B به هم مربوط‌اند که B و C به هم مربوط نباشند. بنابراین، همهٔ نقطه‌ها، به زوج نقطه‌های مجاوری تقسیم می‌شوند که با کشتی به هم مربوط‌اند. در ضمن، هردوتا از این زوج نقطه‌ها هم با یکدیگر ارتباط دارند، یعنی یکی از نقطه‌های زوج اول، با یکی از نقطه‌های زوج دوم مربوط است.

۲۹۱. وقتی عدد $N=\overline{abcdef}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد، عددهای

$$\overline{abc}+\overline{def}،\ \overline{bcafde}،\ \overline{cabdef}$$

هم بر ۳۷ بخش‌پذیرند.

۲۹۲. پاسخ: $(k\pi، l\pi، m\pi)$، $k، l، m\in\mathbf{Z}$.

دو معادلهٔ اول را با هم جمع و، سپس، معادلهٔ سوم را از مجموع حاصل کم کنید، به معادلهٔ زیر می‌رسید:

$$\sin\frac{x+y}{۲}\cdot\cos\frac{x+z}{۲}\cdot\cos\frac{y+z}{۲}=۰$$

۲۹۳. اگر $\mathbf{s}\neq ۰$ ($\mathbf{s}$، مجموع همهٔ بردارهای دستگاه)، آن وقت برای هر $\mathbf{a}\neq ۰$ ازاین دستگاه، به دست می‌آید: $\mathbf{s}=k\mathbf{a}$ که، درآن، k یك عدد است.

۲۹۴. a) پاسخ: $۱۹۶۲+S(۱۹۶۲)=۱۹۸۰$.

b) $S(n)+n$ را S_n می‌نامیم، در این صورت اگر عدد n به ۹ ختم شده باشد، آن وقت $S_{n+۱}<S_n$؛ و اگر به ۹ ختم نشده باشد، آن وقت $S_{n+۱}=S_n+۲$. برای هر عدد طبیعی $m>۲$، بزرگترین عدد ممکن N را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم: $S_N<m$. در این صورت $S_{N+۱}\geqslant m$؛ درضمن، رقم آخر N برابر ۹ نیست و، بنابراین، یا

$S_{N+1}=m$ و یا $S_{N+1}=m+1$.

۲۹۵. پاسخ: ۳۳.

هرمستطیل 1×3، درست شامل یك خانهٔ قرمز است.

۲۹۶. a) مثلاً، اگر در روز اول، برای سه دوست A، B و C، A به خاطر واکسن زدن مصونیت داشته باشد، B بیمار و C سالم باشد، اپیدمی به پایان نمی‌رسد.

b) اگر اپیدمی تمام نشود، آن وقت می‌توان A را پیدا کرد که، قبل از دیگران، دوبار بیمار شده باشد، ولی دراین صورت، برای بار دوم باید بیماری مثلاً از B به او سرایت کرده باشد که، خودش قبل از A، دوبار بیماری را گرفته باشد.

۲۹۷. پاسخ: ممکن نیست.

دنبالهٔ n_k، با آغاز از شماره‌ای مثل p، ثابت می‌ماند، یعنی

$$n_p=n_{p+1}=n_{p+2}=\dots$$

۲۹۸. پاسخ: $\widehat{DEC}=90^\circ$، $\widehat{EDC}=60^\circ$ و $\widehat{DCE}=30^\circ$.

اگر دوران دو نقطهٔ D، به اندازهٔ ۶۰ درجه و در جهت مناسب و، سپس، تجانس به مرکز D و ضریب $\frac{1}{2}$ را در نظر بگیریم، نقطهٔ P به نقطه H وسط پاره‌خط راست MP، نقطهٔ B به نقطهٔ K وسط پاره‌خط راست BP و خط راست BP به خط راست KH (که AP را در E قطع می‌کند) منجر می‌شود.

۲۹۹. عددهای α و β، ریشه‌های سه جمله‌ای زیر هستند:

$$f(t)=(t-\alpha)(t-\beta)=t^2-\frac{1}{6}pt+\frac{1}{6}s$$

در ضمن $x<\frac{\alpha+\beta}{2}<z$، $f(x)>0$ و $f(z)>0$.

۳۰۰. پاسخ: $\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

فرض کنید: $k_1=1\leqslant k_2\leqslant\dots\leqslant k_n=100$، عددهای مفروض باشند. چون $2k_i\geqslant k_{i+1}$؛ بنابراین $k_i\leqslant 2^{i-1}$ (برای هر i). به خصوص $100\leqslant 2^{n-1}$، ازآنجا $8\leqslant n$. با فرض $n=8$، نتیجه می‌شود: $k_7=50$؛ ولی $2k_5=25$. تناقض.

۳۰۱. هریك از n^2 زوج عدد طبیعی (x, y) با شرط $1\leqslant x\leqslant n$ و $1\leqslant y\leqslant n$، جوابی از معادلهٔ $\left[x^{\frac{3}{2}}\right]+\left[y^{\frac{3}{2}}\right]=c$ $\left(1\leqslant c\leqslant 2\left[n^{\frac{3}{2}}\right]\right)$ می‌باشد. اگر به‌ازای هر c، تعداد جواب‌ها از M بیشتر نباشد، آن وقت

$$2\left[n^{\frac{3}{2}}\right]\cdot M\geqslant n^2 \quad\text{یا}\quad M\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

۳۰۲. $AE\|BC$ و $BE\|CA$ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های A، C، B، E و D روی سطح کره‌ای به قطر AB و به مرکز O قرار دارند؛ CE هم قطر این کره است، $\widehat{CDE}=90^\circ$ و $\cos\widehat{DCE}=\frac{|CN|}{|AB|}$. کافی است ثابت کنیم:

$$\sin\widehat{DBE}>\sin\widehat{DCE}$$

(از قضیهٔ سینوس‌ها، در مثلث‌های DBE و DCE استفاده کنید.)

۳۰۳. a) برای $k>m$، همهٔ عددهای x_k، در m رقم بعد ازممیز خود، یکسان هستند.

b) پاسخ: می‌توان. در کسر متناوب $0/(10)$ در قطعهٔ با شماره‌های $10^n<k<10^n+5$، گروه رقم‌های ۱۰۱۰ را به ۱۱۰۰ تبدیل می‌کنیم.

c) پاسخ: $x=0/x_1x_2\dots x_k\dots$ که، در آن، $x_k=1$ برای وقتی که داشته باشیم: $10^n<k\leqslant 10^n+5$ و بقیهٔ x_kها برابر صفر.

۳۰۴. پاسخ: $32(\sqrt{2}-1)$.

باید از این نکته استفاده کرد که، اگر یکی از صفحه‌های شطرنج را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، خانه‌های سیاه یك صفحه برخانه‌های سفید صفحهٔ دیگر منطبق می‌شود و برعکس؛ و اگر هر دو صفحه را بچرخانیم،

خانه‌های سیاه در هر دو صفحه، جای خود را با خانه‌های سفید عوض می‌کنند. بنابراین، مساحت موردنظر برابر است با یك چهارم مساحت هشت‌ضلعی که از برخورد صفحه‌ها به‌دست می‌آید.

۳۰۵. کافی است ثابت کنیم: $\widehat{B_1MA}=\widehat{AA_1B_1}=\widehat{A_1B_1B}$.

۳۰۶. a) $k=3$؛ $8\times9\times10=2\times3\times4\times5\times6=720$.

b) اگر داشته باشیم: $m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)$، آن وقت

$$m^2+m+1=(n^2+3n+1)^2$$

که ممکن نیست.

۳۰۷. اگر در یکی از ستون‌های جدول، سه عدد اول (از بالا به پایین) a، m و n باشند، آن وقت به هر یك از عددهای ۱، ۲، ...، $m-1$، m، در سطر دوم و در سمت چپ m، دست‌کم n بار و به هر عدد بزرگ‌تر از m، کمتر از n بار برخورد می‌کنیم.

۳۰۸. پاسخ: $S=(1-a)\sqrt{1-a}$ به‌ازای $a\leqslant 0$؛ $S=1-2a$ به‌ازای $0<a<\frac{1}{2}$ و $S=0$ به‌ازای $a\geqslant\frac{1}{2}$.

۳۰۹. اگر مثلث CAD را به اندازهٔ ۶۰ درجه دور رأس C دوران دهیم، به مثلث CBE می‌رسیم؛ و اگر مثلث HBE را به اندازهٔ ۶۰ درجه دور H دوران دهیم، مثلث HDK به‌دست می‌آید.

۳۱۰. گوییم افراد

$$X, A_1, A_2, \ldots, A_k, Y$$

یك زنجیره تشکیل داده‌اند، وقتی که X با A_1، A_1 با A_2، A_2 با A_3، ...، A_k با Y آشنا باشند. با توجه به شرط مساله، معلوم می‌شود که، هر ساکن محله، به‌زنجیره‌ای مربوط است. فرض می‌کنیم، زنجیره‌های بسته (یعنی، زنجیره‌هایی که، در آن‌ها، X با Y آشنا باشد) وجود نداشته باشد. طولانی‌ترین زنجیره را در نظر می‌گیریم:

$$X-A_1-A_2-\ldots-A_{10}-\ldots-A_k-Y$$

اگر $k\leqslant 19$، آن وقت خبر تازه‌ای که به اطلاع A_{10} رسیده است، بعد از ۱۰ روز به‌گوش همهٔ ساکنان محله خواهد رسید. اگر $k\geqslant 20$، همهٔ ساکنان X، A_1، ...، A_{10} و همهٔ آن‌هایی را که به این‌ها، به جز از طریق A_{11}، مربوط‌اند (تعداد آن‌ها از ۱۱ کمتر نیست)، جدا می‌کنیم. گروه باقی‌ماندهٔ ساکنان، باز هم با شرط مساله سازگار است. روندی را که شرح دادیم، ۸۹ بار تکرار می‌کنیم (در هر گام، با جدا کردن A_{10} مربوط)؛ یا در مرحله‌ای، همهٔ اهالی دهکده به پایان می‌رسند و یا تعدادی که از $1000-89\times11=21$ بیشتر نیست، باقی می‌مانند، که درباره آن‌ها، دوباره مثل بالا، عمل می‌کنیم.

اگر هم، در دهکده، زنجیرهٔ بسته‌ای وجود داشته باشد، آن وقت می‌توان آن‌ها را، با حفظ شرط مساله، جدا کرد.

۳۱۱. داریم:

$$f(n\pi)=(-1)^n a+(-1)^n b,\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a}{2}-b,\quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{a}{2}+b$$

بنابراین $|a+b|\leqslant 1$، $|a-2b|\leqslant 2$.

۳۱۲. L' و N' را وسط ضلع‌های BC و AD بگیرید. یا متوازی‌الاضلاع $KL'MN'$ بر $KLMN$ منطبق است و یا منطبق نیست؛ در حالت اخیر، چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است $(BC\|AD)$.

۳۱۳. پاسخ: برای $n\in\mathbf{N}$ داریم $x_n=1$ و برای $n\in\mathbf{Z}$: $x_n=n$.

۳۱۴. سطری از جدول $m\times n$ را سفید می‌نامیم، وقتی که تعداد خانه‌های سفید آن بیشتر باشد، و در حالت عکس، آن را سیاه می‌نامیم. p و q را، به ترتیب، تعداد خانه‌های سفید و سیاه و r و s را، به ترتیب، تعداد ستون‌های سفید و سیاه می‌گیریم ($p+q=m$ و $r+s=n$). می‌توان فرض کرد $p\leqslant q$. فرض کنید در هر ردیف (سطر و ستون)، کمتر از یك چهارم خانه‌ها، از رنگ «دیگر» باشند در این صورت، $ps+qr$، از کل تعداد خانه‌های به رنگ «دیگر» در همهٔ سطرها و ستون‌ها، بیشتر نیست، یعنی از

$\frac{mn}{4}+\frac{mn}{4}=\frac{mn}{2}$ کمتر است؛ بنابراین $s\leqslant r$ و تعداد کل خانه‌های سفید کمتر است از

$$pr+\frac{qn}{4}+\frac{sm}{4}=\frac{mn}{2}+pr-\frac{np}{4}-\frac{mr}{4}=\frac{mn}{2}-$$

$$-\frac{p}{2}\left(\frac{n}{2}-r\right)-\frac{r}{2}\left(\frac{m}{2}-p\right)\leqslant\frac{mn}{2}$$

۳۱۵. با توجه به شرط مساله داریم:

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{BT}$$

۳۱۶. پاسخ: $x=6$، $y=5$.

$x=d+y$ می‌گیریم ($d\geqslant 1$)، در این صورت به دست می‌آید:

$$(3d-1)\,y^2+(3d^2-d)\,y+d^3=61\Rightarrow d\leqslant 3$$

۳۱۷. برای هر تیم، ۹ تیم پیدا می‌شود که این تیم با آن‌ها بازی نکرده است و، بین این تیم‌های نه‌گانه، دو گروه نه تیمی وجود دارد که با هم روبه‌رو نشده‌اند.

۳۱۸. A_2، B_2 و C_2 را، نقطه‌هایی از ضلع‌های BC، CA و AB به‌نحوی انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AC_2:C_2B=BA_1:A_1C=CB_2:B_2A=3$$

محیط شش ضلعی $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ برابر با $\frac{3}{4}P$ و بزرگ‌تر از محیط مثلث $A_1B_1C_1$ است. سپس باید نابرابری مثلث را برای مثلث‌های $A_2C_1B_1$، $C_1B_2A_1$ و $A_1B_1C_2$ نوشت.

۳۱۹. باید از این نابرابری‌ها استفاده کرد:

$$x>y>0 \quad \text{و} \quad 0<x^3-y^3<x^3+y^3$$

۳۲۰. دو انتهای خط شکسته‌ای را که رسم شده است، A و B می‌گیریم. خط شکسته را روی خط راست AB تصویر می‌کنیم. خطای نسبی هر یك از ضلع‌های خط شکسته، برابر است با p، بنابراین مجموع خطاهای مطلق همهٔ ضلع‌ها، از $4p$ تجاوز نمی‌کند؛ به این ترتیب $d\leqslant 4p$.

۳۲۱. a) نمی‌توان (مجموع عددهای همهٔ رأس‌ها، همیشه عددی فرد است).

b) می‌توان.

c) نمی‌توان.

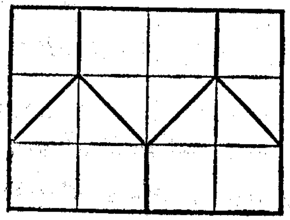
برای اثبات در حالت‌های b) و c)، بهتر است دو چهار وجهی را در نظر بگیریم که رأس‌های آن‌ها در رأس‌های مکعب واقع باشند و، درضمن، هیچ دو رأسی از هر چهار وجهی، متعلق به یك یال مکعب نباشد. در این صورت، درهر گام، به مجموع عددهای رأس‌های هر چهاروجهی، یك واحد اضافه می‌شود.

۳۲۲. پاسخ: مثلاً $n=9240$.

فرض کنید $n=2\times 3\times 5\times 7\times k$. عدد k را طوری پیدا می‌کنیم که $m-1$ بر ۱۱ و $m+1$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد. در این صورت، $n=m-10$ با شرط مساله سازگار است (ضمیمهٔ ۲).

۳۲۳. پاسخ: درآخرین ستون، کارت‌ها، به ترتیب غیرنزولی عددهای خود قرار گرفته‌اند.

۳۲۴. از شش نقطهٔ مفروض، به هر صورتی که باشند، دست‌کم دوتا، در یکی از شکل‌هایی قرار دارند که روی شکل ۱۱۶ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۱۶

۳۲۵. a) پاسخ: ۳ و به‌ازای $x=y=1$.
از نابرابری مربوط به واسطهٔ حسابی نتیجه می‌شود:

$$1+x^2y^4+x^4y^2 \geqslant 3x^2y^2$$

b) فرض کنید: $P(x, y)=g_1^2(x, y)+g_2^2(x, y)+\dots+g_n^2(x, y)$، که در آن، $g_i(x, y)$ $(i=1, 2, \dots, n)$، یك چندجمله‌ای است. چون

$$P(x, 0)=P(0, y)=4$$

چندجمله‌ای‌های $g_i(x, y)$، نمی‌توانند شامل یك جمله‌ای‌های به صورت ax^k و by^l باشند. بنابراین، ضریب x^2y^2 باید مثبت باشد.

۳۲۶. پاسخ: تنها نقطهٔ O، مرکز مثلث ABC.

۳۲۷. پاسخ: r_1r_2.

۳۲۸. پاسخ: سه عدد. با استقرای ریاضی ثابت می‌شود که، برای $n \geqslant 4$، داریم: $a_{n-1}<b_n<a_n$.

۳۲۹. a) از بین همهٔ عددهای به‌صورت $2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_n}$، که بر 2^m-1 بخش‌پذیرند، عددهای با کمترین مقدار برای n را انتخاب می‌کنیم و، سپس، از بین عددهای حاصل، عددی را در نظر می‌گیریم که، در آن، مقدار $k_1+k_2+\dots+k_n$ کمترین باشد. همهٔ عددها در گروه $(k_1, \dots, k_n)$ مختلف‌اند. اگر $n<m$، آن وقت

$$2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_n}<2^m-1 \text{ و } k_i \leqslant m-1$$

که یك تناقض است.

b) پاسخ: وجود ندارد.

$P=a_1\times 10^r+\dots+a_r$ را کوچکترین عددی می‌گیریم که بر $M=\underbrace{11\dots1}_{m}$ بخش‌پذیر و مجموع رقم‌های آن از m کمتر باشد. در این صورت $r \geqslant m$ و، درنتیجه، عدد $P_1=P-(10^r-10^{r-m})$ هم بر M بخش‌پذیر می‌شود که، مجموع رقم‌های آن، از مجموع رقم‌های عدد P تجاوز نمی‌کند.

۳۳۰. بین هشت عدد، سه عدد وجود دارد که از $\frac{1}{6}$ تجاوز نمی‌کنند؛ درضمن، دوتا از آن‌ها، دردوانتهای قطریکی ازوجه‌ها قرار دارند. بازی‌کن اول، باید همین وجه را، در بازی اول خود، انتخاب کند.

۳۳۱. پاسخ: شنبه.

۳۳۲. پاسخ: $MA:MB=k^2$. نقطهٔ O را مرکز متوازی‌الاضلاع بگیرید. دو مثلث AOM و MOB متشابه‌اند.

۳۳۳. فرض می‌کنیم، حکم درست نباشد. انتهای کمان‌ها را با سیاه رنگ می‌کنیم. تمامی محیط دایره را، به کمان‌های به طول واحد تقسیم و نقطه‌های تقسیم را با قرمز رنگ می‌کنیم. کمانی مثل AC به طول ۲ را در نظر می‌گیریم که دو انتهای آن سیاه و B' وسط آن قرمز باشد. نقطهٔ B، انتهای دیگری که از B' می‌گذرد، سیاه است. فرض کنید، روی کمان AB به طول $3k-1$، n_1 کمان به طول ۱، n_2 کمان به طول ۲ و n_3 کمان به طول ۳ وجود داشته باشد. روی کمان BC، n_1 کمان به طول ۳ وجود خواهد داشت (انتهای دیگر قطرهایی که از انتهای کمان‌های به طول واحد می‌گذرند، قرمزند). بنابراین $n_3=k-n_1$، که با برابری $3k-1=n_1+2n_2+3n_3$ متناقض است.

۳۳۴. AM، BM، CM و DM را پاره‌خط‌های راستی به طول واحد می‌گیریم؛ این پاره‌خط‌های راست، روی نیم‌خط‌های راستی قرار دارند که نقطهٔ M را به رأس‌های چهاروجهی وصل می‌کنند. خط راست DM، مثلث ABC را در نقطه‌ای مثل P قطع می‌کند. اگر کسینوس زاویه‌های AMD، BMD و CMD بزرگتر از $-\frac{1}{3}$ باشند، آن وقت این زاویه‌ها، از $\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ کوچکترند و زاویه‌های AMB، BMP و CMP از $\pi-\varphi$ بزرگتر. می‌توان فرض کرد $\widehat{APB} \geqslant 120°$. در این صورت، اگر قضیهٔ کسینوس‌ها را برای مثلث‌های APB و AMB بنویسیم، به‌دست می‌-

آید: $\cos\widehat{AMB} < -\frac{1}{3}$.

۳۳۵. پاسخ: $b<a<c$.

۳۳۶. O را نقطه‌ای می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\dots+\overrightarrow{OA_{2n+1}}=0$$

k را طوری انتخاب می‌کنیم که 2^k-1 بر $2n+1$ بخش پذیر باشد. در این صورت، خط شکستهٔ M_k، نسبت به نقطهٔ O و با ضریب برابر 2^{-k}، با خط شکستهٔ M متجانس است.

۳۳۷. پاسخ: ۱۰۰.

باید عدد a، بزرگترین عدد در ۹۹ عدد نخستین، و عدد b، کوچکترین عدد از بین ۱۸۸۲ عدد آخر را درنظر گرفت و قانع شد که $a<100<b$.

۳۳۸. طول کل تصویر جزیره‌ها بر ساحل از ۲ متر کمتر است. بنابراین، از این کناره تا نزدیک‌ترین مسیر بین جزیره‌ها، کمتر از ۲ متر است.

۳۳۹. این عمل‌ها را پشت سر هم انجام می‌دهیم: ۱) دو خط راست موازی رسم می‌کنیم، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، سهمی را در دو نقطه قطع کند؛ ۲) وسط دو پاره خط راست حاصل را، با یك خط راست، به هم وصل می‌کنیم؛ ۳) عمودی بر این خط راست رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطهٔ A و B قطع کند؛ ۴) عمودمنصف پاره‌خط راست AB، همان محور Oy است. محور Ox، عمود بر Oy در نقطهٔ برخورد آن با سهمی است. واحد طول برابر است با طول نقطهٔ برخورد سهمی با خط راست $y=x$.

۳۴۰. b) m_k و M_k را، کوچکترین و بزرگترین عدد، در بین عددهای ستون kام می‌گیریم. در این صورت، در ستون با هر $m_k\leqslant x\leqslant M_k$ برخورد می‌کنیم. بنابراین، یا x وجود دارد که برای آن، به‌ازای همهٔ kها (از ۱ تا n) داشته باشیم: $m_k\leqslant x\leqslant M_k$؛ و یا برای بعضی از مقدارهای k و p: $M_k\geqslant m_k>M_p\geqslant m_p$، ولی در این صورت درهرسطر، به‌هر

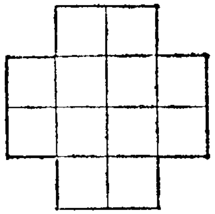
عدد y برمی‌خوریم که برای آن $M_p\leqslant y\leqslant m_p$.

۳۴۱. $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\times 2^{\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[12]{x}}{2}}\geqslant 2\times 2^{\sqrt[6]{x}}$.

۳۴۲. پاسخ: ۴۳ عدد ۲، ۳، ...، ۴۴.

اگر کمتر از ۴۳ عدد حذف کنیم، دست کم سه عدد k، $89-k$ و $k(89-k)$، $(2\leqslant k\leqslant 42)$، در بین عددهای حذف‌نشده باقی می‌ماند.

۳۴۳. از بین عددهای واقع در خانه‌های شکلی که در ۱۱۷ نشان داده‌ایم، کوچکترین عدد، با شرط مساله سازگار است.



شکل ۱۱۷

۳۴۴. می‌توان فرض کرد: $a_1+a_2+\dots+a_n\geqslant 0$. مجموعهٔ M_{ik} را در نظر بگیرید ($i, k=0, 1$؛ $i\neq k$) که از همهٔ عددهای a_l با شرط $l\equiv i\pmod 3$ و همچنین عددهای مثبت a_m با شرط $m\equiv k\pmod 3$ تشکیل شده باشد. یکی از مجموعه‌های M_{ik}، مجموعهٔ مناسب است.

۳۴۵. ستونی را که شامل خانهٔ علامت‌دار نیست، با ستون کناری سمت راست جابه‌جا می‌کنیم؛ سپس، آخرین سطر جدولی را که به دست می‌آید، با یکی از سطرهایی که دارای نقطهٔ علامت‌دار است، عوض می‌کنیم. مساله منجر به جدول $(n-1)\times(n-1)$ می‌شود.

۳۴۶. $a_0, a_1, \dots, a_n$ را همان عددهای $0, 1, 2, \dots, n$ فرض کنید، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$|a|\leqslant|a-a_0|\leqslant|a-a_1|\leqslant\dots\leqslant|a-a_n|$$

برای هر $1\leqslant k\leqslant n$ همیشه داریم: $|a-a_k|\geqslant\frac{k}{2}$، که از ضرب، آن‌ها در

هم به دست می‌آید:

$$|a|\cdot|a-1|\cdots|a-n|=$$

$$=|a-a_0|\cdot|a-a_1|\cdots|a-a_n|\geqslant\langle a\rangle\frac{n!}{2^n}$$

۳۴۷. a) نه، وجود ندارد. سمت چپ برابری، به‌ازای $x=1$، $y=2$، $z=1$ برابر صفر می‌شود.

b) بله وجود دارد. فرض کنید:

$$u=x-y+1,\ v=y-z-1,\ w=z-x+1$$

در برابری $(u+v+w)^7=1$، بعد از باز کردن پرانتز و گروه‌بندی، به دست می‌آید: $u^3P+v^3Q+w^3R=1$.

۳۴۸. فرض کنید، وجه KLM از چهاروجهی $KLMN$، دارای حداکثر محیط باشد. A_1، B_1، C_1 و D_1 را تصویر نقطه‌های A، B، C و D بر صفحهٔ KLM و Γ را خط شکسته‌ای می‌گیریم که تصویر چهاروجهی $KLMN$ روی این صفحه را محدودکرده باشد. درضمن P_{RSTQ} را به‌معنای مجموع طول‌های شش پاره‌خط راستی فرض می‌کنیم که نقطه‌های R، S، T و Q را دو به‌دو به هم وصل کرده‌اند. در این صورت

$$1)\ P_{KLMN}\leqslant 2P_{KLM};\ 2)\ P_{KLM}\leqslant P_\Gamma;$$

$$3)\ P_\Gamma\leqslant\frac{2}{3}P_{A_1B_1C_1D_1};\ 4)\ P_{A_1B_1C_1D_1}\leqslant P_{ABCD}$$

۳۴۹. b) هیچ دو خط شکسته‌ای نباید دارای پاره‌خط راست مشترکی باشند. بنابراین، ۱۲ گره شبکه که، به جز رأس‌های مربع، در مرزهای آن قرار دارند در دو انتهای خط‌های شکسته باشند، ولی ۵ خط شکسته، تنها دارای ۱۰ انتها هستند.

۳۵۰. a) نه؛ b) بله.

در این‌جا، بهتر است استدلال را «از آخر» آغاز کنیم: سه عدد

(۱۷، ۱۹۶۷، ۱۹۸۳)

را تنها می‌توان از سه عدد (۳، ۳، ۵)، وسه عدد (۳، ۳، ۵) را تنها می‌توان از سه عدد (۳، ۳، ۳) به‌دست آورد و نه از (۲، ۲، ۲).

۳۵۱. O را نقطه‌ای ازدرون مثلث XYZ می‌گیریم. از O به‌نقطه‌های O_1 و O_2 و O_3 (مرکزهای سه دایره) ونقطه‌های X و Y و Z وصل می‌کنیم. یکی از شش زاویه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید (همهٔ این زاویه‌ها، حاده‌اند)، از ۶۰ درجه کوچکتر نیست (مثلاً، زاویهٔ O_1OX). دراین‌صورت

$$O_1O<\frac{OX}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}OX$$

۳۵۲. فرض کنید:

$$n^2<a<b<c<d<(n+1)^2,\ ad=bc$$

در این صورت $(a+d)^2-(d-a)^2<(b+c)^2$ و $a+d>b+c$. از آن‌جا

$$(d-a)^2>(a+d+b+c)(a+d-b-c)>4n^2$$

ولی $d-a<2n$؛ تناقض.

۳۵۳. پاسخ: $(0,0)$، $(2+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2})$، $(2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$.

اگرمعادلهٔ دوم‌را ازمعادلهٔ‌اول کم کنیم، به‌دست‌می‌آید $f(x)=f(y)$ که،در آن، تابع $f(x)=x^3-2x^2+2x$، تابعی‌صعودی‌است ($f'(x)>0$).

۳۵۴. اگر $k\geqslant a\underbrace{44\ldots4}_{n-2}5$ ($a\geqslant1$، رقم‌اول عدداست)، آن‌وقت

$$k_1=(a+1)\times10^{n-1}\ \text{و}\ \frac{k_1}{k}\leqslant\frac{(a+1)\times10^{n-1}}{a\underbrace{44\ldots4}_{n-2}5}<\frac{a+1}{a+\frac{4}{9}}\leqslant\frac{18}{13}$$

و اگر $k\leqslant a\underbrace{44\ldots4}_{n-1}$، آن وقت $k_1=a\times10^{n-1}$ و $\frac{k_1}{k}\leqslant1$.

۳۵۵. به ترتیب داریم:

$$S_{DEF}=\frac{1}{2}(S_{DEF}+S_{AEF})<\frac{1}{2}(S_{BEF}+S_{ADF})=$$

$$=\frac{1}{2}S_{ABFE}=\frac{1}{2}(S_{ABF}+S_{AFE})\leqslant\frac{1}{2}(S_{ABF}+S_{ABE})=S_{BDF}+S_{ADE}$$

۳۵۶. پاسخ: a) نه؛ b) نه.

a) آخرین رقم عدد α_{2k+1} برابراست با k امین رقم بعد از ممیز در بسط دهدهی عدد $\sqrt{10}$.

b) اگر β_n زوج باشد، فرض می‌کنیم $\gamma_n=0$ و در حالت فرد بودن β_n، فرض می‌کنیم $\gamma_n=1$. چون γ_{2n+1}، بر nامین رقم بعد ازممیز در بسط عدد $\sqrt{2}$ در مبنای عددنویسی ۲ می‌باشد، بنابراین γ_{2n+1}، متناوب نیست.

۳۵۷. از شرط نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\sin\alpha-\sin\beta)$$

اگر $\sin\alpha>\cos\beta$ و $\sin\beta$، $\cos\alpha>\sin\beta$، آن وقت $1<\sin^2\beta+\cos^2\beta$. نابرابرهای $\sin\alpha<\cos\beta$ و $\cos\alpha<\sin\beta$ هم ممکن نیست. بنابراین

$$\sin\alpha=\cos\beta \text{ و } \cos\alpha=\sin\beta$$

۳۵۸. α و β را دو صفحهٔ مفروض، و l را فصل مشترك آن‌ها بگیرید. کافی است صفحهٔ α را دور خط راست l دوران دهیم تا بر صفحهٔ β منطبق شود (نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، همراه با صفحهٔ α دوران می‌کنند).

۳۵۹. پاسخ: ۵ معادله.

اگر $f_n(x)=x^2+p_nx+q_n=0$، آخرین معادله نباشد، آن وقت، با شرط $n\geqslant 3$ و $p_nq_n>0$ داریم:

$$p_n^2>4q_n,\ q_n>p_n,\ p_nq_n>-(p_n+q_n)$$

اگرمعادلهٔ $f_5(x)=0$، آخرین معادله نباشد، آن وقت یا $p_4<0<q_4$ و یا $0<p_4<q_4$ و، در ضمن $p_3<0<q_3$. هردو حالت غیرممکن است.

مثال برای $n=5$:

$$f_5(x)=x^2-\frac{1}{2}x+4,\ f_4(x)=x^2-\frac{7}{2}x-20,$$

$$f_3(x)=x^2+\frac{11}{2}x+7,\ f_2(x)=x^2-\frac{25}{2}x+\frac{77}{2},$$

$$f_1(x)=x^2-26x-\frac{1925}{4}$$

۳۶۰. اگر a^n بر b^n بخش پذیر باشد، آن وقت a بر b بخش‌پذیراست.

۳۶۱. پاسخ: نه. روی هم ۱۲۸ واژهٔ هفت حرفی می‌توان به کمك دو حرف ساخت. از آن‌ها، به تعداد

$$3\times 8+10\times 4+30\times 2=124$$

واژه «ممکن نیست».

۳۶۲. پاسخ: a) می‌توان؛ b) می‌توان.

a) دو صفحهٔ شطرنجی نامتناهی در نظر می‌گیریم. روی قطرهایی که ۴ خانه باهم‌فاصله دارند: درصفحهٔ شطرنجی‌اول‌عددهای ۱ ودر بقیهٔ خانه‌ها، صفر قرار می‌دهیم؛ و در صفحهٔ شطرنجی دوم، عددهای ۱ را روی قطرهایی قرارمی‌دهیم که ۶ خانه‌ازهم فاصله دارند و، سپس،عددهای‌واقع درخانه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم.

b) روی همان قطرها، یك در میان، عددهای ۰ و ۱ را قرار می‌دهیم و عددهای خانه‌های متناظر را از هم کم می‌کنیم.

۳۶۳. پاسخ: $1+\sqrt{5}$.

۳۶۴. اگر a تعداد کل زوج‌ها، و m تعداد زوج‌هایی که از پسرها تشکیل شده‌اند باشد، آن وقت $2a=8m$.

۳۶۵. پاسخ: $3+2\sqrt{2}$.

اگر مساحت مستطیل‌ها را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

S_1، S_2، S_3 و S_4 بگیریم، آن‌وقت:

$$S_1S_3=S_2S_4\geqslant 2 \text{، ولی } S_1+S_2+S_3+S_4\geqslant 3+2\sqrt{2}$$

۳۶۶. $\mathbf{e}_1$،$\mathbf{e}_2$،$\mathbf{e}_3$ را بردارهای واحد درجهت بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، و $\overrightarrow{OC}$ و $\widehat{BOC}=\alpha$، $\widehat{COA}=\beta$، $\widehat{AOB}=\gamma$ فرض می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم:

$$\mathbf{e}_1 \sin\alpha+\mathbf{e}_2 \sin\beta+\mathbf{e}_3 \sin\gamma=0$$

برای این‌منظور، باید مثلث PQR را که ضلع‌هایی موازی با OA،OB و OC دارد، در نظر گرفت و از برابری $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QP}=0$ استفاده کرد.

۳۶۷، استقرا نسبت به m: برای $m=1$، حکم درست است. فرض می‌کنیم، حکم برای $m=k-1$ $(k\geqslant 2)$ درست باشد. مجموعهٔ دلخواه A را درنظر می‌گیریم که شامل $2k+1$ عدد باشد وقدرمطلق هرعدد از $2k-1$ بزرگتر نباشد. اگر در بین آن‌ها، $2k-1$ عدد وجود داشته باشد که از لحاظ قدرمطلق از $2k-3$ تجاوز نکنند، آن وقت همه چیز روشن است. در حالت عکس، می‌توان، فرض کرد که، مجموعهٔ A، یا شامل عددهای $2k-1$، $2k-2$ و $-2k+1$ است و یا شامل $2k-1$، $2k-2$ و $-2k+2$. درحالت اول، باید زوج‌های $(1, 2k-2)$، $(2, 2k-3)$، …، $(k-1, k)$ و $(0, -2k+1)$، $(-1, -2k+2)$، …، $(-k+1, -k)$ را درنظر گرفت، دست‌کم یکی ازز‌وج‌ها شامل عضوهای مجموعهٔ A است. درحالت‌دوم، به‌همین‌ترتیب، باید زوج‌های $(1, 2k-3)$، …، $(k-2, k)$ و $(0, -2k+1)$، $(-1, -2k)$، …، $(-k+1, -k)$ را درنظر گرفت.

۳۶۸. پاسخ: علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که مثلث‌های ABC و DEF متساوی‌الاضلاع و، درضمن، ضلع‌های متناظر آن‌ها، برهم عمود باشند. از نابرابری

$$d_0<\frac{2}{\sqrt{3}}\min(d_1, d_2, d_3)$$

نتیجه می‌شود که همهٔ زاویه‌های مثلث ABC، باید از ۶۰ درجه کمتر باشند که ممکن نیست.

۳۶۹. اگر پاره خط‌های راست و غیر متقاطع Δ_1 و Δ_2 را، با طول‌های α و β روی خط راستی داده باشند، آن وقت، مجموعهٔ طول‌های پاره خط‌های راستی که دو انتهای آن‌ها متعلق به Δ_1 و Δ_2 باشند، پاره‌خط راستی به طول $\alpha+\beta$ را پرمی‌کنند. بنابراین، اگر δ_1، δ_2، …، δ_k طول‌های پاره‌خط‌های مفروض باشند، آن وقت

$$\delta_1+(\delta_1+\delta_2)+(\delta_1+\delta_3)+\dots+(\delta_1+\delta_k)+\dots$$
$$\dots+(\delta_{k-1}+\delta_k)+\delta_k=k(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_k)\geqslant 1$$

۳۷۰. روشن است که $v_1=10$ و $v_n\leqslant v_{n+1}$. اگر برای مقداری از n، داشته باشیم: $v_n=v_{n+1}$، آن وقت، کسرمتناوب است. اگر $v_{n+1}>v_n$ (به‌ازای همهٔ مقدارهای n)، آن وقت

$$v_n\geqslant v_{n-1}+1\geqslant v_{n-2}+2\geqslant\dots\geqslant v_1+n-1=$$
$$=n+9>n+8$$

۳۷۱. a) اگر n بر ۴ بخش پذیر نباشد، به معنای آن است که بین عامل‌ها، تنها یك عدد زوج وجود دارد که، درنتیجه، مجموع آن‌ها برابر صفر نمی‌شود.

b) پاسخ: $n=4k$ می‌گیریم. وقتی k عددی زوج باشد:

$$n=2\times(-2k)\times 1^{3k-2}\times(-1)^{k}$$

و اگر k عددی فرد باشد:

$$n=(-2)(-2k)\times 1^{3k}\times(-1)^{k-2}$$

۳۷۲. $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ و $a+b+\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

۳۷۳. بردار $\overrightarrow{AB}$ از بردار $\overrightarrow{AC}$ با دوران ۶۰ درجه به دست می‌آید؛

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B}, \quad \overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C}$$

۳۷۴. پاسخ: وقتی که m و n، هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

وقتی m و n عددهایی فرد باشند، باید نوار $n\times 1$ را ساخت و، به کمك m نوار از این گونه، مستطیل $m\times n$ را به‌دست آورد. وقتی m و n عددهایی زوج باشند، ابتدا مستطیل‌های $(n-1)\times(m-1)$، $(n-1)\times 1$، $1\times(m-1)$ و 1×1 را می‌سازیم.

در حالتی که m و n، یکی زوج و دیگری فرد باشد، اگر فرض را بر این بگیریم که می‌توان مستطیلی با شرط مساله ساخت، آن وقت به‌این نتیجه می‌رسیم که تعداد کل تخته‌های مربعی، عددی فرد است.

۳۷۵. $x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}\leqslant \max(x,y)<x+y$.

۳۷۶. پاسخ: درست نیست. کافی است دومی، سه یال دو به‌دو متنافر را به رنگ سبز درآورد و، این عمل، همیشه برای او ممکن است.

۳۷۷. a_1، a_2، ...، a_n را عددهای مفروض بگیرید و فرض کنید:

$$S_n=\frac{a_n+a_2}{a_1}+\frac{a_1+a_3}{a_2}+\dots+\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n}$$

a) داریم:

$$S_n=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)+\dots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)\geqslant 2n$$

b) نابرابری $S_n\leqslant 3n$ با استقرای ریاضی ثابت می‌شود. برای این منظور، ابتدا باید حالت $n=3$ را بررسی کرد و، درضمن، توجه داشت که بزرگترین عدد از بین عددهای a_1، a_2، ...، a_n، برابر است با مجموع دو عدد مجاور خود.

۳۷۸. A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2، نیمسازهای زاویه‌های مثلث $A_1B_1C_1$ هستند.

۳۷۹. پاسخ: $m=n=0$.

اگر برابری $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$ برقرار باشد، آن‌وقت باید برابری $(5-3\sqrt{2})^m=(3-5\sqrt{2})^n$ هم درست باشد. ولی این، ممکن نیست، زیرا

$$5\sqrt{2}-3>1 \text{ و } 0<5-3\sqrt{2}<1$$

۳۸۰. عددهای سطر اول را

$$a_1<a_2<\dots<a_m<a_{m+1}<\dots<a_n$$

و عددهای سطر دوم را

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}, a_{k_{m+1}}, \dots, a_{k_n}$$

فرض می‌کنیم. بنابراین، عددهای سطر سوم، چنین‌اند:

$$a_1+a_{k_1}, a_2+a_{k_2}, \dots, a_m+a_{k_m}, \dots, a_n+a_{k_n}$$

$a_1\neq a_{k_1}$ می‌گیریم. در این صورت، به‌ازای مقداری از $m\geqslant 2$ داریم: $a_1=a_{k_m}$. بنا بر شرط مساله،

$$a_1+a_{k_1}<a_m+a_{k_m}, \ a_2+a_{k_2}<a_m+a_2, \dots,$$
$$a_{m-1}+a_{k_{m-1}}<a_m+a_{k_m}$$

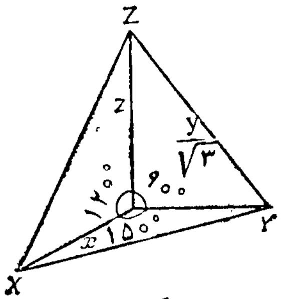
از آن‌جا به دست می‌آید:

$$a_{k_2}<a_m, \ a_{k_3}<a_m, \dots, a_{k_{m-1}}<a_m$$

به جز این $a_1<a_m$ و $a_{k_1}<a_m$. به m عدد مختلف کوچکتر از a_m می‌رسیم. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۳۸۱. در این جا بهتر است از يك پیش‌قضیه استفاده کنیم: اگر وتر AB از دایره‌ای ثابت باشد، ولی دو انتهای وتر A_1B_1 روی این دایره بلغزند، آن وقت، مکان هندسی نقطهٔ برخورد خط‌های راست AA_1 و BB_1، دایره‌ای است که از نقطه‌های A و B می‌گذرد.

۳۸۲. پاسخ: $24\sqrt{3}$.



شکل ۱۱۸

D را برحسب مساحت مثلث XYZ بنویسید (شکل ۱۱۸).

۳۸۳. پاسخ: بله درست است.

درواقع، از آن‌جا که داریم: $f(-1)=11$ و $g(-1)=-9$، بنابراین در لحظه‌ای، یکی از ریشه‌های سه جمله‌ای حاصل، برابر -1 بوده است.

۳۸۴. پاسخ: $\pi r^2+2pr-\frac{pr^2}{2R}$.

۳۸۵. k را وزن سنگین‌ترین وزنه، و m را تعداد وزنه‌های به وزن ۱ بگیرید. دراین صورت $m\geqslant k$. در هر لحظه، وزن وزنه‌های دو کفه، بیش از k با هم اختلاف ندارند. بنابراین، بعد از آن که همهٔ وزنه‌های با وزن بیشتر از واحد را در ترازو گذاشتیم می‌توان کفه‌ها را با اضافه کردن وزنهٔ با وزن واحد به حالت تعادل درآورد.

۳۸۶. در هر عدد اول مطلق، تنها رقم‌های ۱، ۳، ۷ و ۹ می‌توانند شرکت کنند. برای هر عدد M، یکی از عددهای

$$M+1379,\ M+3179,\ M+9137,\ M+7913,$$
$$M+1397,\ M+3197,\ M+7139$$

بر ۷ بخش‌پذیر است. تناقض.

۳۸۷. پاسخ: $x=9$ و $y=0$ یا $x=4$ و $y=2$.

۳۸۸. اگر نقطهٔ M در درون یا روی محیط مثلث PQR $(M\neq P)$ باشد، آن وقت $MQ+MR<PQ+PR$. نابرابری مورد نظر را کافی

است برای حالت $AB=CD$ ثابت کنیم.

۳۸۹. پاسخ: $\lim_{n\to\infty} x_n=0$.

(به ازای $n\geqslant 1$ داریم: $|x_{n+2}|\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n$.)

۳۹۰. جدول شطرنجی ۱۹۸۵ × ۱۹۸۶ را درنظر بگیرید که جدول ۱۹۸۳ × ۱۹۸۴ را دربرگرفته و با آن دارای یك مرکز باشد. خانه‌های سیاه مجاور خانه‌های سفیدی که در آن‌ها، عدد ۱− واقع باشد، روی مسیر بستهٔ حرکت فیل شطرنج قرار دارند که، روی صفحهٔ بزرگ از قطر بیش از یك بار نمی‌گذرد و مسیر حرکت خود را تنها روی مرز این صفحهٔ بزرگ عوض می‌کند. روی صفحهٔ شطرنجی ۱۹۸۴ × ۱۹۸۵، چنین مسیری وجود ندارد.

۳۹۱. بعد از ۴ گام، همهٔ عددهای جدول، برابر واحد می‌شود.

۳۹۲. پاسخ: $\ln 1/01>\frac{2}{201}$.

تابع $y=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}$، برای $x>0$، صعودی است.

۳۹۳. پاسخ: $r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2-r_2r_3+r_1r_3}$.

۳۹۴. چنین مقطعی یا متوازی‌الاضلاع است و یا یك شش ضلعی که نسبت به مرکز متقارن است و محیط آن از $4a$ کمتر نیست (با بررسی گستردهٔ مکعب، می‌توانید به این مطلب قانع شوید).

۳۹۵. A_1، B_1، C_1 را وسط ضلع‌ها و O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC فرض کنید. پاره خط‌های راست OA_1، OB_1، OC_1، شش‌ضلعی را به متوازی‌الاضلاع‌هایی تقسیم می‌کنند. بنابراین، مساحت شش‌ضلعی، دو برابر مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ است.

۳۹۶. پاسخ: وجود دارد.

اثبات، با روش استقرا. n را عددی k رقمی می‌گیریم که شامل m رقم برابر واحد و چند رقم برابر صفر باشد و، در ضمن، داشته باشیم $S(n^2)=m^2$. دراین صورت، برای عدد $n_1=10^{k+1}n+1$ که، در آن، k تعداد رقم‌های عدد n است، خواهیم داشت

$$S(n_1)=m+1 \ , \ S(n_1^2)=(m+1)^2$$

(در مسالهٔ ما، داشتیم $m=1000$).

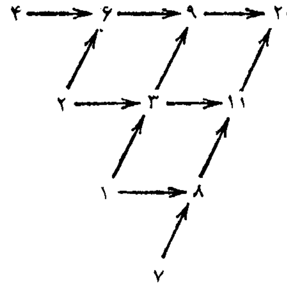
۳۹۷. پاسخ: ۱۶.

همهٔ مهره‌های دام را باید در صفحهٔ شطرنجی 6×6، که مرکزی منطبق برمرکز صفحهٔ 8×8 دارد، قرارداد.

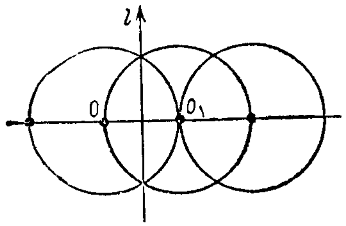
۳۹۸. پاسخ: n رنگ.

A، B و C را، سه راس متوالی می‌گیریم. هـردو پاره خط از n پاره‌خط راست BA، BC، AC و $(n-3)$ قطری که از B گذشته‌انـد، دارای نقطهٔ مشترک‌اند. سپس، باید همهٔ ضلع‌ها وقطرهایی را که بـا ضلع AB، زاویه‌ای برابر $\frac{k\cdot 180^\circ}{n}$ می‌سازند ($k=0,1,2,\dots,n-1$)، به یك رنگ درآورد.

۳۹۹. $S_l(O)=O_1$ فرض می‌کنیم. به‌کمك تقارن S_l و دوران به مرکز O، می‌توان نقطهٔ O را به هرنقطه ازمحیط دایرهٔ ω به مرکز O_1 و شعاع $r=OO_1$ منتقل کرد. دایرهٔ ω را می‌توان به هریك ازدایره‌هایی که درشکل ۱۱۹ نشان داده شده است، منجر کرد. به‌کمك دوران دورنقطهٔ O، زنجیرهٔ دایره‌ها، ازتمامی صفحه عبور می‌کند.



شکل ۱۲۵



شکل ۱۱۹

۴۰۰. پاسخ: در دونقطه.

اگر سه نقطهٔ سازگار با شرط مساله وجود داشته باشد، آن‌وقت دو تا از آن‌ها، دریك طرف نقطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ واقع می‌شوند. این باقی‌می‌ماند که قدرمطلق تفاضل $y(x_1)-y(x_2)$ را ارزیابی کنیم.

۴۰۱. پاسخ: $d=20$ (شکل ۱۲۵).

اگر $d<20$، آن‌وقت

$$20>d=2(l+h)+a+l+h+k\geq 2(l+h)+10$$

ازآن جا $l+h\leq 4$. درضمن، می‌توان فرض کرد $l<h$. ازآن‌جا، یا $l=1$، $h=3$ و یا $l=1$، $h=2$. وهر دو حالت، منجر بـه تناقض می‌شوند.

۴۰۲. $S_k=\frac{a_1}{a_2}+\dots+\frac{a_k}{a_{k+1}}$ بگیرید. وقتی k بـه اندازهٔ کافی بزرگ باشد ($m<k$)، این نابرابری‌ها برقرارند:

$$S_k<k-\frac{1}{2}\ ,\ S_k-S_m<k-m-\frac{1}{2}$$

۴۰۳. پاسخ: $x=m\pi$، $y=n\pi$ ($m,n\in\mathbf{Z}$).

ازشرط، نتیجه می‌شود: $|\sin x|+|\sin y|\leq|\sin x|\cdot|\sin y|$.

۴۰۴. O و X را دونقطـه ازصفحه و $\mathbf{x}=\overrightarrow{OX}$ فرض کنید. بنا بر شرط داریم:

$$\mathbf{e}+\mathbf{e}_1=2\mathbf{a},\ \mathbf{a}+\mathbf{a}_1=2\mathbf{b},\ \mathbf{b}+\mathbf{b}_1=2\mathbf{c},\ \mathbf{c}+\mathbf{c}_1=2\mathbf{d},$$
$$\mathbf{d}+\mathbf{d}_1=2\mathbf{e}$$

باحل این دستگاه، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$، $\mathbf{d}$ و $\mathbf{e}$ به‌دست می‌آیند.

۴۰۵. اگر $T=2^t\cdot q$ (q، عددی فرد) دورهٔ تناوب این دنباله باشد،

آن وقت، به‌ازای $q=4m+3$ و $k \geqslant p+2$ داریم:

$$1=a_{2^k}=a_{2^k+T}=0$$

که یك تناقض است. وهمچنین، به‌ازای $q=4m+1$:

$$1=a_{2^k}=a_{2^k+3T}=0$$

که بازهم، یك تناقض است.

۴۰۶. اگر همهٔ این خط‌های راست موازی باشند، درستی **حکم** روشن‌است. m_2 ، m_3 ، ...، m_k را، به‌ترتیب تعداد حوزه‌های رنگ‌خورده‌ای می‌گیریم که دارای ۲ ، ۳ ، ...، k ضلع‌اند. دراین‌صورت $m_2 \leqslant n$. به‌جز این، هرخط راست، به وسیلهٔ بقیهٔ خط‌های راست ، بـه بیش از n بخش تقسیم نمی‌شود، به نحوی‌که ، تعداد کل بخش‌های خط‌های راست، از n^2 تجاوز نمی‌کند. بنابراین

$$2m_2+3m_3+\dots \leqslant n^2$$

و سرانجام

$$m_2+m_3+\dots+m_k+\dots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_2}{3}+\frac{2m_2+\dots+km_k}{3} \leqslant \frac{n(n+1)}{3}$$

۴۰۷. A و B را، رنگ‌های کف وسرپوش قوطی می‌گیریم. دووجه روبه‌روی مکعب را با دو رنگ دیگـر C و D رنگ می‌کنیم. مکعب را طوری در قوطی قرار می‌دهیم که، وجه به‌رنگ D ، مجاور کف قوطی ، و وجه به‌رنگ E ازمکعب، مجاور وجه به‌رنگ F از قوطی باشد.

۴۰۸. مثلث‌های A_2MN ، A_2A_3N و NA_3O، متساوی‌الساقین‌اند.

۴۰۹. اگر چهارعدد (a_n, b_n, c_n, d_n)، از چهارعدد مفروض و بعد از n گام به دست آمده باشند $(n \geqslant 1)$، آن‌وقت بایدداشته باشیم:

$$a_n+b_n+c_n+d_n=0$$

$$a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2 \geqslant 2(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$$

۴۱۰. هرجملهٔ $|a_k-b_k|$ $(k=1,2,\dots,n)$، برابراست با تفاضل دوعدد که یکی از n بزرگتراست ودیگری از n تجاوزنمی‌کند. بنابراین

$$|a_1-b_1|+\dots+|a_n-b_n|=(n+1)+(n+2)+\dots$$

$$\dots+2n-(1+2+\dots+n)=n^2$$

۴۱۱. تعداد مکعب‌های رنگ‌خورده، یکی از پنج عدد زیر است : ۶۰، ۷۲، ۸۴، ۹۰، ۱۲۰.

مکعب مستطیل را $m\times n\times k$ فـرض کنید $(k \leqslant n \leqslant m)$. تعـداد وجه‌های رنگ نشده، برابراست با $(m-1)(n-1)(k-1)$. بنابرشرط

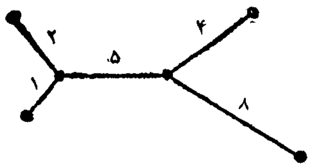
$$mnk=2(m-1)\,(n-1)\,(k-1)$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود: $2<k<5$ براین باقی‌می‌ماند که معادله را برای $k=3$ و $k=4$، درمجموعهٔ عددهای درست مثبت حل کنیم.

۴۱۲. اگر P را وسط وتر مشترك دودایره بگیریم، نقطهٔ K ، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به P، روی محیط دایره‌ای قرار دارد که ازرأس A می‌گذرد و $AKMD$ یك متوازی‌الاضلاع است، بـه نحوی‌که مثلث‌های AKM و AMD برابرند.

۴۱۳. فرض‌کنید، عددهای a و b $(a<b)$ در دوگره مجاور A و B ازشبکه واقع باشند. وقتی‌که از A بـه سمت B حرکت می‌کنیم ، پیکان کوچکی به‌طرف چپ AB قرارمی‌دهیم (شکل ۱۲۱).

اگر عددهای واقع در رأس‌های مثلث، درجهت حرکت عقربـه‌های ساعت، بـه ترتیب صعودی باشند، آن وقت درداخل مثلث ۲ پیکان ظاهـر می‌شود؛ واگر این عددها، درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، بـه ترتیب صعودی باشند، درداخل مثلث، یك پیکان وجود خواهد داشت. n را تعداد مثلث‌های نوع اول می‌گیریم. تعداد کل پیکان‌ها، درداخل شش‌ضلعی، برابر است با



شکل ۱۲۲

شکل ۱۲۱

$$N = 2n + 24 - n = n + 24$$

کافی است توجه کنیم که $N \geq 31$ (۳۰ پیکان از پاره‌خط‌های راست درونی و، دست‌کم یکی، از مرزها).

۴۱۴. پاسخ: ۳.

داریم: $\sqrt{x+1} - 1 = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}$. بنابراین، برای $x \geq -1$، کسرمفروض، برابر $\sqrt{x+1} - 1$ می‌شود.

۴۱۵. پاسخ: $\dfrac{5\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{6}$.

۴۱۶. مستطیلی با شرط مساله سازگاراست که، برای ضلع‌های آن x و y ($y > 1$) داشته باشیم:

$$xy > m \quad و \quad x(y-1) < m$$

این دستگاه، برای $m > 12$ جواب دارد:

به ازای $m = k^2$: $x = k - 1$ و $y = k + 2$ ؛

به ازای $k^2 < m < k(k+1)$: $x = k$ و $y = k + 1$ ؛

به ازای $m = k(k+1)$: $x = k - 1$ و $y = k + 3$ ؛

به ازای $k(k+1) < m < (k+1)^2$: $x = y = k + 1$.

۴۱۷. پاسخ: $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

دایره‌های مفروض، روی دو کرهٔ هم‌مرکز قرار دارند: کره محیط بر-

مکعب و کرهٔ محاط در آن. حداقل فاصلهٔ موردنظر، برابراست با تفاضل شعاع‌های این دو کره.

۴۱۸. اگر x_1 و x_2 را ریشه‌های معادله بگیریم، داریم:

$$a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

۴۱۹. اگرمربع سبز را درطول یکی ازضلع‌های‌آن، انتقال موازی بدهیم، مجموع ضلع‌های سبز هشت‌ضلعی تغییر نمی‌کند، ووقتی که مرکز مربع‌های سبزوقرمز، برهم‌منطبق باشند، مجموع ضلع‌های سبز برابرمجموع ضلع‌های قرمزاست.

۴۲۰. پاسخ: وقتی BM ارتفاع مثلث باشد.

۴۲۱. پاسخ: a) می‌توان (شکل ۱۲۲) ؛ b) **نمی‌توان.**

اگرچنین شبکه‌ای وجود داشته باشد، آن‌وقت، یکی ازعددهای n یا $n - 2$ مجذورکامل است.

شهری مثل A را انتخاب می‌کنیم و آن را «خوب» می‌نامیم. به شهری «خوب» گفته می‌شود که طول مسیر A و B زوج باشد و، درحالتی که طول این مسیر عددی فرد باشد، به‌آن «بد» می‌گویند. تعداد شهرهای «خوب» را x وتعداد شهرهای «بد» را y می‌گیریم ($x + y = n$). تمامی شبکه، دارای xy زوج شهراست که، درآن‌ها، یك شهر «خوب» و دیگری «بد» است. توجه کنید: در بین عددهای ۱، ۲، ...، $\dfrac{n(n-1)}{2}$، xy عددفرد وجود دارد. اگر n عددی فرد باشد، آن وقت

$$n = n^2 - 4xy = (x - y)^2$$

و اگر n عددی زوج باشد، آن وقت

$$n = (x - y)^2 + 2$$

۴۲۲. برابری $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = BD^2\sqrt{2}$ ممکن نیست ($\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BD}$ و BD^2 ، عددهای درستی هستند).

۴۲۳. فرض کنید: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$ که، در آن‌ها، $a_1 \geqslant 3$ عددی فرد و بقیهٔ a_iها ($i = 2, \dots, n-1$) زوج باشند. فرض کنید:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 2k+1 \quad \text{و} \quad a_n = k$$

دراین صورت، خواهیم داشت:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (k+1)^2$$

به همین ترتیب، عددهای $b_1 < b_2 < \dots < b_{m-1}$ را درنظر می‌گیریم که، درآن‌ها، $b_1 > 2a_n$ عددی فرد و بقیهٔ عددهای $b_2, \dots, b_{m-1}$، زوج باشند، درضمن $b_{i+1} > b_i a_n$ و $b_m = S$ که، در آن،

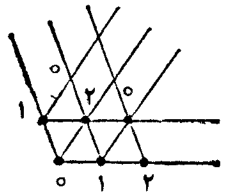
$$2S + 1 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{m-1}^2$$

جدول موردنظر، ازاین راه به‌دست می‌آید که درخانهٔ محل برخورد iامین سطر و jامین ستون، عدد $a_i^2 \, a_j^2$ را قرار دهیم.

۴۲۴. a) O_1 و O_2 را مرکزهای دو دایرهٔ مفروض بگیرید و O_3 را طوری انتخاب کنید که چهارضلعی $AO_1O_2O_3$ متوازی‌الاضلاع باشد. نقطه O_3، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

b) پاسخ: مکان مطلوب، عبارت است از محیط دایرهٔ بـه مرکز O_2 (ازدایرهٔ دوم) و با شعاعی برابر با شعاع دایرهٔ اول، به جز دو نقطهٔ P^* و O^* که با انتقالی که O_1 را به O_2 می‌رساند، از دو نقطهٔ P و Q بـه دست آمده‌اند.

۴۲۵. گره‌های شبکه را با عددهای ۰ و ۱ و ۲ طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که: الف) در رأس‌های هرمثلث کوچك، هر سه عدد باشند؛ ب) در رأس‌های شش ضلعی عددهای ۰ و ۱ قرار گرفتـه باشند (شکل ۱۲۳). مجموع همهٔ عددهای واقـع در گره‌های شبکه، درتقسیم بـر ۳، بـه باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد. P، Q و R را رأس‌های هرمثلث متساوی‌الاضلاعی می‌گیریم کـه در گره‌های شبکه واقـع باشند. اگر در رأس‌های P و Q عددهای مساوی



شکل ۱۲۳

باهم وجود داشته باشد، آن‌وقت، همین عدد، در رأس R هم خواهد بود. اگر در رأس‌های P و Q، دوعدد مختلف واقع باشند، آن‌وقت، عددسوم، در رأس R قرارمی‌گیرد. درهرحالت، مجموع عددهای رأس‌های P، Q و R بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین درهرحال، مجموع عددهایی که رنگ نخورده‌اند، درتقسیم بر ۳ به‌باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد.

۴۲۶. پاسخ: ۱ و ۹.

اگرعدد $n = m^2$ دارای $m > 1$ مقسوم‌علیه باشد، آن‌وقت m عددی فرد است ($m = 2k+1$)، و n درست k مقسوم علیه کوچکتر از m دارد و، بنابراین، بر $2k - 1$ بخش‌پذیر است.

۴۲۷. می‌توان فرض کـرد: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$. نابرابری مطلوب، نتیجه‌ای از ارزیابی‌های زیر است:

$$\frac{2}{a_1 + a_2} \leqslant \frac{1}{a_1};$$

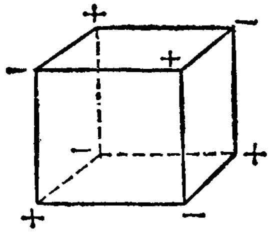
$$\frac{2k-1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k-1}} \leqslant \frac{2k-1}{a_k + \dots + a_{2k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2k-1}{k \cdot a_{k-1}} < \frac{2}{a_{k-1}} \quad \left(2 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}\right);$$

$$\frac{2k}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}} \leqslant \frac{2k}{a_{k+1} + \dots + a_{2k}} \leqslant \frac{2}{a_k}$$

۴۲۸. پاسخ: AB، AC، نیمساز زاویهٔ BAC، مماس بـردایرهٔ محیطی مثلث ABC درنقطهٔ A، مماس بردایرهٔ محیطی مثلث AB_1C درنقطهٔ A (B_1، قرینهٔ B نسبت به A است).

۴۲۹. موقعیت موردنظر را می‌توان به این ترتیب به دست آورد که، ابتدا، تنها عددهای صفر را قراردهیم و، سپس، دوعمل زیر را مرتباً تکرار کنیم: الف) جای دوقشر ازمکعب‌های واحدرا، که با وجهی‌ازمکعب موازی‌اند، عوض کنیم؛ ب) عددی را به‌عددهای واقع درراس‌های‌مکعب اصلی اضافه‌کنیم وجلوآن‌ها، علامت «+» راقرار دهیم و، همراه با آن،



شکل ۱۲۴

علامت عدد را، از عددهای راس‌ها کم کنیم و با علامت «—» قرار دهیم (شکل ۱۲۴).

۴۳۰. پاسخ: $x=3$ ، $y=2$ ، $z=1$ ، $n\geqslant 2$ ؛ $x=6$ ، $y=8$ ، $z=4$ ، $n\geqslant 2$ ؛ $x=8$ ، $y=3$ ، $z=7$ ، $n=2$.

۴۳۱. O و O' را دو نقطهٔ مفروض می‌گیریم و، برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، نقطهٔ O'، در درون یا روی ضلع‌های مثلث OA_1A_2 واقع باشد. دراین صورت داریم:

$$O'A_1+O'A_2<OA_1+OA_2 \quad \text{و} \quad O'A_i-OA_i\leqslant 10$$

$(i=3,4,\ldots,12)$.

۴۳۲. پاسخ: بله، می‌توان.

باید در یکی از لیوان‌ها ۲۰۰ گرم و در هریك از لیوان‌های دیگر ۱۰۰ گرم شیر ریخت.

۴۳۳. پاسخ: a) ۱ ؛ b) $\frac{5000}{2999}$.

a) درتقارن نسبت به مرکز مستطیل، رنگ‌ها جای خود را عوض می‌کنند.

b) باید تصویرهای پاره‌خط‌های راست سفید وسیاه را، روی یکی از ضلع‌های مستطیل، مورد بررسی قرارداد.

۴۳۴. a) O را مرکز دایرهٔ محیطی چندضلعی می‌گیریم. دراین صورت

$$\overrightarrow{MA_i}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i}$$

وکافی است، در مجموع، علامت «+» را جلو جمله‌های با شمارهٔ زوج، وعلامت «—» را جلو بقیهٔ جمله‌ها قرار داد.

b) فرض کنید، در مجموع مورد نظر ما، $\overrightarrow{MA_{i_1}}$، $\overrightarrow{MA_{i_2}}$، …، $\overrightarrow{MA_{i_k}}$ با علامت «+» و $\overrightarrow{MA_{j_1}}$، $\overrightarrow{MA_{j_2}}$، …، $\overrightarrow{MA_{j_{n-k}}}$ باعلامت «—» آمده باشند. اگرمجموع برابر ۰ باشد، آن وقت

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{n-2k}\left(\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+\dots+\overrightarrow{OA_{i_k}}-\overrightarrow{OA_{j_1}}-\dots-OA_{j_{n-k}}\right)$$

وبا این شرط، M به صورت یك‌ارزشی به دست می‌آید.

۴۳۵. پاسخ: a) ۱ به‌ازای $n=3$ ؛ $(n-1)^2-1$ به‌ازای $n\geqslant 4$؛ b) $n-2$.

۴۳۶. کافی است درستی این نابرابری را، برای هرمقدار x ثابت کنیم:

$$|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|>\frac{8}{5}$$

۴۳۷. بین عددهای از ۱ تا ۱۹۸۶، درست دوعدد بر 3^6 بخش‌پذیرند:

$$729=3^6 \quad \text{و} \quad 1458=2\times 3^6$$

اگرمجموع همهٔ کسرها، به جز $\frac{1}{729\times 1458}$ را به یك مخرج تبدیل کنیم، به‌کسری به‌صورت $\frac{a}{3^{11}\times b}$ می‌رسیم که، در آن b بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۴۳۸. هرمماسی مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ حادهٔ φ و مساحت

$$1-\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi+1}\leqslant(\sqrt{2}-1)^2$$

را قطع می‌کند. مساحت S، بخش مشترك مربع ومثلث، در این نابرابری صدق می‌کند:

$$S\geqslant 4-3(\sqrt{2}-1)^2>3/4$$

۴۳۹. پاسخ: $\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

هرمقدار $m=0,1,2,\dots$ را متناظر با $P_m(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+2b_i)x^i$ قرار می‌دهیم که، درآن، a_i و b_i، به ترتیب، عبارتند از رقم‌های عددهـای m و $n-2m$ در عددنویسی به مبنای ۲. در این صورت، هرچندجمله‌ای $P_m(x)$، «مجاز» است و، برعکس، هرچندجمله‌ای «مجاز»، منطبق بر یکی از $P_m(x)$ هاست.

۴۴۰. A_1، B_1، X_1، Y_1 را، بـه ترتیب نقطه‌های تماس کره بـا وجه‌هـای BXY، XYA، YAB و ABX می‌گیریم. در این صورت مثلث‌های XY_1B و XA_1B، همچنین مثلث‌های AY_1X و AB_1X وغیره، باهم برابرند. با استفاده ازاین برابری‌ها، می‌توان ثابت کرد که، مجموع زاویه‌های چهارضلعی فضایی $AXBY$ برابراست با

$$\widehat{AY_1B}+\widehat{AX_1B}=2\widehat{AX_1B}$$

ونتیجه گرفت که $\widehat{AY_1B}+\widehat{AX_1B}$، به X و Y بستگی ندارد.

۴۴۱. داریم:

$$x_1+y_1=x_2+y_2=\dots=x_{10}+y_{10}=9,$$
$$x_1+x_2+\dots+x_{10}=y_1+y_2+\dots+y_{10}$$

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{10}^2-y_1^2-y_2^2-\dots-y_{10}^2=$$
$$=9(x_1+x_2+\dots+x_{10}-y_1-y_2-\dots-y_{10})=0$$

۴۴۲. پاسخ: ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲.

$x_1\leqslant x_2\leqslant\dots\leqslant x_n$ را وزن وزنه‌هـا بگیرید. روشن است کـه $x_1=1$، $x_2=2$ و $x_3=4$. اگـر بـرای هـر $k\leqslant m$ داشتـه باشیم $x_k=2^{k-1}$، آن‌وقت، $x_{m+1}=2^m$، زیرا بیشترین وزنی راکه می‌توان با وزنه‌های ۱، ۲، ...، 2^{m-1} وزن کرد، برابراست با 2^m-1.

۴۴۳. نقطهٔ برخورد A_1A_2 و A_3A_4 را B بگیرید. مثلث BA_3A_1 متساوی‌الساقین است ودومثلث A_2BA_3 و A_1BA_4 متشابه‌اند.

۴۴۴. پاسخ: a) ۱۲ شلیك؛ b) ۲۰ شلیك.

a) در مربع ۷×۷ می‌توان ۱۲ مستطیل ۴×۱ را جا داد، بدون این‌که روی هم قرار گیرند؛ b) باید به هرمستطیل ۴×۳، ۵ شلیك کرد.

۴۴۵. داریم:

$$2(1^{1987}+2^{1987}+\dots+n^{1987})=2+(n^{1987}+2^{1987})+$$
$$+\dots+(2^{1987}+n^{1987})=2+(n+2)M$$

۴۴۶. a) پاسخ: ۱۱ شکل. باید درهرجدول ۲×۲، دست‌کم دو خانه را پوشاند.

b) حکم برای مربع ۷×۷ درست است. اگـر حکـم برای مربع $(6n+1)(6n+1)$ درست باشد، آن وقت، در یکی از گوشه‌های‌مربع $(6n+7)(6n+7)$، مربـع $(6n+1)(6n+1)$ را قـرار می‌دهیم و یك خانهٔ آن را جدا می‌کنیم؛ سپس، بخش باقی‌مانده را بـه مستطیل‌هـای ۳×۲ تقسیم می‌کنیم.

۴۴۷. A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، C_2 را نقطه‌های برخورد امتداد ضلع‌ها، با خط‌های راست موازی باآن‌ها فرض می‌کنیم. نقطه‌های B_1وB_2 روی محیط دایره‌ای واقع‌اند که بـر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $A_1A_2C_1C_2$ محیط است.

۴۴۸. اگرحکم مساله درست نباشد، هرخط راستی که شامل ضلعی از یك‌خط شکسته است، ضلع‌های خط شکستهٔ دیگررا، درنقطه‌های داخلی آن قطع می‌کند وتعداد چنین نقطه‌هایی، عددی زوج است.

۴۴۹. پاسخ: ۱۲۱، ۲۴۱، ۳۶۱، ۴۸۱، ۶۰۱.

شرط مساله، برای هر گروهی از n عدد $a_i = i\cdot n!+1$ ($i=1,2,\dots,n$) برقراراست. مجموع هر k عدد ازاین گروه، بر k بخش‌پذیر است.

۴۵۰. F را نقطهٔ برخورد قطرهای BD و CE بگیرید. نقطه‌های A، F، D، E روی محیط یك دایره‌اند. نقطه‌های A، B، C و F هم روی محیط یك دایره قراردارند.

۴۵۱. پاسخ: $\alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

اگر α با شرط مساله سازگار باشد، آنوقت $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$ (در غیر این صورت $\cos 4\alpha > 0$). به همین ترتیب، برای هرعدد طبیعی n، باید داشته باشیم: $\cos 2^n\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$. از آنجا $|\cos 2^n\alpha - \frac{1}{2}| \geqslant \frac{3}{4}$. ولی دراین صورت

$$|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}| = 2|\cos 2^{n-1}\alpha-\frac{1}{2}|\cdot|\cos 2^{n-1}\alpha+\frac{1}{2}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2}|\cos 2^{n-1}\alpha+\frac{1}{2}|$$

وبه این ترتیب، بهازای هرمقدار n:

$$|\cos\alpha+\frac{1}{2}| \leqslant \frac{2}{3}|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}| \leqslant \cdots$$

$$\cdots \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

که ازآن جا نتیجه می‌شود: $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

۴۵۲. داریم:

$$k^3 = (a+A)(b+B)(c+C) =$$

$$= abc+ABC+k(aB+bC+cA)$$

۴۵۳. خانهٔ گوشهٔ بالا وسمت چپ جدول را جدا می‌کنیم. سپس، این حوزه‌ها را درنظر می‌گیریم: مربع گوشه‌ای 3×3 بدون این خانه، مربع 5×5 بدون مربع 3×3، مربع 7×7 بدون مربع 5×5 وغیره. مجموع عددها، درهریك ازاین حوزه‌ها، از ۲ بیشتر نیست.

۴۵۴. فرض کنید، نیمساز زاویهٔ ABC و خط راست l ـ قرینهٔ نیمساز نسبت به مرکز دایره ـ خط راست PM را، به‌ترتیب، درنقطه‌های L و N قطع کنند. دراین صورت

$$NP=KL=LM,\quad PM=LN$$

۴۵۵. پاسخ a) و b): آغازکنندهٔ بازی، برنده می‌شود.

a) مثلاً، اولی، درحرکت اول خود، عدد ۶ را می‌نویسد. نفر دوم، تنها می‌تواند یکی ازشش عدد زیر را بنویسد، که ما آن‌ها را به صورت زوج عددها نوشته‌ایم:

$$(4,5),\ (7,8),\ (9,10)$$

اولی باید درپاسخ هرحرکت دومی، عدد دیگرهمان زوج‌رابنویسد.

b) بازی تازه‌ای درنظر می‌گیریم: قانون همان است، ولی واحد دربین عددها وجود ندارد. اگر دراین بازی تازه، طرحی برای برد اولی وجود دارد، ازهمان طرح استفاده می‌کند؛ ولی اگردربازی جدیدمی‌توان طرحی برای برد دومی ریخت، آنوقت، اولی درحرکت اول خود، عدد ۱ را می‌نویسد و، سپس، ازهمان طرح دومی استفاده می‌کند.

۴۵۶. پاسخ: بعد از ۷ روز.

k را تعداد روزها برای حالتی می‌گیریم که تعداد نگهبان‌ها ۹ نفر باشند و l را تعداد روزها، برای حالتی که تعداد نگهبان‌ها ۱۰ نفرباشند؛ در ضمن، هرکدام از آن‌ها m بار نگهبانی داده‌اند. بهاین ترتیب، باید داشته باشیم:

$$9k+10l=33m$$

به ازای $m=1$ جوابی به دست نمی‌آید وبه‌ازای $m=2$ داریم:

$$k=4 \quad \text{و} \quad l=3$$

۴۵۷. اگر تعداد نقطه‌های علامت‌دار محدود باشد، آن‌وقت اگر از گرهٔ بالا وسمت راست، همهٔ بردارها را قرار دهیم، معلوم می‌شود که بردارهای (x , y) باشرط $y>0$ و $x>0$ و $y=0$، بیشتر از بقیهٔ بردارها هستند. ولی اگر همهٔ بردارها را از گرهٔ پایین وسمت چپ در نظر بگیریم، تعداد آن‌ها، کمتر از تعداد بقیه درمی‌آید.

۴۵۸. راس‌های A_{p-1} ، A_p ، A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 از p ضلعی مفروض را درنظر می‌گیریم. قطرهای A_1A_3 ، A_2A_4 ، A_pA_2 و $A_{p-1}A_2$ را رسم می‌کنیم. B_1 و B_2 را نقطهٔ برخورد قطر A_pA_2 با قطرهای A_1A_4 و A_1A_3 وهمچنین، B_4 و B_3 رانقطهٔ برخورد $A_{p-1}A_2$ باهمان قطرها فرض می‌کنیم. (اگر $p=5$، آن‌وقت $B_4=A_4$.)

از برابری مساحت‌ها، نتیجه می‌شود: $B_2A_2 = B_1B_2$ و $B_2B_3 = A_1B_2$.

بنابراین $A_2A_{p-1} \parallel A_1A_4$. تناقض.

۴۵۹. $T_p(n)$ رامجموعهٔ همه عددهایی از T_p که کوچکتر از $(2^n)!$ باشند، و $N_p(n)$ را تعداد عددهای آن می‌گیریم، هرعدد از $T_p(n)$ را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\beta_0+\beta_1(2^1)!+\beta_2(2^2)!+\ \dots\ +\beta_{n-1}(2^{n-1})!$$

$A_p(n)-1$ را بزرگترین عدد از ضریب‌های β_0 ، β_1 ، ...، β_{n-1} بین همهٔ عددهای $T_p(n)$ فرض می‌کنیم. برای هر k $(k=0,1,\dots,n-1)$، ضریب $(2^k)!$، بیش‌از $A_p(n)$ مقدارمختلف قبول نمی‌کند. بنابراین

$$N_p(n)\leqslant\Big(A_p(n)\Big)^n$$

دیگر کافی است، پیش‌قضیه‌های زیر را ثابت کنیم:

۱) $A_{p+1}(n)\leqslant A_p(n) \cdot N_p(n)\leqslant\Big(A_p(n)\Big)^{n+1}$ ؛

۲) $A_{1987}(n)\leqslant 2^{(n+1)^{1987}}$ ؛

۳) $(2^n)! < 2^{(n+1)^{1987}}$ (به‌ازای مقداری از n)؛

۴) $(2^n)! > 2^{2^n}$ (به ازای $n\geqslant 2$) ؛

۵) $2^n > (n+1)^{1987}$ (به ازای مقداری از n).

۴۶۰. a) اگر $f(0)=a$ ، آن‌وقت $f(-a)=0$ و $f(0)=-a$ به نحوی‌که $f(0)=0$. برابری $f(x_0)=x_0$، برای $x_0\neq 0$، ممکن نیست.

b) پاسخ :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ -\dfrac{x}{2} & (4^k\leqslant|x|<2\times 4^k) \\ 2x & (2\times 4^{k-1}\leqslant|x|<4^k) \end{cases}$$

۴۶۱. A را راس چند وجهی و AA_1 ، AA_2 ، ...، AA_n را یال‌های خارج شده از راس A می‌گیریم. یال AA_1 را آبی و بقیهٔ یال‌ها را قرمز می‌کنیم. سپس، همهٔ ضلع‌های خط شکستهٔ $A_1A_2\cdots A_n$ را به رنگ آبی درمی‌آوریم و یال A_1A_2 رابه رنگ قرمز. پشت‌سرهم، وجه‌هایی را که به بخش‌های رنگ خوردهٔ چندوجهی متصل‌اند، اضافه می‌کنیم. اگر دو یال ازوجه دارای رنگ باشند، یال سوم رابه رنگ دلخواه درمی‌آوریم؛ ولی اگر تنها یك یال آن رنگ داشته باشد، آن‌وقت دویال دیگر را بارنگ‌های مختلف رنگ می‌کنیم.

۴۶۲. داریم :

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n-1=\frac{a_3}{(2n)^3}+\frac{a_5}{(2n)^5}+\ \cdots$$

که درآن a_3 ، a_5 ، ... ، عددهایی مثبت‌اند.

ضمیمه

۰۱ روش استقرای ریاضی

روش استقرای ریاضی، کـه برای اثبات درستی یك گزاره بهازای هرعدد طبیعی n بهکار میرود، برنظام زیراستوار است: اگر گزارهای برای $n=1$ درست باشد و، درضمن، ازدرستی آن برای $n=k$، بتوان درستی گزاره را برای $n=k+1$ نتیجهگرفت، آن وقت، این گزاره، برای هر-مقدار طبیعی n درست است. (اصل استقرای ریاضی). گاهی درستی گزارهٔ n بـهکمك درستی گزاره یاگزارههایی کوچکتراز n ثابت میشود؛ دراین حالت، اصل استقرای ریاضی بهاینصورت است: اگر گزارهای برای $n=1$ و (بهازای $n>1$) برای هر $k<n$ درست بـاشد، آن وقت برای $k=n$ هم درست است. گـاهـی بهتراست استقرا را، نـه از $n=1$، بلکه از $n=0$ یا ازعددیمثل $n=n_0$ آغازکنیم. نظام استقرایریاضی، براین اصل مـوضوع تکیه دارد: در هر مجموعهای ازعددهای طبیعی، کوچکترین عضو وجود دارد (مسالهٔ ۱۱ را ببینید).

گاهی روش استقرای ریاضی، بـهصورتی «نیمه پنهانی» در استدلال وجود دارد. مثلا اثبات اتحاد

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

منجربه این میشودکه ابتدا آن را برای $n=1$ مورد تحقیق قراردهیم و، سپس، «گام استقرائی» را به این ترتیب برداریم. اگرداشته باشیم:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

آن وقت

$$1+3+\dots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

درواقع، همین استدلال را میتوان بهصورت زیرارائهکرد (n گام نخستین استقرا را باهم برداریم):

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=$$

$$=1+(4-1)+(9-4)+\dots+[(n+1^2-n^2]=(n+1)^2$$

مسالههای ۵، ۱۵، ۲۶، ۳۶، ۴۹، ۵۲، ۷۲، ۷۶، ۷۷، ۹۰، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۱۰، ۱۱۳، ۱۲۰، ۱۳۷، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۸، ۱۶۴. ۱۷۶، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۹۳، ۲۰۳، ۲۱۰، ۲۱۸، ۲۲۳، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۴۰، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۶۰، ۲۶۷، ۳۵۴، ۳۶۷، ۳۹۶، b ۴۴۶).

همچنین مسالههای ۱۵۵، ۲۰۰، ۲۷۷ که اندیشههای خاصی در حل آنها بهکار رفته است.

۰۲ عددهای درست. بخشپذیری

دربسیاری ازمسالههای مربوط به عددهـای درست ، از مفهومها و قضیههای بخشپذیری استفاده میشود. هرعدد درست a را میتوان، ضمن تقسیم برعدد طبیعی m، به صورت $a=mq+r$ نوشت که، درآن، q و r عددهایی درستاند و $0\leqslant r<m$.

بین هر m عدد درست متوالی، درست یك عدد پیدا میشودکه بر m بخشپذیر است. اگردوعدد a و b، درتقسیم برعدد m، بهیكباقیمانده برسند، میگویند a با b، نسبت به مدول m، همنهشت است و بهاینصورت نشان میدهند:

$$a\equiv b \bmod(m)$$

اگر a و b عددهایی طبیعی و $a=bq+r$ $(0\leqslant r<b)$، آن‌وقت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد b و r یکی‌است؛ اگر این بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک را d بنامیم، می‌توان آن را با چندبار استفاده از گزارهٔ بالا، و به عنوان آخرین باقی‌ماندهٔ غیرصفر، در زنجیرهٔ تقسیم‌های زیر به‌دست آورد:

$$a=bq+r,\quad b=rq_1+r_1,\quad r=r_1q_2+r_2,\quad r_1=r_2q_3+r_3,\ldots$$
$$\ldots,\quad r_{n-1}=r_nq_{n+1}+d,\quad r_n=dq_{n+2}$$

(روش تقسیم‌های متوالی : آلگوریتم اقلیدس)؛ از این جا نتیجه می‌شود: عددهای درست x و y وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم : $d=ax+by$. درحالت خاصی که a و b نسبت به هم اول باشند (یعنی، مقسوم علیه مشترکی بزرگتر از واحد نداشته باشند)، آن وقت می‌توان عددهای درست x و y را طوری پیداکرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$ax+by=1$$

(مسالهٔ ۶۸ را ببینید).

هر عددطبیعی را، تنها به یک‌طریق می‌توان به‌صورت ضرب‌عامل‌های اول‌نوشت (قضیهٔ اصلی حساب). تعداد عددهای اول بی‌نهایت است. اثبات این گزاره، به وسیلهٔ اقلیدس، براین اساس است‌که: اگر به حاصل‌ضرب چند عدد اول، یک‌واحد اضافه کنیم، عددی به‌دست می‌آید که مقسوم‌علیهی غیرازهمهٔ این عددهای اول دارد.

اگرعددهای b_1 ، b_2 ،...، b_n دو به دو نسبت به‌هم اول باشند ، آن وقت، برای هر باقی‌ماندهٔ r_1 ، r_2 ،...، r_n $(0\leqslant r_i<b_i)$ می‌توان عدد a را طوری پیداکرد که ضمن تقسیم بر b_i به باقی‌ماندهٔ r_i برسد، یعنی

$$a\equiv r_i \pmod{b_i},\quad i=1,2,\ldots,n$$

(قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها).

مساله‌های ۳، ۹، ۱۶، ۳۰، ۳۶، ۴۲، ۴۶، ۴۸، ۵۱، ۵۹، ۶۸، ۷۴، ۸۵، ۸۸، ۸۹، ۹۳، ۱۰۲، ۱۰۷، ۱۲۲، ۱۳۷، ۱۴۱، ۱۶۲،

۱۹۰، ۲۳۳، ۲۵۴، ۲۵۸، ۲۶۰، ۲۸۸، ۳۰۶، ۳۱۶، ۳۲۲، ۳۵۲، ۳۶۰، ۳۷۱، ۳۸۶، ۴۱۱، ۴۱۶، ۴۲۶، ۴۳۶، ۴۴۵، ۴۴۹، ۴۵۶.

۳. رقم‌ها ودستگاه‌های عددشماری

درمساله‌هایی که صحبت برسر رقم‌ها درعددنویسی به‌مبنای ۱۰ باشد:

$$A=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0$$

(A، عددی طبیعی است؛ گاهی آن را به صورت $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}$ نشان می‌دهند)، از موضوع‌های گوناگونی استفاده می‌شود: بخش‌پذیری‌عددهای درست، تبدیل‌های جبری، ارزیابی وتخمین رقم یاعدد. به‌خصوص، معیار بخش‌پذیری بر ۳ وبر ۹،کاربرد زیادی دارد: عدد $A=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}$ و عددی‌که ازمجموع رقم‌های آن به دست می‌آید، درتقسیم بر ۹ (یا بر ۳)، به‌یک باقی‌مانده می‌رسند. روشن است که تفاضل

$$A-(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)=$$
$$=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)$$

بر ۹ بخش‌پذیر است.

گاهی مفید است ، عدد A را ، در دستگاه عددنویسی به مبنای q ، بنویسیم :

$$A=a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+\ldots+a_1q+a_0$$

که در آن a_iها، $0\leqslant a_i<q$ $(i=1,2,\ldots,n)$، «رقم‌ها» در این دستگاه عددنویسی‌اند.

مساله‌های ۳، ۲۱، ۴۳، ۵۴، ۸۵، ۸۸، ۹۳، ۱۲۲، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۸، ۱۶۸، ۱۷۵، ۱۹۷، ۲۰۱، ۲۴۴، ۲۹۱، ۲۹۴، ۲۹۷، ۳۲۹، ۳۵۴، ۳۹۶، ۴۳۰، ۴۳۹.

۴. عددهای گویا وعددهای‌گنگ

عددگویای a را می‌توان به صورت $a=\frac{m}{n}$ نشان داد که، در آن

$m \in \mathbf{Z}$ و $n \in \mathbf{N}$؛ همچنین، هرعددگویا را می‌توان، در دستگاه عددنویسی به‌مبنای ۱۰ (یا هردستگاه عددنویسی دیگر)، به‌صورت کسردهدهی‌متناوبی نوشت. کسر دهدهی معرف عددگنگ، متناوب نیست.

همراه با عددگنگ $a+b\sqrt{d}$ (a و b، عددهای گویا و d عددی درست است که مجذور یك عدد طبیعی نیست)، اغلب بهتراست «مزدوج» آن، عدد $a-b\sqrt{d}$ راهم درنظر بگیریم: مجموع وحاصل‌ضرب دو عدد گنگ مزدوج، منجر به عددهایی گویامی‌شود، به‌نحوی که $a\pm b\sqrt{d}$، ریشه‌های معادله‌ای درجه دوم با ضریب‌های درست درمی‌آیند.

مساله‌های ۹۴، ۱۱۴، ۲۵۷، ۲۶۸، ۳۰۳، ۳۵۶، ۳۷۰، ۳۷۹، ۴۲۲.

۵. سه‌جمله‌ای درجه دوم. تابع‌های پیوسته، نمودارها وریشه‌های معادله‌ها

دربسیاری ازمساله‌هایی که منجربه‌استفاده ازتابع درجه دوم

$$y=f(x)=ax^2+bx+c$$

می‌شوند، بهتراست نمودارآن را درنظر بگیریم. اگر این نمودار، محور Ox را در دونقطهٔ x_1 و x_2 (ریشه‌های سه‌جمله‌ای) قطع کند، آن‌وقت‌مقدارهای تابع $y=f(x)$، دربین‌ریشه‌ها، علامتی مخالف علامت a ودربیرون بازهٔ $[a ، b]$ همان علامت a را دارند. درضمن، راس سهمی $y=f(x)$ (که طول آن، برابرنصف مجموع ریشه‌هاست)، متناظر با نقطهٔ اکسترمم تابع $y=f(x)$ است: می‌نیمم اگر $a>0$ وماکزیمم اگر $a<0$.

دریك رشته از مساله‌ها، می‌توان ازاین حقیقت استفاده کرد؛ اگر تابع $y=f(x)$، که دربازهٔ $[a، b]$ پیوسته است، در دوانتهای این بازه، برابربا مقدارهایی با علامت‌های مختلف باشد، آن‌وقت، بین دونقطهٔ a وb دست‌کم یکی ازریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ قرار دارد.

مساله‌های ۳۲، ۱۱۹، ۱۴۹، ۱۵۷، ۱۷۸، ۱۸۰، ۲۰۶، ۲۲۸، ۲۴۲، ۲۵۹، ۲۶۴، ۲۶۹، ۲۷۸، ۲۹۹، ۳۰۸، ۳۳۹، ۳۵۹، ۳۸۳، ۴۰۰، ۴۰۸.

۶. جبر چندجمله‌ای‌ها

اگر a ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ باشد، آن وقت $P(x)$ بردوجمله‌ای $x-a$ بخش‌پذیراست ومی‌توان آن رابه‌صورت $P(x)=(x-a)Q(x)$ نوشت که، درآن، $Q(x)$ یك چندجمله‌ای است با درجه‌ای یك واحدکمتر از درجهٔ $P(x)$ (درضمن، اگر $P(x)$ ضریب‌های درستی داشته باشد، ضریب‌های $Q(x)$ هم، عددهایی درست‌اند). چندجمله‌ای درجهٔ n، بیش از n ریشه ندارد (حتی با درنظر گرفتن ریشه‌های تکراری). ازاین‌جامی‌توان نتیجه گرفت که: اگر دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$، که درجهٔ آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند، در n نقطه، مقدارهای برابر را قبول کنند، آن وقت ضریب‌های متناظر توان‌های برابر در دو چندجمله‌ای، باهم برابرند.

اغلب، از اتحادهای مربوط به تجزیه دوجمله‌ای‌های شامل‌دومتغیر، استفاده می‌شود:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1});$$

$$x^{2m+1}+y^{2m+1}=$$

$$=(x+S)(x^{2m}-x^{2m-1}y+x^{2m-2}y^2-\dots-xy^{2m-1}+y^{2m})$$

وهمچنین، ازدستور بسط دوجمله‌ای:

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\dots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n$$

که درآن، ضریب‌های بسط، ازاین دستوربه دست می‌آیند:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\times 2\times\dots\times k},\quad k=1,2,\dots,y$$

مساله‌های ۱۶، ۲۴، ۳۸، ۵۱، ۱۲۵، ۱۴۲، ۱۶۲، ۲۱۷، ۲۴۲، ۲۵۱، ۲۵۸، ۳۲۵، ۳۴۷، ۴۳۹.

۷. اتحادها. معادله‌ها ودستگاه‌های معادله‌ها

برای حل وبررسی معادله‌ها، درکنار روش‌های رسمی ودبیرستانی، گاهی می‌توان ازمفهوم یکنوائی استفاده کرد: اگر تابع $y=f(t)$، اکیداً

صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آن وقت معادله‌های $f(g_1)=f(g_2)$ و $g_1=g_2$ هم‌ارزند. برای حل دستگاه‌های معادله‌ها، گاهی مفید است از تعبیر هندسی، مفهوم تقارن در عبارت‌های جبری و غیره استفاده کنیم.

یک رشته از مساله‌ها، به رابطهٔ خطی بین چند متغیر مربوط می‌شوند.

مساله‌های ۳۸، ۶۳، ۹۸، ۱۴۶، ۱۸۹، ۱۹۴، ۲۴۳، ۲۷۶، ۲۹۲، ۳۵۳، ۳۵۷، ۳۶۴، ۳۸۲، ۴۱۴، ۴۶۰.

۸. نابرابری‌ها

در بین نابرابری‌هایی که، در مساله‌ها، مورد استفاده قرار می‌گیرند، این‌ها را می‌توان آورد:

۱) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ ، $|x-y|\geqslant|x|-|y|$ ؛

۲) $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ (برای هر $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$)؛

۳) اگر a_1 ، a_2 ،...، a_n عددهایی غیرمنفی باشند:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(نابرابری کوشی، برای واسطه‌های هندسی و عددی)؛

۴) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$

برای هر a_1 ، a_2 ،...، a_n.

۵) برای هر دو عدد مثبت a و b، کسر $\frac{c+d}{a+b}$ ، بین کسرهای $\frac{c}{a}$ و $\frac{d}{b}$ قرار دارد (مساله ۲۱۹ را ببینید).

۶) $\sin x<x$ برای هر $x>0$.

مساله‌های ۱۹، ۵۶، ۹۵، ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۸، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۳۰، ۱۳۴، ۱۶۹، ۱۷۲، ۱۸۷، ۲۰۳، ۲۰۸، ۲۱۲، ۲۳۲، ۲۶۴،

۲۶۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۹۹، ۳۰۸، ۳۱۱، ۳۱۹، ۳۲۵a، ۳۳۵، ۳۴۱، ۳۴۶، ۳۵۴، ۳۵۷، ۳۶۵، ۳۷۲، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۹۲، ۴۰۳، ۴۲۷، ۴۳۶، ۴۵۲، ۴۶۲.

۹. اصل دیریکله

اگر در k لانه، بیش از nk خرگوش باشند، آن وقت، دست کم در یک لانه، بیش از n خرگوش وجود دارد. این اصل در مساله‌های مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرد که، در آن‌ها، باید «وجود» عضو یا عددی را ثابت کرد.

چند گزارهٔ شبیه «اصل دیریکله» را، که به همان اندازه روشن‌اند و در مساله‌های هندسی و جبری کاربرد دارند، می‌آوریم. اگر مجموع مساحت‌های چند شکل کمتر از S باشد، با آن‌ها نمی‌توان سطحی به مساحت S را پوشاند. اگر روی پاره‌خط راستی به طول واحد، چند پاره‌خط راست با مجموع طول‌های L قرار دهیم، آن وقت نقطه‌ای پیدا می‌شود که با بیش از $[L]$ عدد از این پاره‌خط‌ها پوشیده نشده است. اگر واسطهٔ حسابی چند عدد، از a بزرگتر باشد، آن وقت، دست کم یکی از این عددها، از a بزرگتر است.

مساله‌های ۳، ۴، ۱۲، ۳۷، ۶۷، ۷۲، ۷۸، ۸۷، ۹۱، ۱۱۰، ۱۶۶، ۲۲۰، ۳۴۲، ۳۶۷، ۴۴۴، ۴۴۶.

۱۰. آرایش‌ها

روش اصلی در حل مساله‌های مربوط به تعداد ترکیب‌های مختلف عضوهای یک مجموعهٔ محدود، عبارت است از برقراری تناظر بین مجموعه‌هایی که با شرط‌های مختلف داده شده‌اند.

مثلاً، مجموعهٔ همهٔ گروه‌های مرتب شامل n واحد و صفر را (از این گروه‌ها به تعداد 2^n وجود دارد) می‌توان در تناظر با مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی قرارداد. مجموعهٔ این گروه‌ها، وقتی که شامل k واحد باشد، متناظر است با مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی. تعداد همهٔ این گروه‌ها، برابر است با

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}$$

که به‌ازای $k = 2$، برابربا تعدادزوج عضوهای نامرتب ازمجموعهٔمفروض می‌شود: $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$.

تعداد تبدیل‌های (مرتب) دریك مجموعهٔ n عضوی، برابراست با

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

مساله‌های ۵۲، ۶۱، ۷۶، ۱۱۷، ۱۳۶، ۲۱۰، ۲۳۱، ۲۴۶، ۳۰۱، ۳۶۱، ۴۳۹، ۴۴۲.

۱۱. گراف‌ها. نگاشت‌ها

اگر عضوهای یك مجموعه را به‌كمك نقطه‌ها مشخص کنیم و برخی از زوج نقطه‌ها را به وسیلهٔ پاره‌خطهائی به‌هم وصل کنیم، تصوری برای یك شاخه از ریاضیات، که‌گراف نامیده می‌شود، به‌دست می‌آید: نقطه‌ها(یعنی عضوهای مجموعه) را راس‌ها وپاره‌خطهای راست (یاکمان‌ها) رایال‌های گراف گویند. گرافی که از هرراس آن بتوان بــه هرمسیر دیگری، شامل یال‌ها، واردشد، گراف مرتبط نامیده می‌شود. هرمسیر بسته درطول یال‌های گراف را، یك دور می‌نامند. در گراف مرتبطی که بدون دور باشد (که در این حالت، آن را درخت می‌گویند)، تعداد راس‌ها، یکی بیشتر از تعــداد یال‌هاست (مسالهٔ ۸ را ببینید). اگرهمهٔ دورهای گراف، طولی زوج داشته باشند (یعنی از تعــداد زوجی یال عبور کنند)، آن وقت راس‌های آن را می‌توان طوری به دورنگ درآورد که راس‌های هم‌رنگ به‌وسیلهٔ یك‌یال‌به هم مربوط نباشند؛ چنین گرافی را، دوبخشی گویند.

وقتی که یال‌های گراف، دارای جهت باشند، با گراف توجیه شده یا گراف جهت‌دار سروکارداریم. هرنگاشت f ازمجموعهٔ متناهیA برخودش، یك‌گراف توجیه شده می‌دهــد کــه از هرراس $a \epsilon A$ آن، پیکانی بــه سمت راس $f(a)$ وجود دارد (درضمن، ممکن است گره‌هایی هــم وجود داشته باشد: پیکان‌هایی که از a به a می‌روند؛ این‌ها، نقطه‌های بی‌حرکت نگاشت

f هستند). اگر f درتناظر یك‌به‌یك باشد، آن‌وقت گراف بــه دورها (و گره‌ها) تجزیه می‌شود.

یکی ازنمونه‌های یك‌گراف پیچیده، طرح شبکهٔ تلفنی است (مسالهٔ ۱۵۸ را ببینید).

گراف‌هایی هم مورد بررسی قرار می‌گیرندکه یال‌ها یــا راس‌های آن‌ها را رنگ کرده‌اند ویا با عددهایی مشخص شده‌اند.

مساله‌های ۸، ۷۲، ۷۹، ۱۱۱، ۱۲۳، ۱۲۶، ۱۶۳، ۱۷۶، ۱۸۳، ۱۹۶، ۲۴۰، ۲۷۱، ۲۹۰، ۲۹۶،۳۱۰،۳۱۷،۴۲۱،۴۶۱.

۱۲. رنگ‌آمیزی. مساله‌های مربوط به شبکه‌ها

در مساله‌های مربوط به گراف‌هــا، اغلب تصور زوج یــا فردبودن، اهمیت دارد. مثلا تعداد راس‌هایی کــه تعداد فردی یال بــه آن‌هــا متصل می‌شود، عددی زوج است (مسالهٔ ۱ راهم ببینید). تصور مشابهی، بــرای مساله‌های دیگر لازم است، مثلا برای حل این مسالهٔ معمول: آیا می‌تــوان صفحهٔ شطرنجی 8×8 را،که دوخانه متقابل دوگوشهٔ آن حذف شده‌است، با مستطیل‌های 2×1 پوشانــد؟ برای حل این مساله، کافی است توجــه کنیم که، هر مستطیل 2×1، دو خانهٔ با رنگ‌های مختلف را می‌پوشاند؛ در حالی‌که دو خانهٔ روبه‌رو در دوگوشهٔ صفحهٔ شطرنجی از یك رنگ‌اند. گاهی، برای حل مساله، لازم می‌شود از تعداد رنگ‌هــای بیشتری استفاده کنیم :

مسالهٔهای ۱، ۱۷، ۳۳، ۴۹، ۶۱، ۷۲، ۸۵، ۱۳۲،۱۳۳،۱۴۲،۱۴۳، ۱۵۴، ۱۸۴، ۲۳۵، ۲۴۷، ۲۶۲، ۳۳۳،۳۶۴،۳۷۴،۴۱۳.

به جز استفاده از زوج یا فرد بودن و رنگ کــردن، در مساله‌های مربوط به صفحه‌های شطرنجی ودیگر شبکه‌های مسطحه وفضایی، اغلب از تصورهای هندسی votوروش‌مختصاتی‌هم می‌توان استفاده‌کرد. صفحهٔشطرنجی را می‌توان همچون یك صفحهٔ عددی در نظر گرفت که، در آن، گــره‌های شبکه، دارای مختصاتی درست‌اند ویا مربعی شامل p^2 گره را موردتوجه قرار دادکه، مختصات آن‌ها، در تقسیم بر p، بــه باقی‌مانده‌های (x و y) می‌رسند.

مسالههای ۹۱، ۹۶، ۱۱۱، ۱۸۱، ۱۹۹، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۲۹، ۲۶۵، ۲۷۵، ۲۹۵، ۳۰۴، ۳۱۴، ۳۴۹، ۳۶۲،۳۹۷،۴۱۶،۴۲۵، ۴۳۳، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۵۷.

۱۳. عملها و تغییرناپذیرها

در مسالههایی که باید روشن کنیم: آیا می‌توان به کمك عملهای مفروضی، ازیك موقعیت به موقعیت دیگری رسید، اغلب بهتراست «تغییر-ناپذیرها» را پیدا کرد، یعنی عنصرهایی را که ضمن این عملها، تغییر نمی‌کنند. درضمن، اگر تعداد «تغییرناپذیرها» در دومجموعه برابر نباشند، به معنای آن است که تبدیل یکی به‌دیگری ممکن نیست. درمسالههای‌مربوط به عددهای درست یا دیگر «چیزهای» ناپیوسته، اغلب می‌توان باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۲ را، به‌عنوان «تغییرناپذیر» درنظر گرفت (ویا باقی‌ماندهٔ تقسیم بر یك عدد طبیعی دیگر).

اگرهمهٔ عملهای انجام شده معکوس‌پذیر باشند، آن وقت می‌توان همهٔ مجموعهٔ عضوهایی را، که عملها را درمورد آنها انجام داده‌ایم، به صورت دودستهٔ هم‌ارز درنظر گرفت (دوعضو را هم‌ارز گوییم، وقتی که بتوان یکی ازآنها را، ضمن انجام عملها، ازدیگری به‌دست آورد).

مسالههای ۱۰۵، ۱۵۴، ۲۱۴، ۲۳۳، ۲۶۰، ۲۷۶، ۳۲۱، ۴۲۵.

درمسالههایی که باید تعداد عملها را تخمین زد ویا ثابت کرد که، این عملها را، نمی‌توان به صورت نامتناهی ادامه داد، اغلب بهتر است دربارهٔ تابعی بیندیشیم که، به‌ازای هرعمل، صعودی (یا نزولی) می‌شود.

مسالههای ۵، ۷، ۲۱، ۴۴، ۱۵۱، ۱۹۶، ۲۷۱، ۲۸۳، ۴۰۹.

۱۴. ترتیب رقمها وعددهای درست، تبدیلهای آنها. مسابقه‌ها.

برای حل مسالههای مربوط به‌دنبالههای متناهی ازعددهای درست، حرفها یامهره‌ها، که‌آنها را روی محیط‌دایره یا دریك‌جدول قرارداده‌ایم، می‌توان ازشیوه‌های مختلف مربوط به‌بخش‌پذیری، آنالیزترکیبی، ارزیابی با نابرابریها، واستقرای ریاضی استفاده کرد.

مسالههای ۴، ۳۷، ۳۹، ۸۷، ۱۱۷، ۱۴۳، ۱۵۴، ۱۵۶،۱۸۱،۲۰۰، ۲۲۱، ۲۲۴، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۸، ۲۷۵،۲۸۱،۳۰۰،۳۰۷، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۳۷، ۳۴۰، ۳۴۵، ۳۵۰،۳۸۵،۳۹۰،۳۹۱، ۴۰۹، ۴۱۳، ۴۳۲، ۴۳۵، ۴۴۲، ۴۵۶.

دربارهٔ مسابقه‌ها، میزان امتیازها ومقام شرکت‌کنندگان:

مسالههای ۲۸، ۱۰۸، ۱۲۶، ۱۷۹، ۲۱۸، ۳۱۷، ۴۴۱.

۱۵. هندسهٔ مسطحه

تقریباً درهرالمپیاد با مسالههای هندسهٔ مسطحه مواجه می‌شویم.

الف) دربارهٔ چندضلعی‌های منتظم:

مسالههای ۲۰، ۹۹، ۱۰۳، ۱۲۷، ۲۲۶، ۳۹۸، ۴۰۸، ۴۳۴، ۴۴۳.

ب) دربارهٔ مفهوم «مکان هندسی» :

مسالههای ۶، ۱۲، ۱۴، ۱۸، ۲۰، ۳۱، ۴۰، ۶۰، ۶۹، ۷۸، ۸۲، ۱۵۷، ۲۰۲، ۲۰۷، ۲۱۳، ۲۷۰، ۴۲۴.

ج) تبدیلهای هندسی (دوران، انتقال موازی، تشابه و ترکیبهای آنها) :

مسالههای ۶، ۲۲، ۴۵، ۴۷، ۷۳، ۱۰۱، ۱۱۲، ۱۴۰، ۱۴۷، ۱۶۵، ۱۸۲، ۱۹۸، ۲۰۵، ۲۲۲، ۲۵۳، ۲۵۹،۲۹۸،۳۰۹،۳۱۵، ۳۷۳، ۳۹۹، ۴۱۴، ۴۶۰.

د) مسالههایی که درآن، صحبت برسرمساحت شکل است (و یا از مساحت، به عنوان یك ابزارکمکی استفاده می‌شود):

مسالههای ۱۲، ۱۳، ۲۳، ۲۹، ۵۳، ۵۵، ۷۸، ۱۰۶، ۱۴۷؛ ۱۵۲، ۱۸۶، ۲۰۴، ۲۶۱، ۲۵۵، ۲۸۵، ۳۱۲،۳۲۷،۳۶۳،۳۶۶، ۳۸۴، ۳۹۵، ۴۱۵، ۴۲۸، ۴۵۸.

۱۶. هندسهٔ فضایی

درحل‌مسالهها، اغلب پیداکردن تصویرشکل برصفحه (یاخطراست) مفید است. از قضیه‌ای هم که در کتابهای درسی وجود ندارد، یاد می‌کنیم: در هرکنج سه‌وجهی، هرزاویهٔ مسطحه ازمجموع دو زاویهٔ دیگر

کوچکتر است.

مساله‌های ۵۳، ۷۰، ۸۰، ۸۲، ۱۰۴، ۱۲۱، ۱۵۰، ۱۸۸، ۲۳۴، ۲۴۱، ۲۵۵، ۲۶۶، ۲۹۹، ۳۲۶، ۳۴۸، ۳۵۸، ۳۹۴، ۴۱۷، ۴۶۱.

۱۷. هندسهٔ ترکیبی

منظور ما، ارزیابی‌های مختلف نسبت بـه جابه‌جایی‌ها، پوشش‌هـا و ترکیب‌های مختلفِ شکل‌هاست. دراین‌جا، ازکلی‌ترین ویژگی‌های مربوط به استقرار شکل درصفحه (یا درفضا) استفاده می‌شود.

ازبین این ویژگی‌هـا، قضیهٔ ژُردان را می‌آوریـم: هـرخط شکستهٔ بسته‌ای‌که با خودش متقاطع نباشد، صفحه رابه دوبخش درونی وبیرونی تقسیم می‌کند؛ درضمن، هرمسیری‌که از نقطه‌ای درونی به نقطه‌ای بیرونی برود، این خط شکسته را قطع می‌کند ودونقطهٔ هر حـوزه را می‌توان بـا مسیری به‌هم وصل کرد که خط شکسته را قطع نکند.

تعریف مجموعهٔ محدب رابـه یاد می‌آوریم: به مجموعه‌ای محدب گویند‌که، علاوه برنقطه‌ها، شامل همهٔ پاره‌خط‌های راستی باشد‌که این نقطه‌ها را دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنند. به کوچکترین مجموعهٔ محدبی که شامل یك شکل باشد، پوش محدب آن شکل گویند؛ پوش محدب یك‌مجموعهٔ متناهی، عبارت است ازیك چندضلعی (ودرفضا، یك چندوجهی) کـه راس‌های آن، دربرخی نقطه‌های مفروض باشند.

همراه با شکل مفروض، خوب است همسایگی r آن را هـم درنظر بگیریم: مجموعه‌ای از نقطه‌ها که کمترین‌فاصلهٔ ازآن‌ها تا نقطه‌های شکل کمتر از r باشد؛ دوشکل (ودرحالت خاص، نقطه‌ها) تنها وقتی به فاصله‌ای که از $2r$ کمتر نیست قرار دارند کـه ، همسایگی‌های r آن‌هـا. متقاطع نباشند (مساله‌های ۱۲، ۸۱).

مساله‌های ۲۷، ۴۹، ۵۳، ۶۴، ۸۶، ۱۴۷، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۶۴، ۱۸۸، ۲۰۲، ۲۱۱، ۲۱۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۴۹، ۲۵۵، ۲۷۷، ۳۱۴، ۳۲۴، ۳۳۸، ۳۵۱، ۴۰۶، ۴۴۸، ۴۶۱.

۱۸. نابرابری‌های هندسی، ارزیابی‌ها، اکستره‌مم‌ها

ازبین قضیه‌های زیادی‌که برای اثبات این نابرابری‌های هندسی به کار می‌روند، چند قضیه را که کاربرد گسترده‌تری دارند، می‌آوریم: در هر مثلث، هرضلع ازمجموع دوضلع دیگـر کوچکتر است (نابرابری مثلثی). یك زاویهٔ مثلث، کوچکتر، برابر ویا بزرگتراز ۹۰ درجه است، وقتی که، مجذورضلع روبه‌روبه‌آن، کوچکتر، برابریا بزرگتراز مجموع مجذورهای دوضلع مجاوربه‌آن باشد. طول تصویریك پاره‌خط راست برصفحه یاخط راست، ازطول خود پاره‌خط‌راست، بزرگترنیست. مساحت تصویریك‌چند‌ضلعی برصفحه، ازمساحت خود چندضلعی بیشترنیست.

مساله‌های ۲۳، ۲۹، ۳۲، ۴۱، ۶۲، ۷۰، ۷۳، ۷۸، ۸۲، ۸۴، ۸۶، ۱۰۴، ۱۱۵، ۱۲۱، ۱۲۴، ۱۲۷، ۱۳۱، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۴۰، ۱۶۷، ۱۸۵، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۱۳، ۲۲۲، ۲۲۵، ۲۶۱، ۲۶۶، ۲۶۹، ۲۸۲، ۲۹۰، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۲، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۳۴، ۳۴۸، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۶۸، ۳۸۸، ۳۹۴، ۲۴۰، ۴۳۱، ۴۳۸.

۱۹. بردارها

به جزعمل‌های عادی روی بردارها (جمع، تفریق وضرب در یـك عدد)، گاهی مفید است ازضرب عددی (اسکالر) بردارها هم استفاده کنیم:

$$\mathbf{uv}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha \text{ ، } \alpha=\widehat{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

برای n نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n ازصفحه (یافضا)، نقطهٔ منحصربه‌فرد O وجود دارد (مرکزثقل)، به نحوی که

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$$

مساله‌های ۶، ۱۳، ۱۴۳، ۱۹۳، ۲۰۷، ۲۲۲، ۲۲۵، ۲۳۴، ۲۷۰، ۲۷۴، ۲۸۰، ۲۹۳، ۳۱۵، ۳۳۶، ۳۶۶، ۳۷۳، ۴۰۴، ۴۳۴، ۴۵۷.

۲۰. ارزیابی وجست‌وجوی حداقل وحداکثر درمساله‌های مربوط به عددها وجدول‌ها

بسیاری ازمساله‌های المپیادها، به مقایسهٔ مقدار عددها از یك گروه محدود، نقطه‌های واقع برخط راست، ارزیابی مجموع‌ها، تفاضل‌ها ودیگر تابع‌های مربوط به‌گروه عددها ویا جدول‌ها، مربوط می‌شوند.

مساله‌های ۵۶، ۷۷، ۱۲۷، ۲۳۲، ۲۵۲، ۲۸۳، ۳۴۴، ۳۵۴، ۳۶۹، ۳۷۷، ۴۵۳.

گاهی درچنین‌مساله‌هایی مفید است.

الف) کوچکترین یا بزرگترین عددگروه را درنظر بگیریم:

مساله‌های ۲۶، ۴۴، ۷۲، ۱۰۹، ۱۲۶، ۱۲۸، ۱۵۶، ۱۶۰، ۱۶۳، ۲۰۲، ۲۱۹، ۲۴۳، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۸۳، ۳۳۷، ۳۴۳، ۳۸۰، ۴۰۱، ۴۰۹.

ب) عددهای گروه را برحسب مقدارآن‌ها مرتب‌کنیم:

مساله‌های ۳۴، ۶۵، ۷۵، ۱۵۳، ۲۴۵، ۲۵۰، ۳۴۶، ۴۱۰.

۲۱. دنباله‌ها

دنبالهٔ x_n را متناوب گویند، وقتی‌که $x_{n+t}=x_n$ ، $n\in\mathbf{N}$ (عدد طبیعی t، دورهٔ تناوب دنباله است). در بسیاری از مساله‌ها، با دنباله‌های برگشتی روبه‌رو می‌شویم؛ دنبالهٔ x_n وقتی برگشتی است که، برای آن، داشته باشیم: $x_{n+1}=f(x_n)$ که، در آن، f یك تابع است؛ گاهی هم جمله‌های دنباله (ازجملهٔ $(k+1)$ام) به‌کمك k جملهٔ قبل ازآن معین می‌شود. به‌عنوان نمونه، می‌توان از دنبالهٔ فیبوناچی نام برد.

۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،...

که درآن، هرجمله برابراست با مجموع دو جملهٔ قبل ازآن. در ارزیابی دنباله‌ها، اغلب روش استقرای ریاضی به‌کار می‌آید.

مساله‌های ۱۱، ۱۵، ۲۵، ۳۶، ۹۰، ۱۰۰، ۱۱۳، ۲۲۳، ۲۵۱، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۶۷، ۲۷۳، ۳۰۳، ۳۱۳، ۳۲۸، ۳۵۶، ۴۰۲، ۴۰۵، ۴۵۹.

عدد a را حد دنبالهٔ x_n گویند، وقتی‌که برای هر $\varepsilon>0$، بتوان N

را طوری پیداکردکه، برای هر $n>N$، نابرابری $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد.

مساله‌های ۲۳۹، ۲۶۸، ۳۰۰، ۳۸۹، ۴۵۱.

۲۲. بازی‌ها، تعقیب، برنامه‌ریزی

درحل مساله‌هایی‌که، درآن‌ها، صحبت برسر رسیدن به هدفی، با انجام حرکت‌های متوالی است (به‌خصوص، درموردهایی‌که باید روشن کرد، چه‌کسی امکان‌برد بازی را دارد، باید برنامه وقانونی برای حرکت‌ها تنظیم‌کردکه، با اجرای آن، رسیدن به هدف تضمین شود؛ در این گونه مساله‌ها. درضمن، باید ثابت کردکه، هرحرکت دلخواهی‌که رقیب داشته باشد، موفقیت طرف موردنظرما، حتمی است.

مساله‌های ۱۰، ۵۷، ۶۰، ۷۱، ۸۳، ۹۱، ۱۱۰، ۱۱۶، ۱۲۵، ۱۶۸، ۱۷۴، ۱۹۹، ۲۰۶، ۲۴۲، ۲۵۰، ۲۵۶، ۲۶۲، ۲۸۳، ۳۳۰، ۳۷۶، ۴۵۵.

۲۳. مثال‌ها وساختمان‌های جالب

دربسیاری ازمساله‌ها، دشوارترین بخش حل، نه اثبات، بلکه ساختن نمونه‌ای غیرعادی است، که باشرط مساله سازگارباشد ویاآن‌رانقض‌کند.

مساله‌های ۱۲۳، ۱۵۶، ۲۰۲، ۲۰۸، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۴۴، ۲۵۷، ۲۶۳، ۳۰۰، ۳۷۱، ۳۹۸، ۴۰۱، ۴۱۶، ۴۲۳، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۵۶، ۴۶۰.

مساله‌هایی هم‌که، درآن‌ها، پیداکردن وبررسی مثال، با گام‌های زیادی به‌دست می‌آید، به‌همین مبحث مربوط‌اند (واغلب، استفاده ازروش استقرای ریاضی به‌کارمی‌آید).

مساله‌های ۶۴، ۱۴۴، ۱۵۸، ۱۸۳، ۲۰۰، ۲۱۰، ۲۳۸، ۲۷۲، ۲۸۱، ۴۰۵.

مساله‌هایی برای تمرین

دراین‌جا نزدیك به صد مساله، برای تمرین آورده‌ایم. این مساله‌ها را، دراساس به‌ردیف بحثهای ضمیمه تنظیم کرده‌ایم. بعضی ازاین مساله‌ها، ازبین مساله‌هایی‌انتخاب شده‌اندکه برای المپیادها پیشنهاد شده‌بود. برخی دیگر ازالمپیادهای شهرها ویا جمهوری‌ها برداشته شده‌اند. مساله‌هایی هم ازالمپیادهای بلغارستان ولهستان دراین‌جا آورده‌ایم.

۱. درستی این برابری را، برای هرعدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$1\times 1!+2\times 2!+\dots+n\times n!=(n+1)!$$

۲. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n ، داریم:

$$1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$$

۳. این نابرابری را، برای $n>1$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}>\frac{n}{2}$$

۴. a) n خط راست روی یك صفحه‌اند، به نحوی‌که هیچ دوتایی باهم موازی نیستند وهیچ‌سه‌تایی ازیك نقطه نمی‌گذرند. این n خط‌راست صفحه را به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

b) ثابت کنیدکه، n صفحه درحالت کلی (وقتی‌که هیچ سه‌صفحه‌ای موازی با یك خط راست نباشند وهیچ چهارصفحه‌ای ازیك‌نقطه نگذرند)،

فضا را به $\frac{1}{6}(n^3+5n)+1$ بخش تقسیم می‌کنند.

۵. a) صفحه، به وسیلهٔ چند دایره، به بخش‌هایی تقسیم شده است. ثابت کنید، هربخش‌را می‌توان بایکی ازدورنگ موجود، طوری رنگ کرد که، هردو بخشی که با یك کمان ازهم جدا شده‌اند، رنگ‌های مختلفی داشته باشند.

b) چند «سه شاخه» روی صفحه‌ای قرار دارند (منظوراز«سه‌شاخه»، شکلی است شامل‌سه نیم‌خط راست با راس مشترك). ثابت‌کنید،بخش‌هایی راکه به وسیلهٔ این «سه شاخه‌ها» روی صفحه پدید می‌آیند، می‌توان باسه رنگ طوری رنگ کردکه، هردوبخشی‌که دریك پاره‌خط راست یا یك نیم خط‌راست مشترك‌اند، رنگ‌های مختلفی داشته باشند.

۶. درجدولی‌که ۳ سطر و n ستون دارد، مهره‌هایی ازسه رنگ را به ترتیب دلخواه قرار داده‌ایم: n مهرهٔ سفید، n مهرهٔ قرمز و n مهرهٔ آبی. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را درسطرها طوری قراردادکه، درهرستون، از هرسه‌رنگ داشته باشیم.

۷. روی محیط دایره‌ای، n نقطه ــ سیاه‌وقرمز ــ قرارداده‌ایم. ثابت کنید، حداکثر می‌توان $\frac{3n}{2}-2$ وتر طوری دردایره رسم کردکه دو انتهای هریك ازآن‌ها دونقطهٔ‌مفروض بارنگ‌های مختلف باشند و،درضمن، هیچ دو وتری دردرون دایره باهم برخورد نکنند.

۸. ثابت کنید، هرعدد درست غیرمنفی را، تنها به‌یك‌طریق می‌توان به صورت $x+\frac{1}{2}(y^2+y)$ نوشت که، درآن، x و y عددهای درست و غیرمنفی و $x\leqslant y$ است.

۹. ثابت کنید، اگر $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ عددی درست باشد، آن وقت عدد $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}$ به‌ازای هرعدد طبیعی n عددی درست است.

۱۰. n نفر درمسابقهٔ تنیس شرکت کرده‌اند. هر دونفر یك‌بار با هم

روبه‌رومی‌شوند. ثابت کنید، مسابقه می‌تواند طوری به پایان برسد که نفر kام ازنفر $(k+1)$ام $(k=1, 2, \dots, n-1)$ برده باشد.

۱۱. درشهری N نفر زندگی می‌کنندکه، هردو نفر آن‌ها، یا با هم دوست‌اند ویا دشمن یکدیگرند. در هر روز ممکن است، حداکثر برای یك نفر، «زندگی تازه‌ای» آغاز شود: با همهٔ دوستان خود دعوا کند وبا همهٔ دشمنان خود دوست شود. می‌دانیم، هر سه نفر از مردم این شهر، می‌توانند دوست شوند، ثابت کنید، همهٔ مردم این شهر، می‌توانند با هم دوست شوند.

۱۲. a) بزرگترین‌توان‌عدد ۳ را طوری پیدا کنیدکه، عدد $2^{3^n}+1$ برآن بخش‌پذیر باشد.

b) ثابت کنید، عددی‌که دردستگاه دهدهی با 3^n رقم برابر واحد نوشته شده است، بر 3^n بخش‌پذیر و بر 3^{n+1} بخش‌ناپذیر است.

۱۳. ثابت کنید، به کمك nوزنه باوزن‌های ۱، ۳، ۹،...، 3^{n-1} گرم، می‌توان هرجسم به‌وزن $M \leqslant \frac{1}{2}(3^n-1)$ گرمی را با ترازو وزن کرد (M، عددی درست است ؛ از وزنه‌ها در هر دو کفهٔ ترازو می‌توان استفاده کرد).

۱۴. پاره‌خط راستی به‌طول 3^k را به سه بخش برابرتقسیم کرده‌ایم. بخش‌های اول وسوم را درنظر می‌گیریم و، هرکدام ازآن‌ها را، دوباره به سه بخش تقسیم می‌کنیم؛ بازهم بخش‌های اول وسوم را در هر کدام ازآن‌ها درنظر می‌گیریم و، هرکدام را، به سه‌بخش تقسیم می‌کنیم‌وغیره، تاآن‌جاکه پاره‌خط‌هایی به‌طول واحد به دست آید. نقطه‌های تقسیم را در روی پاره‌خط‌های راستی‌که مورد تقسیم قرار گرفته‌اند، نشان می‌گذاریم. ثابت کنید، برای هر d، که از 3^n کوچکتر باشد، می‌توان دو نقطهٔ نشان‌دار پیداکردکه فاصلهٔ بین آن‌ها، برابر d باشد.

۱۵. a) درستی این برابری را ثابت کنید:

$$(1+2)(1+2^2)(1+2^{2^2})(1+2^{2^3})\dots(1+2^{2^n})=2^{2^{n+1}}-1$$

b) ثابت کنید، هردو عدد، از دنبالهٔ ۳، ۵، ۱۷، ...، $2^{2^n}+1$، نسبت به هم اول‌اند.

۱۶. ۱۵ عدداول، یك‌تصاعدحسابی ساخته‌اند. ثابت‌کنید، قدرنسبت تصاعد از ۳۰۰۰۰ بزرگتراست.

۱۷. عددطبیعی x را پشت‌سرهم برعددهای از ۲ تا $x-1$ تقسیم کرده‌ایم وباقی‌مانده‌های حاصل ازتقسیم‌ها را نوشته‌ایم. x را طوری پیدا کنیدکه، مجموع همهٔ این باقی‌مانده‌ها، برابر x شود.

۱۸. ثابت کنید، حاصل‌ضرب رقم‌های هرعدد بزرگتر از ۱۰۰، از $\frac{27}{37}$ این عدد تجاوز نمی‌کند.

۱۹. ۹۹ رقم ۹ را به ردیف نوشته‌ایم. ثابت‌کنید، می‌توان درست ۱۰۰ رقم درسمت‌راست‌این‌عددنوشت، به‌نحوی‌که عدد۱۹۹ رقمی‌حاصل، مجذورکامل یك عدد درست باشد.

۲۰. ثابت کنید، عددهای گنگ α و β وجود دارند، به نحوی که α^β، عددی‌گویا باشد.

۲۱. α و β عددهایی گنگ‌اند ومی‌دانیم $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. ثابت کنید، دربین عددهای $[n\alpha]$ و $[m\beta]$ (که درآن‌ها، n و m، همه عددهای‌درست هستند)، به هرعدد درست، درست یکبار برخورد می‌کنیم.

۲۲. ثابت‌کنید، n رقم اول بعدازممیز، دربسط دهدهی عدد

$$(\sqrt{26}+5)^n$$

یاهمه برابرصفرند ویا همه برابر ۹.

۲۳. a) ثابت‌کنید، اگر $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ عددهایی‌گویاباشند، آن‌وقت $\sin n\varphi$ و $\cos n\varphi$ هم، برای هرعدد طبیعی n، گویا هستند.

b) ثابت‌کنید، برای هرعدد طبیعی N، می‌توان N نقطه‌را برصفحه طوری پیدا کردکه، هیچ سه نقطه‌ای روی یك خط راست نباشدو، درضمن، فاصلهٔ بین هردوتا ازآن‌ها، برابربا عددی درست باشد.

۲۴. a و b را طوری پیدا کنیدکه هریك ازسه‌جمله‌ای‌های

$$x^2-ax+b \quad و \quad x^2-bx+a$$

دارای ریشه‌های مختلف مثبت باشند.

۲۵. ثابت کنید، اگر عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ اول باشد، عدد b^2-4ac نمی‌تواند مجذور کامل یك عدد درست باشد.

۲۶. ثابت کنید، اگر $a^2+pa+q=0$ و $b^2-pb-q=0$، آن وقت معادلهٔ $x^2+2px+q=0$، دارای ریشه‌ای بین a و b است $(q\neq 0)$.

۲۷. ثابت کنید، برای هر دو عدد p و q، مجموع طول‌های پاره‌خط‌هایی از محور Ox، که روی آن‌ها نابرابری $|x^2+2px+2q|\leqslant 2$ برقرار است، از ۴ تجاوز نمی‌کند.

۲۸. همهٔ عددهای درست n را پیدا کنید که، به‌ازای هریك از آن‌ها: a) n^2+1 بر $n+5$؛ b) n^5+3 بر n^2+1 بخش‌پذیر باشد.

۲۹. همهٔ چندجمله‌ای‌های $F(x)$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، به‌ازای هر x و y داشته باشیم:

$$F(x+y)=F(x)+F(y)+3xy(x+y)$$

۳۰. همهٔ شرکت‌کنندگان در دو راه‌پیمائی باهم جمع شدند (بعضی‌ها در هر دو راه‌پیمائی شرکت داشتند و برخی دیگر، تنها در یك راه‌پیمائی). در راه‌پیمائی اول، ۶۰٪ افراد مرد بودند و در راه‌پیمائی دوم ۷۵٪. ثابت کنید، در اجتماع آن‌ها، تعداد مردها، کمتر از تعداد زن‌ها نیست.

۳۱. کدام یك بزرگترند: $\sqrt{999}+\sqrt{1001}$ یا $2\sqrt{1000}$؟

۳۲. ثابت کنید، برای هر n، داریم:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2$$

۳۳. ثابت کنید:

$$\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$$

۳۴. $x_1+x_2+\dots+x_k=0$؛ m و M کوچکترین و بزرگترین عدد، از بین عددهای x_1، x_2، ...، x_k است. ثابت کنید.

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_k^2\leqslant -kmM$$

۳۵. مجموع عددهای غیرمنفی a و b و c برابر واحد است. ثابت کنید:

$$a^2b+b^2c+c^2a\leqslant\frac{4}{27}$$

۳۶. روی محیط دایره‌ای n عدد قرار داده‌ایم که، مجموع آن‌ها، عددی مثبت است. ثابت کنید، می‌توان از بین آن‌ها عددی را انتخاب کرد که مثبت باشد و، درضمن، ازمجموع آن با عدد بعدی، با دو عدد بعدی،...، با $n-2$ عدد بعدی، عددهایی مثبت به‌دست آید (حرکت روی محیط دایره را، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بگیرید).

۳۷. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، می‌توان عددی به‌صورت

۱۱۱ ... ۱۰۰ ... ۰

پیدا کرد که بر n بخش‌پذیر باشد. (عددها درمبنای دهدهی نوشته شده‌اند)

۳۸. در گروهی ۳۰ نفر وجود دارند. به هر فرد، درست k نفر از این گروه، علاقه‌مند است. کمترین مقدار k را پیدا کنید که، به ازای آن، بتوان حکم کرد که: حتماً دو نفر پیدا می‌شوند که به یکدیگر علاقه‌مندند.

۳۹. عدد α مفروض است. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی N، می‌توان عدد درست n را طوری پیدا کرد که $0\leqslant n\leqslant N$ و، در ضمن، اختلاف $n\alpha$ با عدد درست، کمتر از $\frac{1}{N}$ باشد.

۴۰. روی زمین ۵ میلیارد انسان زندگی می‌کنند که کمتر از ۱٪ آن‌ها، بیش از ۱۰۰ سال دارند. ثابت کنید، می‌توان ۱۰۰ نفر را پیدا کرد که باهم و درجریان یك ثانیه به دنیا آمده‌اند.

۴۱. ۳۰ سکهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ کوپکی داریم. ثابت کنید از آن‌ها می‌توان چند سکه به مجموع ۳۰ کوپك انتخاب کرد.

۴۲. روی یک نوار بلندکاغذی دنباله‌ای از ۳۶۰ رقم به صورت

۱۲۳ ۱۲۳ ۱۲۳ ... ۱۲۳ ۱۲۳ ۱۲۳

نوشته‌ایم. این نوار را حداکثر به چندبخش می‌توان تقسیم کرد؛ به نحوی که، همهٔ عددهای بخش‌های مختلف نوار، باهم فرق داشته باشند؟

۴۳. a) ثابت کنید، از بین n عددطبیعی کوچکتر از $2n-1$، می‌توان دوعدد پیداکرد، به‌نحوی که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

b) ثابت کنید، ازبین n عدد طبیعی مختلف کوچکتر از $2n-2$، می‌توان سه‌عدد طوری انتخاب کرد که یکی از آن‌ها، برابربا مجموع دو عدد دیگر باشد.

۴۴. حداکثرچند نقطه می‌توان روی پاره‌خط راست به‌طول واحد قرارداد تا روی هرپاره‌خط راست به‌طول l واقع بر پاره‌خط اصلی، بیش از $1+100l^2$ نقطه وجود نداشته باشد؟

۴۵. a) دردایره‌ای به قطر ۱، چند وتر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگرهرقطر دربیش‌از k نقطه وترها راقطع نکند، آن‌وقت مجموع‌طول‌های همهٔ وترها، از ۳/۱۵k کمتر است.

b) درمکعبی بایال به‌طول a خط شکسته‌ای وجود دارد، که‌هرصفحهٔ موازی با یکی ازوجه‌ها را، دربیش از k نقطه قطع نمی‌کند. ثابت کنید، طول خط شکسته، از $3ka$ تجاوز نمی‌کند.

۴۶. درسطحی یک کیلومتر در یک کیلومتر، بیشه‌ای از درختان کاج وجود داردکه از ۴۵۰۰ درخت تشکیل‌شده وقطر هردرخت ۵۰ سانتی‌متر است. ثابت کنید، روی این سطح مربعی، می‌توان ۵۰ قطعهٔ مستطیلی ۱۰ متر در ۲۰ متر طوری جدا کرد که، درآن‌ها، حتی یک درخت هم نروئیده باشد.

۴۷. ۱۰۰ نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_{100} را روی محیط دایره‌ای علامت گذاشته‌ایم. کدام یک ازچهارضلعی‌های محدب بزرگترند: آن‌هایی که‌یکی از راس‌هایشان A_1 است، یابقیه؟ چقدر؟

۴۸. ازبین عددهای شش‌رقمی، کدام بزرگترند: آن‌هایی که قابل بیان به‌صورت حاصل‌ضرب دوعدد سه‌رقمی هستند یابقیه؟

۴۹. a) آیا می‌توان همهٔ عددهای ده‌رقمی راکه بارقم‌های ۱ و ۲ نوشته شده‌اند، طوری به دوگروه تقسیم کردکه، مجموع هردو عدد از یک گروه، دست‌کم دورقم برابر ۳ داشته باشد؟

b) ثابت کنید، بین عددهای n رقمی‌که تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ هستند، نمی‌توان بیش‌از $\frac{2^n}{2n+1}$ عدد طوری انتخاب کرد که، هردوتا از آن‌ها، دست‌کم در رقم‌های سه‌مرتبهٔ خود باهم فرق داشته باشند.

۵۰. به چندطریق می‌توان دایره‌ای‌که به p قطاع تقسیم شده است (p، عددی است اول) به‌وسیلهٔ n رنگ مختلف، رنگ کرد؟ (هرقطاع فقط یک رنگ دارد؛ اجباری نیست از همهٔ رنگ‌ها استفاده شود؛ اگر ضمن دوران دایره، دو روش رنگ آمیزی، برهم منطبق شوند، آن‌ها را یکی به حساب می‌آوریم.)

b) ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n وهرعدد اول p، عدد n^p-n برعدد p بخش‌پذیر است (قضیه‌کوچک فرما).

۵۱. دریک فستیوال، ۶ موسیقی‌دان شرکت دارند. در هر کنسرت، بخشی ازموسیقی‌دان‌ها شرکت می‌کنند و، بقیه، در سالن به آن‌ها گوش می‌دهند. حداقل چند کنسرت باید داده شود تا هریک از ۶ موسیقی‌دان، به اجرای هریک ازدیگران، ازطریق سالن، گوش‌کرده باشند؟

۵۲. درشهر X، هرخانواده درآپارتمان‌جداگانه‌ای زندگی‌می‌کند. تصمیم گرفته می‌شود، هردوخانواده، آپارتمان‌های خودرا باهم عوض‌کنند (دوخانواده‌ای‌که دریک روز آپارتمان‌های خودرا با هم عوض کرده‌اند، هیچ‌کدام درتعویض آپارتمان با یک خانوادهٔ دیگر، در آن روز شرکت نمی‌کند). ثابت کنید، هرگونه تعویض آپارتمان‌ها را، که موردنظرما باشد، می‌توان درشهر X، در دوروز انجام داد.

۵۳. ثابت کنید، ازقطعه مفتول به طول ۱۲۰ سانتی‌متر، نمی‌توان قالب مکعبی را با یال ۱۰ سانتی‌متر، بدون پاره‌کردن مفتول، درست کرد.

۵۴. ۳۰ اردک‌ماهی را در برکه‌ای رها کرده‌ایم که، به‌تدریج یکدیگر را می‌خورند. اردک ماهی را وقتی سیر به‌حساب می‌آوریم که سه‌اردک‌ماهی

(سیر یا گرسنه) را خورده باشد. حداکثر چند اردک‌ماهی می‌تواند سیر بشود؟

۵۵. چگونه می‌توان ۵۰ شهر را با حداقل تعداد خط‌های هوایی به هم مربوط کرد تا این که بتوانیم از هر شهر به هر شهر دیگر پرواز کنیم، بدون این که بیش از حداکثر دو هواپیما، عوض کنیم؟

۵۶. هر یك از ۸ تیم فوتبال، یك بار با بقیهٔ تیم‌ها بازی می‌کند. در ضمن، در این بازی‌ها، «مساوی» نداریم. ثابت کنید، می‌توان چهار تیم A، B، C، D را طوری پیدا کرد که A از B و C و D، B از C و D، C از D برده باشند.

۵۷. روی ۲۰ کارت، رقم‌های ۰، ۱، ...، ۹ را نوشته‌ایم (هر رقم را روی دو کارت). ثابت کنید، این کارت‌ها را نمی‌توان طوری در ردیف هم‌جا داد که، بین دو کارت با رقم «k» درست k رقم دیگر قرار داشته باشد (برای هر $k=0, 1, \ldots, 9$).

۵۸. عددی $(2m+1)$ رقمی نوشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان یك رقم آن را طوری حذف کرد که در عدد $2m$ رقمی حاصل، تعداد رقم‌های ۷ در مرتبه‌های زوج، برابر با تعداد رقم‌های ۷ در مرتبه‌های فرد باشد.

۵۹. آیا می‌توان ۱۰۰ عدد فرد $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}=1$$

۶۰. ثابت کنید، یك صفحهٔ شطرنجی 50×50 را نمی‌توان به شکل‌هایی شامل چهارخانه و به صورت T برید.

۶۱. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=$$
$$=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n]$$

۶۲. اگر دو نقطه روی یك صفحه داده شده باشد، می‌توان نقطهٔ سوم را از طریق پیدا کردن قرینهٔ یکی از این نقطه‌ها نسبت به دیگری به دست آورد.

سه راس مربعی داده شده است، آیا از این طریق می‌توان راس چهارم این مربع را پیدا کرد؟

۶۳. قرینهٔ یکی از راس‌های مثلث را نسبت به راس دیگر آن پیدا کرده‌ایم. آیا با تکرار عمل‌هایی از این گونه، می‌توان به سه راس یك مثلث قائم‌الزاویه یا متساوی‌الاضلاع رسید؟

۶۴. ثابت کنید، مساحت یك چندضلعی محدب که راس‌های آن در گره‌های یك صفحهٔ شطرنجی باشد، برابر است با $i+\frac{r}{2}-1$ که، در آن، i تعداد گره‌های واقع در درون این چندضلعی و r تعداد گره‌های واقع بر ضلع‌ها و راس‌های چندضلعی است؛ طول ضلع هر خانه از صفحهٔ شطرنجی را واحد به حساب می‌آوریم (قضیهٔ پیك).

۶۵ تعداد زیادی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع برابر داریم که، در راس‌های هر کدام از آن‌ها، عددهای ۱، ۲ و ۳ را (به ترتیب دلخواهی) گذاشته‌ایم. مثلث‌ها را در یك ستون روی هم قرار می‌دهیم و مجموع عددهای هر راس را می‌نویسیم، آیا ممکن است در هر راس a) عدد ۲۵؛ b) عدد ۶۰ به دست آید.

۶۶. یك چندضلعی غیرمحدب مفروض است. با آن، این عمل را انجام می‌دهیم: دو راس غیرمجاور A و B از آن را انتخاب می‌کنیم، به نحوی که تمامی چندضلعی در یك طرف خط راست AB واقع باشد و قرینهٔ بخشی از محیط چندضلعی را، که بین دو نقطهٔ A و B قرار دارد، نسبت به وسط پاره‌خط راست AB پیدا می‌کنیم. اگر بازهم به یك چندضلعی غیرمحدب برسیم، عمل را تکرار می‌کنیم. ثابت کنید، بعد از چند عمل، چندضلعی مفروض، به یك چندضلعی محدب تبدیل می‌شود.

۶۷. در راس‌های: a) ۷ضلعی منتظم؛ b) ۸ضلعی منتظم؛ c) nضلعی منتظم ($n\geqslant 9$)، کارت‌هایی با رنگ‌های سیاه یا سفید قرار داده‌ایم. آیا این درست است که، همیشه می‌توان سه کارت همرنگ پیدا کرد، به نحوی که راس‌های یك مثلث متساوی‌الساقین را تشکیل دهند؟

۶۸. آیا می‌توان یال‌های یك مکعب را، با عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۲

طوری شماره‌گذاری کرد که، مجموع عددهای هرسه یالی که از یك راس می‌گذرد، با مجموع عددهای هرسه یال دیگری ازاین گونه، برابر باشد؟ آیا می‌توان یال‌های مکعب را با عددهای ۶—، ۵—، ...، ۱—، ۱، ۲، ...، ۶ طوری شماره‌گذاری کرد تا همان شرط برقرار باشد؟

۶۹. سه دایرهٔ برابر، ازیك نقطه می‌گذرند. ثابت کنید، سه نقطهٔ دیگر برخورد این دایره‌ها، روی دایره‌ای باهمان شعاع قرار دارند.

۷۰. روی دوخط راستی که درنقطهٔ P بههم رسیده‌اند، دو متحرك به طوریکنواخت و با سرعت‌های برابر حرکت می‌کنند؛ متحرك‌ها را، نقطه‌های M و N می‌نامیم. آن‌ها، دریك لحظه، ازنقطهٔ P عبور نکرده‌اند. ثابت کنید، دایرهٔ محیطی مثلث MNP، همیشه ازنقطهٔ ثابت دیگری (بهجز P) می‌گذرد.

۷۱. نقطه‌های A، B، C و D روی محیط دایره‌ای چنان قراردارند که مماس‌های مرسوم از A و C بر دایره، روی خط راست BD بههم می‌رسند. ثابت کنید، مماس‌های مرسوم از B و D بردایره هم، روی خط راست AC یکدیگر را قطع می‌کنند.

۷۲. روی ضلع‌های AB و BC ازمثلث ABC، مربع‌های $ABDK$ و $CBEL$ را، در بیرون مثلث ساخته‌ایم. ثابت کنید، امتداد ارتفاع BH ازمثلث ABC، برمیانهٔ مثلث DBE منطبق می‌شود.

۷۳. ثابت کنید، در درون مثلثی که، زاویه‌هایی کمتر از ۱۲۰ درجه دارد، تنها یك نقطهٔ T پیدا می‌شود که، ازآن‌جا، هرسه ضلع مثلث بهزاویهٔ ۱۲۰ درجه دیده می‌شوند و، درضمن، مجموع فاصله‌های نقطهٔ T از سه راس مثلث، از مجموع فاصله‌های هرنقطهٔ دیگری از صفحه تا سه راس، کوچکتر است.

۷۴. a، b، c و d را طول ضلع‌های متوالی یك چهارضلعی می‌گیریم. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی از: a) $\frac{1}{2}(ab+cd)$؛ b) $(\frac{1}{2}ac+bd)$ تجاوز نمی‌کند.

۷۵. روی هرضلع متوازی‌الاضلاع، نقطه‌ای انتخاب کرده‌ایم. ثابت

کنید، اگرمساحت چهارضلعی باراس‌های دراین نقطه‌ها، برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌وقت، دست‌کم یکی ازقطرهای چهارضلعی، با یکی ازضلع‌های متوازی‌الاضلاع، موازی است.

۷۶. نقطهٔ K روی قاعدهٔ ذوزنقهٔ $ABCD$ داده شده است. نقطهٔ M را روی قاعدهٔ دیگر CD درکجا انتخاب کنیم تا مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلث‌های AMB و CKD به دست می‌آید، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

۷۷. آیا ۷ نقطه را می‌توان روی صفحه طوری قرارداد، به نحوی که بین هرسه تا ازآن‌ها، دونقطه بهفاصلهٔ واحد وجود داشته باشد؟

۷۸. تصویر یك شکل مسطحه، برهرخط راستی که درصفحهٔ شکل واقع باشد، ازواحد تجاوز نمی‌کند. آیا درست است که، این شکل را، می‌توان دردایره‌ای بهقطر a) ۱؛ b) ۱/۵ جا داد؟

۷۹. متوازی‌السطوحی درفضا جابه‌جا می‌شود. ثابت کنید، «سایهٔ» آن (یعنی تصویر قائم آن برصفحهٔ افقی)، در موقعیتی دارای حداکثر مساحت است که، سه راس دلخواه ازمتوازی‌السطوح، روی یك صفحهٔ افقی واقع باشند.

۸۰. نقطه‌ای درروی سطح زمین درعرض جغرافیایی φ قرار دارد ($0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$). چه رابطه‌ای بین زمان T کوتاه‌ترین روز این نقطه و φ وجود دارد؟ زمین را می‌توان کره‌ای بهحساب آورد که، محور دوران آن، با صفحهٔ حرکت زمین به دور خورشید، زاویهٔ معلومی برابر α می‌سازد.

۸۱. ۳۰۰ نفر، یك مستطیل ۱۰ × ۳۰ تشکیل داده‌اند (۳۰ نفر در هر ردیف و ۱۰ نفر در هرستون). از هر ردیف بلندقدترین را انتخاب می‌کنیم؛ معلوم شد در بین ۱۰ نفری که انتخاب کرده‌ایم، پتروف از همه کوتاه‌تر است. بعد، از هرستون، کوتاه قدترین را انتخاب می‌کنیم؛ دربین این ۳۰ نفر، ایوانف از همه بلندتر ازآب درآمد. کدام بلندترند: پتروف یا ایوانف؟

۸۲. عددهای ۱، ۲، ...، ۸۱ را درجدول ۹ × ۹ طوری قرار داده‌ایم

که، درهرسطر، عددها به ردیف صعودی‌اند. چه مجموع حداکثر و چه مجموع حداقل را می‌توان درستون پنجم به‌دست آورد؟

۸۳. عددهای درست غیرمنفی را درجدول $n \times n$ قرار داده‌ایم. می‌دانیم، اگر درخانهٔ محل برخورد یك سطر ویك ستون عدد صفر قرار گرفته باشد، آن‌وقت مجموع $2n-1$ عدد واقع دراین سطر واین ستون، از n کمتر نیست. ثابت کنید، مجموع همهٔ n^2 عدد، از $\frac{1}{2}n^2$ کمتر نیست.

۸۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$x_1+\sqrt{x_2}=1,\quad x_2+\sqrt{x_3}=1,\quad \ldots,$$
$$x_8+\sqrt{x_9}=1,\quad x_9+\sqrt{x_1}=1$$

۸۵. دونفر باهم بازی می‌کنند. جلو آن‌ها، دو کوپهٔ چوب کبریت وجود دارد. یکی‌از آن‌ها، یکی ازکوپه‌های چوب کبریت را کنارمی‌گذارد وکوپهٔ باقی‌مانده را به دو بخش تقسیم می‌کند. بعد دومی، یکی ازکوپه‌ها را کنار می‌زند وکوپهٔ دیگر را به دو بخش تقسیم می کند و غیره. کسی می‌بازدکه نتواند حرکت نوبتی خودرا انجام دهد، یعنی درهربخش، تنها یك چوب کبریت وجود داشته باشد. اگر درابتدا، دریکی از کوپه‌ها ۱۶ چوب کبریت و در دیگری ۸۸ چوب کبریت باشد وبازی راآگاهانه‌انجام دهند، کدام یك برنده می‌شود: آن‌که بازی را آغازمی‌کند یا رقیب او؟

۸۶. چند کوپه سنگ‌ریزه داریم. دونفر باهم بازی می‌کنند. هر بازی‌کن، درنوبت خود، هرکوپه‌ای راکه بیش از یك سنگ‌ریزه دارد، به دوکوپهٔ کوچکتر تقسیم می‌کند. بازی تا آنجا ادامه پیدا می‌کند که، همهٔ کوپه‌ها، تنها از یك سنگ‌ریزه تشکیل شده باشند. کسی بازی را می‌برد که‌آخرین حرکت را انجام‌داده‌باشد. کسی‌که بازی را آغازمی‌کند، چگونه باید بازی‌کند، به‌شرطی‌که، درابتدا، درهرکوپه از ۸۰ تا ۱۲۰ سنگ‌ریزه وجود داشته باشد؟

۸۷. بین n سکه، که درظاهر خود هیچ فرقی باهم ندارند، احتمالا یك یا دوسکهٔ تقلبی وجود داردکه وزن‌آن‌ها با دیگران یکی نیست (ولی ممکن است حتی یك‌سکهٔ تقلبی هم وجود نداشته‌باشد؛ واگر دوسکهٔ تقلبی دربین آن‌ها باشد، این دوسکه دارای یك‌وزن هستند). می‌خواهیم با سه‌بار استفاده از ترازو (بدون استفادهٔ ازوزنه) روشن‌کنیم: آیا سکه‌های تقلبی دربین n سکه وجود داردیانه، ودرصورت وجود، سکهٔ‌تقلبی سنگین‌تراست یا سکهٔ‌واقعی؟ چگونه می‌توان این عمل را انجام داد، اگر a) $n=8$؛ b) n برابر هرعدد درست بزرگتراز ۸ باشد؟

۸۸. N دوست دریك زمان، از N خبرتازه اطلاع پیدا کردند، در ضمن هرنفردرست ازیك خبرتازه آگاه شد. آن‌ها با تلفن، خبرها را باهم مبادله کردند. هرتلفن یك ساعت طول‌کشید و، ضمن آن، هرخبر تازه‌ای ردوبدل شد. چند ساعت طول می‌کشد تا همه از همهٔ خبرها آگاه شوند؟ جواب را در حالت‌های a) $N=64$؛ b) $N=55$؛ c) $N=100$ پیدا کنید.

مساله‌های المپیاد دهم شهرها، دور بهاری

(مارس سال ۱۹۸۸)

مساله‌های ۱ تا ۷ برای دانش‌آموزان کلاس‌های ۷ و ۸ و مساله‌های ۸ تا ۱۲، برای کلاس‌های ۹ و ۱۰.

۱. a، b و c، عددهایی درست‌اند. ثابت کنید، به شرط $a+b=c$، عدد $a^4+b^4+c^4$، برابر است با دوبرابر مجذور یک‌عدد درست.

۲. مثلث ABC مفروض‌است. قرینه‌های خط راست AB و BC نسبت به AC، یکدیگر را درنقطهٔ K قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط راست BK، ازمرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} (x_3+x_4+x_5)^5=3x_1 \\ (x_4+x_5+x_1)^5=3x_2 \\ (x_5+x_1+x_2)^5=3x_3 \\ (x_1+x_2+x_3)^5=3x_4 \\ (x_2+x_3+x_4)^5=3x_5 \end{cases}$$

۴. وزنه‌هایی با وزن‌های ۱، ۲، ۴، ... دراختیارداریم (وزن هروزنه، توانی از ۲ است)، درضمن دربین آن‌ها، ممکن است وزنه‌های برابر هم وجود داشته باشد. در دوکفهٔ ترازو، وزنه‌هایی را قرارداده‌ایم، به‌نحوی

که ترازو درتعادل بایستد. می‌دانیم درکفهٔ سمت چپ، همهٔ وزنه‌ها با هم فرق دارند. ثابت کنید، تعداد وزنه‌های کفهٔ سمت‌راست، ازتعداد وزنه‌های کفهٔ سمت چپ کمتر نیست.

۵. آیا می‌توان صفحه را با دایره‌ها طوری پوشاند که، ازهر نقطه، درست ۱۹۸۸ دایره بگذرد؟

۶. واژه‌های شامل دو حرف A و B را، پشت سرهم، در نظر می‌گیریم: واژهٔ اول «A»، واژهٔ دوم «B» و واژهٔ k ام را به این ترتیب به‌دست می‌آوریم که ($k-1$)امین واژه را درسمت‌راست واژهٔ ($k-2$)ام بنویسیم، چندواژه اول این دنباله، چنین می‌شود:

«A»، «B»، «AB»، «BAB»، «$ABBAB$»

آیا ممکن است، دراین دنباله، با واژه‌ای «متناوب» برخورد کنیم، **یعنی** واژه‌ای به‌صورت $PP...P$ که، در آن، P واژه‌ای باشدکه، دست کم،دوبار تکرار شده باشد؟

۷. زاویهٔ قائمه را به بی‌نهایت خانهٔ مربعی تقسیم کرده‌ایم. ردیف خانه‌هایی را درنظر می‌گیریم که با یکی از ضلع‌های زاویه، موازی‌اند (ردیف‌های «قائم» و ردیف‌های «افقی»). آیا می‌توان درهرخانه یک عدد طبیعی نوشت، به‌نحوی‌که درهرردیف، همهٔ عددهای طبیعی و، از هر کدام یکبار آمده باشند؟

۸. دو قاعدهٔ ذوزنقه چه نسبتی داشته باشند تا خط راستی وجود داشته باشدکه از۶نقطهٔ برخوردآن باقطرها، ساق‌ها وامتدادهای دوقاعده، ۵ پاره‌خط راست برابر به دست آید؟

۹. چندجمله‌ای با ضریب‌های درستی در اختیار داریم که ۱ و ۲ ریشه‌های آن‌هستند. ثابت کنید، می‌توان ضریبی ازچندجمله‌ای را پیداکرد که از ۱ — کوچکتر باشد.

۱۰. کارت‌هایی دراختیار داریم‌که، روی هرکدام از آن‌ها، یکی‌از شماره‌های ۱ تا ۳۰ نوشته شده است (ممکن است شماره‌ای تکرار شده باشد). هردانش‌آموزی، یکی ازکارت‌ها را برمی‌دارد. معلم می‌تواند از گروهی دانش‌آموزان، شمارهٔ‌کارت را بپرسد واز آن‌ها بخواهد تا دست

خودرا بلندکنند (ممکن‌است، این گروه شامل یک‌نفر باشد). معلم دست کم ازچندگروه باید سئوال کند تا شمارهٔ کارت‌های همهٔ دانش‌آموزان را بداند؟ (ضرورتی ندارد، تعداد دانش‌آموزان، ۳۰ باشد.)

۱۱. مکعبی $۲۰\times۲۰\times۲۰$ از ۲۰۰۰ قوطی کبریت $۱\times۲\times۲$ تشکیل شده‌است. ثابت کنید، می‌توان آن را با سوزن طوری سوراخ کرد که سوزن، ازمکعب بگذرد، ولی به قوطی کبریت‌ها فرونرود.

۱۲. واژه‌هایی را درنظر می‌گیریم که با دو حرف A و B درست شده‌اند. نخستین واژه دراین دنباله «A» و kامین واژه از واژهٔ $(k-۱)$ام بااین قاعده به‌دست‌آمده است. هرحرف A به AAB وهرحرف B به A تبدیل می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که، هرواژه، به صورت زیر آغاز می‌شود و، درضمن، دنباله‌ای نامتناهی ازحرف‌ها به دست می‌آید.

$$AAB\,AAB\,AAAB\,AAB\,AAAB\dots$$

a) درکجا ازاین دنباله، به هزارمین حرف A برخورد می‌کنیم؟

b) ثابت کنید، این دنباله نامتناوب است.

سیاههٔ نمادها

N : مجموعهٔ عددهای طبیعی

Z : مجموعهٔ عددهای درست

R : مجموعهٔ عددهای حقیقی

$a\in A$: عضو a، متعلق به مجموعهٔ A است

$A\bigcap B$: اشتراک مجموعه‌های A و B

$A\bigcup B$: اجتماع دو مجموعهٔ A و B

$\overline{a_1a_2\cdots a_n}$: عدد nرقمی دردستگاه دهدهی

$a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$: (a نسبت به مدول m با b هم نهشت است) باقی‌مانده‌های تقسیم دوعدد درست a و b بر m، یکی است؛ تفاضل $a-b$ بر m بخش‌پذیر است.

$n!$: (فاکتوریل n) حاصل‌ضرب $۱\times۲\times\dots\times n$؛ $۰!=۱!=۱$

C_n^k : ضریب بسط دو جمله‌ای برابر با $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$[x]$: بخش درست عدد x (بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نمی‌کند).

$\max\limits_i x_i=\max\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$: بزرگترین عدد ازبین عددهای $x_1,x_2,\dots,x_n$

$\min\limits_i x_i=\min\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$: کوچکترین عدد از بین عددهای

$x_1، x_2، \dots، x_n$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{1 \leqslant x \leqslant n} x_i$: مجموع $x_1 + x_2 + \dots + x_n$

AB : پاره‌خط راست با دوانتهای A و B ؛ طول این پاره‌خط، نیم خط راست به مبداء A که از B می‌گذرد؛ خط راستی که از دونقطهٔ A و B می‌گذرد.

$AB : CD = \dfrac{AB}{CD}$: نسبت طول‌های دوپاره‌خط راست AB و CD

$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$: بردار به مبداء A وانتهای B

$\mathbf{u.v} = \mathbf{uv}$: حاصل‌ضرب اسکالر (عددی) دوبردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$

$\widehat{ABC} = (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$: زاویهٔ ABC ، مقداراین زاویه (مقدارزاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$)

$\overset{\frown}{AB}$ $(\overset{\frown}{AMB})$: کمانی بـا دو انتهای A و B (که از نقطـهٔ M می‌گذرد)

S_{ABC} (S_{ABCD}) : مساحت‌مثلث ABC (مساحت‌چهارضلعی $ABCD$).

برخی از اثرهای مترجم این کتاب

I. ریاضیات خالص

۱. روش‌های جبر (دو جلد تألیف)
۲. دوره اختصاصی جبر مقدماتی
۳. مثلثات مستقیم‌الخط و کروی
٤. هندسه غیراقلیدسی
۵. انعکاس
٦. نامساوی‌ها
۷. ورودی به منطق ریاضی
۸. روش مختصاتی و هندسهٔ چهار بعدی
۹. نظریهٔ مجموعه‌ها
۱۰. استقراء ریاضی
۱۱. مثلثات
۱۲. جبر، از آغاز تا پایان
۱۳. ماکزیمم و می‌نیمم بدون استفاده از مشتق (با آقای عادل)
۱٤. جبر برداری (با آقای عادل)
۱۵. روش‌های مثلثات (با آقای فیروزنیا)
۱٦. عبارت‌های متقارن در جبر مقدماتی (تألیف)
۱۷. قدرمطلق در حوزهٔ عددهای حقیقی (تألیف)
۱۸. بخش درست عدد (تألیف)
۱۹. تابع‌های متناوب (تألیف)
۲۰. روش استقرای ریاضی (تألیف)
۲۱. بسط دو جلمه‌ای (تألیف)
۲۲. ورودی به آنالیز ترکیبی (تألیف)
۲۳. ورودی به نظریهٔ احتمال (تألیف)
۲٤. تربیع دایره و غیرجبری بودن عدد پی
۲۵. هندسهٔ پرگار
۲٦. بخش‌پذیری عددها و مفهوم آلگوریتم
۲۷. نقطه‌های بی‌حرکت
۲۸. محاسبهٔ برداری (تألیف)

۲۹. همه چیز دربارهٔ سه جمله‌ای درجه دوم (تألیف)
۳۰. مسیر ریاضات جدید
۳۱. نظریه اعداد (با آقای قوام‌زاده)
۳۲. تقارن در جبر
۳۳. نظریهٔ ساختمان‌های هندسی
۳٤. آنالیز ریاضی (در سه جلد، با آقای امامی)
۳۵. ورودی به نظریهٔ مجموعه‌ها
۳٦. درباره حد
۳۷. منحنی‌ها در فضا
۳۸. ریاضیات محدود

II. مساله‌ها

۳۹. مسائل مسابقات ریاضی
٤۰. مسائل کنکورهای شوروی
٤۱. گزیده‌ای از مساله‌های دشوار ریاضی
٤۲. مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی
٤۳. ۲۵۰ مسالهٔ حساب
٤٤. آمادگی برای المپیادهای ریاضی
٤۵. المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف
٤٦. المپیادهای بین‌المللی (با آقای عادل)
٤۷. المپیادهای ریاضی در مجارستان (با آقای عادل)
٤۸. المپیادهای ریاضی در شوروی
٤۹. ۱۷۵ مسالهٔ منطقی
۵۰. مسائل تاریخی ریاضیات
۵۱. تصاعدها و لگاریتم در مساله‌های عملی
۵۲. مساله‌های ریاضی، آسان ولی...
۵۳. المپیادهای ریاضی در آمریکا (با آقای عادل)
۵٤. گزیده‌ای از مساله‌ها و قضیه‌های ریاضیات مقدماتی (با آقای عادل)

III. ریاضیات کاربردی

۵۵. آنالیز برداری و نظریهٔ میدان‌ها
۵٦. ریاضیات کاربسته (تألیف و ترجمه)

IV. ریاضیات به زبان ساده و سرگرمی‌های ریاضی

۵۷. داستان مجموعه‌ها
۵۸. داستان‌های ریاضی
۵۹. بازی با بی‌نهایت
٦۰. سرگرمی‌های جبر
٦۱. سرگرمی‌های هندسه
٦۲. سرگرمی‌های ریاضی
٦۳. در قلمرو ریاضیات
٦٤. اندیشهٔ ریاضی
٦۵. درپی فیثاغورث
٦٦. سرگرمی‌های توپولوژی

V. تاریخ ریاضیات، فلسفهٔ ریاضی و آموزش ریاضی

٦۷. ریاضیات، محتوی، روش و اهمیت آن (تاکنون دو جلد)
٦۸. اواریست گالوا، ریاضی‌دان و انقلابی فرانسوی
٦۹. من ریاضی‌دانم
۷۰. پویایی ریاضیات
۷۱. لباچوسکی و هندسهٔ نااقلیدسی
۷۲. آفرینندگان ریاضیات عالی
۷۳. خلاقیت ریاضی
۷٤. هندسه در گذشته و حال
۷۵. تاریخ حساب
۷٦. آنالیز ریاضی
۷۷. ریاضیات در شرق
۸۷. لگاریتم (تاریخ استدلالی لگاریتم)

VI. برخی کتاب‌های دیگر

۷۹. سرگذشت حرکت
۸۰. نظریهٔ نسبیت در مساله‌ها و تمرین‌ها
۸۱. علم، جامعه و انسان (در سه جلد)
۸۲. ژان هوس و جنبش هوسیسم (تألیف)
۸۳. جنبش مزدک و مزدکیان (تألیف)
۸٤. یک روز زندگی پسرک قبطی
۸۵. داستان‌های علمی
۸٦. اخلاق و انسان

نشر توسعه منتشر کرده است:

۱ـ روش‌های مثلثات
تألیف: پرویز شهریاری ـ احمدفیروزنیا (با همکاری نشر فردوس)
۲ـ مسائل ریاضی المپیادهای اتحاد شوروی
ترجمهٔ: پرویز شهریاری
۳ـ تحول عصر (مسائل ایران و جهان معاصر)
تألیف: موسوی خوزستانی
٤ـ مکانی به وسعت هیچ (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز
۵ـ الگویی برای توسعه اقتصادی ایران
تألیف: دکترابراهیم رزاقی (استاد اقتصاد دانشگاه تهران)
٦ـ ره آورد سرمایه‌داری تجاری ایران
تألیف: موسوی خوزستانی
۷ـ حلقهٔ نفوذناپذیر گرگ‌های خاکستری (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز

کتاب‌های زیر چاپ:

۱ـ منشور توسعه (کتاب توسعه)
مجموعه مقالات و نظریات در حوزهٔ مسائل فرهنگی، اجتماعی و اقتصادیّ توسعه
توسط جمعی از نویسندگان
۲ـ دردناک‌ترین داستان عالم (مجموعه داستان‌های کوتاه)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز
۳ـ اقتصاد توسعه
تألیف: دکتر ابراهیم رزاقی
٤ـ در انتهای دراز دره‌ای بی‌نام و نشان (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز