

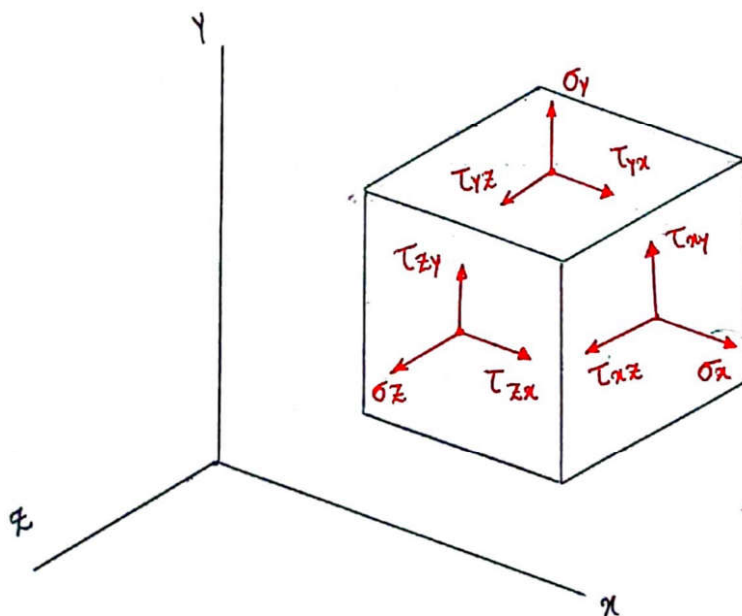
* جزوه درس مقاومت مصالح 1 و 2 *

Channel: t.me/mech-mentor2023

سرفصل‌ها:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| 1- مقدمه و مفهوم تنش | 6- برش |
| 2- تنش و کرنش محوری | 7- دایره‌ی مور |
| 3- پیچش | 8- خیزش تیرها |
| 4- خمش خالص | 9- ستون و گمانش |
| 5- خمش تیرها | 10- روش‌های انرژی |

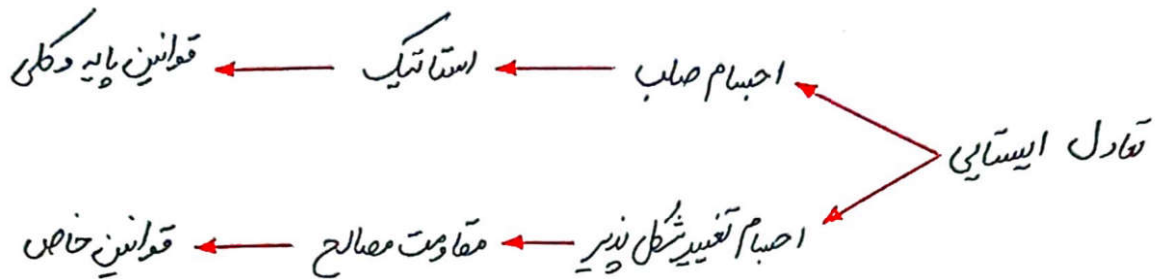
منبع: کتاب مقاومت مصالح بی‌بر و جانستون



مؤلف: محمدرضا امیدوار عبد الرزاق

فصل اول: مقدمه و مفهوم تنش

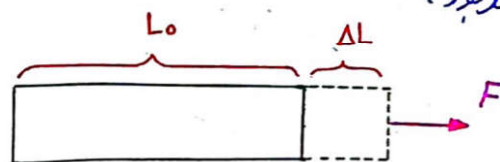
مهمترین مفهوم این درس، تعادل یا ایستایی و وابستگی ایستایی دو حالت دارد.



پس در مقاومت مصالح همانند درس استاتیک، ایستایی بررسی می‌شود ولی با این تفاوت که دیگر اجسام صلب نیستند و در اصل اهداف درس مقاومت مصالح به صورت زیر است:

- 1- تحت یک بارگذاری معین، تغییر شکل به چه صورت خواهد بود؟
- 2- جسم تا چه حد می‌تواند نیرو تحمل کند قبل از آنکه بشکند و تخریب شود؟

در کل تغییر شکل به دو صورت خواهد بود:

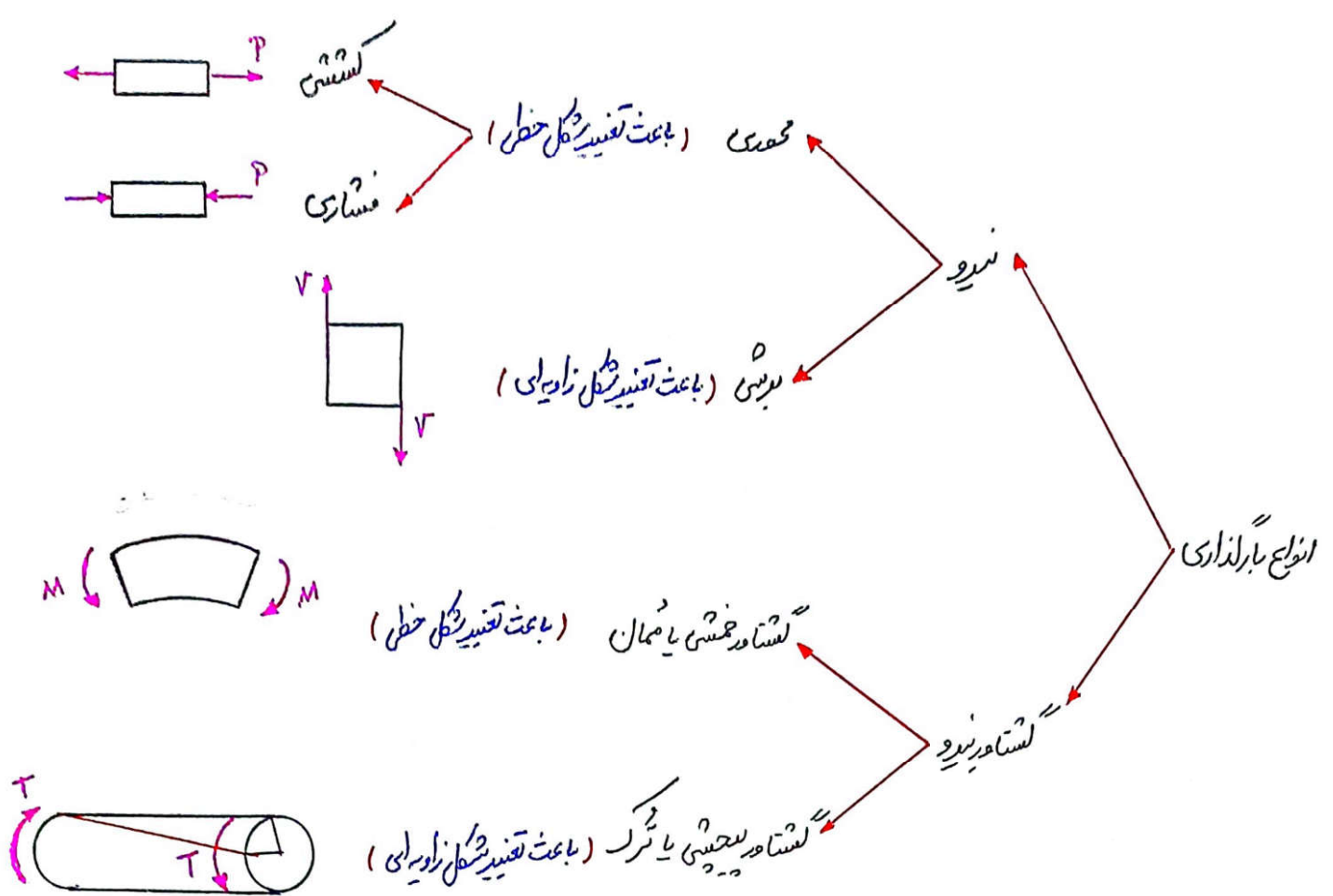


1- تغییر شکل خطی



2- تغییر شکل زاویه‌ای

بارگذاری‌ها را می‌توان طبق این تغییر شکل‌ها به دو دسته تقسیم بندی کرد.



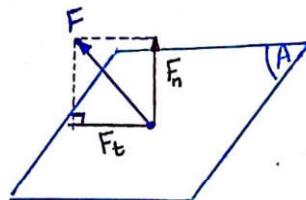
البته بجای بررسی بارگذاری ها، اثر آنها یعنی تنش (stress) بررسی می شود، تنش به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{مساحت}} \quad (N/m^2 \text{ یا } Pa)$$

طبق تغییر شکل که داریم، تنش ها دو دسته هستند.

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad \text{تنش نرمال}$$

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad \text{تنش برشی}$$



واحد تنش نیز مانند فشار، پاسکال است (فشار نوعی تنش نرمال است)

البته در مقاومت مصالح مرتبه ی تنش بزرگ است و به سبب این از MPa و GPa استفاده می شود.

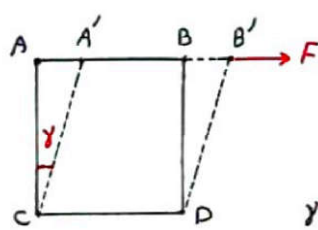
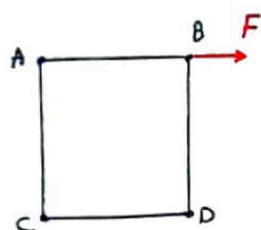
$$1 \text{ KPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2, \quad 1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2, \quad 1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

پس در مقاومت مصالح بارگذاری به فرم تنش بررسی می‌شود و تغییر شکل نیز به صورت بی‌بعد شده بررسی می‌شود که

این تغییر شکل بی‌بعد را کرنش (Strain) می‌گویند و به دو صورت است:



$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad \text{چون } L \text{ مقفیه است} \quad \epsilon = \frac{\delta}{L} \quad \text{فرض ساده } L_0 \text{ طول اولیه را داریم}$$



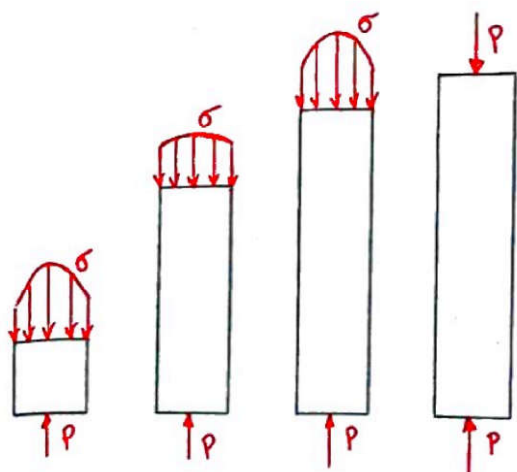
$$\tan \gamma = \frac{AA'}{AC}$$

$$\gamma \ll 1 \Rightarrow \tan \gamma = \gamma \quad \text{کرنش زاویه ای}$$

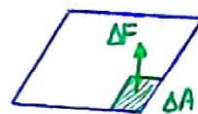
نکات مهم

۱- تنش میانگین

وقتی یک ماده تحت نیروی محوری باشد، توزیع تنش در آن به صورت زیر است:



$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



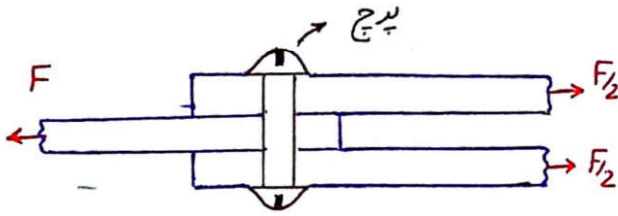
$$\Rightarrow dF = \sigma dA$$

$$F = \int_A \sigma dA$$

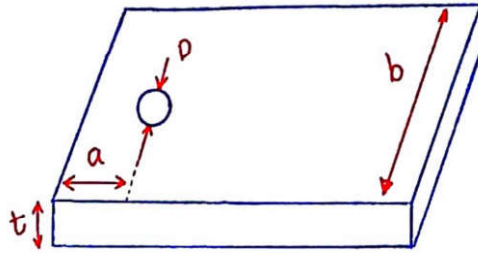
اگر سطح مقطع A در نزدیکی محل بارگذاری باشد، توزیع تنش یکپارچه نبوده و در محل نیروی متمرکز مقدار تنش ماکزیم خواهد بود. ولی طبق اصل سن و پال هرچه سطح مقطع مورد نظر از محل اعمال نیروی متمرکز دورتر باشد، میزان تنش را یکپارچه فرض کرد.

$$\sigma = \sigma_{ave} \Rightarrow F = \int \sigma_{ave} dA \Rightarrow F = \sigma_{ave} A$$

2- برش در برچ یا پیچ

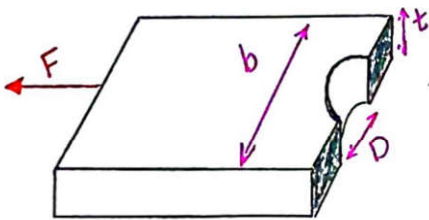


صفحه بالا و پایین



در اینجا چند حالت خرابی خواهیم داشت:

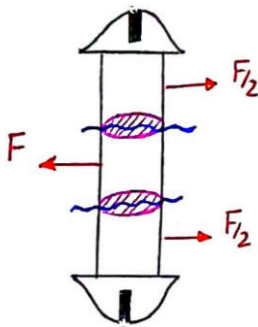
حالت اول: پارگی صفحه از ناحیه اطراف سوراخ



$$\sigma = \frac{F}{(b-D)t}$$

البته مقدار تنش از این منفرجه بیشتر است که در صورت محاسبه تنش برچ می شود.

$$\sigma = \frac{KF}{(b-D)t}$$

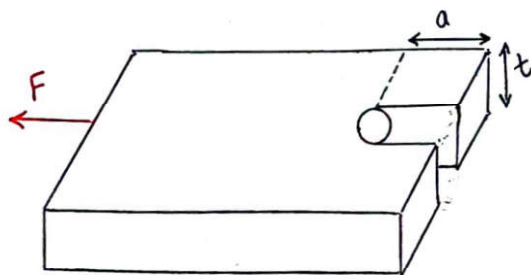


حالت دوم: بریده شدن پیچ یا برچ

$$\tau = \frac{F/2}{\pi D^2/4}$$

حالت سوم: جابجایی تکیه ای از صفحه

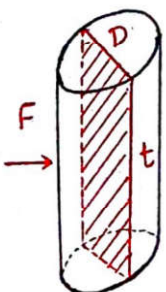
در این دو سطح درگیر می شود.



$$\tau = \frac{F}{2at}$$

حالت چهارم: لهیگی Bearing یا تنش تکیه گاهی که باعث گسار شدن تکیه گاه پیچ و لق زدن آن می شود:

این تنش از پیچ تکیه گاه پس و پیش می شود و چون مساحت منفرجه است برابر سادگی مساحت نرمال را در نظر می گیریم.

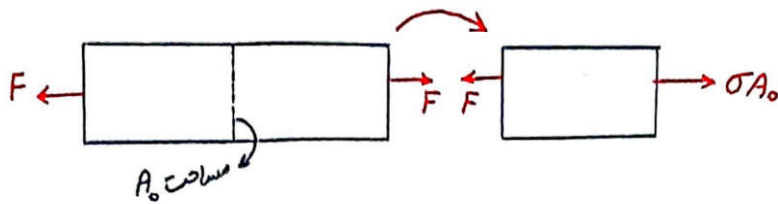


$$\sigma_b = \frac{F}{Dt}$$

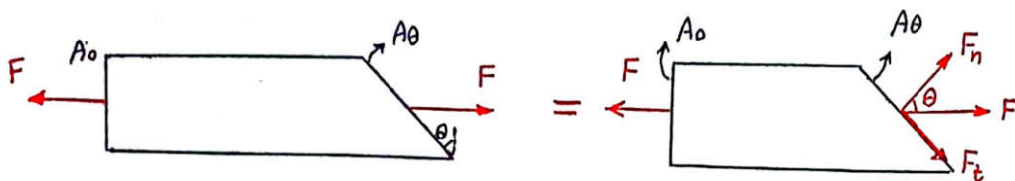
تنش تکیه گاهی

3- تنش در صفحات مایل

یکی عضو وقتی تحت بار محوری قرار دارد، اگر صفحه را عمود بر راستای نیرو فرض کنیم فقط تنش نرمال خواهیم داشت



حال اگر مقطع مایل باشد در این صورت تنش برشی نیز خواهیم داشت.



$$\cos \theta = \frac{A_0}{A_\theta} \Rightarrow A_\theta = \frac{A_0}{\cos \theta}, \quad F_n = F \cos \theta, \quad F_t = F \sin \theta$$

$$\sigma = \frac{F_n}{A_\theta} = \frac{F \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{F}{A_0} \cos^2 \theta, \quad \tau = \frac{F_t}{A_\theta} = \frac{F \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{F}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

اگر $\theta = 0$ باشد فقط تنش نرمال داریم $\theta = 0 \rightarrow \sigma = \frac{F}{A_0} = \sigma_m$

این حالت ماکزیمم تنش نرمال را خواهد داشت. برای تنش برشی نیز ماکزیمم حالت در 45° رخ می دهد.

$$\tau = \frac{F}{A_0} \sin \theta \cos \theta = \frac{F}{2A_0} \sin 2\theta \xrightarrow{\theta=45^\circ} \tau_m = \frac{F}{2A_0} = \frac{1}{2} \sigma_m$$

تنش نرمال در حالتی که تنش برشی ماکزیمم باشد برابر است با: $\sigma' = \frac{F}{A_0} \cos^2 45^\circ = \frac{F}{2A_0}$

پس دو زاویه مهم ۱- دو صفحه می داریم.

در این حالت تنش نرمال ماکزیمم حالت است و اگر جسم $\theta = 0 \rightarrow \sigma_m = \frac{F}{A_0}, \tau = 0$

به تنش نرمال حساس باشد (مانند اصبه آتورد) در این صفحه خواهد شکست

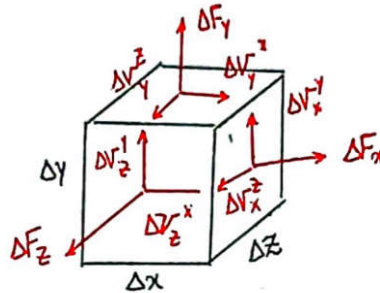
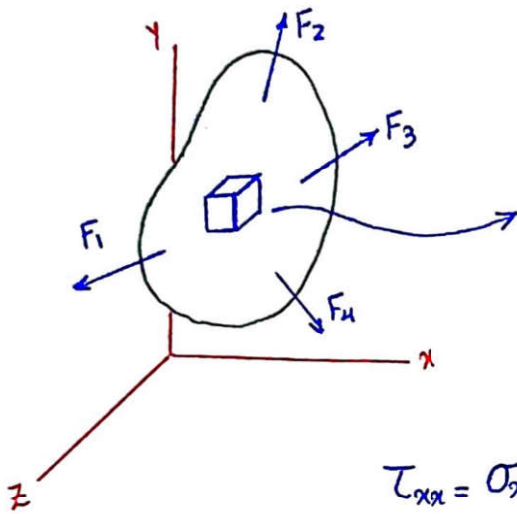
در این حالت تنش برشی ماکزیمم حالت است و اگر جسم به تنش برشی حساس باشد (مانند اصبه زخم) در این صفحه خواهد شکست $\theta = 45^\circ \rightarrow \tau_m = \sigma' = \frac{F}{2A_0}$

پس براساس شکست (crack) میتوان مواد را به دو دسته ترد و نرم تقسیم کرد.

مواد ترد در بارگذاری محوری تنش بالایی را تحمل میکنند ولی کرنش کمی دارند و در زاویه $\theta = 0^\circ$ می شکستند
مواد نرم نیز تنش کمتری را تحمل میکنند ولی کرنش زیادی دارند و در زاویه $\theta = 45^\circ$ می شکستند

4- مؤلفه های تنش

وقتی بارگذاری روی یک جسم در حالت سه بعدی و در تمام جهات باشد، در این صورت در راستاهای مختلف تنش خواهیم داشت.



و میتوان برای این لایه تنش ها را تعریف کرد.

$$\tau_{xx} = \sigma_x = \frac{\Delta F_x}{\Delta y \Delta z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\Delta F_{xy}}{\Delta y \Delta z}, \quad \tau_{xz} = \frac{\Delta F_{xz}}{\Delta y \Delta z}$$

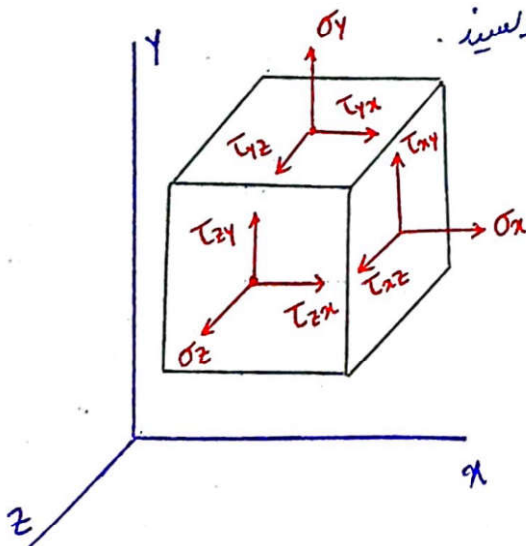
پس τ_{ij} یعنی تنش که در راستای j است و در صفحه ای قرار دارد که بر راستای i عمود است (صفحه ijk)

τ_{xx} یا $\sigma_x \rightarrow$ تنش در صفحه yz در راستای x

$\tau_{xy} \rightarrow$ تنش در صفحه xz در راستای y

$\tau_{xz} \rightarrow$ تنش در صفحه xy در راستای z

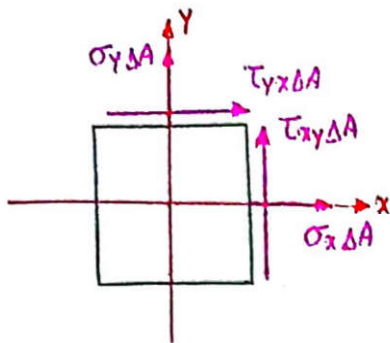
پس بدین شکل 9 مؤلفه تنش داریم که آن را به صورت ماتریس تنش نیز می نویسند.



$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma_x = \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y = \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z = \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

البته در اینجا انتظاری بود بین تنش‌های برشی برای مثال τ_{xy} و τ_{yx} رابطی باشد

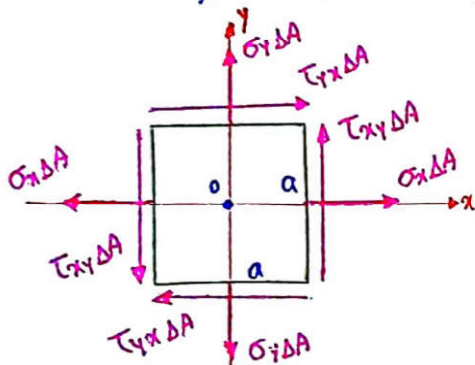
برای یافتن این رابطه سراغ تعادل در دویم و در صحنه xy برای مثال مورد نظر روابط را بنویسیم.



قرار دهیم: 1- جهت مثبت تنش منهای به بیرون است و به اصطلاح کششی است و اگر به داخل باشد فشاری و منفی خواهد بود.

2- جهت τ_{xy} رو به بالا و τ_{yx} رو به راست خواهد بود.

برای آنکه تعادل $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ برقرار باشد. در صفحات موازی تنش‌های خلاف جهت خواهیم داشت.



تنش‌های τ_{xy} و τ_{yx} در اینجا باعث ایجاد گویان تنش می‌شوند و برای داشتن تعادل داریم.

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow (\tau_{xy} \Delta A)a - (\tau_{yx} \Delta A)a = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

به همین صورت می‌توان نتیجه گرفت $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ و $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

مهمترین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که برش نمی‌تواند تنها در یک صفحه ای در رود.

از این نتیجه در فصل برش استفاده می‌شود.

پس اگر چه تا سواد تنش 9 مؤلفه دارد ولی چون 3 جهت مؤلفه‌ای آن با هم برابر هستند پس

فقط 6 مقدار مجهول خواهد داشت.

نظرات طراحی

همواره ای پس از تحلیل یک تنش و کرنش مشخص می‌شوند که این تنش را تنش شکست σ_u گویند.

در طراحی قطعات باید بتوانیم ماکزیمم تنشی را که قطعه تحمل می‌کند بدست آوریم.

برای مثال اگر یک قطعه تحت بارگذاری فرضاً تنش ماکزیمم 100 MPa را تحمل کند برای این قطعه باید

جنسی را انتخاب کنیم که تنش نهایی σ_u آن از 100 MPa بیشتر باشد.

نسبت این دو را ضریب ایمنی^۱ گویند.

$$F.S. = \frac{\text{تنش نهایی}}{\text{تنش مجاز}} = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}} > 1$$

اما اینکه تنش نهایی را چقدر بزرگتر از تنش مجاز بگیریم به عوامل زیر بستگی دارد.

۱- تغییرات احتمالی در خصوصیات سازه مانند سودگرمی شدن پلدار باید در نظر گرفته شود.

۲- تغییر بار محصورها در بارگذاری دینامیکی یا ضربه ای مهم است.

ضربه ای ایمنی کمتر $\rightarrow$ استاتیکی و ثابت $\rightarrow$ بارگذاری

ضربه ای ایمنی بالاتر $\rightarrow$ دینامیکی و متغیر

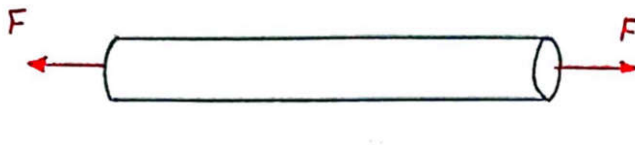
۳- تنش‌های محاسبه تقریبی هستند و احتمال دارد عواملی در نظر گرفته نشوند پس همواره تنش ماکزیممی را که می‌تواند در یک ضربه بزرگتر از $\frac{1}{2}$ ضربه ای باشد که آن ضریب تصحیح^۲ گویند.

۴- مقدار دفعات بارگذاری و زمان^۳ مؤثر هستند.

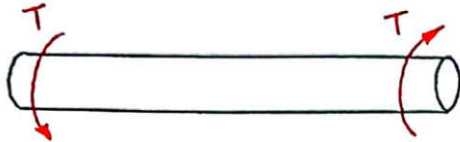
انواع خرابی

- شکست $\rightarrow$ تنش به یکباره به تنش نهایی می‌رسد و قطعه می‌شکند
- خستگی $\rightarrow$ تنش کمتر از تنش نهایی ولی به صورت تدریجی و در طولانی مدت خرابی می‌شود
- خزش $\rightarrow$ تنش ثابت در دمای بالا مانند اثر جالباسی روی لباس و زمان زیاد

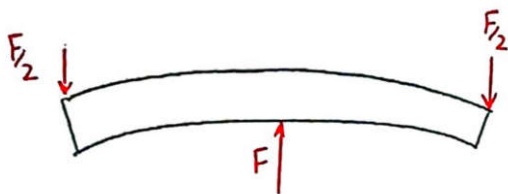
تکلمه : نام اعضا و وظیفه آنها



Rod $\Rightarrow$ شکل بارکوری
میله



Shaft $\Rightarrow$ شکل بچش
شفت



Beam $\Rightarrow$ شکل خمش
تیر

در مدل مفاهیم اصلی و مهم در مقاومت مصالح ! به صورت زیر است :

σ تنش نرمال

τ تنش برشی

ϵ کرنش خطی

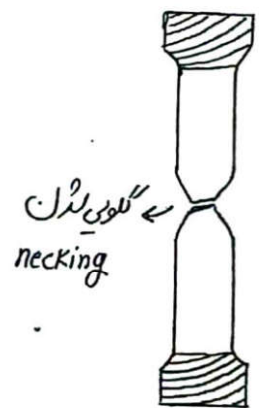
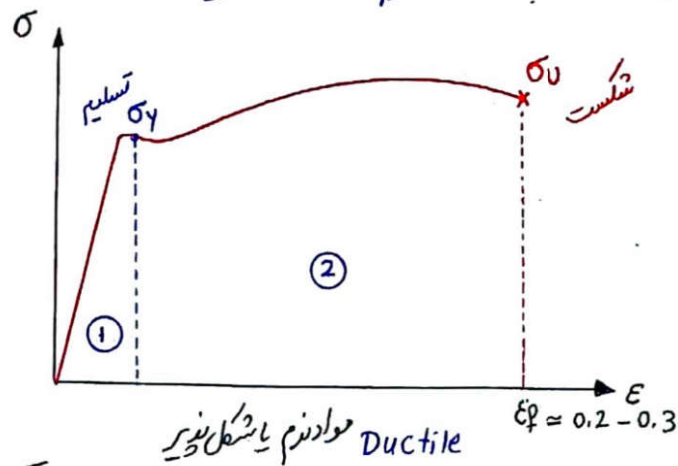
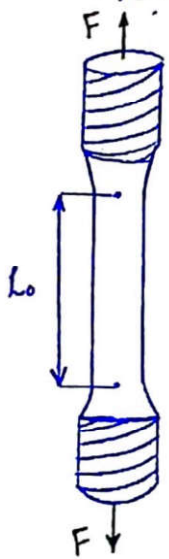
γ کرنش زاویه ای

F.S. ضریب اطمینان

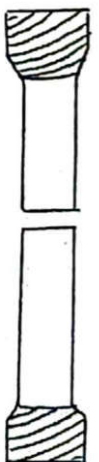
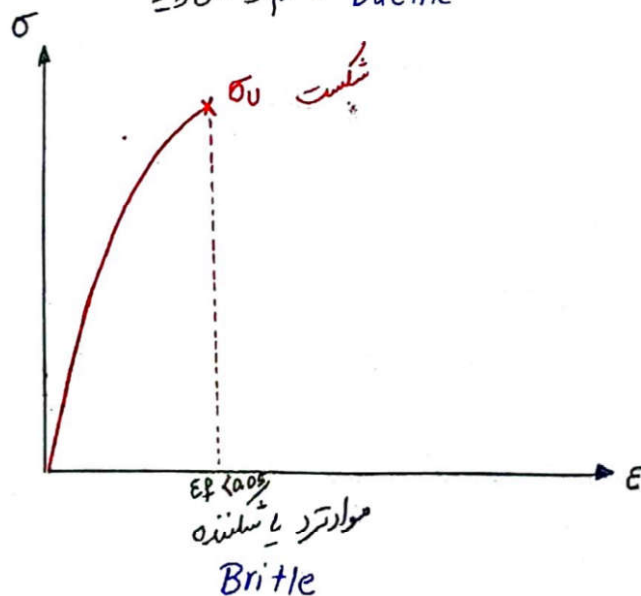
فصل دوم: تنش و کرنش محوری

با استفاده از نیروهای محوری در توالی روابط بین تنش نرمال و کرنش خطی را یافت. برای این کار یک قطعه را تحت نیروی محوری قرار داده و تنش و کرنش آن را ثبت می‌کنیم. خوبی تنش و کرنش نسبت به نیرو و تغییر شکل این است که مقدار تنش - کرنش نسبت به یک جنس و ماده مشخص، منحصر به فرد خواهد بود پس نمودار $\sigma - \epsilon$ متعلق از ابعاد است استاندارد مورد استفاده برای این آزمایش ASTM (استاندارد آزمایش تنش مواد آمریکا) می‌باشد.

در این استاندارد هر قطعه به صورت استاندارد با ابعاد مشخص ساخته می‌شود که بالا و پایین آن رزوه دارد تا به سه درفش‌های ماشین قرار بگیرد. سپس یک فن ثابت مانده و فن دیگر با سیستم هیدرولیک کشیده می‌شود و قطعه تحت کشش قرار می‌گیرد و البته این بارگذاری به آرامی صورت می‌گیرد تا به صورت سبب استاتیکی باشد. نمودار تقریبی حاصل از این تست برای مواد نرم به صورت زیر خواهد بود.



ناحیه الاستیک - کشسان → ناحیه الاستیک - غیر کشسان → ناحیه شکننده



تغییر شکلی که در مواد ایجاد می‌شود دو حالت هستند:

1- تغییر شکل گسسان یا الاستیک: این تغییر شکل قابل برگشت است یعنی اگر بارگذاری را برداریم، جسم به حالت قبلی برنگردد و دقیقاً مانند فنر عمل می‌کند. این ناحیه زمانی تمام می‌شود که تنش به مقدار تنش تسلیم σ_y برسد.

2- تغییر شکل دائمی یا پلاستیک: این تغییر شکل برگشت ناپذیر است یعنی اگر بارگذاری را برداریم، کمی از تغییر شکل در جسم باقی می‌ماند. این ناحیه زمانی شروع می‌شود که تنش از تنش تسلیم عبور کند.

در طراحی مطلوب ترین حالت آن است که قطعه تحت بارگذاری در ناحیه ی الاستیک باشد تا تغییر شکل آن دائمی نباشد. پس ضریب ایمنی را ابتدا با σ_y تعریف کنیم.

$$F.S. = \frac{\sigma_y}{\sigma_{all}}$$

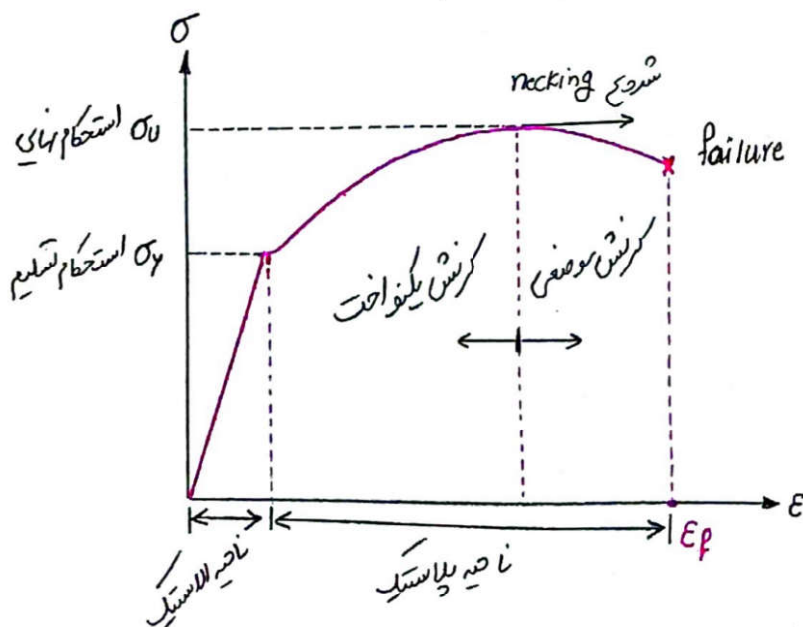
پس در کنار دانستن تنش نهایی، تنش تسلیم نیز مهم است.

مثال $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y : \text{Steel} = 400 \text{ MPa} \\ \sigma_u : \text{Steel} = 600 - 700 \text{ MPa} \end{array} \right.$

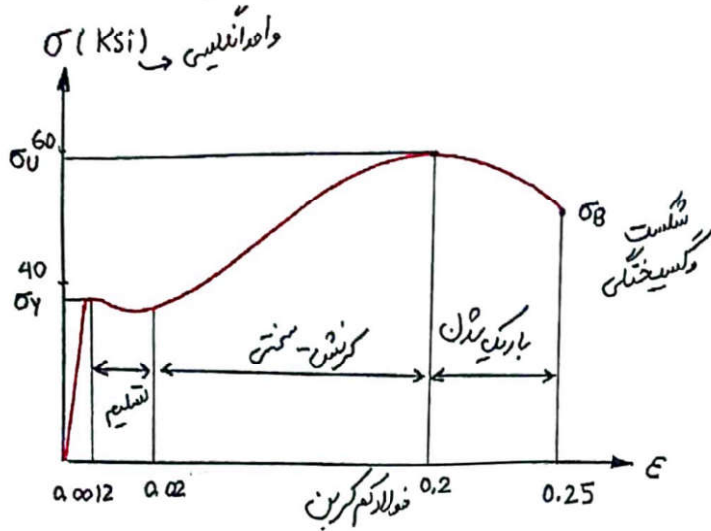
نکته ی مهم دیگر این است که مواد ترد، ناحیه ی پلاستیک کمتری دارند و کمی بعد از ناحیه ی الاستیک به شکست می‌رسند.

ولی مواد نرم قبل از شکست ابتدا یک تغییر شکل یکپوخت داریم ولی بعد از آن سطح مقطع آن کمتر شده

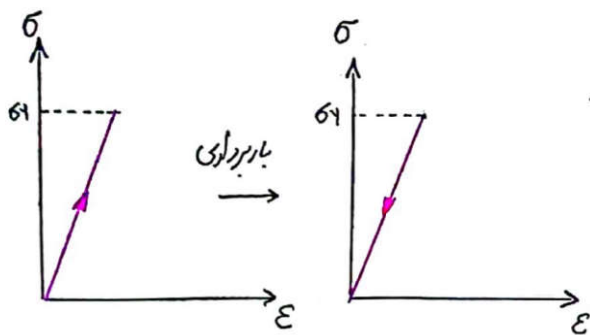
و دچار necking می‌شود. پس در آن گف مواد ترد بدون خیز می‌شکنند ولی مواد نرم قبل از شکست علائمی را نشان می‌دهند.



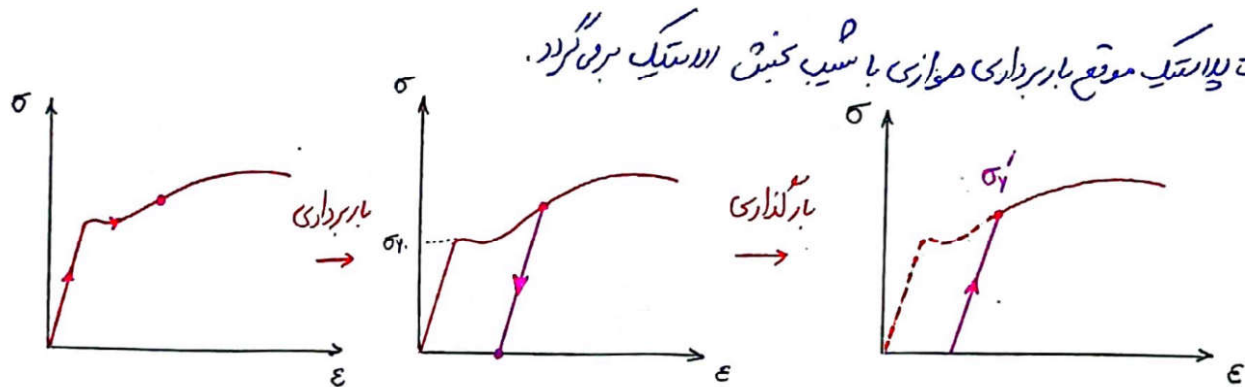
یکی از آلیاژهای مهم در صنعت فولاد کربن دار است که نمودار تنش - کرنش آن به صورت زیر است :



در این نمودار محل تنش تسلیم به خوبی دیده می‌شود پس از گذر از ناحیه الاستیک به ناحیه پلاستیک می‌رسیم. در این ناحیه اگر بار برداری کنیم مقداری تنش و کرنش داخل قطعه می‌ماند



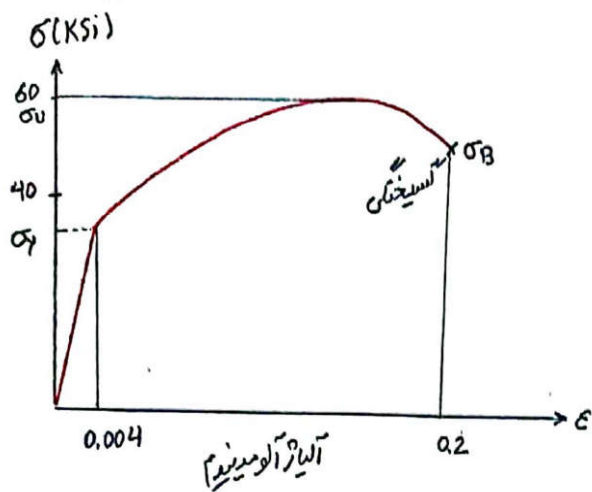
در حالت الاستیک با برداشتن بار، تغییر شکل دوباره به صفر می‌رود.



در حالت پلاستیک موقع بار برداری هواری با سبب بخشی الاستیک بر می‌گردد.

نکته جالب تر این است که دفعه بعدی که بارگذاری می‌کنیم روی خط جدید حرکت خواهد کرد و تنش تسلیم جدیدی ایجاد می‌شود که از تنش تسلیم قبلی بیشتر است یعنی ماده استحکام بیشتری پیدا می‌کند ولی ناحیه پلاستیک آن کمتر شده و به اصطلاح قوی‌تر می‌شود. این کار که تا ناحیه پلاستیک بارگذاری می‌کنند سپس بار برداری می‌کنند، کار سختی ناهیدیه می‌شود که باید استحکام بالاتر و تردتر شدن ماده می‌شود. این عمل را می‌توان در صنعت ساخت شمشیرهای فولادی دید که چندین بار شمشیر را با یک می‌زنند تا تغییر شکل پلاستیک داده و مستحکم شود.

آلیاژ مهم بعدی، آلیاژهای آلومینیوم است که در شکل زیر مقدار تنش-کرنش یک نوع آلیاژ آلومینیوم (دوره دوم) در نمودار



البته در این نمودار عمل تنش تسلیم تا حدود معلوم است

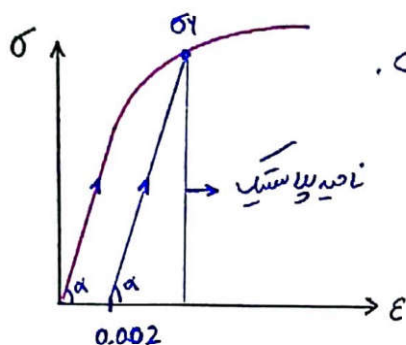
ولی روش دقیق‌تری برای یافتن تنش تسلیم

استفاده از روش انحراف offset است

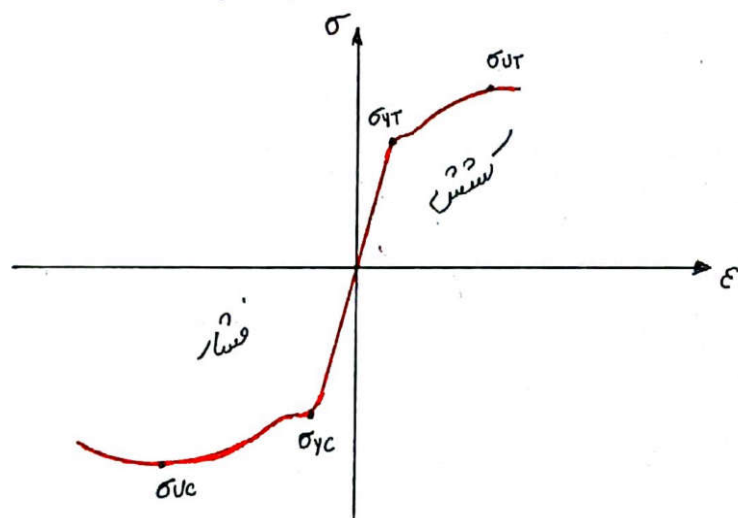
در این روش از محل $\epsilon = 0.002$ خط موازی با شیب اولیه

نمودار رسم می‌کنیم و هر کجا منتهی σ - ϵ را قطع کند، آن نقطه، پایین ناحیه الاستیک است.

این روش برای مواد تردتری مانند چدن و بتن نیز مناسب است.



تکته‌ی بعدی رسم نمودار تنش-کرنش در حالت فشاری است که در این حالت σ و ϵ منفی هستند.



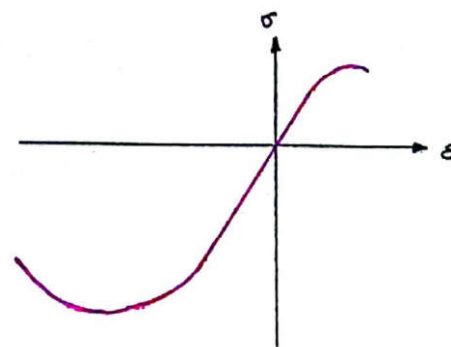
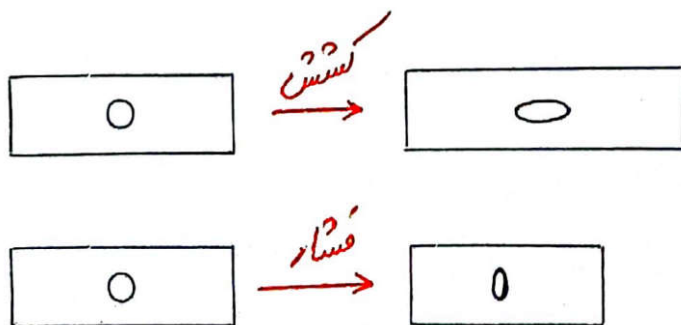
در اکثر مواد محضاً بتن استحکام فشاری

بسیار از استحکام کششی است. دلیل این امر

نیز این است که در حالت کشش اگر حفره‌ای در ماده

وجود داشته باشد، این حفره بزرگتر می‌شود ولی در حالت

فشار حفره‌ها بسته شده و برای قطعه پدید است.



نمودار تنش-کرنش کیفی بتن

تئسن و کرنس حقیقی

همانطور که گفتیم در مهندسی دو فرض ساده کرده داریم و برای طول و مساحت، طول اولیه در حالت اولیه را در نظر می‌گیریم.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad \sigma = \frac{F}{A_0}$$

$$V = cte \Rightarrow A_0 L_0 = AL \Rightarrow \frac{A}{A_0} = \frac{L_0}{L}$$

چون حجم ماده عوض نمی‌شود داریم.

حال اگر بخواهیم دقیق‌تر بررسی کنیم همان با کرنس طول میله نیز تغییر می‌کند و به‌دست این تغییرات رابطه صورت زیر است.

$$\epsilon_t = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

کرنس حقیقی

$$\epsilon_t = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln\left(\frac{L_0 + \delta}{L_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\delta}{L_0}\right) = \ln(1 + \epsilon)$$

برای یافتن رابطه بین کرنس حقیقی و مهندسی داریم:

$$\Rightarrow \epsilon_t = \ln(1 + \epsilon)$$

$$\epsilon = 0.002 \Rightarrow \epsilon_t = \ln(1 + \epsilon) = 0.001998$$

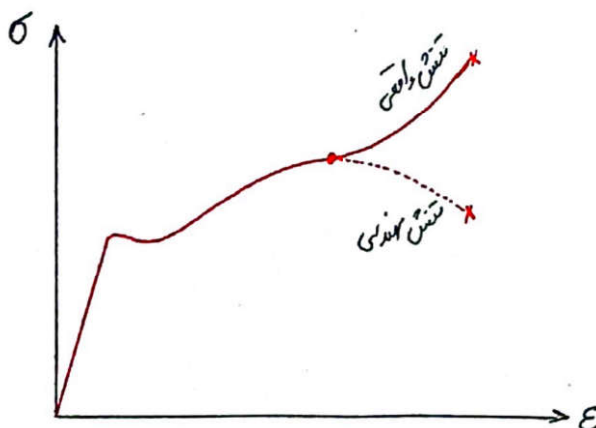
در مقادیر خیلی کم تابع $\ln(1+x)$ با x برابر است. برای مثال

$$\sigma_t = \frac{F}{A} = \left(\frac{F}{A_0}\right) \times \frac{A_0}{A} = \sigma \frac{L_0}{L} = \sigma \left(1 + \frac{\delta}{L_0}\right) = \sigma(1 + \epsilon)$$

برای تئسن حقیقی تئسن داریم:

$$\sigma_t = \sigma(1 + \epsilon)$$

در مهندسی تئسن کرنس نیز در ناحیه پلاستیکی شکل تغییرات مساحت بسیار زیاد است و در اصل مساحت کم شده و تئسن افزایش می‌یابد.

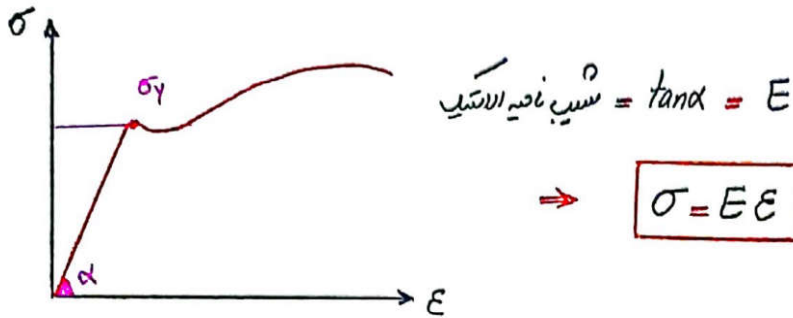


با فرض تئسن مهندسی برگشت تئسن کاهش می‌یابد.

* قانون هوک

همانطور که گفتیم مطلوب ترین حالت طراحی این است که قطعه تحت بارگذاری، تغییر شکل الاستیک داشته باشد.

و تغییر آن کمترین تنش تسلیم σ_y باشد. پس شناخت ناحیه الاستیک یا استخوان اهمیت بالایی دارد. برای اکثر مواد در این ناحیه رابطه ی تنش و کرنش بصورت خطی است که شیب آن را مدول یانگ یا مدول کشسانی E گویند.

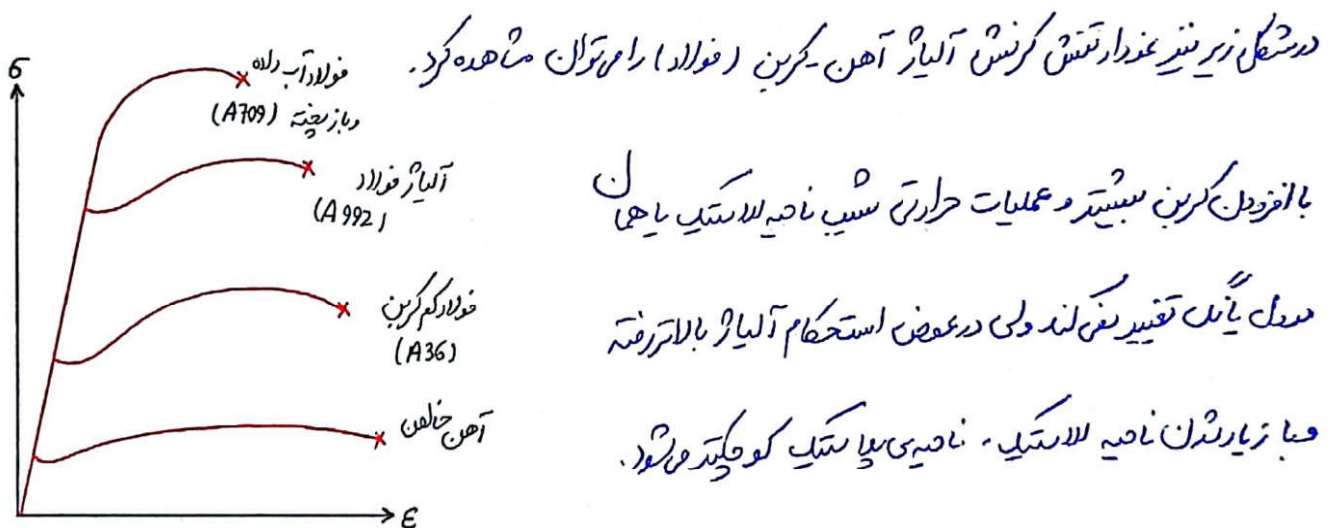


این قانون را قانون هوک گویند.

$$\begin{cases} \sigma_x = E \epsilon_x \\ \sigma_y = E \epsilon_y \\ \sigma_z = E \epsilon_z \end{cases}$$

مدول یانگ برای مواد همسانگرد فقط تابع جنس ماده بوده و بصورت نسبتی ندارد یعنی

البته برخی مواد ناهمسانگرد هستند و در هر جهت استحکام متفاوتی دارند مانند کامپوزیت ها یا بتن مسلح



با افزودن کربن به سبب عملیات حرارتی شیب ناحیه الاستیک یا همان

مدول یانگ تغییر نمی کند ولی در عوض استحکام آلیاژ بالاتر رفته

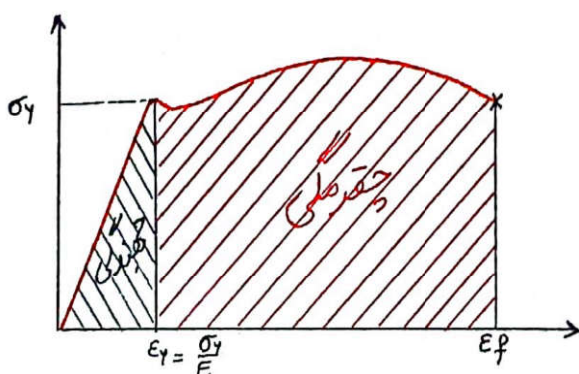
و با زیارتن ناحیه الاستیک، ناحیه ی پلاستیک کوچکتر می شود.

نکته ی دیگر نیز این است که مساحت زیر نمودار تنش-کرنش از جنس انرژی در واحد حجم است و نشانگر مقدار انرژی جذب شده

توسط ماده است و مساحت زیر نمودار بخش الاستیک میزان انرژی جذب شده

در حالت الاستیک را می دهیم چنانچه نامیده می شود و به آن ناحیه الاستیک

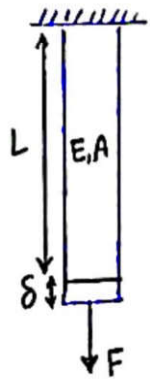
تنش چقرمگی نامیده می شود.



$$\frac{\text{energy}}{\text{Volume}} = \int_0^{\epsilon_f} \sigma d\epsilon$$

$$\text{چقرمگی} = \int_0^{\epsilon_y} \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y = \frac{1}{2E} \sigma_y^2$$

* تغییر شکل اعضای محوری *



$$\sigma = E \epsilon$$

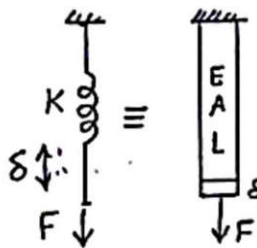
$$\frac{F}{A} = E \frac{\delta}{L} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$

بار ↑
طول →
هندسه سطح EA →
تغییر دهنش

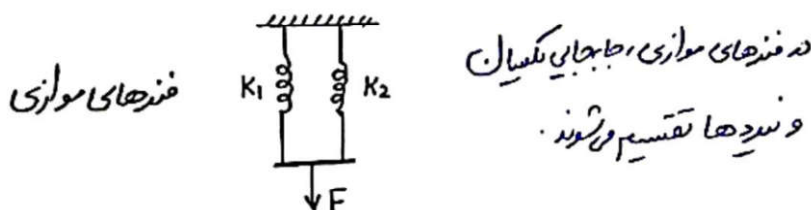
در ماضی الاستیک و بر توالی نوشت:

حال بر توالی این عضو تغییر شکل پذیر را با یک فنر معادل سازی کرد.



$$\left. \begin{array}{l} F = K \delta \text{ فنر} \\ F = \frac{EA}{L} \delta \text{ عضو محوری} \end{array} \right\} \Rightarrow K = \frac{EA}{L}$$

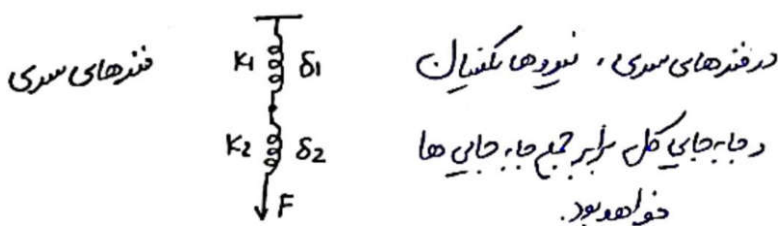
پس هر عضو محوری را در توالی با یک فنر خطی با سختی معادل $K = \frac{EA}{L}$ گسیان فرض کرد و از خواص فنر برای اعضای محوری استفاده کرد.



دو فنرهای موازی، با جابجایی یکسان و نیروها تقسیم می شوند.

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{F_1}{K_1} = \frac{F_2}{K_2}$$

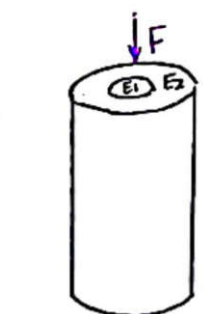
$$F = F_1 + F_2 \Rightarrow K_{eq} \delta = K_1 \delta + K_2 \delta \Rightarrow K_{eq} = K_1 + K_2$$



در فنرهای سری، نیروها یکسان و جابجایی کل برابر جمع جابجایی ها خواهد بود.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow \delta = \frac{F}{K_{eq}} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} \Rightarrow \frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

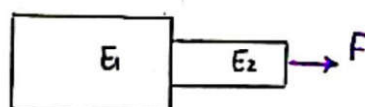
$$F = F_1 = F_2 \Rightarrow K_{eq} \delta = K_1 \delta_1 = K_2 \delta_2$$



دو عضو داخل هم مانند فنر موازی هستند

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$F = F_1 + F_2$$



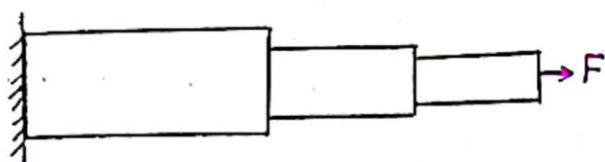
اعضای پشت سر هم، مانند فنرهای سری هستند.

$$F = F_1 = F_2$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

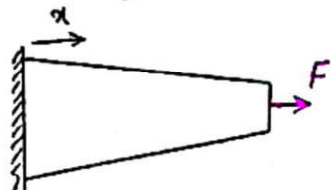
حال برای اعضای محوری هم، همین سربط را داریم:

پس در کل وقتی چند عضو است سرهم داشته باشیم، جابجایی کل برابر مجموع جابجایی این اعضا است.



$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{E_i A_i}$$

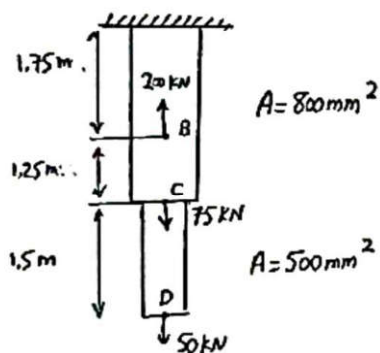
حال فرض کنید در هر عضو نسبت به عضو دیگر مقدار F یا A تغییراتی پیوسته داشته باشند، در این صورت سلیقه انتقال تبدیل می‌شود.



$$\delta = \int_0^L \frac{F dx}{EA}$$

مثال: مثلاً ABCD آلومینیوم است و دارای مدول الاستیک $E = 70 \text{ GPa}$ است. با صرف نظر از وزن میله

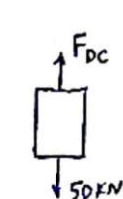
تغییر مکان نقطه D را باید.



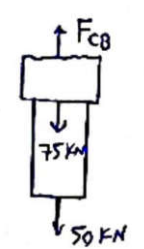
$$\delta_D = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A} + \delta_A$$

$$\delta_D = \frac{F_{DC} L_{DC}}{E A_{DC}} + \frac{F_{CB} L_{CB}}{E A_{CB}} + \frac{F_{AB} L_{AB}}{E A_{AB}}$$

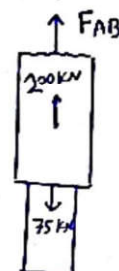
برای یافتن نیروهای داخلی در هر بخش، برش می‌زنیم



$F_{DC} = 50 \text{ kN}$
کشش
 $\delta_{DC} > 0$



$F_{CB} = 125 \text{ kN}$
کشش
 $\delta_{CB} > 0$



$F_{AB} = -75 \text{ kN}$
فشاری
 $\delta_{AB} < 0$

$$\delta_D = \frac{50 \times 10^3 \times 1.5}{70 \times 10^9 \times 500 \times 10^{-6}} + \frac{125 \times 10^3 \times 1.25}{70 \times 10^9 \times 800 \times 10^{-6}} - \frac{75 \times 10^3 \times 1.75}{70 \times 10^9 \times 800 \times 10^{-6}} = 0.002589 \text{ m} = 2.589 \text{ mm}$$

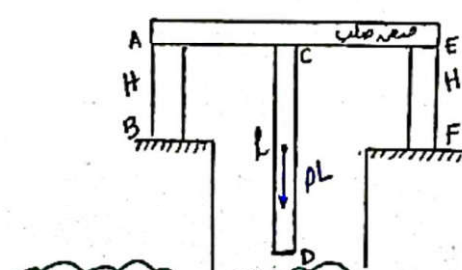
در سازه‌ای متقارن زیر اگر وزن واحد طول میله CD، m باشد، تغییر مکان نقطه D را باید بد (EA ثابت است)

$$\delta_D = \delta_{D/C} + \delta_C, \quad \delta_{D/C} = \frac{F_{DC} L_{DC}}{EA} = \frac{qL \cdot L}{EA} = \frac{qL^2}{2EA} \downarrow$$

$$\delta_C = \delta_A = \frac{F_{AB} L_{AB}}{EA} = \frac{\frac{1}{2} qLH}{EA} = \frac{qLH}{2EA} \downarrow$$

$$\Rightarrow \delta_D = \frac{qLH}{2EA} + \frac{qL^2}{2EA}$$

$$\delta_D = \frac{qL}{2EA} (L + H)$$

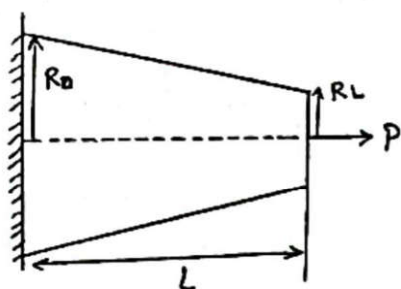


$$F_{AB} = F_{EF} = \frac{1}{2} qL$$

مقارن در
مقارن در
تغییر مکان همه نقاط
 $\delta_C = \delta_A = \delta_B$
مکینان است

به نکته: نیروی وزن در مرکز جرم اعمال می‌شود و طول مرکز با خواص دیگر

مسئله: تغییر طول را تحت نیروی P برای مخروط ناقص زیر بیابید.



برای تغییر طول مساحت باعث می‌شود از فرمول انتگرالی استفاده کنیم.

$$\delta = \int \frac{P dx}{E A(x)} = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}, \quad A(x) = \pi R(x)^2$$

$$R(x) = R_0 + \frac{R_L - R_0}{L} x$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{P}{\pi E} \int_0^L \frac{dx}{(R_0 + \frac{R_L - R_0}{L} x)^2} = \frac{PL}{\pi E (R_L - R_0)} \left(-\frac{1}{R_0 + \frac{R_L - R_0}{L} x} \right) \Big|_0^L = \frac{PL}{\pi E (R_L - R_0)} \times \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_L} \right) = \frac{PL}{\pi R_0 R_L E}$$

نکته: تا اینجا برای یافتن تغییر طول از فرض الاستیک بودن استفاده کردیم و در این برقرار این فرض باید داشته باشیم $\sigma_{max} < \sigma_y$

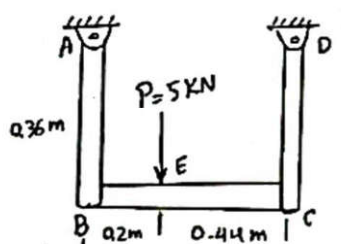
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_{min}} = \frac{P}{\pi R_L^2} < \sigma_y \Rightarrow P < \pi R_L^2 \sigma_y$$

مسئله: حرکت از اتصال های AB و CD از جنس آلومینیوم هستند $(E=75 \text{ GPa})$ و دارای مساحت مقطع 125 mm^2 است.

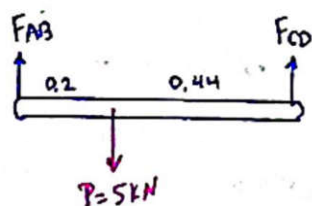
برداریم که آنها عضو صلب BC را درازند. مطلوب است تغییر مکان نقطه E

چون جسم BC صلب است. کافی است تغییر شکل یا جابجایی دو سر آن را پیدا کنیم

و با توزیع خطی مکان جابجایی E را می‌یابیم.



$$\frac{\delta_E - \delta_B}{0.2} = \frac{\delta_C - \delta_E}{0.44} \Rightarrow \delta_E = \frac{0.44}{0.64} \delta_B + \frac{0.2}{0.64} \delta_C$$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB} + F_{CD} = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -0.2 \times 5 \text{ kN} + 0.64 F_{CD} = 0$$

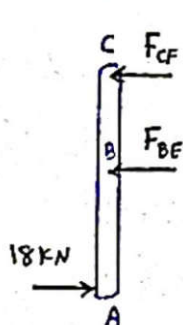
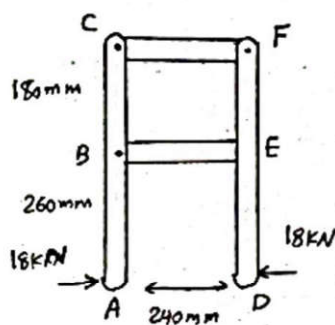
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{AB} = 3.4375 \text{ kN} \\ F_{CD} = 1.5625 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\delta_B = \frac{F_{AB} L}{EA} = \frac{3.4375 \times 10^3 \times 0.36}{75 \times 10^9 \times 125 \times 10^{-6}} = 132.06 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_C = \frac{F_{CD} L}{EA} = \frac{1.5625 \times 10^3 \times 0.36}{75 \times 10^9 \times 125 \times 10^{-6}} = 60.7 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta_E = \frac{0.44}{0.64} \delta_B + \frac{0.2}{0.64} \delta_C = 109.5 \times 10^{-6} \text{ m} = 0.1095 \text{ mm}$$

عضوهای ABC و DEF را با اتصال های فولادی $(E=200 \text{ GPa})$ متصل کرده‌اند. حرکت از اتصال ها از یک جهت ورق $25 \times 35 \text{ mm}$



ناخته شده است. مطلوب است تغییر طول این اعضا BE و CF

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\rightarrow 180 \times F_{BE} - 440 \times 18 \text{ kN} = 0 \\ \sum F_x = 0 &\rightarrow F_{CF} + F_{BE} = 18 \text{ kN} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{CF} = 26 \times 10^3 \text{ N} \rightarrow \\ F_{BE} = 44 \times 10^3 \text{ N} \leftarrow \end{cases}$$

البته این نیروها در اعضای CF و BE به خاطر کشش اعمال بودن خلاف جهت خواهند بود یعنی عضو BE فشرده و CF کششی خواهد بود.

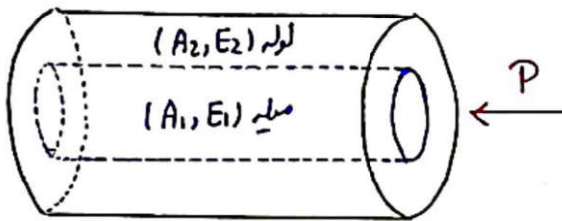
$$\delta_{BE} = \frac{F_{BE} \cdot L_{BE}}{EA} = 30.2 \times 10^{-6} \text{ m} \leftarrow$$

$$\delta_{CF} = \frac{F_{CF} \cdot L_{CF}}{EA} = 17.83 \times 10^{-6} \text{ m} \rightarrow$$

* مسائل نامعین استاتیکی *

در برخی از مسائل استاتیکی، نوشتن معادلات تعادل، برای یافتن مجهولات حول نیروهای تکیه گاهی کافی نیست و نیاز به نوشتن معادلات کمکی است که از مقاومت مصالح استفاده می شود.

برای مثال یک میله دایره داخل هم دیگر را فرض کنید نیروی P به آن وارد می شود



این نیرو بین میله دایره تقسیم می شود و بران یا متن P_1 و P_2

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 = P$$

داریم:

حال معادله تعادل دیگری نداریم که به ما کمک کند پس در اینجا سرانجام مقاومت مصالح می رویم. میله دایره در اینجا مثل نوسه موازی هستند و اگر جابجایی داشته باشند، جابجایی آنها یکسان خواهند بود.

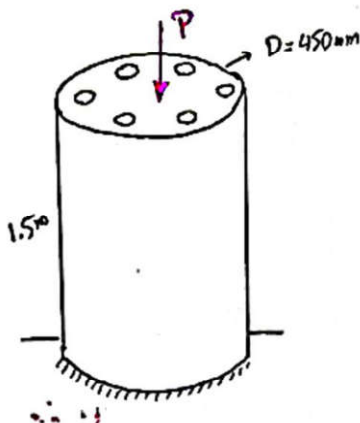
$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1}, \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$

$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2} \Rightarrow P_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} P_1, \quad P_1 + P_2 = P \Rightarrow P_1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} P_1 = P$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P, \quad P_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P$$

مثال: ستون بتنی به طول 1.5 m با شش میله فولادی هر یک به قطر 28 mm مسلح شده است. می دانیم $E_s = 200 \text{ GPa}$ و

$E_c = 25 \text{ GPa}$ است. ما فرض می کنیم مرکز بار دایره را طوری بیابیم که تقسیمی از فولاد 160 MPa و برای بتن 18 MPa باشد.



$$A_s = 6 \frac{\pi}{4} d_s^2 = 6 \times \frac{\pi}{4} \times (0.028)^2 = 3.6945 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_c = \frac{\pi}{4} d_c^2 - A_s = \frac{\pi}{4} (0.45)^2 - A_s = 155.349 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

اگر نیروی P بین میله و بتن تقسیم شود مانند مثال بالا تقسیم خواهد شد.

$$P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P = \frac{200 \times 3.6945}{200 \times 3.6945 + 25 \times 155.349} P = 0.1598 P$$

$$P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P = 0.8402 P$$

حال هر بار فرض می کنیم بتن یا فولاد به ما کمک می دهد.

$$\text{فولاد به ما کمک می دهد} \quad \sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = 160 \times 10^6 \rightarrow P_s = \sigma_s A_s = 591.120 \times 10^3 \text{ N} \rightarrow P = \frac{P_s}{0.1598} = 3699.124 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\rightarrow P_c = 0.8402 P = 3108 \times 10^3 \text{ N} \rightarrow \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = 20 \text{ MPa} > \sigma_{allc} \rightarrow \text{این حالت برای بتن مناسب نیست}$$

$$\text{بتن به ما کمک می دهد} \quad \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = 18 \times 10^6 \rightarrow P_c = \sigma_c A_c = 2796.282 \times 10^3 \text{ N} \rightarrow P = \frac{P_c}{0.8402} = 3328.11 \times 10^3 \text{ N}$$

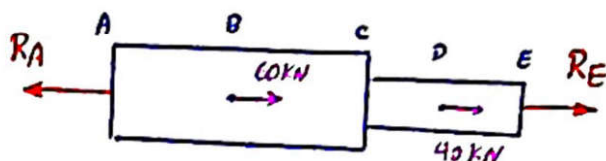
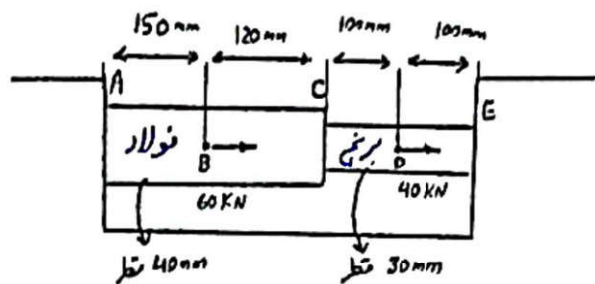
$$P_s = 0.1598 P = 531.83 \times 10^3 \text{ N} \rightarrow \sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = 143.95 \text{ MPa} < \sigma_{alls} \checkmark \rightarrow \text{این حالت هم برای بتن هم برای فولاد مناسب است}$$

مسئله: میلاری شامل دو قسمت استوانه‌ای CE و در انتهای چپ و در انتهای راست قسمت C از برنج

$E_b = 105 \text{ GPa}$ و قسمت AC از فولاد $E_s = 200 \text{ GPa}$ ساخته شده است. نیروهای کششی در A و E و

تغییر مکان در نقطه C را بیابید.

ابتدا با نوشتن معادله تعادل داریم:



$$\textcircled{I} \sum F_x = 0 \rightarrow R_E - R_A + 60 \text{ kN} + 40 \text{ kN} = 0 \Rightarrow R_A = R_E + 100 \text{ kN}$$

حال که معادله تعادل کلی نداریم باید برای محاسبه تغییر مکان به کمک تغییر شکل طول

تغییر مکان

$$\textcircled{I} \delta_{AE} = 0 \rightarrow \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} = 0$$

CL A: $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$, $A = \frac{\pi}{4} (0.04)^2 = 1.25664 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \Rightarrow EA = 251.327 \times 10^6 \text{ N}$

EL C: $E = 105 \times 10^9 \text{ Pa}$, $A = \frac{\pi}{4} (0.03)^2 = 706.86 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \Rightarrow EA = 74.22 \times 10^6 \text{ N}$

BL A: $P = R_A$, $L = 0.18 \text{ m}$
 $\Rightarrow \delta_{AB} = \frac{PL}{EA} = \frac{0.18 \times R_A}{251.327 \times 10^6} = 716.2 \times 10^{-12} R_A$

CL B: $P = R_A - 60 \times 10^3 \text{ N}$, $L = 0.12 \text{ m}$
 $\delta_{BC} = \frac{PL}{EA} = \frac{(R_A - 60 \times 10^3) \times 0.12}{251.327 \times 10^6} = 447.47 \times 10^{-12} R_A - 26.848 \times 10^{-6}$

DL C: $P = R_A - 60 \times 10^3 \text{ N}$, $L = 0.1 \text{ m}$
 $\Rightarrow \delta_{CD} = \frac{PL}{EA} = 1.34735 \times 10^{-9} R_A - 134.735 \times 10^{-6}$

EL D: $P = R_A - 100 \times 10^3 \text{ N}$, $L = 0.1 \text{ m}$
 $\delta_{DE} = \frac{PL}{EA} = 3.85937 \times 10^{-9} R_A - 342.424 \times 10^{-6}$

$\delta_{AE} = 0 \rightarrow R_A = 62.8 \text{ kN} \leftarrow, R_E = 37.2 \text{ kN} \leftarrow$

از جمع تغییر طول ها در نهایت داریم:

$\delta_C = \delta_{AB} + \delta_{BC} = 46.3 \times 10^{-6} \text{ m} \leftarrow 46.3 \mu\text{m} \rightarrow$

* کرنش در حالت کلی *

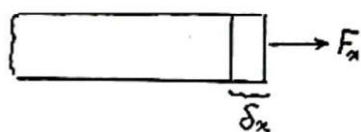
حال می‌خواهیم کرنش را در حالت کلی بررسی کنیم و عوامل ایجاب کرنش را مطالعه کنیم.

عوامل ایجاب کرنش در یک قطعه به شرح ذیل است:

۱- اعمال تنش در همان راستا

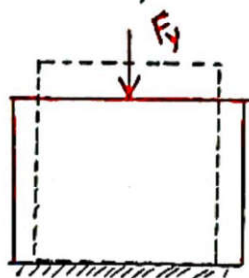
با اعمال تنش در راستای x ، در همان راستا کرنش نیز خواهیم داشت و با فرض الاستیک بودن می‌توان نوشت:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$



۲- اعمال تنش جانبی

وقتی بر لبه‌ی مثال در راستای y نیرو اعمال کنیم هم در راستای y کرنش خواهیم داشت و هم در راستای جانبی آن مانند راستای x .



که این کرنش‌ها در خلاف جهت هم خواهند بود و نسبت این کرنش‌ها را نسبت پواسون گویند.

$$\nu = - \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \quad \text{نسبت پواسون}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\nu = - \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} \Rightarrow \epsilon_x = -\nu \epsilon_y \Rightarrow \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

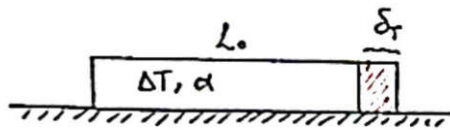
در حالت کلی وقتی تنش‌های σ_x ، σ_y و σ_z را اعمال کنیم در هر سه جهت کرنش خواهیم داشت که می‌توان

به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

این روابط را تعمیم قانون هooke برای بارگذاری چند محوری ماده همگن همسانگرد گویند.

3- تغییر در حالت ایستایی نیز تغییر دما است با ضریب انبساط طولی می توان نوشت:



$$\delta_T = \alpha \Delta T L_0 \rightarrow \epsilon_T = \frac{\delta_T}{L_0} \Rightarrow \epsilon_T = \alpha \Delta T$$

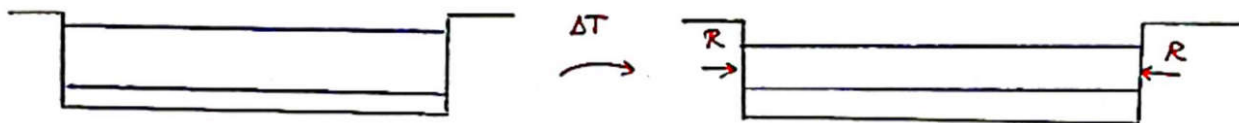
اگر میله آزاد باشد، هیچ تنش نخواهیم داشت ولی کرنش نداریم. پس هر تنش با خود کرنش همراه دارد ولی هر کرنش در اثر تنش نیست.

پس در حالتی که تغییر دما داشته باشیم، کرنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{(\sigma_y + \sigma_z)}{E} + \alpha \Delta T$$

کرنش حرارتی تنش جانبی نسبت به طول تنش محوری

حال میله ای را فرض کنید که بین دو تکیه گاه بدون تنش قرار دارد، اگر این میله حرارت دهیم خواهیم داشت:



در این حالت فشار ناشی از تغییر طول حرارتی باعث ایجاد تنش می شود و چون تغییر طول یا کرنش نداریم می توان نوشت:

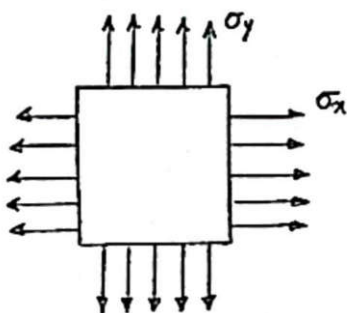
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T = 0 \quad \sigma_x = \frac{-R}{A} \Rightarrow \frac{-R}{EA} + \alpha \Delta T = 0 \Rightarrow R = \alpha EA \Delta T$$

$$\sigma_x = \frac{-R}{A} = -E \alpha \Delta T \rightarrow$$

در این حالت کرنش معلوم تنش نیست بلکه عمل ایستادگی، کرنش می باشد.

مسائل و نکات

یکی ورق نازک را در نظر بگیرید که در راستای z می توان تنش را نادیده گرفت، در این حالت $\sigma_x, \sigma_y, \epsilon_x$ را بر حسب ϵ_y باید



$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu \sigma_y = E \epsilon_x \\ \sigma_y - \nu \sigma_x = E \epsilon_y \end{cases}$$

معادله دو مجهول

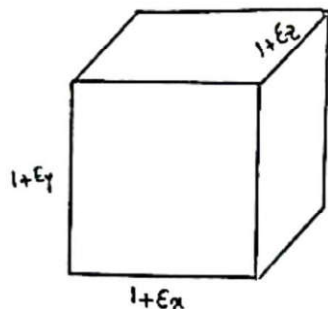
$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = E \frac{\epsilon_x + \nu \epsilon_y}{1 - \nu^2} \\ \sigma_y = E \frac{\epsilon_y + \nu \epsilon_x}{1 - \nu^2} \\ \epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \epsilon_y) \end{cases}$$

با حل دو معادله دو مجهول بالا می توان σ_x و σ_y را بر حسب ϵ_x و ϵ_y بدست آورد.

با داشتن σ_x و σ_y می توان ϵ_z را نیز بدست آورد.

مدول بالک یا مدول حجمی



کعبه مکعب به ضلع واحد را در نظر بگیرید که حجم اولیه آن $V_1 = 1$ خواهد بود

حال اگر تنش های σ_x ، σ_y و σ_z به آن وارد شود اصطلاحاً اندازگی کرنش آنرا می یابند

در این صورت حجم ثانویه برابر است با:

$$V_2 = (1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z) = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \underbrace{\epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_z + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z}_{\text{مقادیر بسیار ناچیز}}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

اگر تغییر حجم را بر حجم اولیه تقسیم کنیم کرنش حجمی بدست می آید:

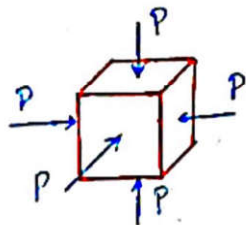
$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

با استفاده از تعمیم قانون هooke کرنش حجمی به صورت زیر بدست می آید:

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - 2\nu \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\Rightarrow e = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

حال فرض کنید این مکعب داخل سیال ساکن قرار گیرد. در این صورت از همدی اطراف به آن تنش فشاری وارد می شود.



$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P \Rightarrow e = -\frac{3(1-2\nu)}{E} P$$

حال مانند مدول یانگ اینجاست مدول بالک را تعریف می کنیم:

$$e = -\frac{P}{K} \Rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

از آنجا که مقدار K مثبت است زیرا کرنش حجمی تحت فشار همواره منفی است $e = -\frac{P}{K} < 0 \Rightarrow K > 0$

$$K > 0 \Rightarrow 1-2\nu > 0 \Rightarrow 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

حالت حدی این است که $\nu = 0$ یا $\nu = \frac{1}{2}$ باشد.

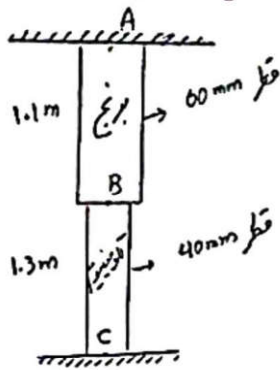
$$\nu = 0 \rightarrow \text{ماده ای ایده آلی که از یک سمت کشیده شود و در جهت دیگر تغییر نمی کند} \rightarrow K = \frac{E}{3}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \rightarrow e = 0 \rightarrow \text{ماده ایده آلی که تغییر حجم ندارد و در آن کم ناچیز است} \rightarrow K = \infty$$

مثال: میل‌های ساطل دو قسمت استوانه‌ای AB و BC در انتهای محدود شده داشته شده است. قسمت AB آلومینیوم $E_B = 105 \text{ GPa}$

و قسمت BC فولاد کربنی $E_C = 210 \text{ GPa}$ ساخته شده است. تنش‌های عمودی ایجاد شده در قسمتهای AB و BC و

تغییر مکان متناظر نقطه‌ای B را بیابید. ($\Delta T = 42^\circ\text{C}$) ($\alpha_B = 23.9 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) ($\alpha_C = 20.9 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)

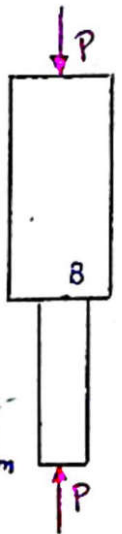


$$A_{AB} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = \frac{\pi}{4} (0.06)^2 = 2.8274 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_{BC} = \frac{\pi}{4} d_{BC}^2 = \frac{\pi}{4} (0.04)^2 = 1.2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

انقباض حرارتی آزار و کوتاه شدن مربوط به نیروی فشاری

$$\delta_T + \delta_P = 0 \quad \text{همواره خنثی می‌کند.}$$



$$\delta_T = L_{AB} \alpha_B \Delta T + L_{BC} \alpha_C \Delta T = 1.1 \times 20.9 \times 10^{-6} \times 42 + 1.3 \times 23.9 \times 10^{-6} \times 42 = 2.2705 \times 10^{-3} \text{ m}$$

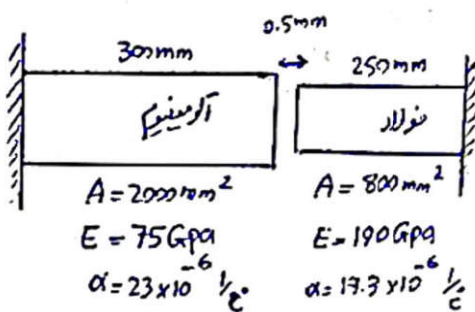
$$\delta_P = -\frac{PL_{AB}}{E_B A_{AB}} - \frac{PL_{BC}}{E_C A_{BC}} = -\left(\frac{1.1}{105 \times 10^9 \times 2.8274 \times 10^{-3}} + \frac{1.3}{210 \times 10^9 \times 1.2566 \times 10^{-3}} \right) P = -18.074 \times 10^{-9} P$$

$$\Rightarrow \delta_T + \delta_P = 2.2705 \times 10^{-3} - 18.074 \times 10^{-9} P = 0 \Rightarrow P = 125.62 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\sigma_{AB} = -\frac{P}{A_{AB}} = -44.4 \text{ MPa}, \quad \sigma_{BC} = -\frac{P}{A_{BC}} = -100 \text{ MPa}, \quad \delta_B = L_{BC} \alpha_C \Delta T - \frac{PL_{BC}}{E_C A_{BC}} = -0.0005 \text{ m} = 0.5 \text{ mm} \downarrow$$

مثال: در دمای اتاق 20°C فاصله‌ی موجود بین دو انتهای میل‌های نشان شده راه‌اندازه شده است. پس از گرم شدن یکسان

در 140°C برآورد. زنی (تنش عمودی در میل آلومینیومی و تغییر طول آن را بیابید).



دقیقاً مشابه سوال قبل است با این تفاوت که $\delta_T + \delta_P = 0.5 \text{ mm}$ خواهد بود

زیرا گس‌مضا برای رسد دارند. $\Delta T = 140 - 20 = 120^\circ\text{C}$

$$\delta_T = L_A \alpha_A \Delta T + L_S \alpha_S \Delta T = 0.3 \times 23 \times 10^{-6} \times 120 + 0.25 \times 17.3 \times 10^{-6} \times 120 = 1.347 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_T + \delta_P = 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta_P = 0.5 \times 10^{-3} - 1.347 \times 10^{-3} \text{ m} = -0.847 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \text{نیروی فشاری است}$$

$$\delta_P = \frac{PL_A}{E_A A_A} + \frac{PL_S}{E_S A_S} = \left(\frac{0.3}{75 \times 10^9 \times 2000 \times 10^{-6}} + \frac{0.25}{190 \times 10^9 \times 800 \times 10^{-6}} \right) P = 3.6447 \times 10^{-9} P = 0.847 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow P = 232.39 \text{ kN}, \quad \sigma_A = -\frac{P}{A_A} = -116.2 \text{ MPa}$$

$$\delta_A = L_A \alpha_A \Delta T - \frac{PL_A}{E_A A_A} = 363 \times 10^{-6} \text{ m} = 0.363 \text{ mm} \rightarrow \delta_S = 0.137 \text{ mm}$$

* کرنش زاویه ای

تاکون کرنش محوری دو حالت الاستیک برپا شد. حال همین قوانین را برای تنش برشی کرنش زاویه ای داریم

قانون هوک

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x$$

کرنش زاویه ای

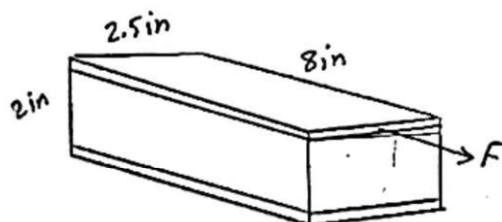
$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

G همانند مدول یانگ E است و مدول برشی نامیده می شود.

مثال: قطعه مکعب مستطیل شکلی از ماده ای با مدول صلابت $G = 90 \text{ Ksi}$ از دو طرف به صورت افقی صلب نگه داشته است.

صفحه پایینی ثابت است و صفحه بالایی با نیروی کشنده F کشیده می شود اگر صفحه بالایی به اندازه 0.04 in جابه جا شود

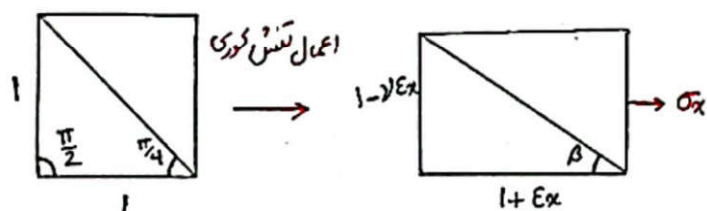


کرنش برشی یا زاویه ای و تنش برشی و نیروی F را باید بداند.

$$\gamma_{xy} \ll 1 \Rightarrow \gamma_{xy} = \tan \gamma_{xy} = \frac{0.04 \text{ in}}{2 \text{ in}} = 0.02 \text{ rad}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 90 \times 10^3 \text{ psi} \times 0.02 \text{ rad} = 1800 \text{ psi}$$

$$F = \tau_{xy} A = 1800 \text{ psi} \cdot 8 \text{ in} \times 2.5 \text{ in} = 36 \times 10^3 \text{ lb} \quad \underline{F = 36 \text{ Kips}}$$



حال در توالی رابطه ی تنش برشی در ضلع را یافت.

تقابل از تغییر شکل زاویه ای قطر $\frac{\pi}{4}$ بود ولی اکنون

این مقدار به اندازه ی کرنش زاویه ای کاهش یافته نصف

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$$

از دیواره

$$\tan(\alpha + \beta)$$

$$\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \frac{1 - \nu \epsilon_x}{1 + \epsilon_x} = \frac{1 - \tan \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan \frac{\gamma_m}{2}}$$

$$\gamma_m \ll 1 \rightarrow \tan \gamma_m \approx \gamma_m$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \nu \epsilon_x}{1 + \epsilon_x} = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}} \Rightarrow \gamma_m = \frac{(1 + \nu) \epsilon_x}{1 + \frac{1 - \nu}{2} \epsilon_x}$$

$$\gamma_m = (1 + \nu) \epsilon_x$$

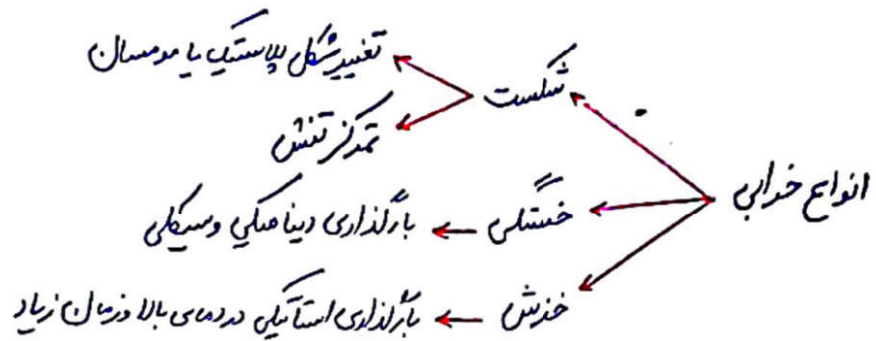
مقدار ϵ_x و $\frac{1 - \nu}{2}$ هر دو کوچک است و حاصل ضرب آنها بسیار ناچیز است پس در توان نوشت

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G}, \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \left(\sigma_x = \frac{F}{A}, \quad \tau_m = \frac{F}{2A} \right) \quad \text{(از فصل پیش در اینم)}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{2AG} = (1 + \nu) \frac{F}{EA} \Rightarrow \frac{1}{2G} = \frac{1 + \nu}{E} \Rightarrow \boxed{2G(1 + \nu) = E} \rightarrow \text{رابطه ی بیارهم بین مدول برشی مدول یانگ و نسبت پواسون}$$

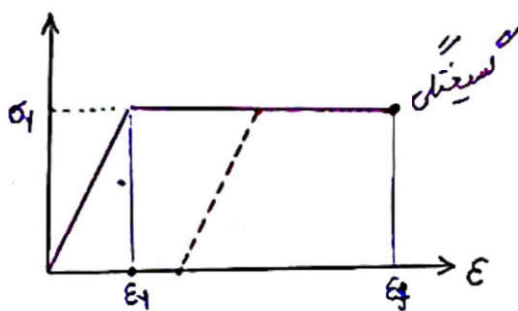
* تغییر شکل موسسان یا پلاستیک *

- مایه تغییر شکل الاستیک و قانون هک بر روی نمودار حال سوراخ عوامل خرابی قطعه مورد بررسی



در ناحیه الاستیک رابطه تنش کرنش خطی است ولی در ناحیه پلاستیک این رابطه غیر خطی و پیچیده است

البته برای بررسی راحت تر، یک حالت ایده آل ماده الاستو-پلاستیک را فرض می‌کنیم که به صورت زیر است

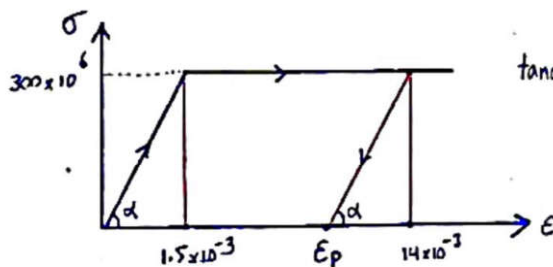


برای تحلیل یک میل الاستو-پلاستیک به طول $L = 500 \text{ mm}$ و سطح مقطع 60 mm^2 فرض کنید که مواد مانند آل $E = 200 \text{ GPa}$ و تنش تسلیم $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$ داشته باشد. اگر میل تحت بارگذاری به اندازه 7 mm افزایش طول پیدا کند پس از برداشتن بار، تغییر شکل ماندگار آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{300 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 1.5 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{7 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 14 \times 10^{-3}$$

$\epsilon > \epsilon_y \rightarrow$ وارد ناحیه پلاستیک می‌شود.



$$\tan \alpha = E = 200 \times 10^9$$

$$\epsilon_p = \epsilon - \epsilon_y = 14 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3} = 12.5 \times 10^{-3}$$

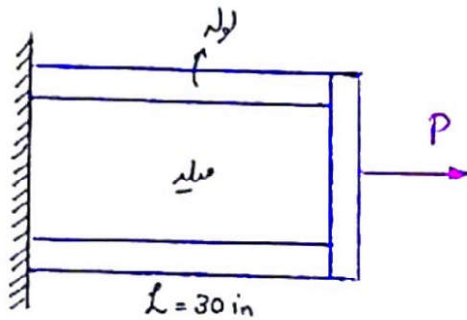
$$\delta_p = \epsilon_p L = 12.5 \times 10^{-3} \times 500 \text{ mm} = 6.25 \text{ mm}$$

نکته: کرنش‌های باقی‌مانده در قطعه باعث ماندن تنش در قسمتهای مختلف آن می‌شود که به آن تنش ماندگار گویند.

برای مثال در سوال بالا کرنش 12.5×10^{-3} در قطعه باقی‌مانده باعث ایجاد تنش ماندگار به اندازه 300 MPa می‌گردد.

مثال: یک میله استوانه‌ای به طول 30 in و سطح مقطع $A = 0.075 \text{ in}^2$ در داخل لوله‌ای با مساحت مقطع $A_t = 0.1 \text{ in}^2$ قرار دارد. با فرض الاستیک بودن میله و لوله، اگر نیروی وارده بر سیستم از 5.7 Kips تغییر کند

تغییر شکل هندسی و تغییرات تنش و کرنش را باید.



$$E_t = 30 \times 10^6 \text{ Psi} \quad , \quad (\sigma_r)_t = 45 \text{ Ksi}$$

$$E_r = 15 \times 10^6 \text{ Psi} \quad , \quad (\sigma_r)_r = 36 \text{ Ksi}$$

چون مسئله بر حسب نیرو و تغییر شکل است، بهتر است به جای تنش - کرنش از

نیرو - جابجایی استفاده کنیم و از آنجا که میله و لوله موازی هستند، جابجایی یکسان و نیروها با هم جمع می‌شوند.

$$P_{r,y} = \sigma_{r,y} \times A_r = 36 \text{ Ksi} \times 0.075 \text{ in}^2 = 2.7 \text{ Kips}$$

$$\delta_{r,y} = \frac{P_{r,y} L}{E_r A_r} = \frac{2.7 \times 10^3 \times 30}{15 \times 10^6 \times 0.075} = 36 \times 10^{-3} \text{ in}$$

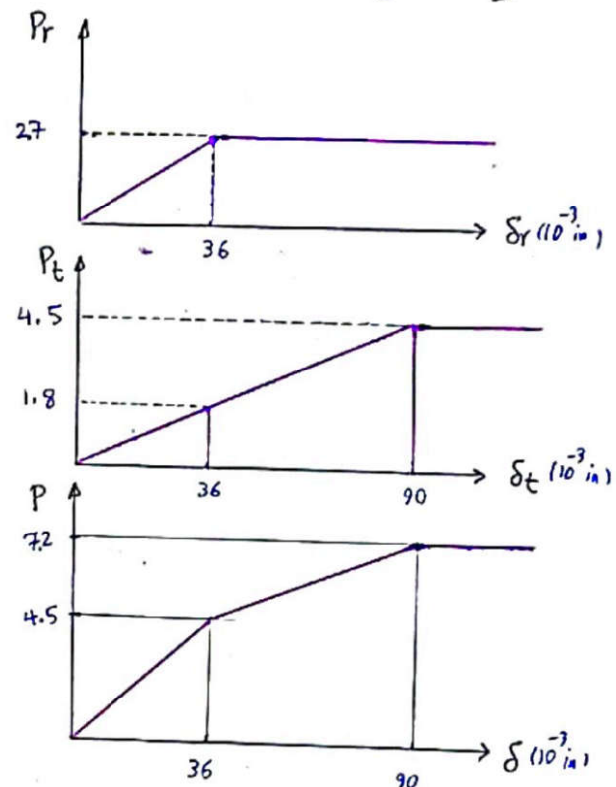
$$P_{t,y} = \sigma_{t,y} A_t = 45 \text{ Ksi} \times 0.1 \text{ in}^2 = 4.5 \text{ Kips}$$

$$\delta_{t,y} = \frac{P_{t,y} L}{E_t A_t} = \frac{4.5 \times 10^3 \times 30}{30 \times 10^6 \times 0.1} = 90 \times 10^{-3} \text{ in}$$

$$\delta = \delta_t = \delta_r$$

$$P = P_t + P_r$$

مقدار نیرو جابجایی که جمع می‌شود بر اساس نسبت می‌آید.



حال اگر نیروی 5.7 Kips اعمال شود، میله در حالت الاستیک و لوله در حالت الاستیک خواهد بود پس داریم:

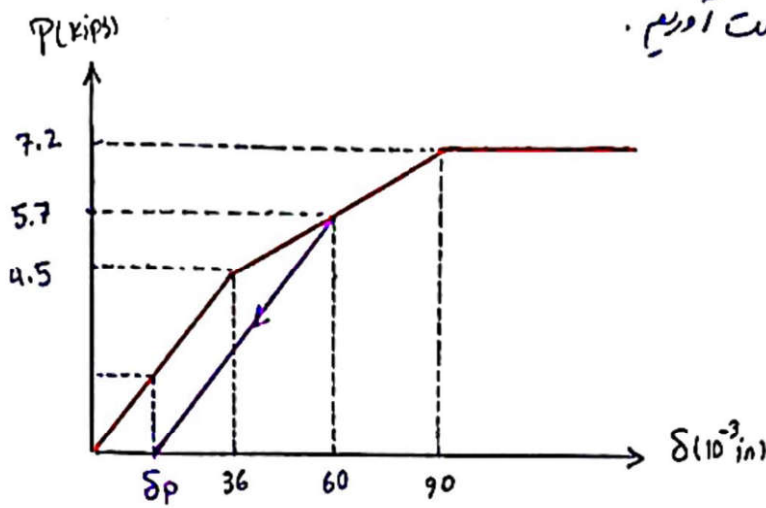
$$\sigma_r = \sigma_{y,r} = 36 \text{ Ksi} \rightarrow P_r = P_{r,y} = 2.7 \text{ Kips} \quad , \quad P_t = P - P_r = 5.7 - 2.7 = 3 \text{ Kips}$$

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_t} = 30 \text{ Ksi} \rightarrow \delta = \delta_t = \epsilon_t L = \frac{\sigma_t}{E_t} L = 60 \times 10^{-3} \text{ in}$$

چون لوله در حالت الاستیک قرار دارد، تغییر طول را لوله تعیین می‌کند و میله که در حالت الاستیک قرار دارد

در برابر کرنش مقاومت نکرده و همراه لوله تغییر طول می‌دهد.

این مقدار را می توانستیم از روی نمودار $P-\delta$ نیز بدست آوریم.



حال اگر بار برداری کنیم مولاری با سمت راست

از نمودار پایین می آید

از تناسب مثلث ها داریم:

$$\frac{36}{4.5} = \frac{60 - \delta_p}{5.7} \Rightarrow \delta_p = 14.4 \times 10^{-3} \text{ in}$$

حال در انحنای این جابجایی یا کرنش سهم اند در قطعه یا مجموعه باعث ایجاد تنش ماند در لوله

از روی نمودار می توان مقدار نیروی ماند را بدست آورد و تنش ها را نیز می بسازد البته بهتر است از کرنش استفاده کنیم.

$$\delta_{p,t} = 14.4 \times 10^{-3} \text{ in} \rightarrow \epsilon_{p,t} = \frac{\delta}{L} = \frac{14.4 \times 10^{-3}}{30} = 1.52 \times 10^{-3} = \epsilon_{p,r}$$

$$\sigma_r' = \epsilon_{p,r} \times E_r = 1.52 \times 10^{-3} \times 30 \times 10^6 \text{ psi} = 45.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma_t' = \epsilon_{p,t} \times E_t = 1.52 \times 10^{-3} \times 15 \times 10^6 \text{ psi} = 22.8 \text{ ksi}$$

پس وقتی به این مجموعه بار $P = 5.7 \text{ kips}$ وارد می کنیم تنش لوله میله به این سمت خواهد بود.

$$\sigma_t = 30 \text{ ksi}$$

$$\sigma_r = 36 \text{ ksi}$$

حال برای بار برداری باید منهای تنش وارد کنیم که به δ_p بریم و چون در جهت بار برداری است منهای این

تنش ها منفی خواهد بود.

$$\sigma_t' = -22.8 \text{ ksi}$$

$$\sigma_r' = -45.6 \text{ ksi}$$

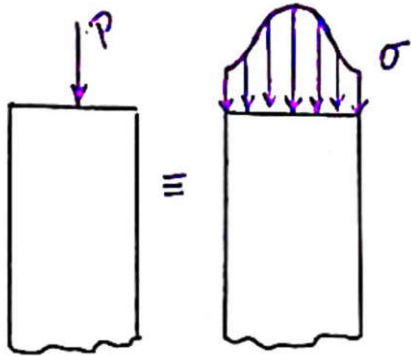
حال با جمع کردن این تنش ها، منهای تنش ماند در لوله میله بدست می آید.

$$(\sigma_r)_{res} = \sigma_r + \sigma_r' = 36 - 45.6 = -9.6 \text{ ksi}$$

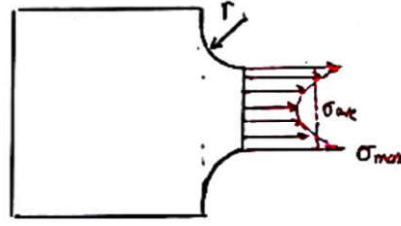
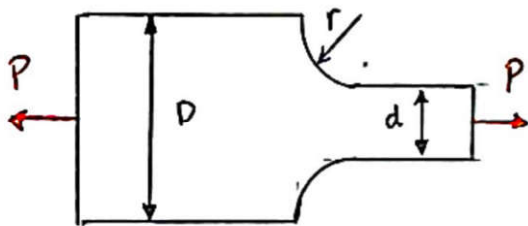
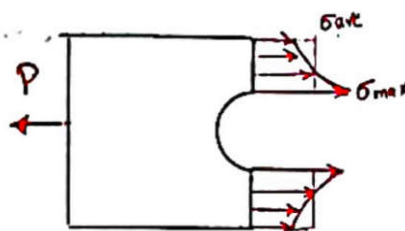
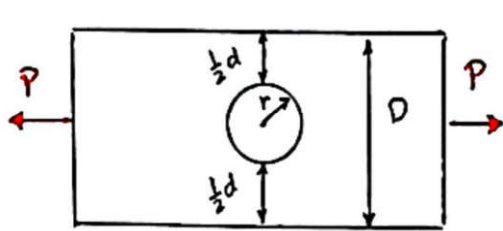
$$(\sigma_t)_{res} = \sigma_t + \sigma_t' = 30 - 22.8 = 7.2 \text{ ksi}$$

* متمرکز تنش *

در بیان اهل سن و نال گفتیم که در محل اعمال نیروی متمرکز مقدار تنش از تنش میانگین بیشتر است.



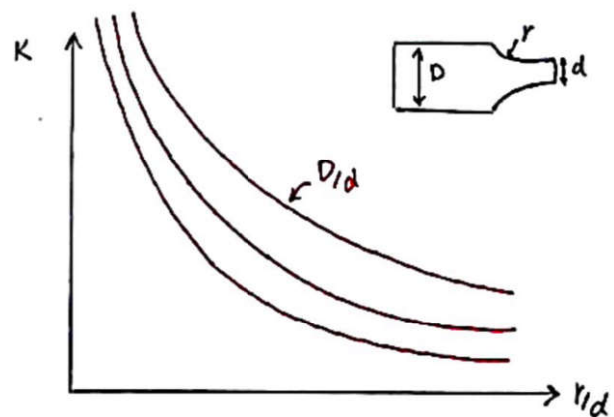
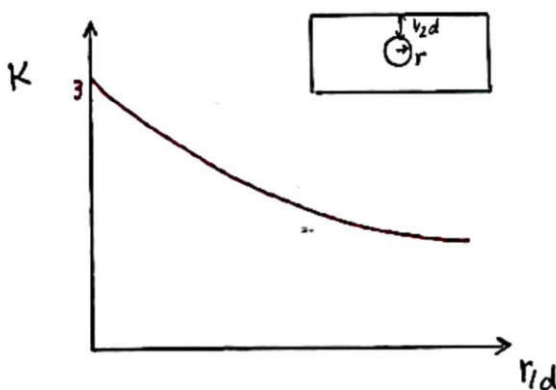
حال به جزاین مورد، وقتی عضدی دارای ناپویستگی مانند سوراخ یا تغییر ناگهانی در سطح مقطع باشد، در نزدیکی این ناپویستگی ها تنش بیشتر از حالت تنش میانگین است که اصطلاحاً رگونیذ، متمرکز تنش وجود دارد.



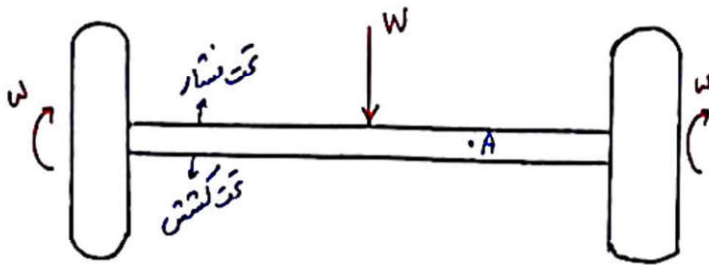
حال نسبت σ_{max} به σ_{ave} را با ضریب متمرکز تنش تعریف میکنند که با هندسه میتوان این مقادیر را یافت.

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$$

ضریب متمرکز تنش

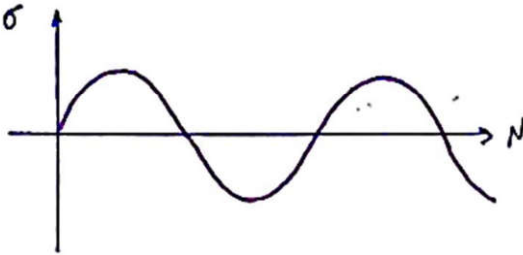


* خزش و خستگی *



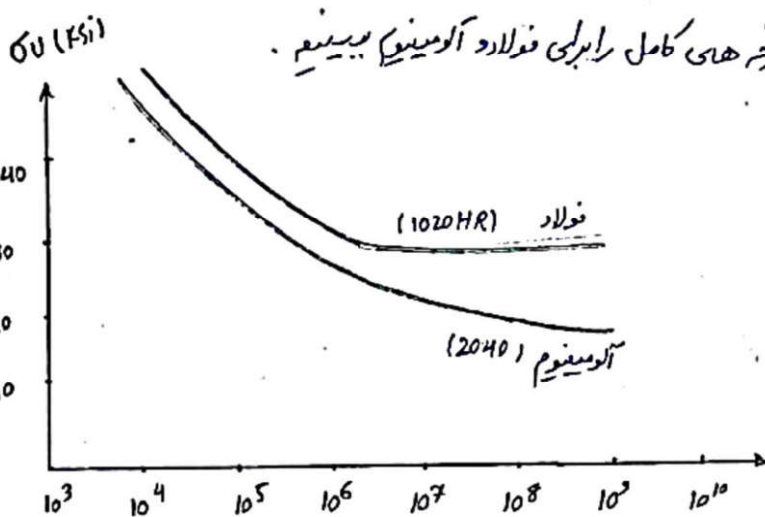
معدر خزش های ماسین را فرض کنید که همزمان با خزش وزن ماسین را نیز کنترل بر کند و چون در اینجا خزش داریم،

با بارگذاری روی معدر به صورت سیکلی است. یعنی اگر یک نقطه مانند A را فرض کنید به علت خزش در مواقع تحت کشش است و در موارد تحت فشار می باشد.



این بارگذاری نویسانی باعث خستگی در قطعه می شود

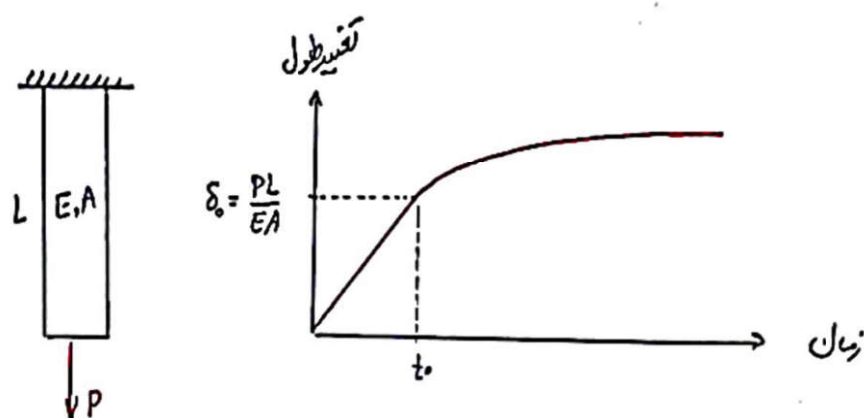
و در هر بار تکمیل این سیکل، استحکام تسلیم کاهش می یابد.



در نمودار زیر مکان تنش نهایی را بر حسب تعداد خزش های کامل را برای فولاد آلومینیوم ببینیم.

همانگونه مشاهده می شود برای فلزات غیر آهنی مثل آلومینیوم و مس هرچه تعداد سیکل ها افزایش یابد حد نهایی نیز کاهش می یابد ولی برای فولاد پس از 10^6 سیکل دیگر حد نهایی کاهش نمی یابد که این مقدار تنش را حد دوام می نامند و برای فولاد حد دوام تقریباً برابر نصف حد نهایی اولیه است.

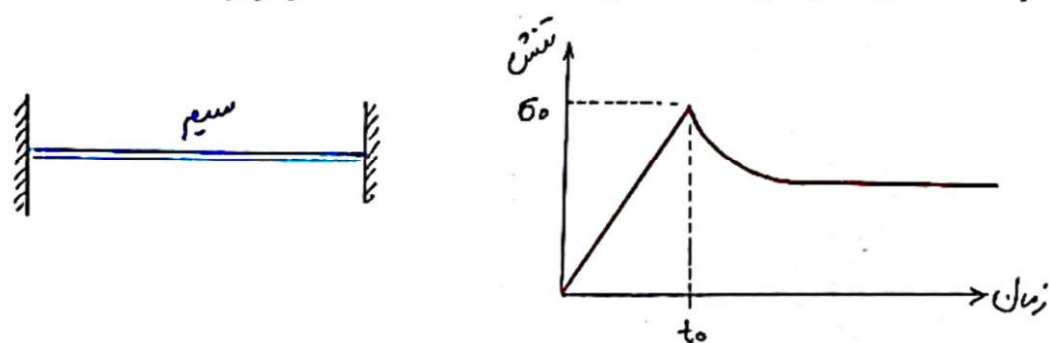
تاکنون در مبحث‌های تنش و کرنش تأثیر گذر زمان در نظر گرفته نشده بود ولی در تئری یک ماده در طی مدت زمانی طولانی تحت بارگذاری استاتیکی قرار گیرد، مقداری کرنش افزاین در آن به وجود می‌آید که به آن پدیده‌ی خزش Creep گویند.



یا یک سیم کشیده شده را در نظر بگیرید که بین دو تکیه‌گاه ثابت قرار دارد و تنش کششی اولیه در این سیم σ_0 است.

حال اگر مدت زمانی طولانی بگذرد، تنش در این سیم کاهش می‌یابد و مقداری ثابت در یک این پدیده را Relaxation

گویند.



نکته‌ی آخر نیز این است که پدیده‌ی خزش در دماهای بالا اهمیت بیشتری پیدا می‌کند؛ همین خاطر در طراحی

سازه‌هایی چون موتورها و کوره‌ها که برای مدت زمان‌های طولانی در دماهای بالا فعالیت می‌کنند،

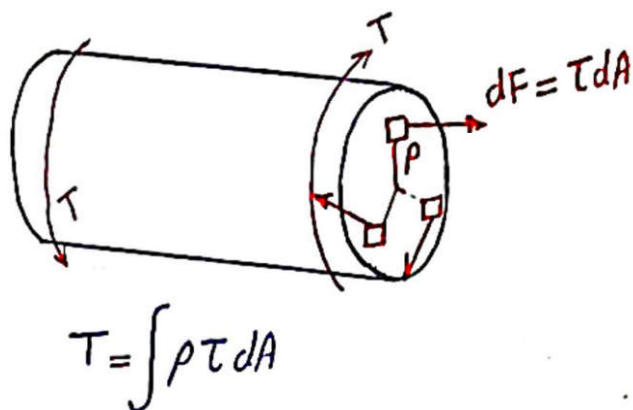
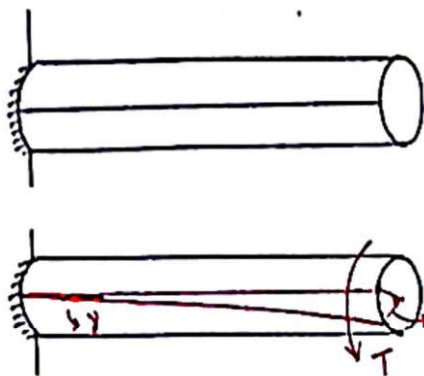
تأثیر خزش به عنوان یک پارامتر مهم در نظر گرفته می‌شود.

خزش در بتن نیز در دوره‌های طولانی مدت می‌تواند باعث ایجاد اعوجاج عرشه‌های پلی برآیند شکم دارگی بین تکیه‌گاه‌ها شود

در این خصوص از این امر، عرشه‌هایی با قوس رو به بالا می‌سازند.

فصل سوم: پیچش

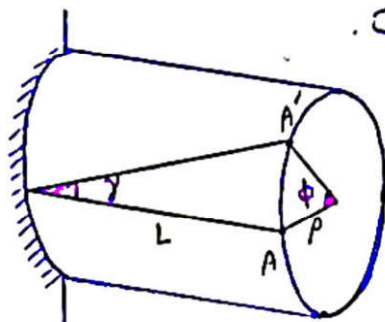
در پیچش حول تغییر شکل زاویه‌ای داریم، تنش برشی نیز خواهیم داشت که هم شدت زیر می‌سبب می‌شود.



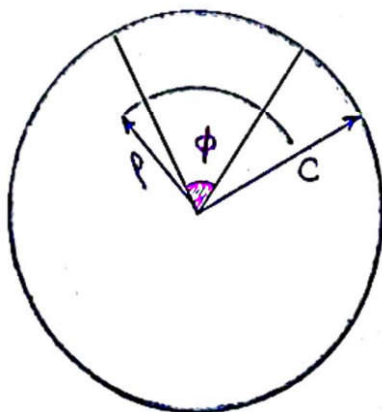
در ابتدا پیچش روی میل به مقطع داریم بر روی دایره و سپس میل به های غیر دایره‌ای نیز بررسی خواهیم کرد.

* تغییر شکل در میل‌های گردان دایره‌ای

در میل تحت پیچش بین کرنش زاویه‌ای γ و تغییر زاویه سطحی ϕ رابطه‌ی زیر برقرار است.



$$\text{کلان } \overline{AA'} = L\gamma = \rho\phi \Rightarrow \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$



به ازای یک گشتاور پیچشی معین یک ϕ معین خواهیم داشت و چون L تغییرناپذیر است

$$\text{پس } \gamma \propto \rho$$

یعنی هر چه شعاع نزدیک‌تر باشد γ نیز نزدیک‌تر خواهد بود

و متوالی گفت γ با شعاع رابطه‌ی خطی دارد و ما می‌توانیم مقدار آن روی شعاع خارجی C را بدانیم.

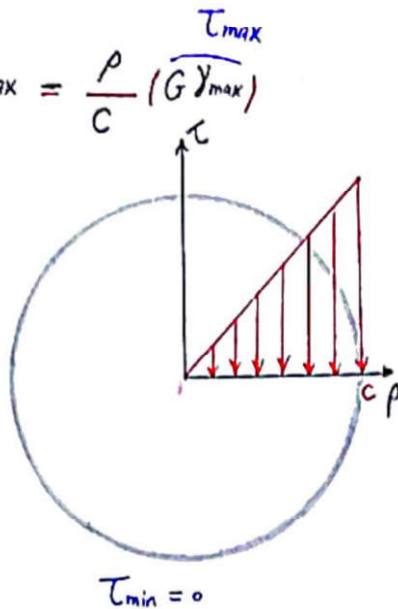
$$\gamma_{\max} = \frac{C\phi}{L} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{C} \gamma_{\max}$$

حال که رابطه کرنش را بدست آوریم بتوان کرنش را نیز بدست آورد.

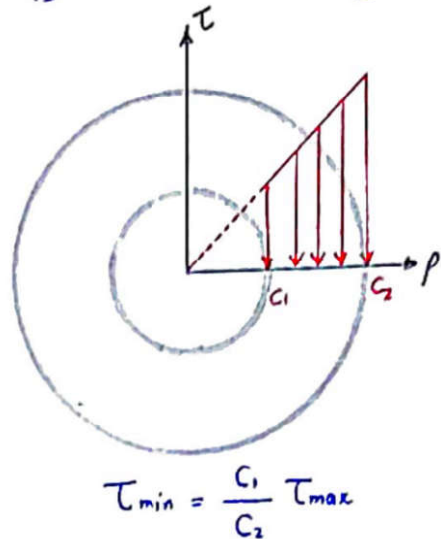
$$\tau = G\gamma = G\rho/c \gamma_{max} = \frac{\rho}{c} (G\gamma_{max})$$

با فرض الاستیک بودن و قانون هوک داریم:

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$$



$$\tau_{min} = 0$$



$$\tau_{min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{max}$$

$$T = \int \rho \tau dA, \quad \tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$$

حال با جایگذاری در رابطه $T = \int \rho \tau dA$ داریم:

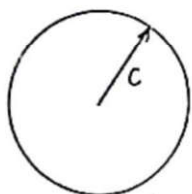
$$T = \int \rho \cdot \frac{\rho}{c} \tau_{max} dA = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA \quad \rightarrow \quad J \text{ گشتاور قطبی لختی}$$

$$T = \frac{J \tau_{max}}{c} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{TC}{J}$$

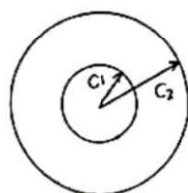
$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

برای سطح مقطع دایره J به صورت زیر بدست می آید:



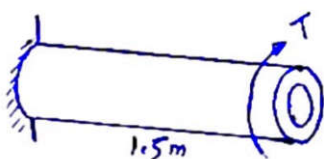
$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$



$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)$$

مسئله: میلگردان توخالی فولادی استوانه ای به طول ۱.۵m و قطر داخلی و خارجی به ترتیب 40mm و 60mm است.

و طبق است بزرگترین گشتاور دایره ای که می توان بر آن وارد کرد تا کرنش از ۱۲۰ مپا تجاوز نکند. مقدار این گشتاور را نیز بیابید.

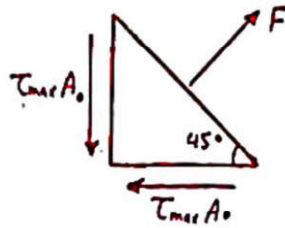
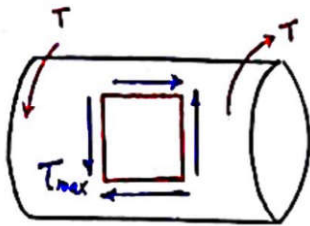


$$T = \frac{J \tau_{max}}{c}, \quad J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} (0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$T = \frac{1.021 \times 10^{-6} \times 120 \times 10^6}{0.03} = 4.08 \text{ KN.m}$$

$$\tau_{min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{max} = \frac{0.02}{0.03} \times 120 \text{ Mpa} = 80 \text{ Mpa}$$

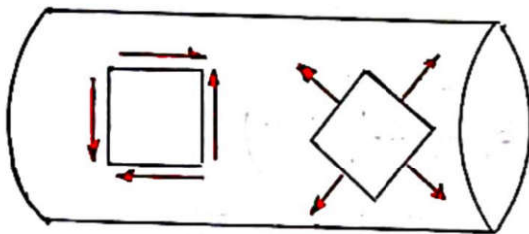
در کل در تیر آن گشت تنش برشی تحت پیچش روی میل به ماکزیم مقدار در رد و اکثر قرار باید میل به تحت پیچش به
تفسیر شکل پلاستیک برسد یا تخریب شود، این امر روی سطح میل دیده خواهد شد.



حال که الان از سطح میل فرض کنید.

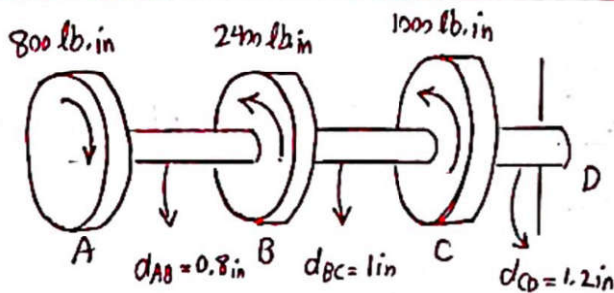
$$F = 2(T_{max} A_0) \cos 45^\circ = T_{max} A_0 \sqrt{2} \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} = \frac{T_{max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = T_{max} = \frac{T_C}{J}$$

پس تحت پیچش روی الان های بازوایی صفر فقط تنش برشی داریم که ماکزیم مقدار را باید حال اگر که الان 45°
در نظر بگیریم ماکزیم تنش نرمال را خواهیم داشت.



$$\therefore \begin{cases} T = T_{max} = \frac{T_C}{J} \\ \sigma = 0 \end{cases} \quad 45^\circ \quad \begin{cases} T = 0 \\ \sigma = \sigma_{max} = \frac{T_C}{J} \end{cases}$$

حال در توان نتیجه گرفت، اگر ماده نرم باشد و تنش برشی را تحمل نکند
تحت پیچش در 0° گسیخته شود و اگر ماده ترد باشد و به
تنش نرمال حساس باشد تحت پیچش در 45° گسیخته می گردد.



مثال: ماکزیم تنش در کدام میل رخ می دهد؟
با نوشتن تعادل $\sum T = 0$ در هر میل در توان گشتاور را
بدست آورد.

$$T_{AB} - 800 = 0 \rightarrow T_{AB} = 800 \text{ lb.in}$$

$$T_{BC} - 800 + 2400 = 0 \rightarrow T_{BC} = -1600 \text{ lb.in}$$

$$T_{CD} - 800 + 2400 + 1000 = 0 \rightarrow T_{CD} = -2600 \text{ lb.in}$$

$$T_{max} = \frac{T_C}{J} = \frac{T_C}{\frac{\pi}{2} C^4} = \frac{2T}{\pi C^3}$$

$$T_{max AB} = \frac{2 \times 800}{\pi (0.4)^3} = 8488 \text{ psi} \rightarrow \text{بیشترین مقدار}$$

$$T_{max BC} = \frac{2 \times 1600}{\pi (0.5)^3} = 8363 \text{ psi}$$

$$T_{max CD} = \frac{2 \times 2600}{\pi (0.6)^3} = 7759 \text{ psi}$$

مثال: انرژی جذب شده توسط میل تحت پیچش در ناحیه الاستیک را بیابید.

مراسله حاصل جذب تنش در کرنش. انرژی جذب شده در واحد حجم است

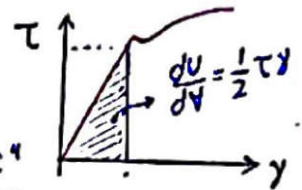
$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau \times \gamma \Rightarrow dU = \frac{\tau \gamma}{2} dV$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad dV = 2\pi \rho L d\rho$$

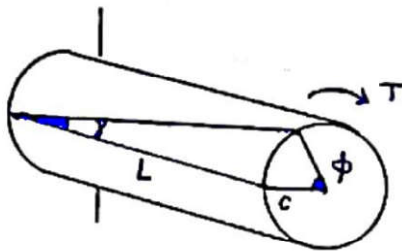
$$dU = \frac{\tau^2}{2G} 2\pi \rho L d\rho, \quad \tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$$

$$U = \int_0^c \frac{\tau_{max}^2 \rho^2}{2G c^2} 2\pi \rho L d\rho = \frac{\tau_{max}^2}{2G} \cdot \frac{2\pi L}{c^2} \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\tau_{max}^2}{2G} \cdot \frac{2\pi L}{c^2} \cdot \frac{c^4}{4}$$

$$V = \pi c^2 L, \quad U = \frac{\tau_{max}^2}{2G} \cdot \frac{\pi L c^2}{2} \Rightarrow U = \frac{\tau_{max}^2}{2G} \left(\frac{1}{2} V \right)$$



* زاویه پیچش در گستره کشش *



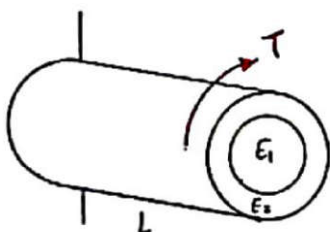
$$C\phi = \gamma_{max} L, \quad \gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}, \quad \tau_{max} = \frac{TC}{J}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

طول $\rightarrow$ T
هندسه سطح $\rightarrow$ GJ هندسه دگشت

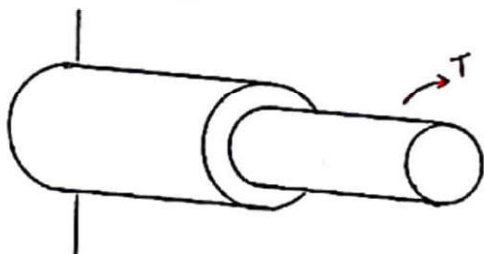
از ترکیب روابط بالا داریم

این رابطه دقیقاً مشابه $\delta = \frac{FL}{EA}$ مربوط به در آن نقش بار، طول، جفت دگشت و هندسه سطح دیده می شود.



$$\text{میل های موازی} : \phi_1 = \phi_2, \quad T = T_1 + T_2$$

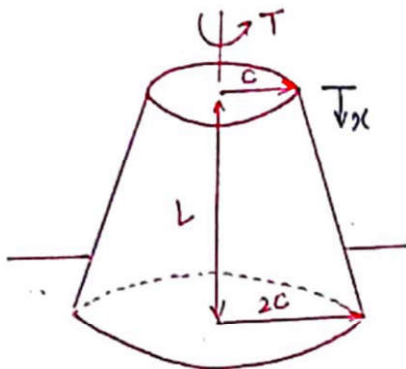
در رابطه با میل های سری و موازی نیز داریم:



$$\text{میل های سری} : \phi = \phi_1 + \phi_2, \quad T = T_1 = T_2$$

پس در کل برای محاسبه میسرت سرهم و یا صلیه های بار مساحت و بار متغیر و توان نوشت :

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad , \quad \phi = \int_0^L \frac{T dx}{J G}$$



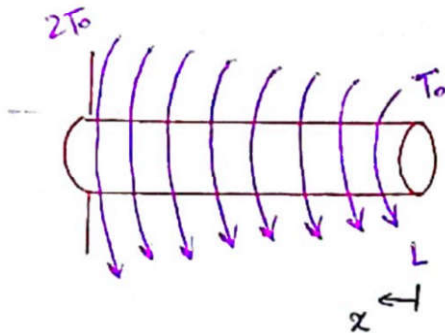
در کل : زاویه پیچش انتهای مخروط ناقص را باید بد.

$$J = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$R = c + \frac{c}{L} x = c \left(1 + \frac{x}{L}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = \frac{\pi}{2} c^4 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^4 \end{array} \right.$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{\frac{\pi}{2} G c^4 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^4} = \frac{2T}{\pi G c^4} \int_0^L \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^4} = \frac{7TL}{12\pi G c^4}$$

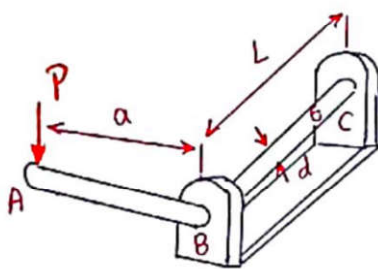
مثال : زاویه پیچش انتهای مخروط راسته صغیر را باید بد.



$$T(x) = T_0 + \frac{T_0}{L} x = T_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \quad , \quad J = \frac{\pi}{2} c^4$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{G J} = \int_0^L \frac{T_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)}{\frac{\pi}{2} c^4 G} dx = \frac{2T_0}{\pi G c^4} \int_0^L \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx = \frac{3T_0 L}{\pi G c^4}$$

مثال : صلیه استوانه ای توسط BC به لهرم صلب AB و تکیه گاه C متصل است. نیروی قائم P وارده بر A باعث جابه جایی Δ در نقطه A می شود. در این صورت تنش برشی ماکزیم در صلیه را باید بد.



$$T = Pa$$

$$\phi = \frac{\Delta}{\alpha}$$

گشتاور وارده بر صلیه BC برابر است با :

تغییر زاویه B نیز متناسب با Δ است.

$$T_{max} = G \gamma_{max} = G \frac{c}{L} \phi = G \frac{c}{L} \frac{\Delta}{\alpha} = \frac{G c \Delta}{2 L \alpha}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow \frac{\Delta}{\alpha} = \frac{PaL}{GJ} \Rightarrow P = \frac{GJ\Delta}{La^2}$$

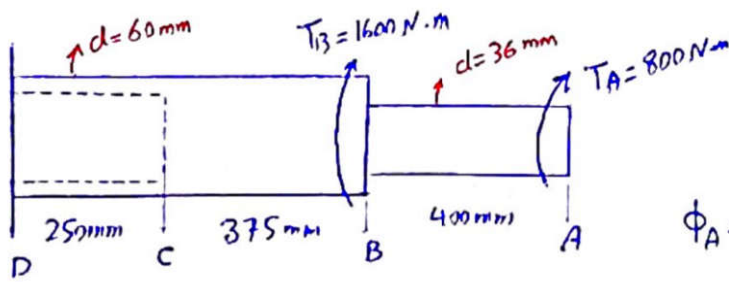
نیروی P را نیز می توان یافت

$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{\Delta}{\alpha} \Rightarrow \phi = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{\alpha} \right) \\ T = Pa \cos \phi \end{cases}$$

البته برای هفت بالاتر باید نوشت :

مسئله: محاسبه زاویه پیچش در A رابسته به AB (G=27 GPa) و BD (G=39 GPa) متصل شده است اگر سمت CD در افقی بوده

و قطر داخلی آن 40mm باشد. زاویه پیچش در A رابسته به



$$\phi_A = \phi_{A/B} + \phi_{B/C} + \phi_{C/D} + \phi_D \rightarrow \text{نکته: } \phi_D = 0$$

$$\phi_A = \frac{T_{AB} L_{AB}}{G_{AB} J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{G_{BC} J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{G_{CD} J_{CD}}$$

AB: $T = 800 \text{ N.m}$, $L = 0.4 \text{ m}$, $G = 27 \times 10^9 \text{ Pa}$, $C = 0.018 \text{ m}$, $J = \frac{\pi}{2} C^4 = 164.896 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \rightarrow \phi = 71.875 \times 10^{-3} \text{ rad}$

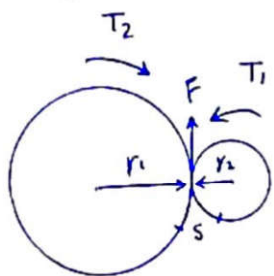
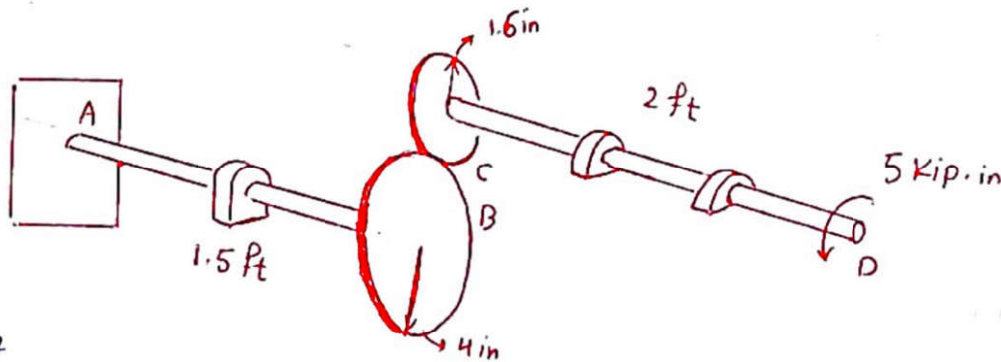
BC: $T = 2400 \text{ N.m}$, $L = 0.375 \text{ m}$, $G = 39 \times 10^9 \text{ Pa}$, $C = 0.03 \text{ m}$, $J = \frac{\pi}{2} C^4 = 1.27234 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \rightarrow \phi = 18.137 \times 10^{-3} \text{ rad}$

CD: $T = 2400 \text{ N.m}$, $L = 0.25 \text{ m}$, $G = 39 \times 10^9 \text{ Pa}$, $C_2 = 0.03 \text{ m}$, $C_1 = 0.02 \text{ m}$, $J = \frac{\pi}{2} (C_2^4 - C_1^4) = 1.02102 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \rightarrow \phi = 15.068 \times 10^{-3} \text{ rad}$

$$\phi_A = \phi_{A/B} + \phi_{B/C} + \phi_{C/D} = (71.875 + 18.137 + 15.068) \times 10^{-3} \text{ rad} = 105.08 \times 10^{-3} \text{ rad} = 6.02^\circ$$

مسئله: طراحی سیستم چرخنده به شکل گرهال نشان داده شده ایجاب میکند که میلگردهای AB, CD هم قطر باشند.

حل اگر $T_{max} = 9 \text{ ksi}$ باشد و زاویه پیچش در D از 2° تجاوز نکند قطر لازم رابسته به $G = 11.2 \times 10^6 \text{ psi}$



$$F = \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2} \Rightarrow T_2 = \frac{r_2}{r_1} T_1$$

$$s = r_1 \phi_1 = r_2 \phi_2 \Rightarrow \phi_2 = \frac{r_1}{r_2} \phi_1$$

نکته: در تماس چرخنده ها داریم:

$$T_{CD} = 5 \text{ kip.in} \Rightarrow T_{AB} = \frac{r_D}{r_C} T_{CD} = \frac{4}{1.6} 5 \times 10^3 \text{ lb.in} = 12.5 \times 10^3 \text{ lb.in} \rightarrow T_{max} = 12.5 \times 10^3 \text{ lb.in}$$

$$T_{max} \text{ برای طراحی: } T_{max} = \frac{T_{max} C}{J} = \frac{2T}{\pi C^3} \Rightarrow C = \sqrt[3]{\frac{2T}{2T_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 12.5 \times 10^3}{2 \times 9 \times 10^3}} = 0.8842 \text{ in}$$

$$\text{طراحی با زاویه پیچش: } \phi_D = 2^\circ = 34.907 \times 10^{-3} \text{ rad}, \phi_B = \phi_{B/A} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{GJ}, \phi_C = \frac{r_B}{r_C} \phi_B, \phi_D = \phi_C + \phi_{D/C}$$

$$\phi_D = \frac{4}{1.6} \times \frac{12.5 \times 10^3 \times 1.5}{GJ} + \frac{5 \times 10^3 \times 2}{GJ} \Rightarrow GJ = 19.552 \times 10^6 \text{ lb.in} \Rightarrow C = \sqrt[4]{\frac{2GJ}{\pi G}} = 1.0267 \text{ in}$$

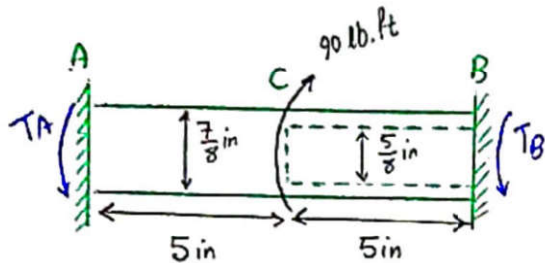
$$C = 1.0267 \text{ in} \Rightarrow d = 2 \times 1.0267 = 2.0534 \text{ in}$$

قطر سیستم انتخاب کنیم تا هر دو را کنترل کند

* مسائل نامعین استاتیکی *

با استفاده از روابط زاویه‌ی پیچش می‌توان مسائل نامعین استاتیکی را حل کرد.

برای مثال یک میل دایره‌ای AB را فرض کنید که طول 10 in و قطر $\frac{7}{8}$ in دارد و حفه‌ای به طول 5 in و قطر $\frac{5}{8}$ in در انتهای B دارد. اگر میل از طرف به یک‌تکه به ثابت متصل باشد و گشتاوری برابر 90 lb.ft در وسط آن وارد شود.



عکس العمل یک‌تکه به‌ها را ببینید.

معادله استاتیکی $T_A + T_B = 90 \text{ lb.ft}$

حل چون یک‌تکه به ثابت داریم پس تغییر زاویه نداریم و می‌توان نوشت:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{T_A L_1}{J_1 G} + \frac{(-T_B) L_2}{J_2 G} = 0 \Rightarrow \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \Rightarrow T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

$$L_1 = L_2 = 5 \text{ in}, \quad J_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{7}{16} \text{ in} \right)^4 = 57.6 \times 10^{-3} \text{ in}^4 \quad \Rightarrow T_B = 0.74 T_A$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{7}{16} \text{ in} \right)^4 - \left(\frac{5}{16} \text{ in} \right)^4 \right] = 42.6 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

$$\Rightarrow 1.74 T_A = 90 \text{ lb.ft}$$

$$\Rightarrow T_A = 51.7 \text{ lb.ft}, \quad T_B = 38.3 \text{ lb.ft}$$

* طراحی میل‌گردان‌های انتقال *

همچنین کاربرد سفت‌ها، انتقال گشتاوری پیچشی است برای میل انتقال گشتاور از توربین به ژنراتور برای تولید برق.

در توربین توان P را تولید کند و با سرعت ω می‌چرخد خواصیم داشت:

$P = T \omega$ سرعت زاویه‌ای

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow P = 2\pi f T$$

سرعت زاویه‌ای را می‌توان بر حسب فرکانس f نیز نوشت.

با این فرمول می‌توان قطر سفت را یافت $\Rightarrow \frac{J}{C} = \frac{T}{\tau_{max}} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{TC}{J}$

برای واحد های زیر را می‌توان مشاهده کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ rpm} = \frac{1}{60} \text{ Hz} = \frac{2\pi}{60} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \\ 1 \text{ hp} = 550 \text{ ft.lb/s} = 6600 \text{ in.lb/s} \end{array} \right.$$

مثال: در میل گردان فولادی باید 150 KW را در سرعت 360 rpm انتقال دهند. برانیم که $G = 77.2 \text{ GPa}$ میل گردان توپری طراحی کنید به نحوی که تنش ماکزیم آن از 50 MPa و زاویه پیچش آن در طول 2.5m از 3° تجاوز نکند.

$$P = 150 \text{ KW} = 150 \times 10^3 \text{ W}, \quad f = \frac{360 \text{ rpm}}{60} = 6 \text{ Hz}, \quad T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{150 \times 10^3}{2\pi \times 6} = 3.9789 \times 10^3 \text{ N.m}$$

$$\tau = 50 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad \frac{J}{C} = \frac{T}{\tau_{\max}} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} C^4}{C} = \frac{T}{\tau_{\max}} \Rightarrow C = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi \tau_{\max}}}$$

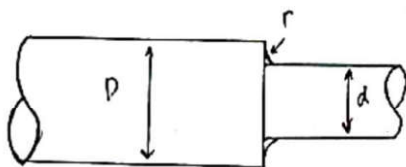
$$C = \sqrt[3]{\frac{2 \times 3.9789 \times 10^3}{\pi \times 50 \times 10^6}} = 37 \times 10^{-3} \text{ m} = 37 \text{ mm}$$

$$\phi = 3^\circ = 52.36 \times 10^{-3} \text{ rad}, \quad \phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{2TL}{\pi G C^4} \Rightarrow C = \sqrt[4]{\frac{2TL}{\pi G \phi}} = 35.38 \text{ mm}$$

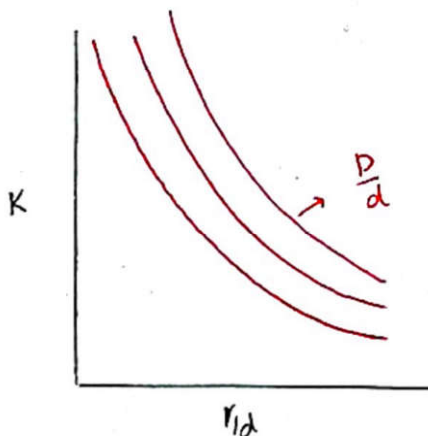
حالت طبق تنش و زاویه 2 مقدار برای شعاع یافته ایم که باید مقدار بزرگتر را انتخاب کنیم.
 $d = 2C = 74 \text{ mm}$

* ضریب تمرکز تنش پیچشی *

همانگونه که در اعضای کششی و تنش نرمال ضریب تمرکز تنش داریم، برای پیچش و تنش برشی نیز ضریب تمرکز تنش را داریم و طبق خنده می توان این ضریب را یافت.



$$\tau_{\max} = K \frac{\tau C}{J}$$



مثال: برانیم که میل گردان پیکانی نشان داده شده باید با سرعت 2100 rpm توان 45 KW را انتقال دهد. معین کنید شعاع r نیم ماهیچه را اگر تنش برشی مجاز آن از 50 MPa تجاوز نکند.



$$f = \frac{2100}{60} = 35 \text{ Hz}, \quad P = 45 \times 10^3 \text{ W}, \quad T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{45 \times 10^3}{2\pi \times 35} = 204.63 \text{ N.m}$$

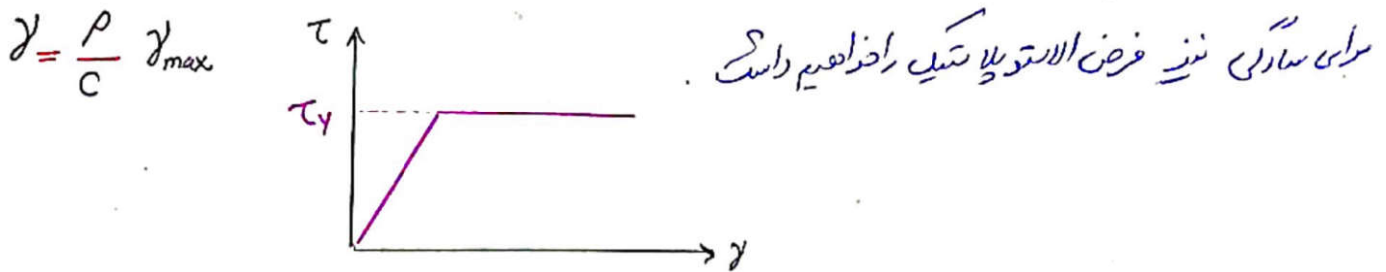
$$C = \frac{1}{2} d = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m}, \quad \tau = \frac{KTC}{J} = \frac{2KT}{\pi C^3} \Rightarrow K = \frac{\pi \tau C^3}{2T} = 1.295$$

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{30} = 2, \quad K = 1.295 \Rightarrow \frac{r}{d} = 0.17 \Rightarrow r = 5.1 \text{ mm}$$

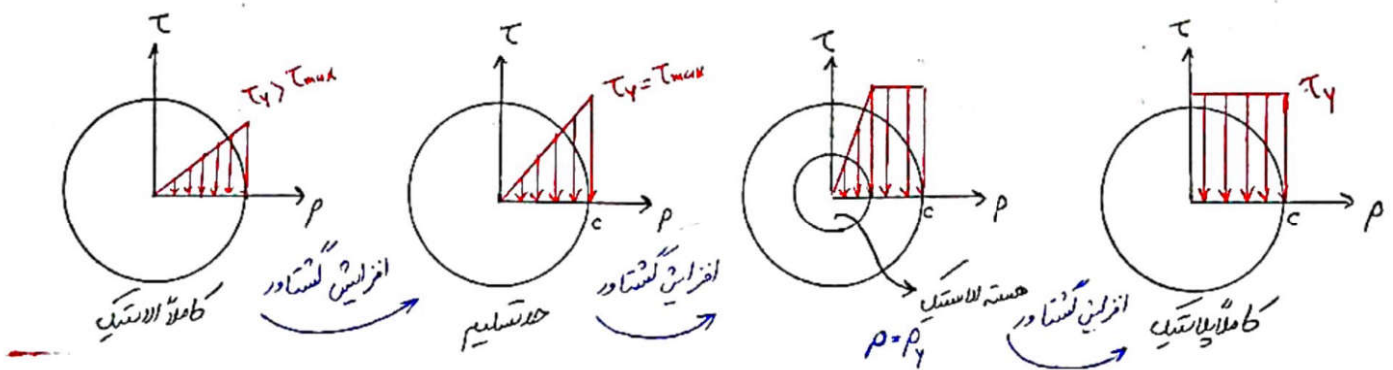
از شکل نمودار داریم:

* تغییر شکل پلاستیک *

در ابتدا برای بدست آوردن روابط تنش و کرنش در حالت بیجوشی، فرض الاستیک را داریم، حال بخواهیم تغییر شکل موصلان یا پلاستیک را بررسی کنیم. البته رابطه‌ی کرنش با سنج در این نیز برقرار است.



نکته‌ی مهمی که در این داریم این است که وقتی مقدار تنش به حد بیجوشی $\tau_{max} = \tau_y$ گردد در این صورت تغییر شکل پلاستیک شروع می‌شود و این تغییر شکل از روی سطح شروع می‌شود زیرا در بیجوشی، سطح مدی بیجوشی تنش را دارد.



برای محاسبه گشتاور داریم:

$$\tau_{max} = \frac{TC}{J} \Rightarrow \tau_y = \frac{J}{C} \tau_y = \frac{1}{2} \pi c^3 \tau_y$$

در حالت پلاستیک $\tau = \frac{\tau_y}{\rho_y} \rho$ ، $T = \int \rho \tau dA = 2\pi \int \rho^2 \tau d\rho$

$$\Rightarrow T = 2\pi \int_0^{\rho_y} \rho^2 \left(\frac{\tau_y}{\rho_y} \rho \right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_y}^c \rho^2 \tau_y d\rho = \frac{1}{2} \pi \rho_y^3 \tau_y + \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_y - \frac{2}{3} \pi \rho_y^3 \tau_y$$

$$\Rightarrow T = \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_y \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_y}{c} \right)^3 \right) \Rightarrow T = \frac{4}{3} \tau_y \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_y}{c} \right)^3 \right)$$

$$T = \frac{4}{3} \tau_y \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) = \frac{31}{24} \tau_y$$

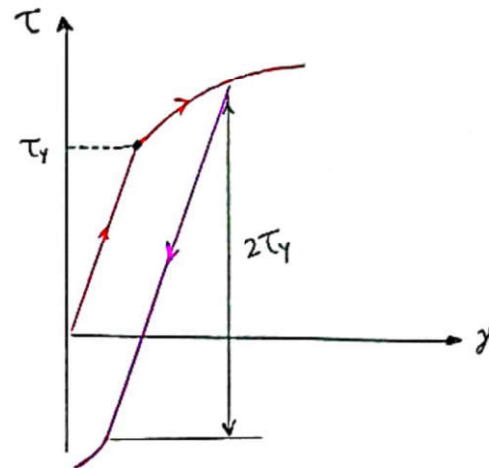
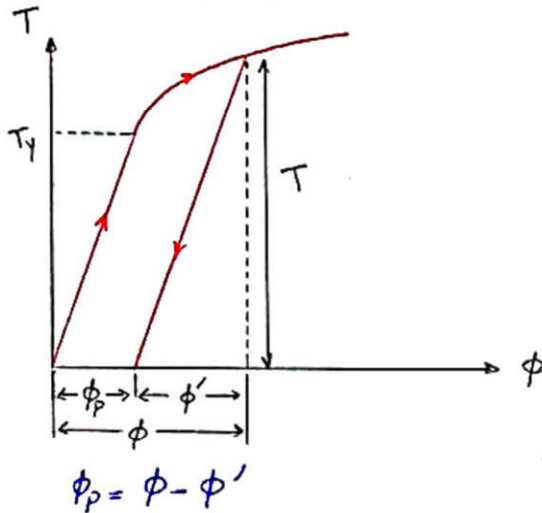
مثلاً اگر بخواهیم $\rho_y = \frac{c}{2}$ بخش پلاستیک باشد داریم.

و اگر بخواهیم کاملاً پلاستیک باشد داریم:

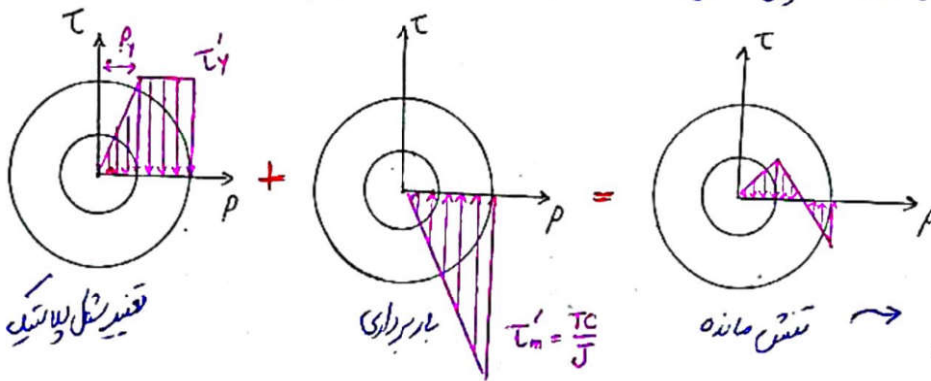
$$\rho_y = 0 \Rightarrow T_p = \frac{4}{3} \tau_y$$

* تنش های مانده *

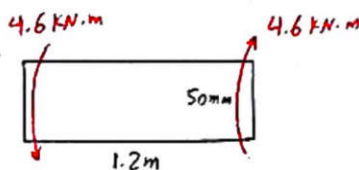
در تنش درگشت برشی شیب دقت با برابری در گشت عودار به صورت خطی و موازی با حالت الاستیک پائین می آید.



نکته مهم: در حالت با برابری کاملاً خطی می باشد پس تنش های مانده به صورت زیر خواهد بود.



مثال: میل گران دایره ای توخالی به طول 1.2m و قطر 50mm در معرض گشتاور برشی 4.6 kN.m قرار دارد با فرض استحکام تسلیم برشی 150 MPa و مدول مدالت 77 GPa، نوع هسته گشتاور، زاویه پیچش و تنش های مانده را پس از با برابری ایلم کنید.



$$J = \frac{\pi}{2} C^4 = \frac{\pi}{2} (25 \times 10^{-3})^4 = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$T_y = \frac{J T_y}{C} = \frac{614 \times 10^{-9} \times 150 \times 10^6}{25 \times 10^{-3}} = 3.68 \text{ kN.m}$$

$$T = \frac{4}{3} T_y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_y^3}{C^3}\right) \Rightarrow \left(\frac{\rho_y}{C}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_y} = 0.25 \Rightarrow \frac{\rho_y}{C} = 0.63 \rightarrow \rho_y = 15.8 \text{ mm}$$

$$\phi_y = \frac{T_y L}{J G} = \frac{3.68 \times 10^3 \times 1.2}{614 \times 10^{-9} \times 77 \times 10^9} = 93.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\frac{\phi_y}{\phi} = \frac{\rho_y}{C} \Rightarrow \phi = \frac{C}{\rho_y} \phi_y = \frac{50}{15.8} \times 93.4 \times 10^{-3} = 148.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

زاویه پیچش تقریباً 148.3 درجه خواهد بود.

$$\phi = 8.5^\circ$$

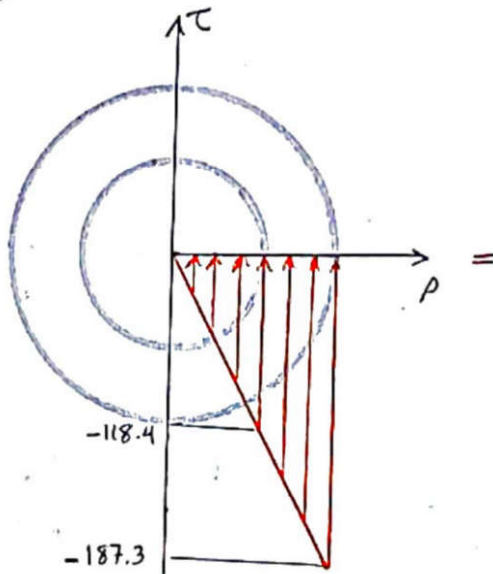
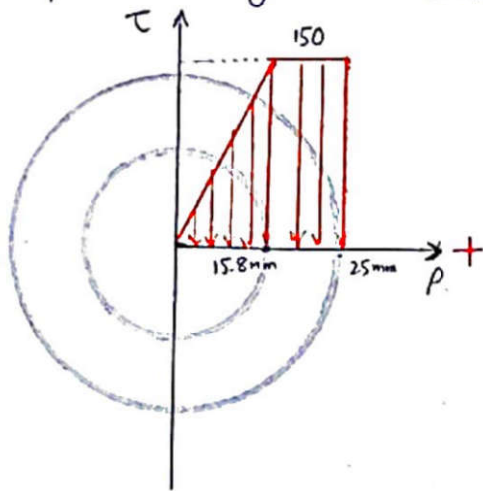
حال اگر بار بر دای گنیم یک تغییر شکل زاویه ای بیچش در سله می ماند

$$\phi_p = \phi - \phi'$$

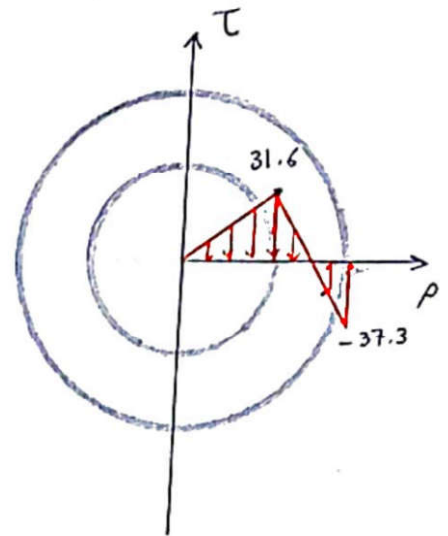
$$\phi = 8.5^\circ, \quad \phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{4.6 \times 10^3 \times 1.2}{614 \times 10^2 \times 77 \times 10^3} = 116.8 \times 10^{-3} \text{ rad} = 6.69^\circ$$

$$\Rightarrow \phi_p = 8.5^\circ - 6.69^\circ = 1.81^\circ$$

$$\tau'_{max} = \frac{TC}{J} = \frac{4.6 \times 10^3 \times 25 \times 10^{-3}}{614 \times 10^2} = 187.3 \text{ MPa}$$

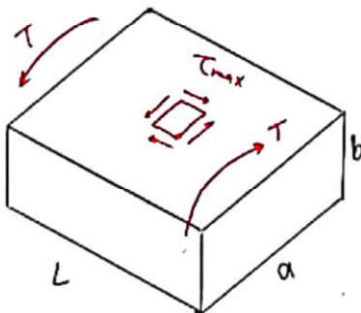


برای تنش های دانه می داریم:



* مقاطع غیر دایری *

اگر مقطع هلیه به صورت مستطیلی باشد می بایستی J کس تغییر می کند و کاملاً به نسبت طول در عرض وابسته خواهد بود.



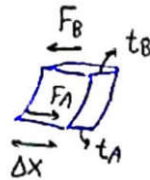
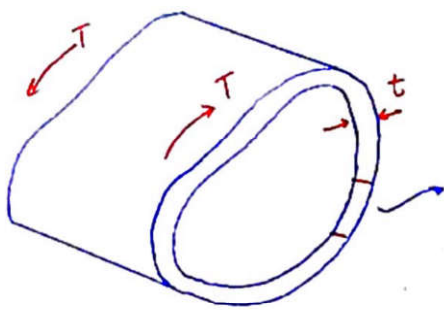
$$\tau_{max} = \frac{T}{C_1 a b^3}$$

$$\phi = \frac{TL}{C_2 a b^3 G}$$

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{b}{a} \right) \quad \left(\frac{a}{b} \geq 5 \right)$$

a/b	C_1	C_2
1	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3	0.267	0.263
4	0.282	0.281
5	0.291	0.291
10	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

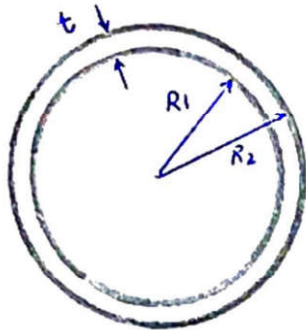
* مقاطع جدار نازک



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_A - F_B = 0$$

$$\tau_A (t_A \Delta x) - \tau_B (t_B \Delta x) = 0 \rightarrow \tau_A t_A = \tau_B t_B = \text{مقدار ثابت}$$

پس مقدار τt در مقطع جدار نازک ثابت است که به آن جریان برشی گویند.



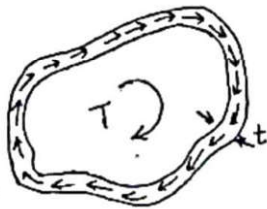
$$J = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{2} (R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)$$

برای یافتن J نیز داریم:

$$J = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{2R^2} \right) \left(\frac{R_2 + R_1}{2R} \right) \left(\frac{R_2 - R_1}{t} \right) \xrightarrow{R_2 = R_1} J = 2\pi R^3 t$$

درکل برای مقاطع جدار نازک تحت پیچش داریم:

۱- پیچش در مقاطع جدار نازک نسبت



$$\leftarrow \text{تنش برشی حداکثر از راجعه} \quad \tau_{max} = \frac{T}{2A_m t} \quad \text{به دست می آید که } A_m$$

سطح محصور در تورق جدار نازک است و t نیز باید کمترین ضخامت انتخاب شود.

$$q = \tau t$$

جریان برشی ایجاد شده در مقطع جدار نازک نسبت ثابت است.

(A_m محیط مقطع جدار نازک
 A_m مساحت مقطع جدار نازک)

$$J = \frac{4A_m^2}{a_m t}$$

← همان انیسی قطبی J نیز درکل به صورت τ و t می آید.

۲- پیچش در مقاطع جدار نازک باز



$$\tau_{max} = \frac{T t}{J}$$

← تنش برشی حداکثر برابر است با:

$$J = \frac{1}{2} a_m t^3 \quad \text{در این رابطه } J \text{ یا همان انیسی قطبی به این صورت می آید.}$$

$$\tau_{max} = \frac{T t_{max}}{J}, \quad J = \frac{1}{3} \sum a_m t_i^3$$

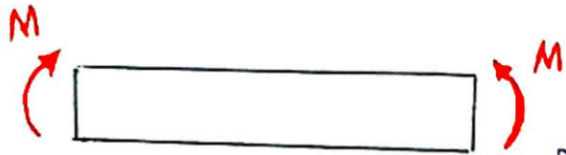
البتة اگر ضخامت مقطع t ثابت نباشد داریم:

پس میتوان گفت: تنش برشی حداکثر در مقاطع جدار نازک نسبت در ضخامت حداقل ایجاد می شود و برای مقاطع جدار نازک باز

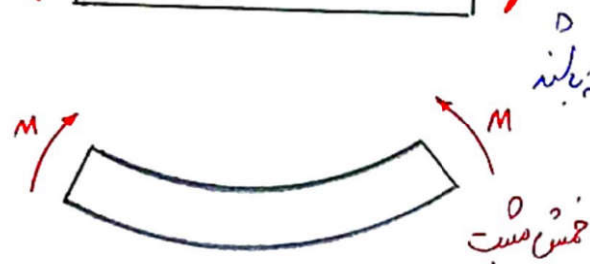
برعکس، تنش برشی حداکثر در ضخامت حداکثری مقطع رخ دهد.

فصل چهارم: خمش خالص

همانطور که قبلاً گفته شده گشتاور خمشی چون باعث تغییر طول در نود، تنش نرمال را به همراه دارد.



طبقه قرار دارد اگر تحت خمش تارهای بالایی تنیده می‌شوند



و کماقوس طول ببرد و تارهای پایینی کشیده شوند و افزایش طول داشته باشند

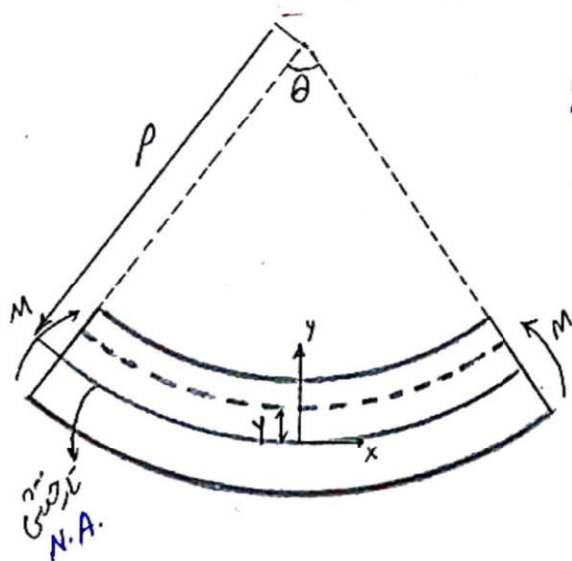
خمش را مثبت فرض می‌کنند و خلاف آن، منفی خواهند بود.



به کرنش در اثر خمش

عوضه تیر تحت خمش مثبت قرار گیرد قسمت بالایی آن فشرده می‌شود و قسمت پایینی آن کشیده می‌شود، در این میان مقیاس تیر وجود دارد که

تغییر طول ندارد که تار خنثی نامیده می‌شود. حال اگر مبدأ مختصات را روی تار خنثی بگذاریم، خواهیم داشت:



طول اولیه‌ی همدی قسمتهای تیر با طول تار خنثی برابر است

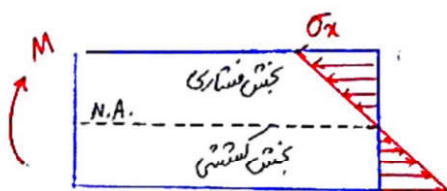
طول ثانویه را با فاصله از تار خنثی می‌توان یافت:

$$S = L - L_0 = \rho\theta - y\theta - \rho\theta = -y\theta$$

$$\epsilon_x = \frac{S}{L_0} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \Rightarrow \boxed{\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}}$$

$$\sigma_x = E\epsilon_x \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{-Ey}{\rho}}$$

م سنج انحنای تار خنثی



ما گشتاری است که محور آن در راستای z است

ابتدا σ_x را با ضرب کردن در مساحت dA تبدیل به نیرو می‌کنیم

از آنجایی که تعادل استاتیکی برقرار است، داریم:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{-E y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \Rightarrow \int y dA = 0$$

این یعنی محل تار خنثی و مبدأ مختصات در محلی است که گشتاور اول سطح به مابینین صفر است.

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = 0 \rightarrow \bar{y} = 0$$

پس می‌توان گفت تار خنثی بر روی مرکز سطح قرار دارد.

$$\sum M = 0 \rightarrow M_z + \int y \sigma_x dA = 0$$

حال از معادله‌ی گشتاور داریم:

$$M_z = - \int y \sigma_x dA = - \int y \left(-\frac{E}{\rho} y \right) dA = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA \rightarrow I_z \text{ گشتاور دوم سطح نسبت به محور } z$$

$$M_z = \frac{E I_z}{\rho} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{E}{\rho} y \Rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{y M_z}{I_z}}$$

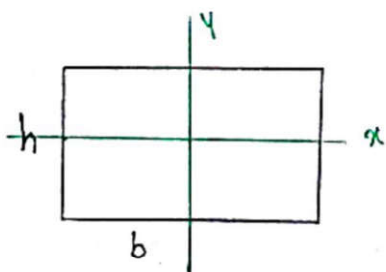
$$\sigma_x = -\frac{z M_y}{I_y} \text{ اگر گشتاور حول محور } y \text{ بود این بار راست می‌شد}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M C}{I}$$

اگر C بیشترین فاصله از تار خنثی باشد، ماکزیم تنش به این صورت خواهد بود.

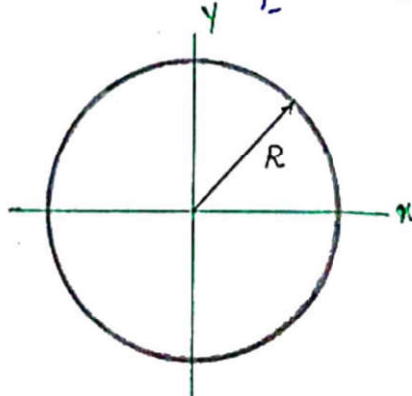
$$S = \frac{I}{C} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{S}$$

یا تعریف مود گشتاوی داریم:



$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

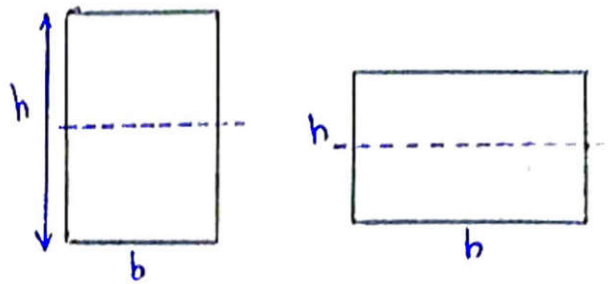


$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} R^4$$

مردود کشسان در صورت هایل به صورت زیر است :

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}(bh)h = \frac{1}{6}Ah$$

این یعنی در مناطقی که مساحت کشسان دارند، مقطع به عمق یا به سبب ستری دارد و سبب ستری دارد و در برابر خمش مقاوم تر است.



* نکته ی مهم دیگر که بایستی درین مقادیر مصالح 2 دانخی تیر است، شواخ انخی آن مر باشد.

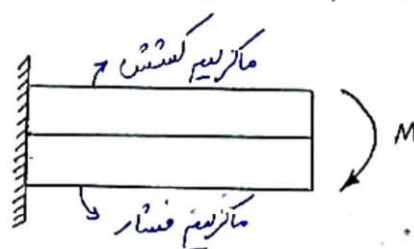
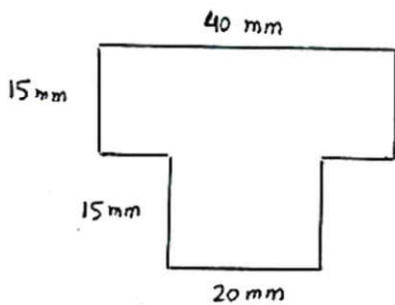
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{C} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{EC} = \frac{1}{EC} \cdot \frac{MC}{I} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

نکته ی دیگر نیز این است که بایستی در کشش در راستی x، در راستی y و z نیز کشش جانبی خواهیم داشت.

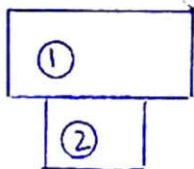
$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}, \quad \epsilon_y = -\nu \epsilon_x = \frac{\nu y}{\rho}, \quad \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = \frac{\nu y}{\rho}$$

مثال: تیر نشان دار شده برای اینکه تنش مجز آن 24MPa در کشش و 30MPa در فشار باشد از نایلون ساخته شده است

مطلوب است: بیشترین کوپل M که بتوان بر آن وارد کرد.



ابتدا باید مرکز سطح را بیابیم تا ارتفاع بیشترین کشش و فشار را بیابیم.



	$\bar{y}, \text{mm}$	A, mm^2	$A\bar{y}, \text{mm}^3$
①	22.5	600	13.5×10^3
②	7.5	300	2.25×10^3
Σ		900	15.75×10^3

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{15.75 \times 10^3}{900} = 17.5 \text{ mm}$$

$$y_{\text{بالا}} = 30 - 17.5 = 12.5 \text{ mm}$$

پس فاصله خنثی 17.5 mm بالای قاعده است داریم:

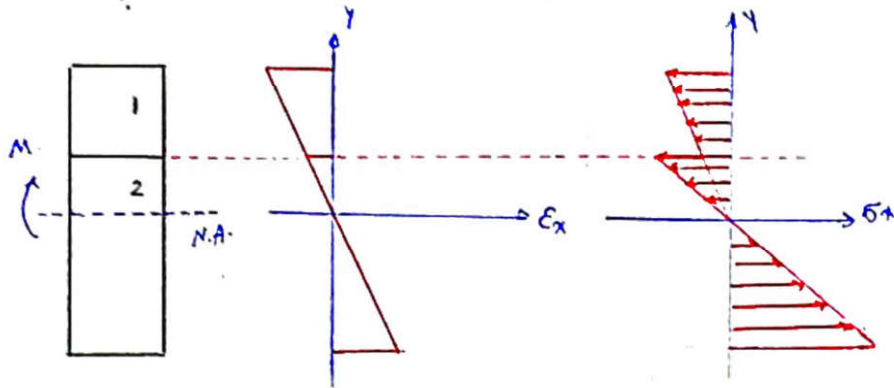
$$y_{\text{پایین}} = -17.5 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 d_1^2 = \frac{1}{12} (40)(15)^3 + 600 (5)^2 = 26.25 \times 10^3 \text{ mm}^4 \\ I_2 &= \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2 = \frac{1}{12} (20)(15)^3 + 300 (10)^2 = 35.625 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned} \right\} \text{ کل } I = I_1 + I_2 = 61.875 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$M = \left| \frac{\sigma I}{y} \right| \begin{cases} \text{بالا: کشش} \rightarrow M = \frac{24 \times 10^6 \times 61.875 \times 10^3}{0.0125} = 118.8 \text{ N}\cdot\text{m} \\ \text{پایین: فشار} \rightarrow M = \frac{30 \times 10^6 \times 61.875 \times 10^3}{0.0175} = 106.1 \text{ N}\cdot\text{m} \end{cases} \rightarrow M_{\text{max}} = 106.1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

جنس‌های مختلف که از جنس‌های ساده ساخته شده‌اند

وقتی یک ماده از جنس‌های مختلف تشکیل شده باشد - در یک تغییر جنس، کرنش تغییر نمی‌کند ولی تنش متفاوت خواهد بود.



در این تفاوت در تنش، مدول کشسان

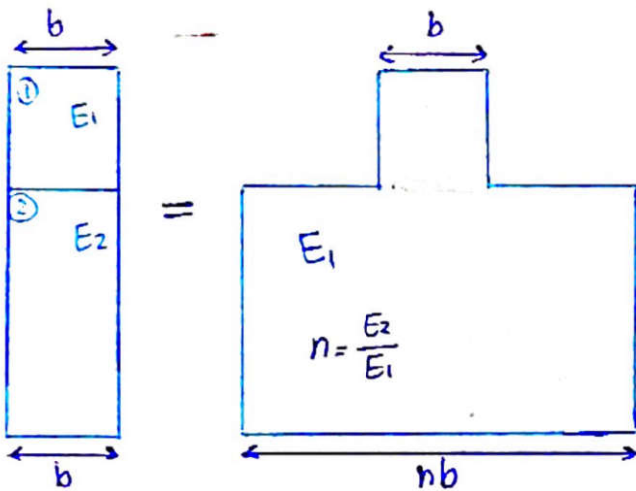
E_1 و E_2 متفاوت دو ماده است.

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_x, \quad \sigma_2 = E_2 \epsilon_x$$

برای آنکه جنس‌های مختلف با تغییر مساحت و طول این تغییر تنش را ای‌دی کرد

$$n = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{E_2 \epsilon_x}{E_1 \epsilon_x} \Rightarrow n = \frac{E_2}{E_1}, \quad F = \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2$$

$\Rightarrow \sigma_1 A_1 = n \sigma_1 A_2 = \sigma_1 (n A_2) \rightarrow$ برای یکسان شدن تنش کافیست مساحت را n برابر کنیم.



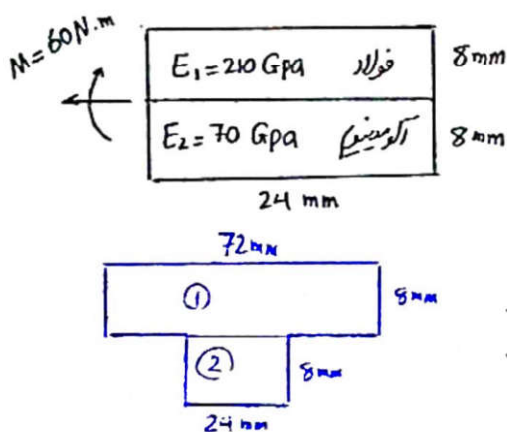
برای n برابر کردن مساحت به ارتفاع است یعنی

و عرض را n برابر می‌کنیم زیرا ارتفاع در تنش

$$\sigma = \frac{-My}{I}$$

$$\sigma_2 = n \sigma'_2$$

برای شکل مشابهی متشکل از فولاد و آلومینیوم را در نظر بگیرید.



$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{210}{70} = 3 \rightarrow$$

مساحت فولاد را 3 برابر می‌کنیم تا

در یک جنس آن با آلومینیوم برابر شود.

	$\bar{y}, \text{mm}$	A, mm^2	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
①	12	192×3	6912
②	4	192	768
Σ		768	7680

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{7680}{768} = 10 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{n}{12} b_1 h_1^3 + n A_1 d_1^2 = \frac{3}{12} (24)(8)^3 + (576)(2)^2 = 5.376 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2 = \frac{1}{12} (24)(8)^3 + (192)(6)^2 = 7.936 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\rightarrow I = 13.312 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

برای یافتن ماکزیمم تنش در قسمت آلومینیومی داریم:

$$\sigma_a = \frac{-My}{I} = \frac{-60 \times (-0.01)}{13.312 \times 10^{-9}} = 45.1 \text{ MPa}$$

کشی

اما در قسمت فولادی تنش را باید 3 برابر کنیم تا 3 برابر شدن مساحت خنثی شود. (n برابر شدن مساحت، تنش را $\frac{1}{n}$ می کند)

$$\sigma_s = \frac{-My n}{I} = \frac{-3 \times 60 \times (0.006)}{13.312 \times 10^{-9}} = -81.1 \text{ MPa}$$

فشاری

مدل مهم دیگر از این بحث، بتن مسلح می باشد. قبلاً اشاره کردیم که بتن فشار را به خوبی می تواند تحمل کند ولی در کشش ضعیف است. برای رفع این مشکل در بخشی که تحت کشش است، میلای فولادی می افزودند تا بتن در برابر کشش مقاوم باشد.

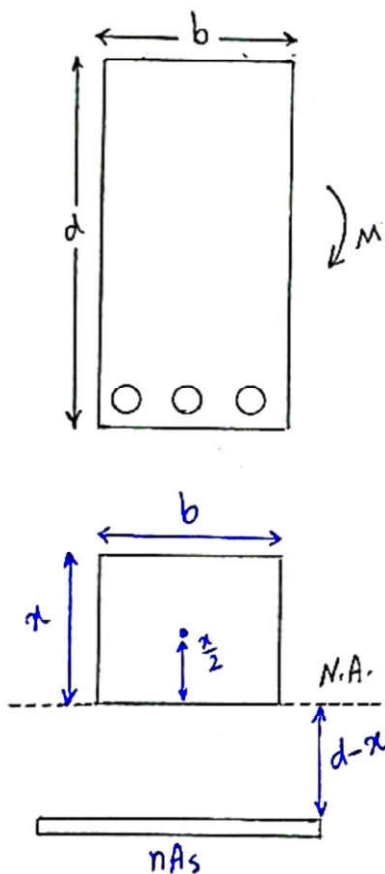
برای تحلیل قسمت تحت کشش بتن را حذف کرده فقط فولاد را در نظر می گیریم

و برابر یکسان کردن جنس مساحت فولاد را n برابر می کنیم

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

مدل تار خنثی از بالا را بنویسید x فرض می کنیم

و برای یافتن محل آن باید گشتاور اول را مساوی صفر قرار دهیم.



$$(bx) \left(\frac{x}{2} \right) - nA_s (d - x) = 0$$

$$\frac{1}{2} bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0$$

$$I = \frac{1}{3} bx^3 + nA_s (d - x)^2$$

از حل معادله x بدست می آید.

حال ماکزیمم تنش فشاری و کششی را می گوییم

ماکزیمم تنش فشاری در بتن

$$\sigma_{max,c} = \frac{Mx}{I}$$

ماکزیمم تنش کششی در فولاد

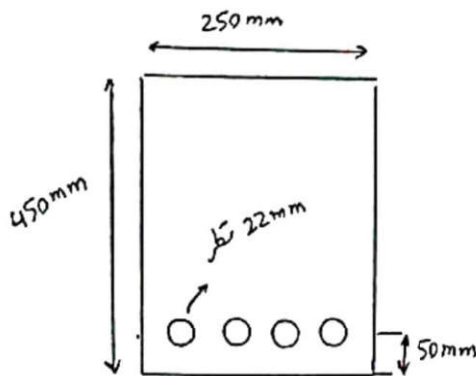
$$\sigma_{max,s} = \frac{nM(d-x)}{I}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max,c} &= \frac{Mx}{I} \\ \sigma_{max,s} &= \frac{nM(d-x)}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{n(d-x)}{x} \Rightarrow x \frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{E_s}{E_c} (d-x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_c} + \frac{E_s}{E_c} \right) x = \frac{E_s}{E_c} d \Rightarrow x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_s E_c}{\sigma_c E_s}}$$

مسئله: تیر بتن مسلح شده در معرض گشتاور خمشی مثبت 175 kN.m قرار دارد. اگر $E_s = 200 \text{ GPa}$, $E_c = 25 \text{ GPa}$ باشد.

تنش ماکزیم فولاد و بتن را تعیین کنید.



$$\left. \begin{array}{l} E_s = 200 \text{ GPa} \\ E_c = 25 \text{ GPa} \end{array} \right\} n = \frac{E_s}{E_c} = 8$$

$$D = 22 \text{ mm} \rightarrow A_s = 4 \times \frac{\pi}{4} D^2 = 1.5205 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$nA_s = 12.164 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$b = 250 \text{ mm}, d = 450 - 50 = 400 \text{ mm} \rightarrow \frac{1}{2} b x^2 + nA_s x - nA_s d = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times 250 x^2 + 12.164 \times 10^3 x - 12.164 \times 10^3 \times 400 = 0$$

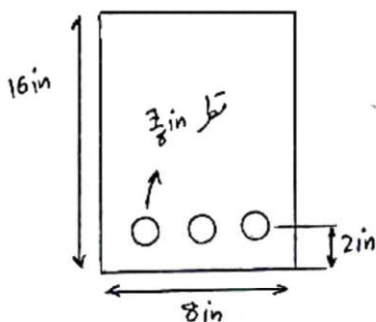
$$125 x^2 + 12.164 \times 10^3 x - 4.8657 \times 10^6 = 0 \rightarrow x = 154.55 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{3} b x^3 + nA_s (d - x)^2 = \frac{1}{3} (250) (154.55)^3 + 12.164 \times 10^3 (400 - 154.55)^2$$

$$I = 1.0404 \times 10^{-3} \text{ m}^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{nM(d-x)}{I} = \frac{8 \times 175 \times 10^3 \times (400 - 154.55) \times 10^{-3}}{1.0404 \times 10^{-3}} = 330 \text{ MPa} \\ \sigma_c = \frac{Mx}{I} = \frac{175 \times 10^3 \times 154.55 \times 10^{-3}}{1.0404 \times 10^{-3}} = 26 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

مسئله: تیر بتنی که توسط سه ضلع فولادی تقویت شده مطابق شکل داده شده است. مدول‌های کشسانی برای بتن $3 \times 10^6 \text{ psi}$ و برای فولاد $30 \times 10^6 \text{ psi}$ است. با استفاده از تنش مجاز 1350 psi برای بتن و 20 ksi برای فولاد

مطلوب است بیشترین گشتاور خمشی مثبت مجاز در تیر



$$n = \frac{E_s}{E_c} = 10, \quad A_s = 3 \times \frac{\pi}{4} D^2 = 3 \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{7}{8} \right)^2 = 1.8040 \text{ in}^2$$

$$nA_s = 18.04 \text{ in}^2$$

$$8 \frac{x}{2} - (18.04)(14 - x) = 0 \rightarrow 4x^2 + 18.04x - 252.56 = 0$$

$$x = 6.005 \text{ in}, \quad d - x = 7.995 \text{ in}$$

$$I = \frac{1}{3} 8 x^3 + 18.04 (14 - x)^2 = 1730.4 \text{ in}^4$$

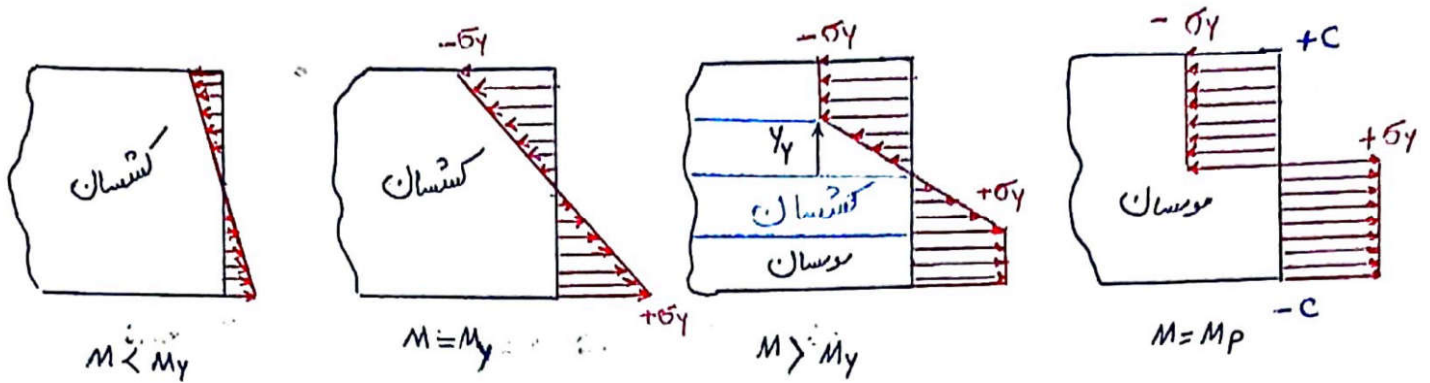
$$\text{بتن} \quad \sigma_c = \frac{Mx}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_c I}{x} = \frac{1350 \times 1730.4}{6.005} = 389 \times 10^3 \text{ lb.in} = 389 \text{ Kip.in}$$

$$\text{فولاد} \quad \sigma_s = \frac{nM(d-x)}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_s I}{n(d-x)} = \frac{20 \times 10^3 \times 1730.4}{10 \times 7.995} = 433 \times 10^3 \text{ lb.in} = 433 \text{ Kip.in}$$

بن بیشترین مقدار گشتاور مجاز 389 Kip.in خواهد بود.

* تغییر شکل مومسان *

در خمش نیر مانند پیچش تغییر شکل پلاستیک از روی سطح شروع می‌شود و در عمق نفوذ می‌کند.
برای بررسی تغییر شکل مومسان در خمش از فرض ساده شده ماده الاستو-پلاستیک استفاده می‌کنیم.



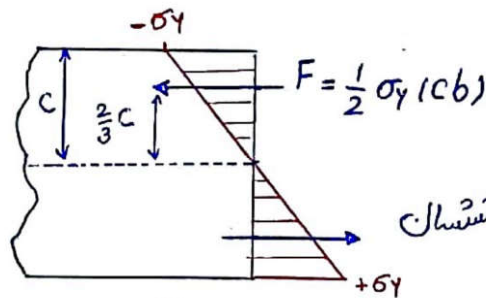
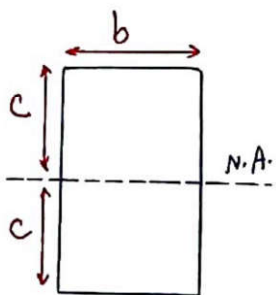
$$I = \frac{1}{12} b (2c)^3 = \frac{2}{3} bc^3, \quad M_Y = \frac{I}{c} \sigma_Y = \frac{2}{3} bc^2 \sigma_Y$$

$$M = M_{el} + M_{pl} = -2b \int_0^{y_Y} y \left(-\frac{\sigma_Y}{y_Y} \right) dy - 2b \int_{y_Y}^c y (-\sigma_Y) dy$$

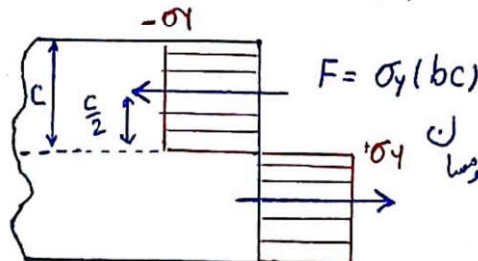
$$M = \frac{2}{3} b y_Y^2 \sigma_Y + bc^2 \sigma_Y - b y_Y^2 \sigma_Y = bc^2 \sigma_Y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{3}{2} M_Y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2} \right) \xrightarrow{y_Y=0} M_P = \frac{3}{2} M_Y$$

برای سادگی نسبت M_Y و M_P می‌توان از روش زیر استفاده کرد.



$$M_Y = 2 \times \frac{2}{3} c \times \frac{1}{2} \sigma_Y c b = \frac{2}{3} \sigma_Y b c^2$$

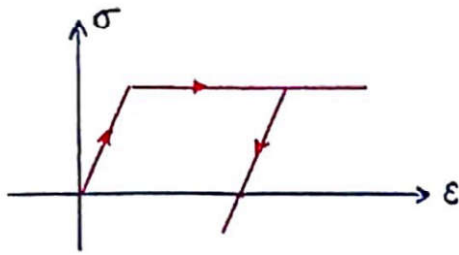


$$M_P = 2 \times \frac{c}{2} \times \sigma_Y (bc) = \sigma_Y b c^2$$

$$\frac{M_P}{M_Y} = \frac{\sigma_Y b c^2}{\frac{2}{3} \sigma_Y b c^2} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow M_P = \frac{3}{2} M_Y$$

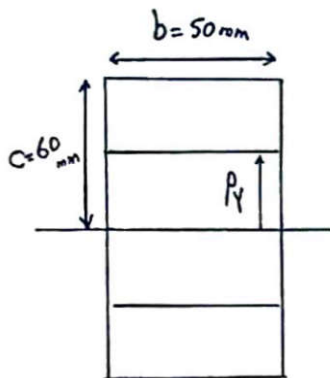
در این نیز با زیاد شدن گسترش و ایجاد تغییر شکل پلاستیک با پدید می آید کرنش متنش مانده مواج در شوم.



نکته: در طول مدت مدوم باربرداری رابطه متنش و کرنش خطی است

مدل: عضوی با سطح مقطع متغییر یکدخت با ابعاد $120 \times 50 \text{ mm}$ در معرض گسترش در غشی $M = 36.8 \text{ kN.m}$ قرار دارد.

بفرض اینکه این عضو الاست-پلاستیک با استحکام 240 MPa و مدول گسترش 200 GPa ساخته شده باشد.



مطلوب است افزایش مدت هسته گسترش (ب) متنش و کرنش مانده

$$\frac{I}{C} = \frac{2}{3} b c^2 = \frac{2}{3} \times 50 \times 10^{-3} \times (60 \times 10^{-3})^2 = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$M_y = \frac{I}{C} \sigma_y = 120 \times 10^{-6} \times 240 \times 10^6 = 28.8 \text{ kN.m}$$

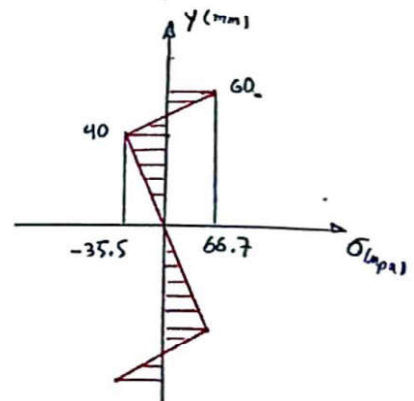
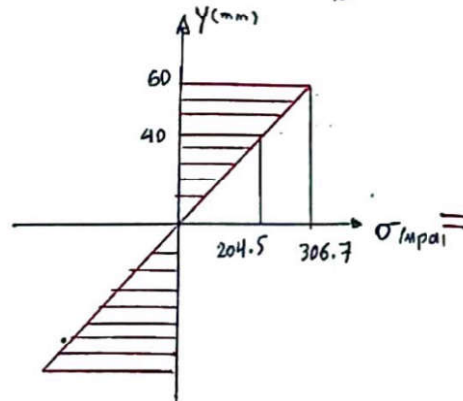
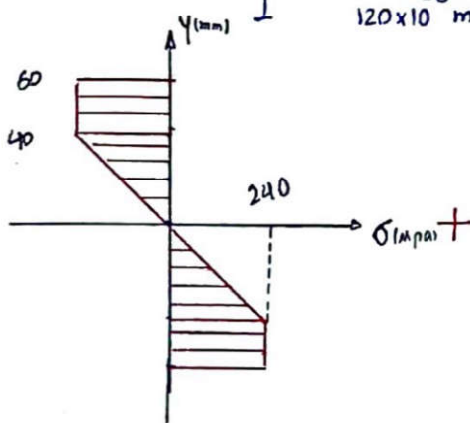
$$M = \frac{3}{2} M_y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_y^2}{c^2}\right) \rightarrow 36.8 = 28.8 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_y^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_y}{c}\right)^2 = 0.444 \Rightarrow y_y = 40 \text{ mm}$$

$$2y_y = 80 \text{ mm} = \text{ضخامت هسته گسترش}$$

$$\sigma_m = \frac{MC}{I} = \frac{36.8 \text{ kN.m}}{120 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 306.7 \text{ MPa}$$

حال اگر باربرداری کنیم به صورت خطی خواهم راست:



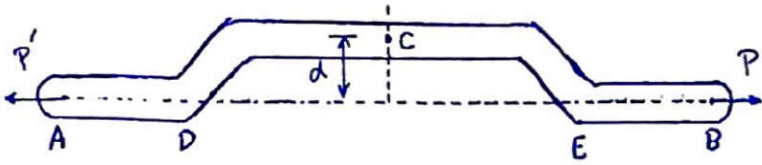
از متنش مانده و توان کرنش مانده و سواح انجا را باصیت برای مدل در $y = 40 \text{ mm}$ داریم:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E} = \frac{-35.5 \times 10^6}{200 \times 10^9} = -177.5 \times 10^{-6}$$

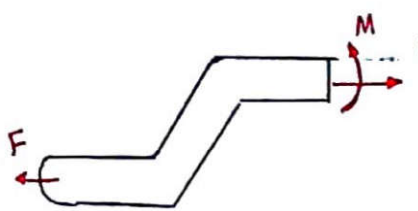
$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = \frac{40 \times 10^{-3}}{177.5 \times 10^{-6}} = 225 \text{ m}$$

* بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن *

فرض کنید مقطعی مثل شکل مقابل داشته باشیم
که تحت بارگذاری محوری است، این نیروی P



در مقاطع BE و AD تنش نوزال ایجاد کند در مقطع C علاوه بر نیروی محوری، خاطر فاصلی d ، تنش نیز ایجاد کند.

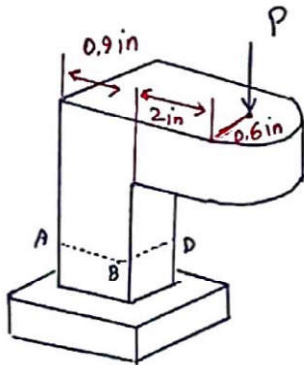


$$\left. \begin{aligned} F=P &\rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} \\ M=Pd &\rightarrow \sigma_x = -\frac{Pdy}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{Pdy}{I}$$

در این y فاصله از مرکز سطح مقطع است ولی تا زمانی که نیروی محوری مرکز سطح منطبق نیست

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{P}{A} - \frac{Pdy}{I} = 0 \Rightarrow y = \frac{I}{Ad}$$

مثال: در رانیم که تنش مجاز در مقطع AB و D برابر 10 ksi است. مطلوب است بیشترین نیروی P که بتوان بر پایه بارزی نشان داده وارد کرد.



$$A = 1.2 \times 0.9 = 1.08 \text{ in}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (1.2)(0.9)^3 = 72.9 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

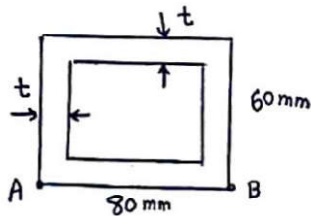
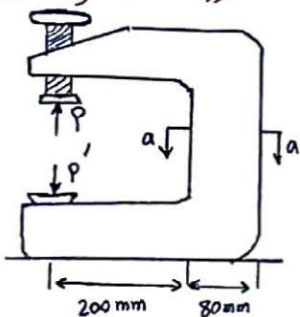
$$C = \frac{1}{2} (0.9) = 0.45 \text{ in}$$

$$e = 2 + 0.45 = 2.45 \text{ in}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} = \left(\frac{1}{A} + \frac{ec}{I} \right) P = 16.049 P = 10 \text{ ksi}$$

$$P = 623 \text{ lb}$$

مثال: قیمت قائم دستگاه پرس نشان داده شامل یک لوله مستطیل با ضخامت $t=10 \text{ mm}$ است. در رانیم که دستگاه پرس روی



قطعات خوب حساب دار با وارد کردن $P=20 \text{ kN}$ محکم شده اند. مطلوب است تنش در نقطه A و B

$$A = (80)(60) - (60)(40) = 2.4 \times 10^3 \text{ mm}^2 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (60)(80)^3 - \frac{1}{12} (40)(60)^3 = 1.84 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1.84 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$C = 40 \text{ mm}, \quad e = 200 + 40 = 240 \text{ mm} = 0.24 \text{ m}$$

$$M = Pe = 20 \times 10^3 \times 0.24 = 4.8 \times 10^3 \text{ N.m}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{20 \times 10^3}{2.4 \times 10^{-3}} + \frac{4.8 \times 10^3 \times 0.04}{1.84 \times 10^{-6}} = 112.7 \times 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \sigma_A = 112.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{20 \times 10^3}{2.4 \times 10^{-3}} - \frac{4.8 \times 10^3 \times 0.04}{1.84 \times 10^{-6}} = -96 \times 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \sigma_B = -96 \text{ MPa}$$

* تنش نامتوازن *

تا اینجا محور خمشی در راستای Z بود و راستی:

$$\sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z}$$

و اگر خمشی در راستای محور Y باشد، می توان نوشت:

$$\sigma_x = - \frac{M_y z}{I_y}$$

حال اگر هر دو خمشی را داشته باشیم، تنش حاصل از مجموع هر دو تنش بدست می آید:

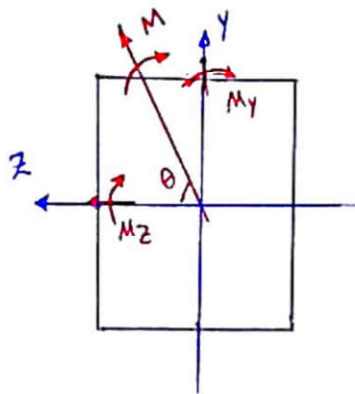
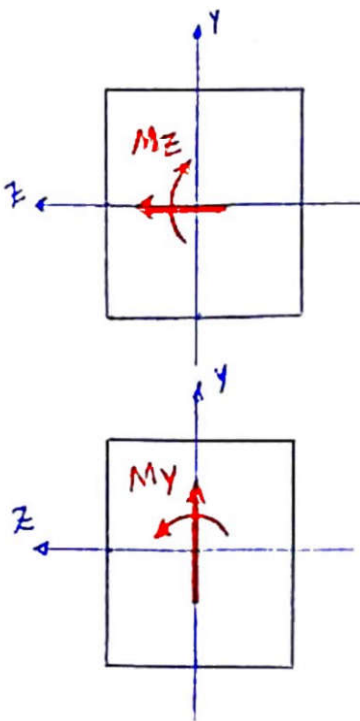
$$\sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

این حالت، معادل آن است که خمشی به صورت نامتوازن وارد شود.

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

$$\sigma_x = 0 \rightarrow \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = 0 \rightarrow y = \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) z$$

برای یافتن زاویه خمشی نیز داریم



$$\begin{aligned} + M_z &= M \cos \theta \\ - M_y &= M \sin \theta \end{aligned}$$

$$I_y = \frac{\pi}{8} r^4 = \frac{\pi}{8} (20)^4 = 62.832 \times 10^{-3} \text{ mm}^4$$

مثال:

$$I_z = \frac{\pi}{8} r^4 - \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 = 17.5611 \times 10^{-3} \text{ mm}^4$$

$$y_A = y_D = - \frac{4r}{3\pi} = -8.4883 \text{ mm}, \quad y_B = r - \frac{4r}{3\pi} = 11.5117 \text{ mm}$$

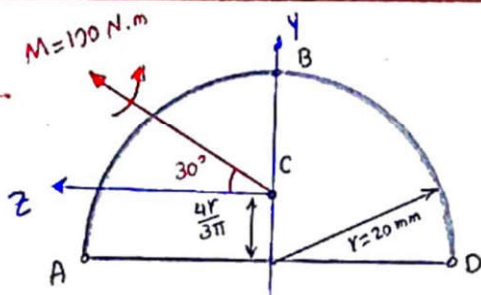
$$z_B = 0, \quad z_A = -z_D = 20 \text{ mm}$$

$$M_z = M \cos \theta = 100 \cos 30^\circ = 86.603 \text{ N.m}, \quad M_y = M \sin \theta = 100 \sin 30^\circ = 50 \text{ N.m}$$

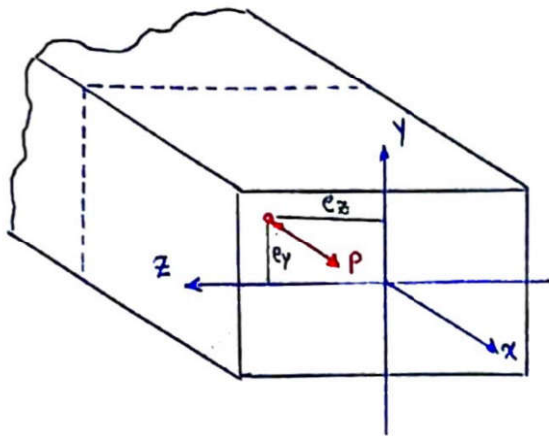
$$\sigma_A = - \frac{M_z y_A}{I_z} + \frac{M_y z_A}{I_y} = - \frac{86.603 \times (-8.4883 \times 10^{-3})}{17.5611 \times 10^{-9}} + \frac{50 \times 20 \times 10^{-3}}{62.832 \times 10^{-9}} = 57.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = - \frac{M_z y_B}{I_z} + \frac{M_y z_B}{I_y} = - \frac{86.603 \times 11.5117 \times 10^{-3}}{17.5611 \times 10^{-9}} + 0 = -56.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = - \frac{M_z y_D}{I_z} + \frac{M_y z_D}{I_y} = - \frac{86.603 \times (-8.4883 \times 10^{-3})}{17.5611 \times 10^{-9}} + \frac{50 \times (-20 \times 10^{-3})}{62.832 \times 10^{-9}} = 25.9 \text{ MPa}$$



* حالت کلی بارگذاری عمودی خارج از مرکز *



اگر نیروی عمودی P در مرکز سطح وارد شود سبب ایجاد گشتاور خمشی می‌شود

$$-M_y = P e_z$$

$$-M_z = P e_y$$

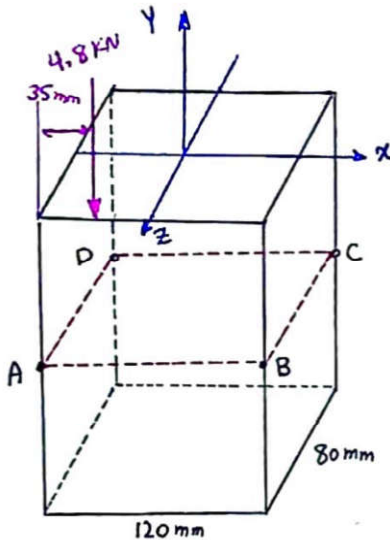
در حالت کلی تنش نرمال به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

برای یافتن تارخشی نترکانه است $\sigma_x = 0$ قرار دهیم.

مثال: بار عمودی 4.8 kN مطابق شکل برای یک جوی به سطح مقطع $80 \times 120 \text{ mm}$ وارد می‌شود. مطلوب است تنش در

چهار گوشه محل تارخشی



$$M_x = (4.8 \text{ kN})(40 \text{ mm}) = 192 \text{ N.m}$$

$$M_z = (4.8 \text{ kN})(60 \text{ mm} - 35 \text{ mm}) = 120 \text{ N.m}$$

$$A = (0.08 \text{ m})(0.12 \text{ m}) = 9.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} (0.12 \text{ m})(0.08 \text{ m})^3 = 5.12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} (0.08 \text{ m})(0.12 \text{ m})^3 = 11.52 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{4.8 \text{ kN}}{9.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 0.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\max}}{I_x} = 1.5 \text{ MPa}$$

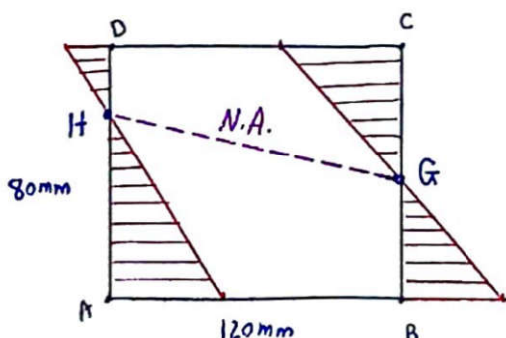
$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{\max}}{I_z} = 0.625 \text{ MPa}$$

	A	B	C	D
$\sigma_0 = 0.5$	-	-	-	-
$\sigma_1 = 1.5$	-	-	+	+
$\sigma_2 = 0.625$	-	+	+	-
Σ	-2.625 MPa	-1.375 MPa	1.625 MPa	0.375 MPa

برای یافتن تارخشی بین A, D و B, C کل تنش صفر را می‌یابیم

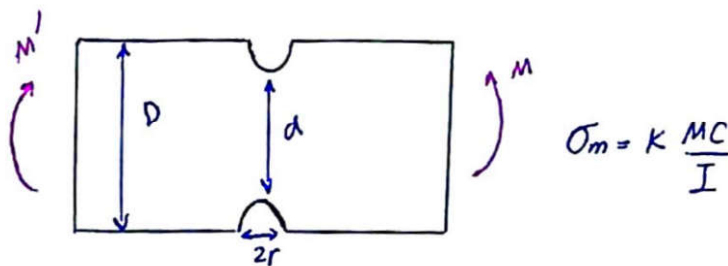
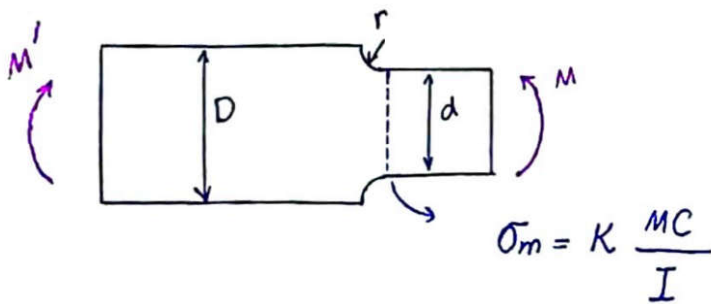
$$\frac{BG}{80} = \frac{1.375}{1.625 + 1.375} \rightarrow BG = 36.7 \text{ mm}$$

$$\frac{HA}{80} = \frac{2.625}{2.625 + 0.375} \rightarrow HA = 70 \text{ mm}$$



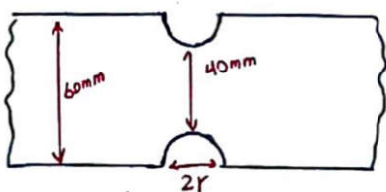
* تمرکز تنش *

آخرین نکته در بخش خالص نیز تمرکز تنش است. در محل هایی که سوراخ یا فلیت داریم در بخش نیز تمرکز تنش خواهیم داشت.



در این K نیز تابعی از r/d و D/d است که از روی نمودارها قابل مشاهده است.

مثال: مر خواهیم نیازهایی به عمق 10mm در میل لای فولادی به عرض 60mm و ضخامت 9mm ایجا کنیم. مطلوب است کمترین عرض میاز نیازها برای اینکه تحت گشتاور چرخشی 180N.m، تنش در میل لای از 150Mpa تجاوز نکند.



$$d = 40 \text{ mm}, \quad D = 60 \text{ mm}, \quad b = 9 \text{ mm}$$

$$C = \frac{1}{2}d = 20 \text{ mm}, \quad I = \frac{1}{12}bd^3 = \frac{1}{12}(9 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-3})^3 = 48 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\frac{MC}{I} = \frac{180 \times 20 \times 10^{-3}}{48 \times 10^{-9}} = 75 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{\max} = K \frac{MC}{I} \Rightarrow 150 \text{ Mpa} = K \times 75 \text{ Mpa} \Rightarrow K = 2$$

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1.5, \quad K = 2 \xrightarrow{\text{از روی نمودارها}} \frac{r}{d} = 0.13 \rightarrow r = 0.13d = 5.2 \text{ mm}$$

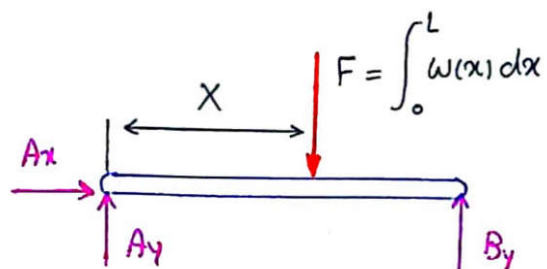
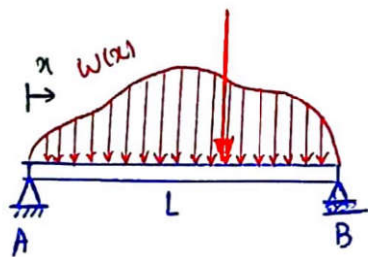
$$\text{عمق نیاز} = 2r = 10.4 \text{ mm}$$

فصل پنجم : خمش تیرها

در این فصل به بررسی نمودارهای خمش در تیرها می‌پردازیم.

برای رسم نمودار خمش در تیرها مراحل زیر را طی می‌کنیم

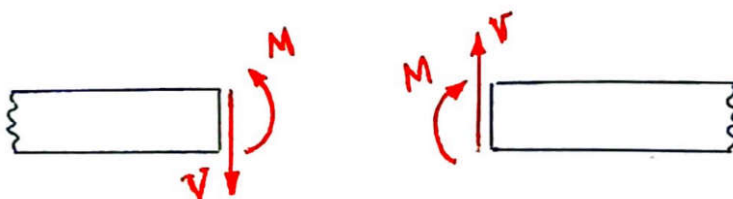
- 1- ابتدا باید نیروهای عکس العمل نکته‌گاهی مشخص شوند پس باید از نظر استاتیکی معین ریاضند.
نکته: برای یافتن عکس العمل نکته‌گاهی نیروهای بارگسترده باید ساده شوند.



کل نیروی F در مرکز سطح زیر نمودار w خواهد بود تا سادگی گسترده صدق کند.

$$XF = \int_0^L x w(x) dx$$

- 2- در مابین بارگسترده و بین بارهای منفرد مقطع می‌زنیم و خمش در تیر را طبق مکرر دار می‌یابیم.



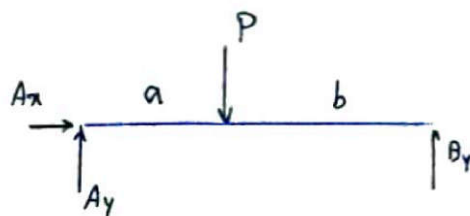
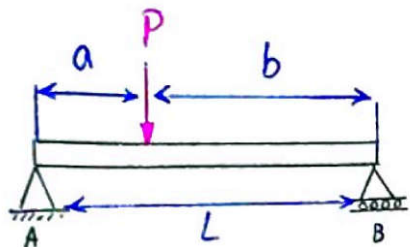
قبل از مقطع زدن بارگسترده را به حالت قبلی نگه می‌داریم و پس از مقطع زدن دوباره بارگسترده را ساده می‌کنیم.

- 3- در نهایت نیروی برشی و گسترده خمشی را در طول تیر رسم می‌کنیم.

از روی نمودار نیز می‌توان مقدار بیشینه گسترده خمشی را یافت و در نتیجه داریم:

$$\sigma_m = \frac{M I C}{I} = \frac{M}{S}$$

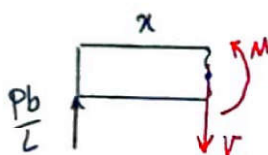
مسألة



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0, \quad \sum M_A = 0 \rightarrow LB_y - aP = 0 \rightarrow B_y = \frac{Pa}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = P \Rightarrow A_y = \frac{Pb}{L}$$

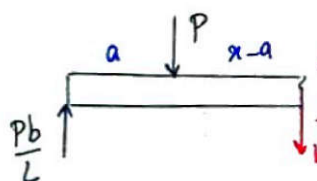
$$0 < x < a$$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{Pb}{L} - V = 0 \rightarrow V = \frac{Pb}{L}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - \frac{Pb}{L}x = 0 \rightarrow M = \frac{Pb}{L}x$$

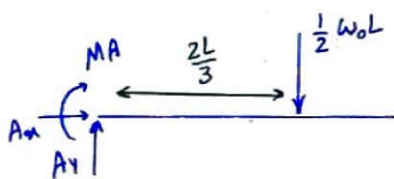
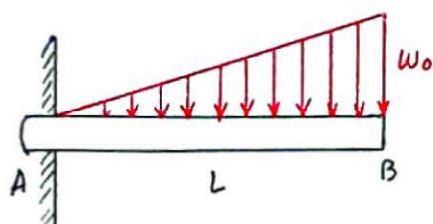
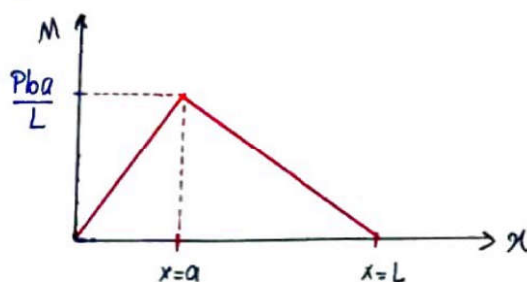
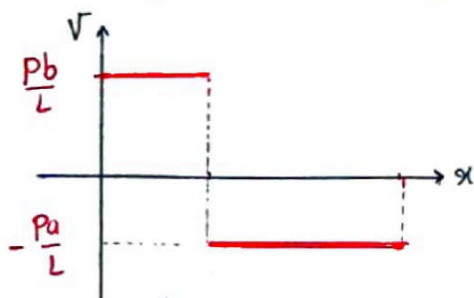
$$a < x < L$$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{Pb}{L} - P - V = 0 \rightarrow V = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M + P(x-a) - \frac{Pb}{L}x = 0 \rightarrow M = \frac{Pb}{L}x - P(x-a)$$

$$M = \left(\frac{Pb}{L} - P\right)x + Pa = -\frac{Pa}{L}x + Pa = \frac{Pa}{L}(L-x)$$

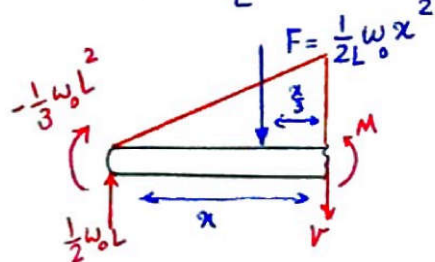


$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y = \frac{1}{2}w_0L$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_A = -\frac{1}{3}w_0L^2$$

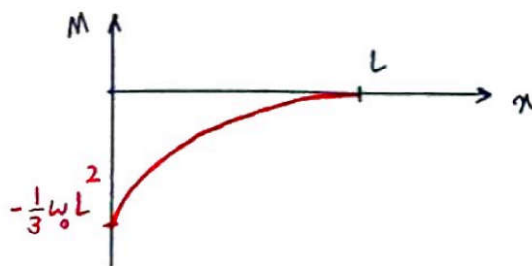
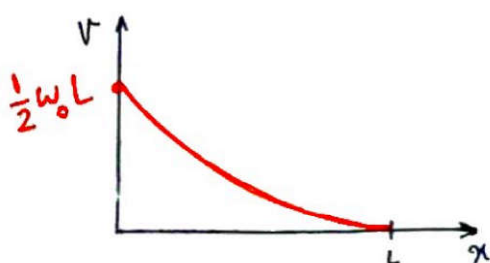
$$w(x) = \frac{w_0}{L}x$$



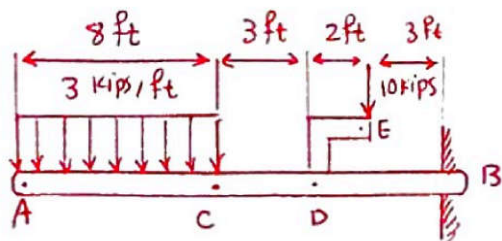
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -V - \frac{1}{2L}w_0x^2 + \frac{1}{2}w_0 = 0 \rightarrow V = \frac{w_0}{2L}(L-x^2)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M + \frac{1}{2L}w_0x^2 \times \frac{x}{3} - \frac{1}{2}w_0Lx + \frac{1}{3}w_0L^2 = 0$$

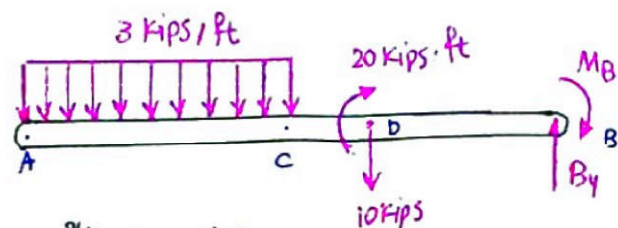
$$M = -\frac{1}{3}w_0L^2 + \frac{1}{2}w_0Lx - \frac{1}{6}w_0 \frac{x^3}{L}$$



مثال :



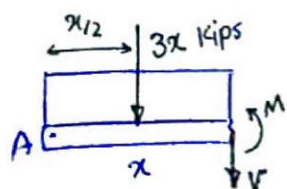
نیروی منفر در نقطه E را به نقطه D منتقل می‌کنیم و این را با کویل نیز همراه خواهیم نمود.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y = 34 \text{ kips}$$

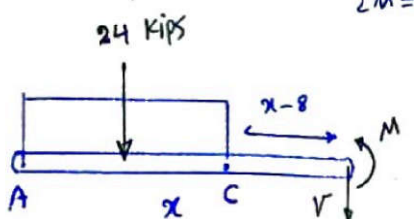
$$\sum M = 0 \rightarrow M_B = 318 \text{ kip}\cdot\text{ft}$$

حال بین نقاط A، C، D، B مقطع می‌زنیم.



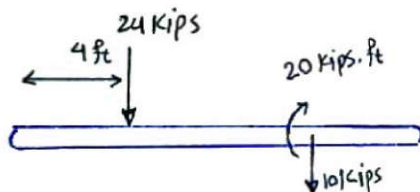
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -3x - V = 0 \rightarrow V = -3x \text{ kips}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow 3x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \rightarrow M = -1.5x^2 \text{ kip}\cdot\text{ft}$$



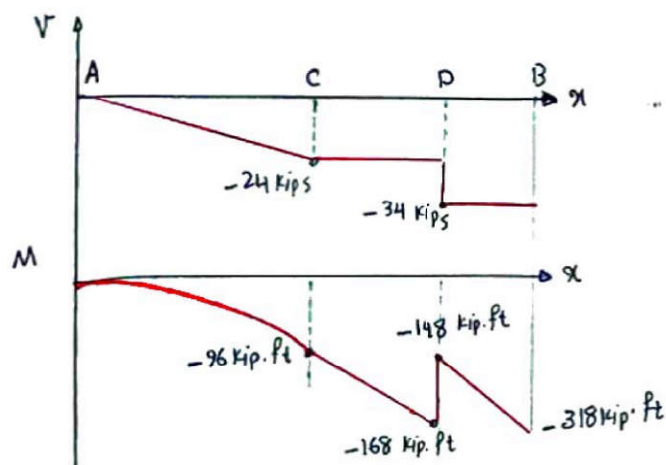
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -24 - V = 0 \rightarrow V = -24 \text{ kips}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow 24(x-4) + M = 0 \rightarrow M = 96 - 24x \text{ kip}\cdot\text{ft}$$

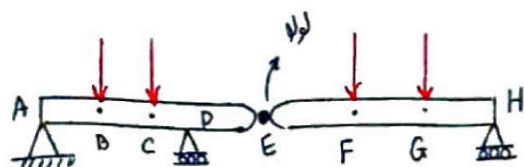


$$\sum F_y = 0 \rightarrow V = -34 \text{ kips}$$

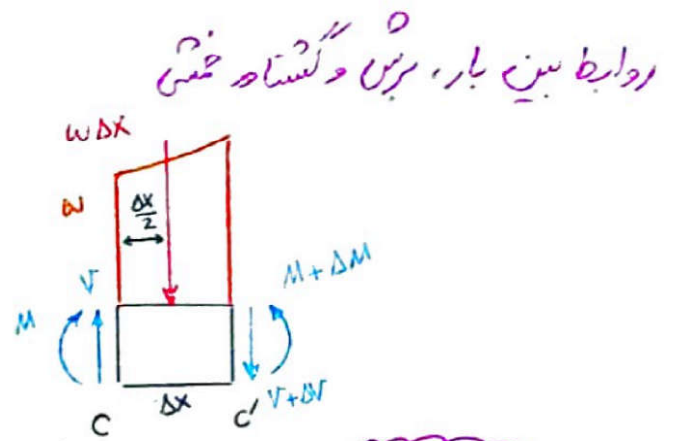
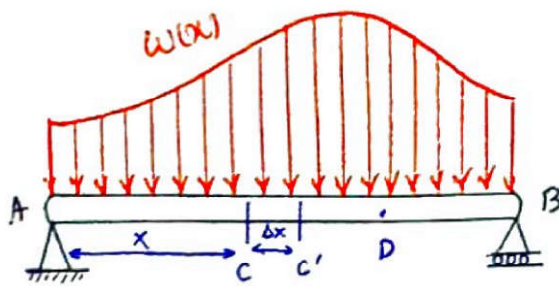
$$\sum M = 0 \rightarrow M = 226 - 34x \text{ kip}\cdot\text{ft}$$



نکته ی مهم : هرگاه وسیله با لولای هم وصل بودند هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم و روی لولا مقدار گسار و قشر صفر است.



$$M_E = 0$$

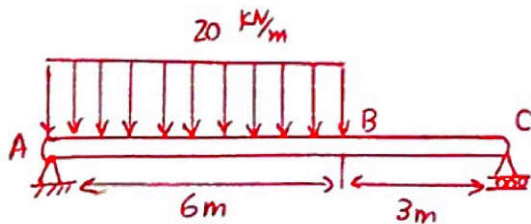


$\uparrow \Sigma F_y = 0 : V - (V + \Delta V) - w \Delta x = 0 \rightarrow \Delta V = -w \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dV}{dx} = -w(x)$

$\rightarrow dV = -w dx \rightarrow \int_{x_c}^{x_D} dV = \int_{x_c}^{x_D} -w dx \rightarrow V_D - V_C = - \int_C^D w dx$ (مساحت زیر نمودار بار بین نقاط C و D)

$\rightarrow \Sigma M_C = 0 : (M + \Delta M) - M - V \Delta x + w \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0 \rightarrow \Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$

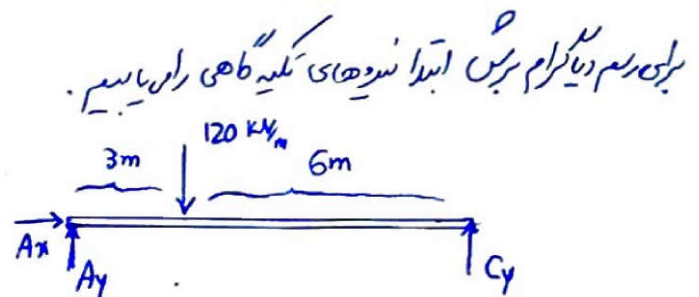
$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V \rightarrow M_D - M_C = \int_{x_c}^{x_D} V dx \rightarrow M_D - M_C = \int_C^D V dx$ (مساحت زیر نمودار منحنی برش بین نقاط C و D)



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow C_y = 40 \text{ kN}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y = 80 \text{ kN}$

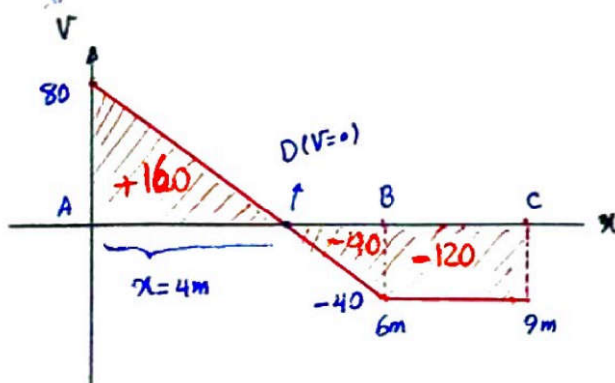


پس در ابتدا مقدار V با A_y برابر خواهد بود ولی به علت وجود بار گسترده این مقدار تا نقطه B کاهش می یابد.

$V_B - V_A = - (w_0 \times BA) = - 20 \times 6 \text{ m} = -120 \text{ kN} \Rightarrow V_B - 80 = -120 \rightarrow V_B = -40 \text{ kN}$

معبار نقطه B چون نیروی گزینی نداریم پس مقدار V ثابت می ماند.

در این نقطه ای داریم که برش صفر دار که با مابینایی داریم :

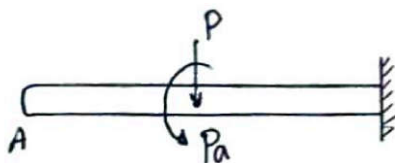
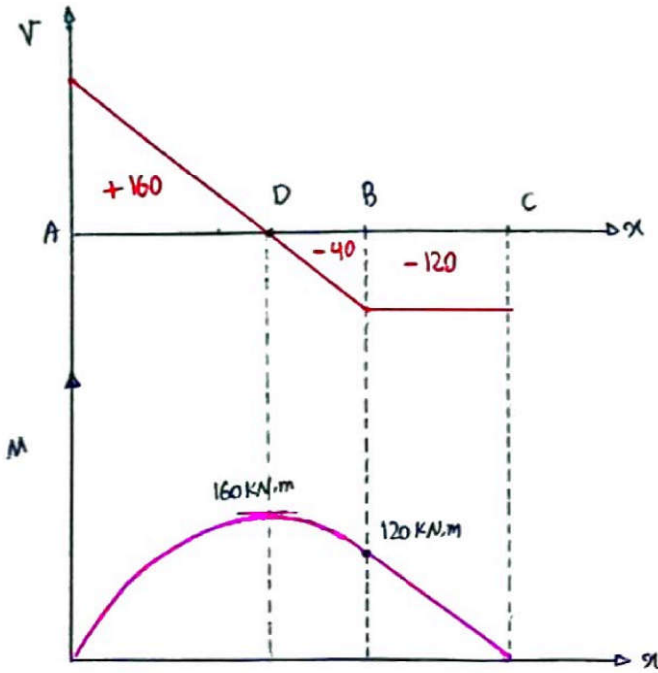


$\frac{x}{80} = \frac{6-x}{40} \rightarrow x = 4 \text{ m}$

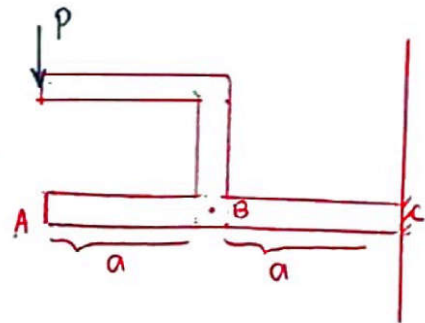
$$M_A = 0$$

حال برای رسم نمودار گشتاور خمشی از نقطه‌ی A استفاده می‌کنیم که مقدار خمش در آن صفر است

و پس با داشتن مساحت نمودار برش، خمش را رسم می‌کنیم فقط باید توجه داشت که هر گاه نمودار برش درم اول باشد خمش درم 2 بوده و اگر جمعش ثابت باشد، خمش درم اول خواهد بود و جایی که برش صفر باشد میزان گشتاور خمش خواهد بود.

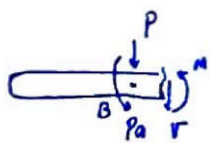


انتقال نیروی P روی تیر



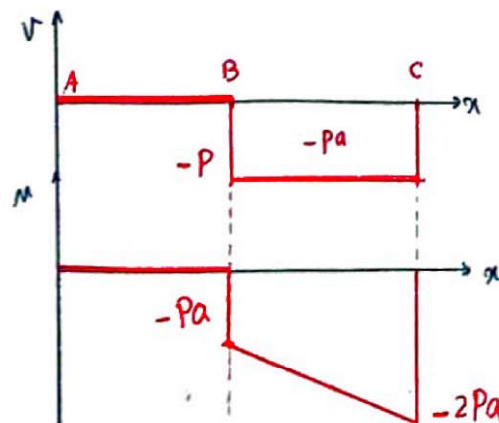
مثال:

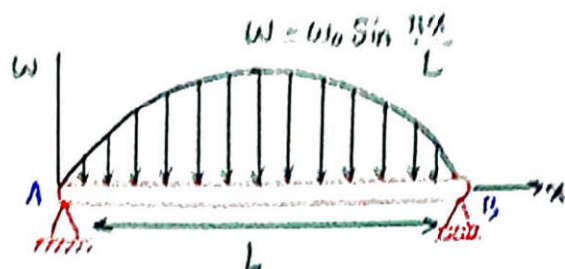
در ابتدای تیر از سمت نقطه‌ی A نیروی برشی نداریم تا به نقطه‌ی B برسیم و در آنجا نیروی برش P- وارد می‌شود.



$$M + Pa = 0 \rightarrow M = -Pa$$

همچنین مقدار گشتاور خمشی نیز از A تا B صفر است و یکباره مقدار Pa- به خمش اضافه می‌شود.

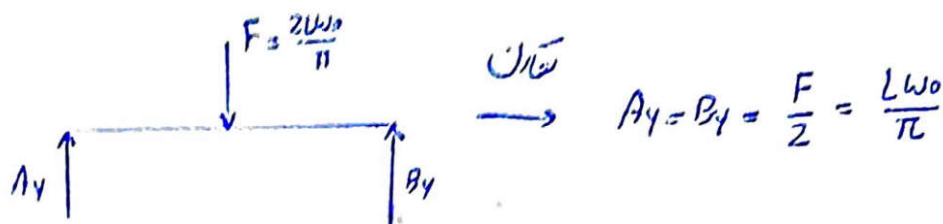




مسئله:

ابتدا بار را به نیروهای متمرکز تبدیل می‌کنیم تا بار را به یک بار متمرکز تبدیل کنیم.

$$F = \int_0^L w(x) dx = \int_0^L w_0 \sin \frac{\pi x}{L} dx = -\frac{L}{\pi} w_0 \cos \frac{\pi x}{L} \Big|_0^L = \frac{2Lw_0}{\pi}$$



$$\rightarrow A_y = B_y = \frac{F}{2} = \frac{Lw_0}{\pi}$$

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \rightarrow \frac{dV}{dx} = -w_0 \sin \frac{\pi x}{L} \xrightarrow{\int} V(x) = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + C_1$$

$$V(x=0) = V_A = \frac{Lw_0}{\pi} \Rightarrow \frac{w_0 L}{\pi} + C_1 = \frac{w_0 L}{\pi} \rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\frac{dM}{dx} = V(x) = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \xrightarrow{\int} M(x) = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} + C_2$$

$$M(x=0) = M_A = 0 \rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$M(x) = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

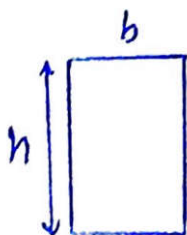
$$M_{max} = \frac{w_0 L^2}{\pi^2}, \quad x = \frac{1}{2}L$$

نکته طراحی: بار استقری توزیع گسترده در بخش مرکب مقدار ماکزیمم بخش را یافت.

حال بار استقری نقش مجاز می‌تواند اعتبار را بدست آورد.

$$\sigma_m = \frac{|M|_{max}}{S} = \sigma_{all}$$

$$\Rightarrow S = \frac{|M|_{max}}{\sigma_{all}}$$



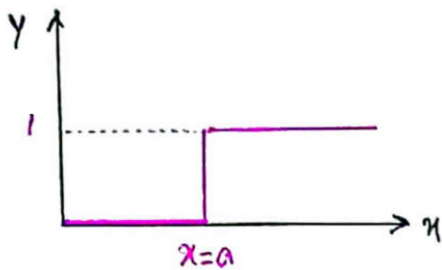
$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{12} b h^3 \\ c &= \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow S = \frac{I}{c} = \frac{1}{6} b h^2$$

$$S = \frac{1}{6} (bh) h = \frac{1}{6} A h$$

مساحت

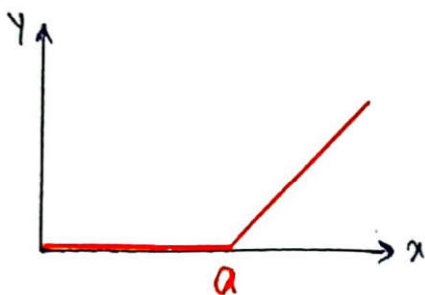
* توابع تکین

یکی از کاربردهای توابع در ریاضی، تابع پله واحد است که همراه تابع صندبه در مسائل فیزیکی به کار برده می شود.



$$y = u(x-a) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

همچنین کاربرد تابع پله واحد برای ساده سازی توابع صندبه است.



این تابع در اصل همان $y = x - a$ است که به ازای

$x < a$ حذف شده و برابر صفر شده است

$$y = \begin{cases} x-a & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

$$y = (x-a) u(x-a)$$

برای ساده تر نوشتن این تابع داریم:

که یعنی به ازای x کوچکتر از a صفر می شود.

مسئله دیگر برای نوشتن تابع صندبه ای زیر است:

$$y = \begin{cases} f_1 & a \leq x < b \\ f_2 & b \leq x < c \\ f_3 & x \geq c \end{cases}$$

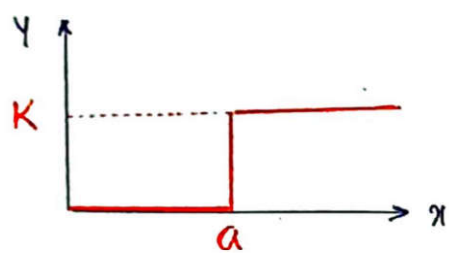
$$y = f_1 u(x-a) - f_1 u(x-b) + f_2 u(x-b) - f_2 u(x-c) + f_3 u(x-c)$$

قبل از a مقدار تابع صفر است

تغییر $x=b$ ، f_1 حذف شده و f_2 اضافه می شود

تغییر $x=c$ ، f_2 حذف شده و f_3 اضافه می شود.

در مقادیر مصالح برای نوشتن توابع ضد ضابطه‌ای جذبی از روش تابع تکین استفاده می‌شود یعنی مفهوم چنان است که نفع نوشتن فرق دارد.



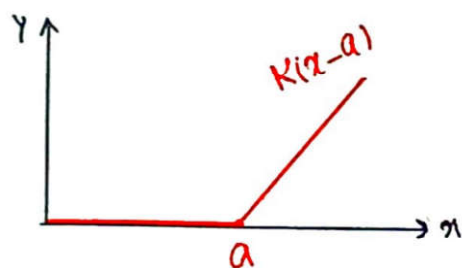
$$y = K U(x-a) = K \langle x-a \rangle^0$$

که فرم تابع تکین
که فرم تابع پله دارد

در اصل تابع تکین $\langle x-a \rangle$ به اندازه $x < a$ صفر و به اندازه $x \geq a$ تبدیل به پراشتار می‌شود.

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)^n & x \geq a \end{cases}$$

برای مثال

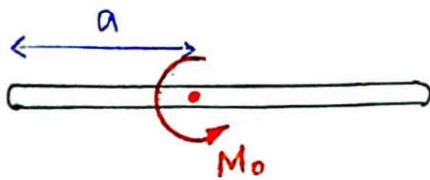


$$y = K(x-a) U(x-a) = K \langle x-a \rangle^1$$

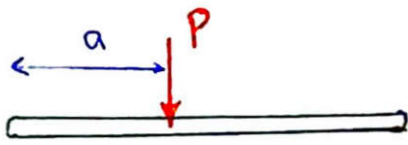
نکته: از توابع تکین می‌توان به راحتی مشتق و انتگرال گرفت.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \langle x-a \rangle^n = n \langle x-a \rangle^{n-1}, \quad n \geq 1 \\ \int \langle x-a \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x-a \rangle^{n+1} + C, \quad n \geq 0 \end{array} \right.$$

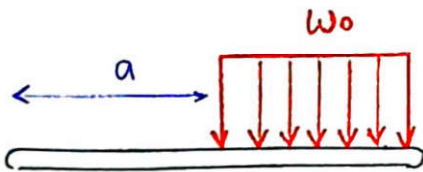
حال در ادامه با استفاده از توابع تکین - توزیع بار گسترده - نیروی برش و گشتاور خمشی را می‌توانیم



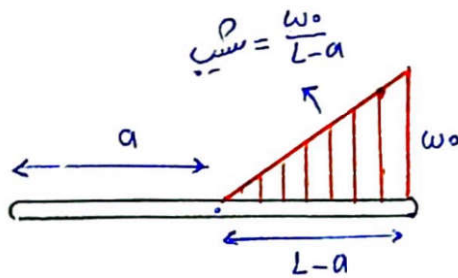
$$\begin{cases} M(x) = -M_0 \langle x-a \rangle^0 \\ V(x) = 0 \\ \omega(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \downarrow \text{مشتق} \\ \downarrow \text{مشتق} \end{matrix}$$



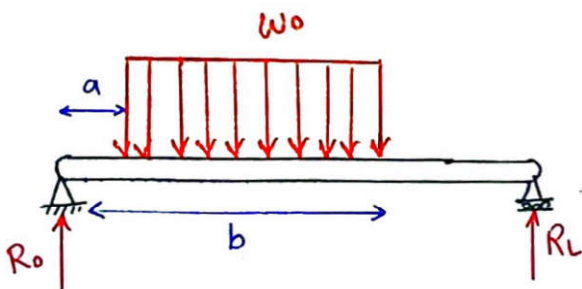
$$\begin{cases} M(x) = -P \langle x-a \rangle^1 \\ V(x) = -P \langle x-a \rangle^0 \\ \omega(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \text{اشتغال} \\ \downarrow \text{مشتق} \end{matrix}$$



$$\begin{cases} \omega(x) = w_0 \langle x-a \rangle^0 \\ V(x) = -w_0 \langle x-a \rangle^1 \\ M(x) = -\frac{1}{2} w_0 \langle x-a \rangle^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \downarrow \text{اشتغال} \\ \downarrow \text{اشتغال} \end{matrix}$$



$$\begin{cases} \omega(x) = \frac{w_0}{L-a} \langle x-a \rangle^1 \\ V(x) = -\frac{w_0}{2(L-a)} \langle x-a \rangle^2 \\ M(x) = -\frac{w_0}{6(L-a)} \langle x-a \rangle^3 \end{cases}$$



w_0 در $x=a$ اعمال شود و در $x=b$ حذف شود

$$\omega(x) = w_0 \langle x-a \rangle^0 - w_0 \langle x-b \rangle^0, \quad \frac{dV}{dx} = -\omega$$

$$\Rightarrow V(x) = -w_0 \langle x-a \rangle^1 + w_0 \langle x-b \rangle^1 + R_0 \langle x-0 \rangle^0 + R_L \langle x-L \rangle^0$$

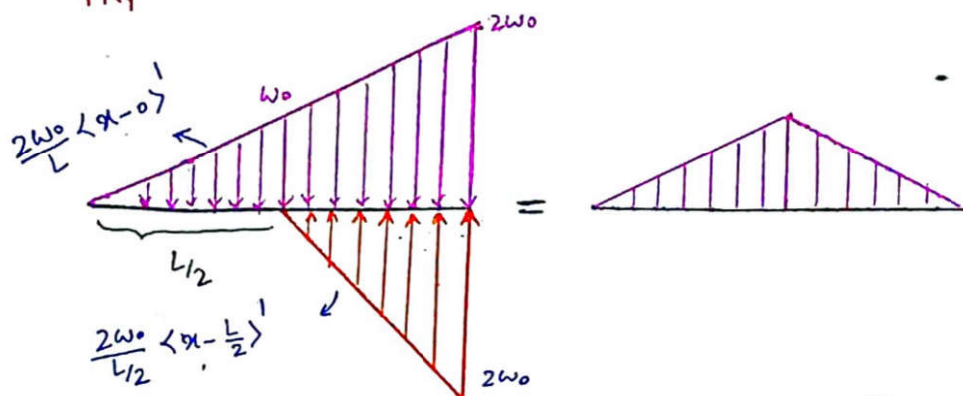
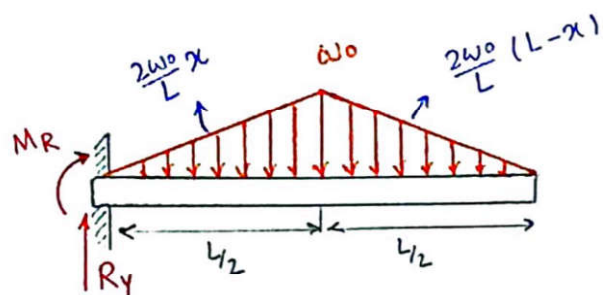
بجای $\langle x-0 \rangle^0$ میتوان x نوشت

نبار R_L بنویس
زیرا $x \gg L$ نداریم

$$V(x) = -w_0 \langle x-a \rangle^1 + w_0 \langle x-b \rangle^1 + R_0$$

(اشتغال)

$$M(x) = -\frac{1}{2} w_0 \langle x-a \rangle^2 + \frac{1}{2} w_0 \langle x-b \rangle^2 + R_0 x$$



$$\Rightarrow w(x) = \frac{2w_0}{L} \langle x-0 \rangle^1 - \frac{4w_0}{L} \langle x-\frac{L}{2} \rangle^1 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$V(x) = -\frac{w_0}{L} \langle x-0 \rangle^2 + \frac{2w_0}{L} \langle x-\frac{L}{2} \rangle^2 + R_Y \langle x-0 \rangle^0 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L} \langle x-0 \rangle^3 + \frac{2w_0}{3L} \langle x-\frac{L}{2} \rangle^3 + R_Y \langle x-0 \rangle^1 + M_R \langle x-0 \rangle^0$$

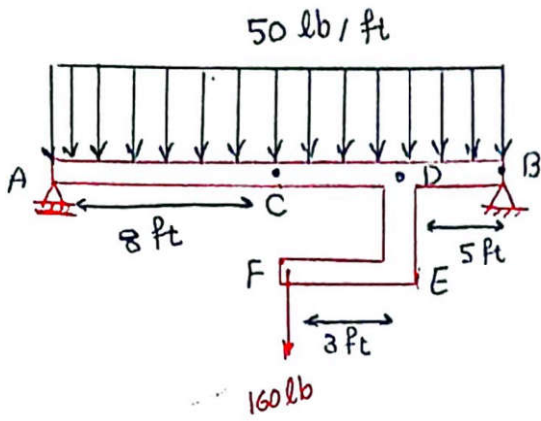
برای مثال در نقطه $x = \frac{L}{4}$ داریم :

$$w(x=\frac{L}{4}) = \frac{2w_0}{L} \langle \frac{L}{4}-0 \rangle^1 - \frac{4w_0}{L} \langle \frac{L}{4}-\frac{L}{2} \rangle^1 = \frac{2w_0}{L} \times \frac{L}{4} = \frac{w_0}{2}$$

$$V(x=\frac{L}{4}) = -\frac{w_0}{L} \langle \frac{L}{4}-0 \rangle^2 + \frac{2w_0}{L} \langle \frac{L}{4}-\frac{L}{2} \rangle^2 + R_Y \langle \frac{L}{4}-0 \rangle^0 = R_Y - \frac{w_0}{L} (\frac{L}{4})^2$$

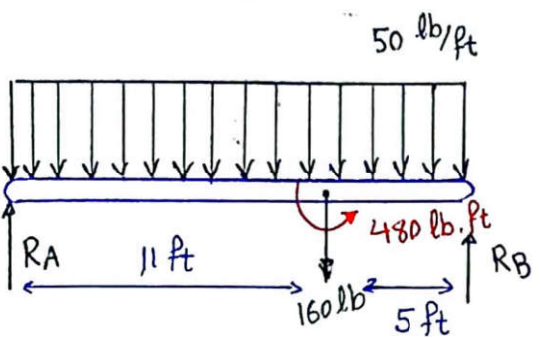
$$\begin{aligned} M(x=\frac{L}{4}) &= -\frac{w_0}{3L} \langle \frac{L}{4}-0 \rangle^3 + \frac{2w_0}{3L} \langle \frac{L}{4}-\frac{L}{2} \rangle^3 + R_Y \langle \frac{L}{4}-0 \rangle^1 + M_R \langle \frac{L}{4}-0 \rangle^0 \\ &= -\frac{w_0}{3L} (\frac{L}{4})^3 + R_Y \frac{L}{4} + M_R \end{aligned}$$

حل



نیروی 160 lb را به نقطه‌ی D انتقال دهیم و این انتقال با کوپل گشتاور همراه خواهد بود.

به علت وجود تفران کل نیروی 960 lb بین تکیه‌گاه‌ها به طور مساوی تقسیم شود.



$$R_A = R_B = 480 \text{ lb}$$

$$w(x) = 50 \text{ lb/ft} \quad \int \rightarrow V(x) = -50x + 480 - 160 \langle x - 11 \rangle^0 \quad \int$$

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160 \langle x - 11 \rangle^1 - 480 \langle x - 11 \rangle^0$$

برای یافتن بیشترین مقدار گشتاور خمشی باید مملی را برابر صفر کنیم.

$$V(x) = -50x + 480 - 160 \langle x - 11 \rangle^0$$

$$x < 11 \rightarrow V(x) = -50x + 480 = 0 \rightarrow x = 9.60 \text{ ft} \quad \checkmark \text{ قابل قبول}$$

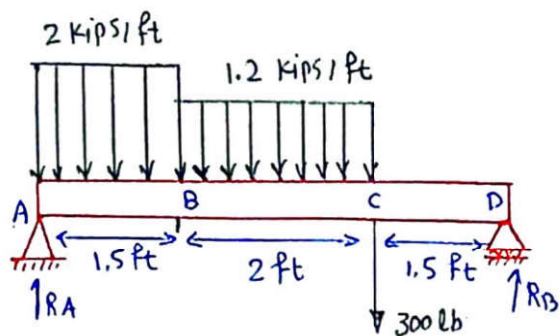
$$x \geq 11 \rightarrow V(x) = -50x + 480 - 160 = 0 \rightarrow x = 6.40 \text{ ft} \quad \times \text{ غیر قابل قبول}$$

$$M_{\max} = M(x = 9.6 \text{ ft}) = -25(9.6)^2 + 480 \times 9.6 - 160 \langle 9.6 - 11 \rangle^1 - 480 \langle 9.6 - 11 \rangle^0$$

$$M_{\max} = 2304 \text{ lb.ft}$$

همان‌طور که گفتیم برانز شلر در تابع ماکس در حالتی که داخل آن صفت باشد، به برانز معمولی تبدیل می‌شود و در حالتی که منفی شود، مقدار آن صفر می‌گردد.

مسئله



$$\sum M_D = 0$$

$$\Rightarrow -5R_A + 4.25 \times 1.5 \times 2 + 2.5 \times 2 \times 1.2 + 1.5 \times 0.3 \times 300 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 3.84 \text{ kips}$$

$$w(x) = 2 - 0.8 \langle x - 1.5 \rangle^0 - 1.2 \langle x - 3.5 \rangle^0 \text{ kips.ft} \quad \int$$

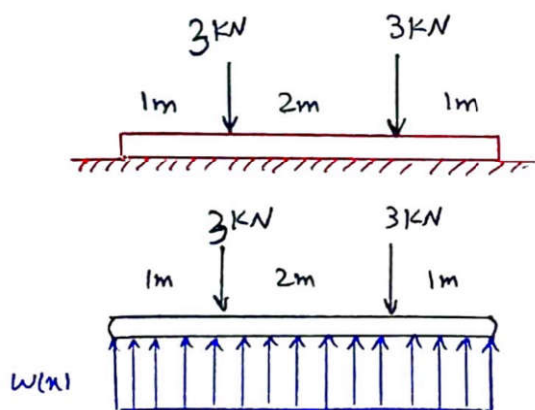
$$V(x) = -2x + 0.8 \langle x - 1.5 \rangle^1 + 1.2 \langle x - 3.5 \rangle^1 + 3.84 - 300 \langle x - 3.5 \rangle^0 \quad \int$$

$$M(x) = -x^2 + 0.4 \langle x - 1.5 \rangle^2 + 0.6 \langle x - 3.5 \rangle^2 + 3.84x - 300 \langle x - 3.5 \rangle^1$$

$$0 < x < 1.5 \Rightarrow M = -x^2 + 3.84x \text{ lb.ft}$$

$$1.5 < x < 3.5 \Rightarrow M = -x^2 + 0.4(x - 1.5)^2 + 3.84x \text{ lb.ft}$$

$$3.5 < x \Rightarrow M = -x^2 + 0.4(x - 1.5)^2 + 0.6(x - 3.5)^2 + 3.84x - 300(x - 3.5) \text{ lb.ft}$$



مثال: اگر به جای تکیه‌گاه، صلب روی زمین باشد در این صورت

شدنی تکیه‌گاه‌ها به صورت بار گسترده خواهد بود.

$$w_0 \times 4m = 3kN + 3kN$$

$$\Rightarrow w_0 = 1.5 \frac{kN}{m}$$

$$\Rightarrow w(x) = -1.5 \frac{kN}{m}$$

چون روی بالابست - علامت منفی گرفته

$$\int \rightarrow V(x) = 1.5x - 3 \langle x - 1 \rangle^0 - 3 \langle x - 3 \rangle^0$$

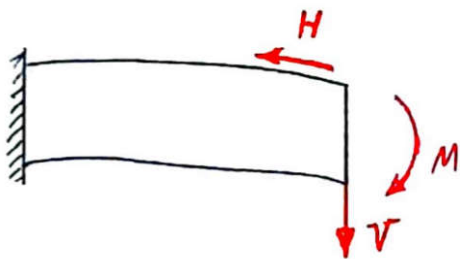
$$\int \rightarrow M(x) = 0.75x^2 - 3 \langle x - 1 \rangle^1 - 3 \langle x - 3 \rangle^1$$

فصل ششم: برش

در این فصل به تنش برشی در وجه افقی تیر و اعضای جبران‌نازک پرداخته می‌شود.

← برش در تیر

همان‌طور که در فصل قبل بررسی شد، وقتی یک تیر تحت خمش قرار می‌گیرد دکان نیروی برشی نیز ایجاد خواهد شد و در فصل اول گفتیم اگر در یک صفحه تنش برشی داشته باشیم مانند τ_{yx} در صفحه‌ی مجاور نیز تنش τ_{xy} خواهیم داشت.



پس با اعمال نیروی برشی V یا گشتاور خمشی M

در صفحه‌ی بالایی نیروی H وجود خواهد داشت.

برای می‌تبی نیروی H داریم:

$$\sum F_x = 0 : \Delta H - \int (\sigma_D - \sigma_C) dA = 0$$

$$\sigma_C = \frac{M_C y}{I}, \quad \sigma_D = \frac{M_D y}{I}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \int \frac{M_D y}{I} - \frac{M_C y}{I} dA = \frac{M_D - M_C}{I} \int y dA$$

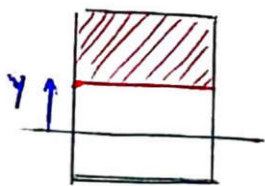
نشان $\int y dA$ را گشتاور اول سطح می‌نامند با Q نشان می‌دهند.

$$Q_x = \int_s y dA \quad \text{گشتاور اول سطح}$$

* نکته: گشتاور اول سطح حول مرکز سطح برای کل سطح مورد نظر

صفر است و گشتاور دوم سطح در این حالت کمترین مقدار را دارد.

$$I_x = \int_s y^2 dA \quad \text{گشتاور دوم سطح}$$



$$\Delta H = (M_D - M_C) \cdot \frac{Q}{I}$$

اختلاف گشتاور بین دو نقطه را در طول با نیروی برشی بدست آورد.

$$M_D - M_C = \Delta M = \frac{dM}{dx} \cdot \Delta x = V \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x$$

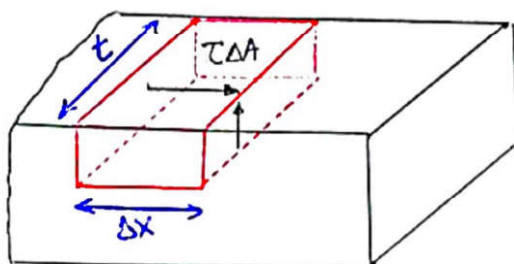
$$\tau = \frac{\Delta H}{\Delta A}$$

برای یافتن تنش داریم

$$\Delta A = t \Delta x$$

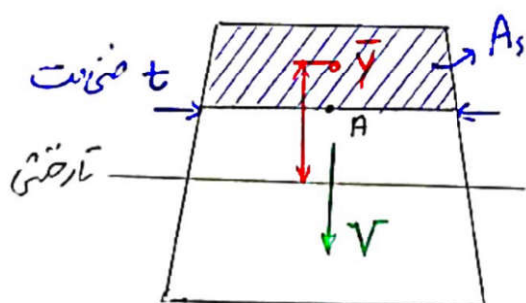
ضخامت

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



جمع بندی : وقتی روی یک سطح نیروی برشی یا تنش ایجاد کنیم، تنش برشی حاصل می شود که برای

یافتن این تنش داریم :



$$\tau_A = \frac{VQ}{It}$$

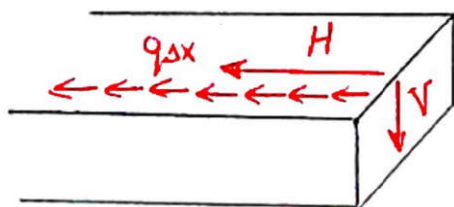
I گشتاور دوم سطح حول تار قشری

برای مابقی Q سطح بالای نقطه A را در نظر بگیریم

و فاصله ی مرکز سطح را تا تار قشری در مسافت جذب می کنیم.

$$Q_A = \int y dA = \bar{y} A_s$$

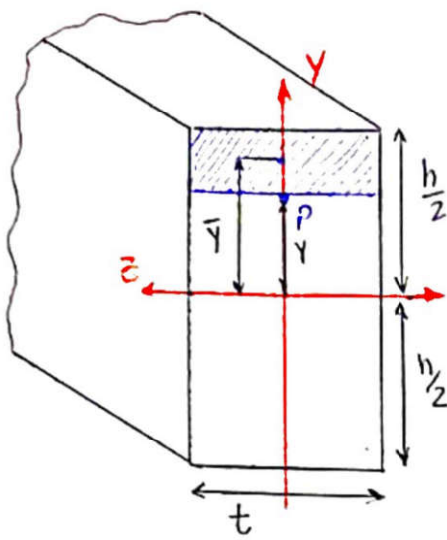
$$H = \tau A \quad \tau = \frac{VQ}{It}$$



جریان برشی : برش افقی در واحد طول را جریان برشی گویند

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I}$$

برای درتویا مقطع مستطیلی



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = A\bar{y} = t \left(\frac{h}{2} - y \right) \times \frac{y + \frac{h}{2}}{2}$$

$$Q = \frac{t}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad I = \frac{1}{12} th^3$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\frac{t}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) V}{\frac{1}{12} th^3 \times t} = \frac{6V}{th} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right) = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$



$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}$$

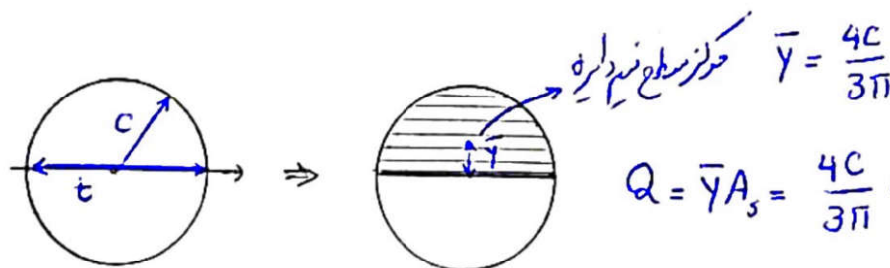
ما بریم τ بر حسب y داریم :

همانطور که مشاهده می‌کنیم در ابتدا تنش برشی صفر بوده و در وسط سطح ماکزیم مقدار را دارد

برای یافتن تنش برشی متوسط داریم :

$$\tau_{ave} = \frac{V}{A} \Rightarrow \frac{\tau_{max}}{\tau_{ave}} = \frac{3}{2}$$

حال فرض کنید مقطع دایره باشد در این صورت برای یافتن تنش برشی ماکزیم در وسط سطح داریم :



$$Q = \bar{y} A_s = \frac{4c}{3\pi} \times \frac{\pi}{2} c^2 = \frac{2}{3} c^3$$

$$I = \frac{\pi}{4} c^4, \quad A = \pi c^2$$

$$t = 2c$$

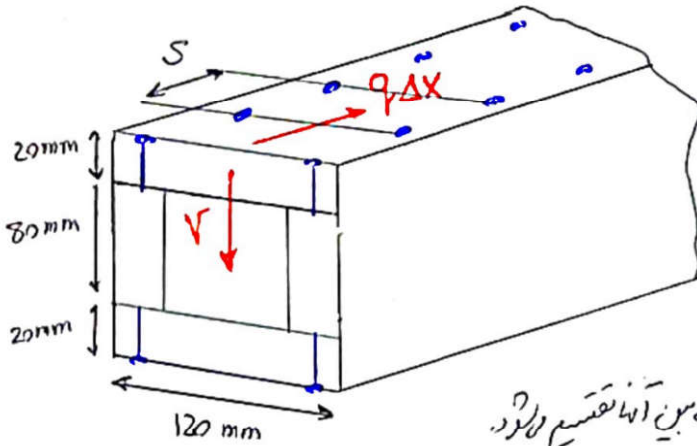
$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{\frac{2}{3} c^3 \times V}{\frac{\pi}{4} c^4 \times 2} = \frac{4V}{3(\pi c^2)} = \frac{4V}{3A}$$

$$\tau_{max} = \frac{4V}{3A} \rightarrow \frac{\tau_{max}}{\tau_{ave}} = \frac{4}{3}$$

مسئله کاربردی: تیرچه صلبی از دو قطعه $20 \times 80 \text{ mm}$ و دو قطعه $20 \times 120 \text{ mm}$ که مطابق شکل سیخ کوبی

منتهی اند ساخته شده است. اگر فاصله بین میخها $S = 50 \text{ mm}$ و نیروی برشی مجاز در هر سیخ 300 N

باشد مطلوب است: الف) بیشترین نیروی عمودی مجاز در تیر ب) تنش برشی ماکزیمم متناظر در تیر



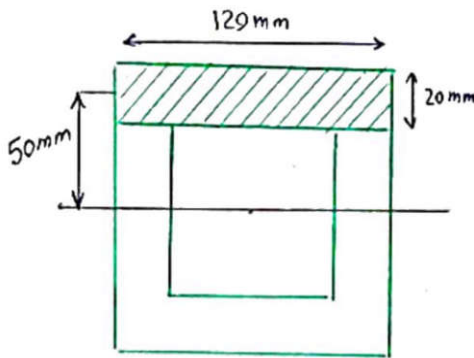
با اعمال نیروی برشی V نیروی $\Delta H = q \Delta x$ در سطح بالایی

ای ایجاد شود که به میخها منتقل و در آنجا برود

فاصله بین میخها $\Rightarrow \frac{1}{2} q S = \text{نیروی وارده بر میخ}$

در هر دو طرف دو میخ داریم که بین آنها تقسیم می شود

برشی ماکزیمم تنش برشی در تیر برشی قطعه بالایی را در نظر میگیریم که میخها در آن فروخته اند.



$$I = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 - \frac{1}{12} b_1 h_1^3$$

$$I = \frac{1}{12} (120 \times 120)^3 - \frac{1}{12} (80)(80)^3 = 13.8667 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A_1 = 120 \times 20 = 2400 \text{ mm}^2 \quad \bar{Y}_1 = 50 \text{ mm}$$

$$Q_1 = A_1 \bar{Y}_1 = 120 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

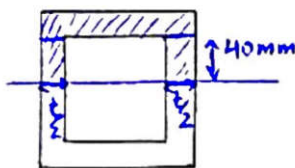
$$q = \frac{VQ}{I}, \quad \text{باز } F = \frac{1}{2} q S \Rightarrow q = \frac{2F}{S} = \frac{2 \times 300}{50 \times 10^{-3}} = 12 \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$V = \frac{qI}{Q} = \frac{12 \times 10^3 \times 13.8667 \times 10^{-6}}{120 \times 10^{-6}} = 1.38667 \text{ kN}$$

ماکزیمم تنش برشی نیز در میانی سطح وارده شود.

$$Q = Q_1 + 2(20)(40)(20) = 120 \times 10^3 + 32 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q = 152 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

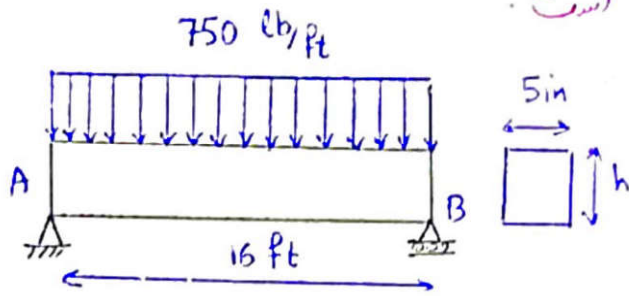


$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{1.38667 \times 10^3 \times 152 \times 10^{-6}}{13.8667 \times 10^{-6} \times 2 \times 20 \times 10^{-3}} = 380 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$\tau_{max} = 380 \text{ kPa}$$

مثال کاربردی: برای تعیین و بارگذاری نشان داده شده مطلوب است حوامل عقی لازم h را تعیین کنیم.

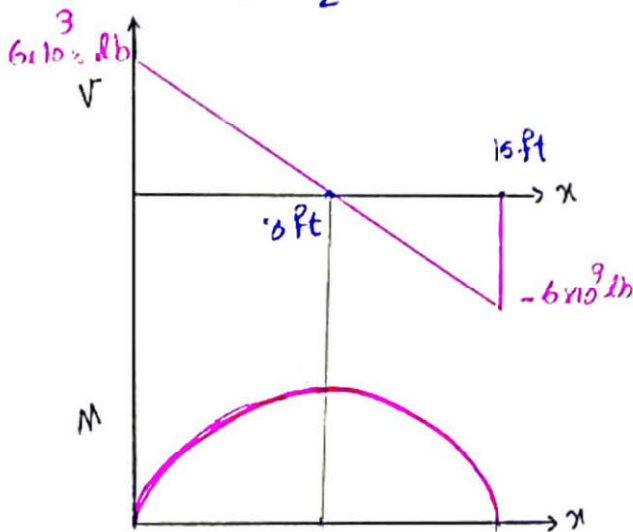
الوار به کاررفته $\sigma_{all} = 1750 \text{ psi}$ و $\tau_{all} = 130 \text{ psi}$ است.



ابتدا مقدار برشی و گشتاور محشی را رسم می‌کنیم تا
 ماکزیم مقدار نیروی برشی و گشتاور محشی را داشته باشیم.

$$750 \times 16 = 12 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^3 \text{ lb} = 6 \times 10^3 \text{ lb}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} V_{max} = 6 \times 10^3 \text{ lb} \\ M_{max} = \frac{1}{2} \times 8 \text{ ft} \times 6 \times 10^3 = 288 \times 10^3 \text{ lb.in} \end{cases}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}$$

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I}$$

$$\tau_{max} = \frac{3 \times V_{max}}{2 \times 5 \times h} \Rightarrow h = \frac{3 \times V_{max}}{10 \tau_{max}} = \frac{3 \times 6 \times 10^3}{10 \times 130} = \underline{13.85 \text{ in}}$$

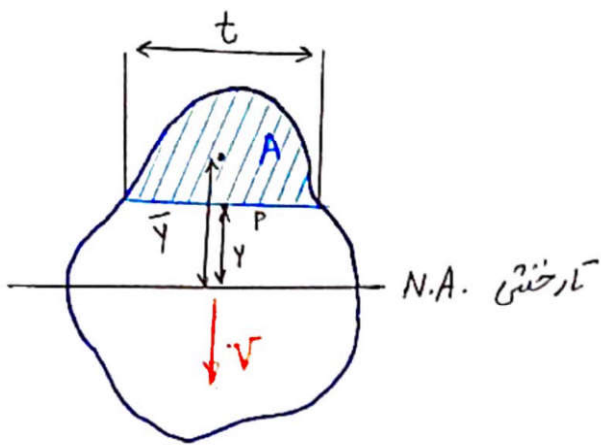
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{6 M_{max}}{b h^2} \Rightarrow h^2 = \frac{6 M_{max}}{b \sigma_{max}} = \frac{6 \times 288 \times 10^3}{5 \times 1750}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{6 \times 288 \times 10^3}{5 \times 1750}} = \underline{14.05 \text{ in}}$$

پس کمترین مقدار h برای تحمل تنش برشی و کرنش مورد نظر 14.05 in خواهد بود.

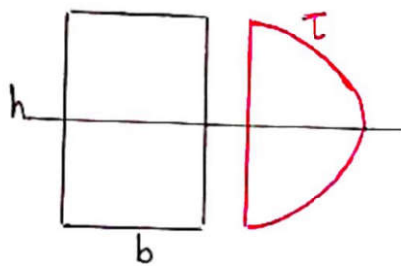
* تنش برشی در مقاطع توپر

در کل می توان به صورت زیر جمع بندی کرد.



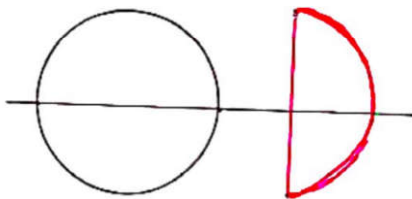
$$\tau_p = \frac{VQ}{It}, \quad Q = \bar{y} \times A$$

مهمترین مقاطعی که داریم به صورت زیر هستند:



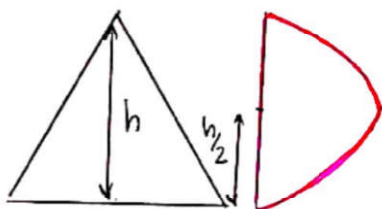
$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$

در دایره و مستطیل ماکزیم تنش برشی روی تارخشی اتفاق می افتد.



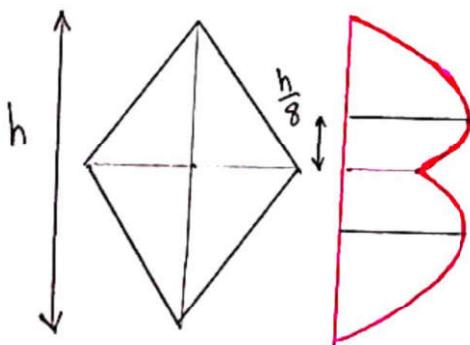
$$\tau_{max} = \frac{4V}{3A}$$

در مقطع مثلث تنش برشی روی تارخشی اتفاق می افتد.



$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$

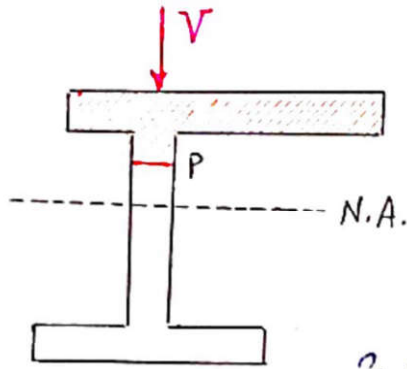
در لوزی نیز تنش برشی ماکزیم در دو نقطه خارج از تارخشی رخ می دهد.



$$\tau_{max} = \frac{9V}{8A}$$

* بررسی در مقاطع جدار نازک

تنش برشی در هر نقطه از یک مقطع جدار نازک همانند مقاطع توپر بدست می آید.



$$\tau_p = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = \sum A_i \bar{y}_i$$

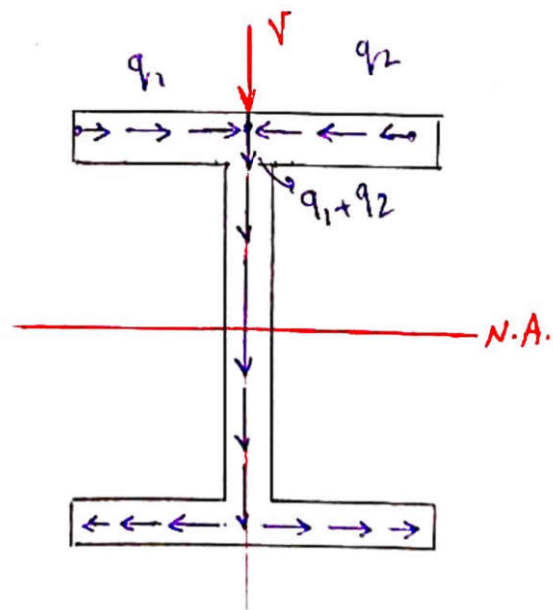
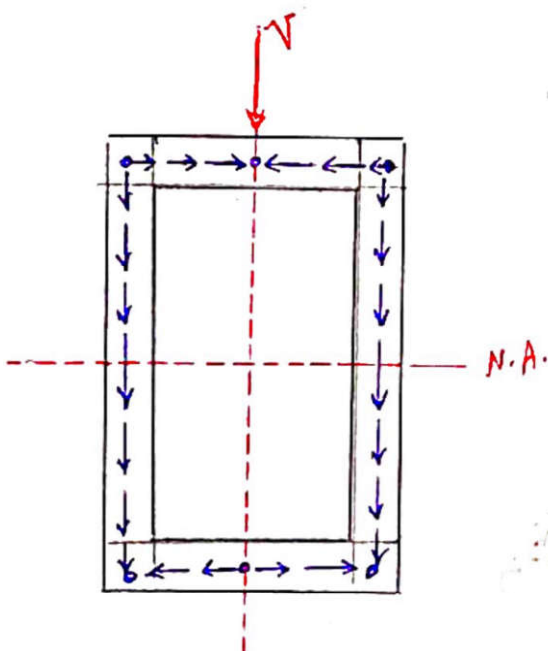
برای محاسبه Q ، مساحت ناحیه بین نقطه P تا نزدیکترین نقطه با $\tau = 0$ را Q می گویند.

تنش برشی در یک مقطع جدار نازک در نقاط زیر صفر است:

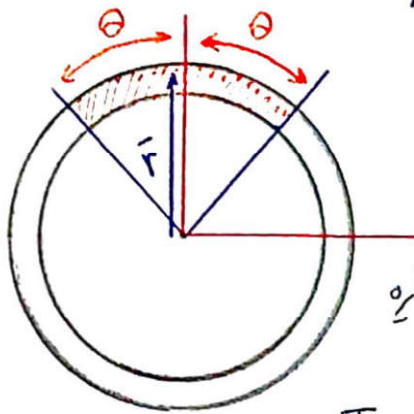
- 1- نقاط با $Q = 0$ 2- در لبه ها 3- در نقاط روی محور تقارن در راستای اعمال V

حال میتوان قواعد زیر را برای رسم توزیع جریان برشی نوشت:

- 1- در مقاطعی که خود را اعمال V ، محور تقارن است. توزیع تنش هم نسبت به آن محور متقارن خواهد بود.
- 2- در مقاطع با ضخامت ثابت، تنش برشی ماکزیمم روی مار خنثی اتفاق می افتد.
- 3- در نقاط با تنش برشی صفر جهت جریان برشی تغییر می کند.



حال بررسی تنش برشی ماکزیم در مقاطع جدار نازک مدول می‌داریم.



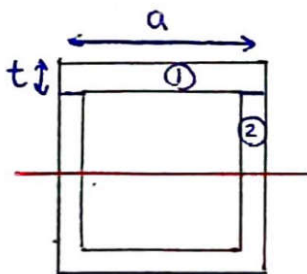
$$A = 2\pi r_m t \quad J = A r_m^2 = 2\pi r_m^3 t$$

$$I = \frac{1}{2} J = \pi r_m^3 t$$

$$\bar{r} = \frac{\sin \theta}{\theta} \quad A_p = 2r\theta t \quad Q_p = A_p \bar{r} = 2rt \sin \theta$$

$$\tau_p = \frac{VQ_p}{I(2t)} = \frac{V(2rt \sin \theta)}{(\pi r_m^3 t)(2t)} = \frac{V \sin \theta}{\pi r_m t} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \tau_{max} = \frac{V}{\pi r_m t}$$

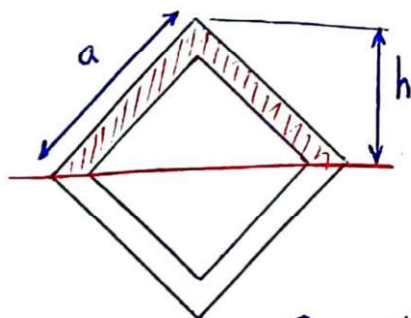
$$\tau_{max} = \frac{2V}{2\pi r_m t} = \frac{2V}{A} \rightarrow K = \frac{\tau_{max}}{\tau_{ave}} = \frac{\frac{2V}{A}}{\frac{V}{A}} = 2$$



$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (at) \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} a^3 t \\ I_2 &= \frac{1}{3} t \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{24} a^3 t \end{aligned} \right\} I_p = I_1 + 2I_2 = \frac{2}{3} a^3 t$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= (at) \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} a^2 t \\ Q_2 &= \left(\frac{1}{2} at\right) \left(\frac{a}{4}\right) = \frac{1}{8} a^2 t \end{aligned} \right\} Q_p = Q_1 + 2Q_2 = \frac{3}{4} a^2 t$$

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{I(2t)} = \frac{V \times \frac{3}{4} a^2 t}{\frac{2}{3} a^3 t \times 2t} = \frac{9}{16} \frac{V}{at} = \frac{9}{4} \cdot \frac{V}{4at} = \frac{9}{4} \frac{V}{A} \rightarrow K = \frac{\tau_{max}}{\tau_{ave}} = \frac{9}{4} = 2.25$$



$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$I_1 = \frac{1}{3} A_1 h^2 = \frac{1}{3} at \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{6} a^3 t$$

$$I = 4I_1 = \frac{2}{3} a^3 t$$

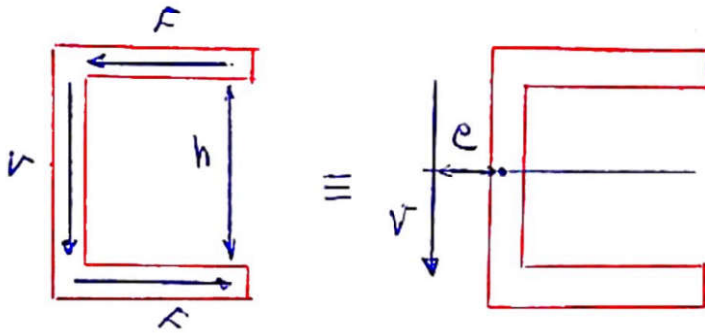
$$Q_1 = at \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4} \sqrt{2} a^2 t, \quad Q = 2Q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 t$$

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{I(2t)} = \frac{V \times \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 t}{\frac{2}{3} a^3 t \times 2t} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{V}{at} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{V}{4at}$$

$$\tau_{max} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{V}{A} \rightarrow K = \frac{\tau_{max}}{\tau_{ave}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12$$

* مرکز جرم

شده‌های برشی دارد بر یک مقطع را می‌توان با یک نیروی برشی عمودی معادل کرد به شرط آنکه این نیرو در محلی وارد شود که گشتا دورگشتانی تولید کند. این محل را مرکز جرم گویند.

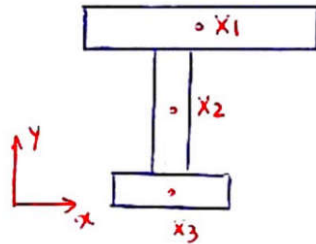


$$Ve = Fh$$

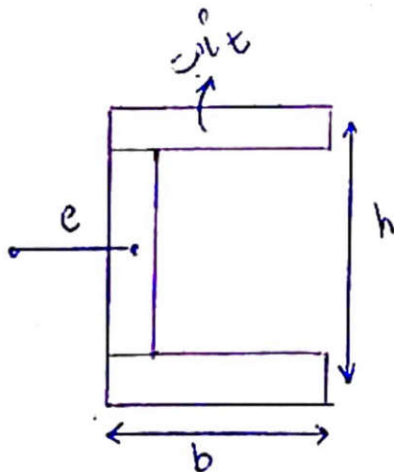
$$e = \frac{Fh}{V}$$

نکته: مرکز جرم یک خاصیت هندسی است و به نیرو و راستی آن بستگی ندارد و از رابطی زیر بدست می‌آید.

$$e = \frac{\sum I_i \bar{x}_i}{\sum I_i}$$



مثال: مرکز جرم مقاطع زیر را بیابید.



$$I_{\text{بال}} = \frac{1}{12} t h^3$$

$$I_{\text{پای}} = \frac{1}{12} b t^3 + b t \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\text{بال } X = 0, \quad \text{پای } X = \frac{b}{2}$$

$$e = \frac{2 \left(\frac{b}{2}\right) \left[\frac{1}{12} b t^3 + b t \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]}{\frac{1}{12} t h^3 + 2 \left[\frac{1}{12} b t^3 + b t \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]}$$

$$e = \frac{b^2 t \left(\frac{h}{2}\right)^2}{\frac{1}{12} t h^3 + 2 b t \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{3 b^2 t h^2}{t h^3 + 6 b t h^2} = \frac{3 b^2}{h + 6 b} = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}}$$

از بعد t^3 می‌توان صرف نظر کرد.

پس مقدار e ربطی به ضخامت نداشته و به $\frac{h}{3b}$ بستگی دارد و می‌توان گفت $0 < e < \frac{b}{2}$

$$A = 2\pi a t$$

برای کل سطح مقطع

$$J = A a^2 = 2\pi a^3 t$$

$$I = \frac{1}{2} J = \pi a^3 t$$

با استفاده از مختصات قطبی θ ، برای جزء سطح مقطع

$$A = s t = a \theta t$$

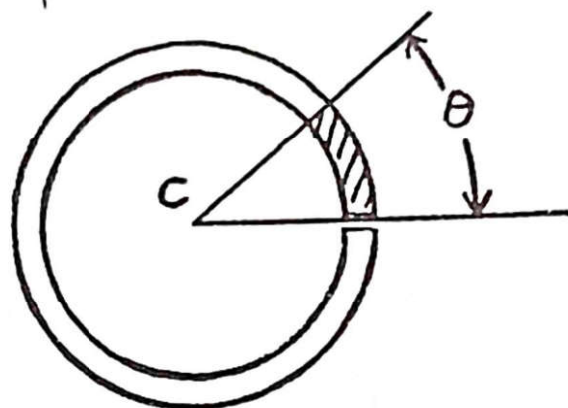
$s = \text{arc طول}$

$$\bar{r} = a \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

که در آن

$$\alpha = \frac{1}{2} \theta$$

$$\bar{y} = \bar{r} \sin \alpha = a \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}$$



$$Q = A \bar{y} = a \theta t a \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} = a^2 t \int \sin^2 \alpha$$

$$= a^2 t \int \sin^2 \frac{\theta}{2} = a^2 t (1 - \cos \theta)$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V a^2}{I} (1 - \cos \theta)$$

$$M_c = \int a \tau dA = \int_0^{2\pi} \frac{V a^2}{I} (1 - \cos \theta) t a d\theta = \frac{V a^3 t}{I} (\theta - \sin \theta) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\pi V a^3 t}{\pi a^3 t} = 2aV$$

$$M_c = Ve \quad \text{اما}$$

پس

$$e = 2a \quad \blacktriangleleft$$