



تاریخ: ۹۵/۱۰/۳۰
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۳۰)

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۹۶-۹۵

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int \tan^{-1}(\sqrt{x}) dx$

(ب) $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4} dx$

(ج) $\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$

سؤال ۲. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. نشان دهید $c \in [0, 1]$ موجود است طوری که $f(c) = c$.

سؤال ۳. (الف) حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به مثلثی در صفحه xy به رئوس $(1, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(3, 0)$ حول محور y را بیابید.

(ب) طول منحنی تابع f با ضابطه $\int_1^2 \sqrt{5t^2 + 2t} dt$ از $x=1$ تا $x=2$ را بیابید.

سؤال ۴. با استفاده از انتگرال معین مقدار حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 0}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - (n-1)^2}} \right)$$

سؤال ۵. برای هر یک از سری‌های داده شده در زیر، مشخص کنید کدام همگرایی مطلق است، کدام همگرایی مشروط است و کدام واگرا.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^{-n}$

(ج) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n) \sqrt{\ln(\ln n)}}$

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

سؤال ۶. با استفاده از سری هندسی، مجموع سری عددی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

سؤال ۲: ۱۰ نمره،

سؤال ۴: ۱۰ نمره،

سؤال ۶: ۱۰ نمره.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۷+۷+۶=۲۰ نمره،

سؤال ۳: ۱۰+۱۰=۲۰ نمره،

سؤال ۵: ۷+۶+۷+۱۰=۳۰ نمره،

مجموع: ۱۰۰ نمره



حل مسائل امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

۹۵/۱۰/۳۰

سؤال ۱: (الف) قرار می دهیم $\tan^{-1}(\sqrt{x}) = u$ و $dx = dv$.

در این صورت $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx = du$ و می توانیم فرض کنیم $x = v$. در نتیجه

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x}) dx = x \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

حال اگر $t = \sqrt{x}$ ، آنگاه $x = t^2$ و لذا $dx = 2t dt$. پس

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x}) dx = x \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}} \int \frac{t}{1+t^2} (2t dt)$$

$$= x \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$= x \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \int dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= x \tan^{-1}(\sqrt{x}) - t + \tan^{-1} t + C$$

$$= x \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \tan^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

$$= (1+x) \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C.$$

(ب) اگر $x = 3 \tan t$ ، آنگاه $dx = 3(1 + \tan^2 t) dt$ و لذا

$$\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4} dx = \int \frac{\sqrt{9+9 \tan^2 t}}{3^4 \tan^4 t} (3(1 + \tan^2 t) dt)$$

$$= \int \frac{3}{3^4} \frac{\cos t}{\sin^4 t} \left(\frac{3}{\cos^2 t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{\cos t}{\sin^4 t} dt.$$

حال با فرض $\sin t = u$ به دست می آوریم $\cos t dt = du$. پس

$$\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{u^4} du$$

$$= -\frac{1}{27} \frac{1}{u^3} + C$$

$$= -\frac{1}{27} \frac{1}{\sin^3 t} + C$$

$$= -\frac{1}{27} \frac{1}{\sin^3(\tan^{-1}(\frac{x}{3}))} + C$$

$$= -\frac{1}{27} \left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{x} \right)^3 + C.$$

(ج) می نویسیم

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

و به دست می آوریم

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A-B-2C+D=1 \\ B+C-2D=-2 \\ A-B+D=-1 \end{cases}$$

که این نیز ایجاب می کند $A = -1$ ، $B = 1$ ، $C = -1$ و $D = 1$. پس

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

و در نتیجه

$$\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \int \frac{-1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-x+1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{x-1} + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + C. \blacksquare$$

سؤال ۲: با توجه به فرض می توانیم بنویسیم

$$\int_0^1 (f(x)-x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$

از طرفی دیگر، چون f تابعی پیوسته است پس بنابر قضیه مقدار میانی برای انتگرال، $c \in [0, 1]$ موجود است طوری که

$$\int_0^1 (f(x)-x) dx = (1-0)(f(c)-c) = f(c)-c.$$

در نتیجه $f(c) = c$ و لذا $f(c) - c = 0$. \blacksquare

سؤال ۳: (الف) مثلث داده شده از تقاطع دو خط به معادلات

$y = x - 1$ و $y = -x + 3$ با محور x به دست می آید. پس در

واقع می خواهیم حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به محور

x و زیر منحنی تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & : 1 \leq x \leq 2 \\ -x+3 & : 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

سؤال ۵: (الف) برای راحتی قرار می دهیم $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$. پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ می باشد. توجه می کنیم که a_n ها مثبت اند. ابتدا همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

را بررسی می کنیم. اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

در نظر بگیریم؛ آنگاه

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0.$$

این نیز نتیجه می دهد که f تابعی اکیداً نزولی است و لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f(n+1) < f(n)$ یا $a_{n+1} < a_n$. یعنی اینکه دنباله (a_n) ، دنباله ای نزولی است. هم چنین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = 0.$$

پس بنابر آزمون سری های متناوب، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگراست. حال همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

را بررسی می کنیم. سری مذکور، بنابر آزمون مقایسه حدی واگراست، زیرا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

در نتیجه، سری داده شده همگرای مشروط است.

(ب) برای راحتی قرار می دهیم

$$a_n = \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^{-n}.$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می باشد. توجه می کنیم که a_n ها مثبت اند. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^{-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-1} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n - 1 \right)^{-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - 1 \right)^{-1}$$

حول محور y را محاسبه کنیم. حجم این جسم، V ، نیز برابر است با

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 xf(x)dx \\ &= 2\pi \left(\int_1^2 xf(x)dx + \int_2^2 xf(x)dx \right) \\ &= 2\pi \left(\int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^2 x(-x+2)dx \right) \\ &= 2\pi \left(\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right) \Big|_1^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_2^2 \right) \\ &= 2\pi \left(\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(-9 + \frac{2 \cdot 2}{2} \right) - \left(-\frac{2}{2} + 4 \right) \right) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

(ب) با استفاده از قاعده زنجیری و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$f'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(2x\sqrt{5x^2 + 2x^2} \right).$$

در نتیجه

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{5}{4} (4x^2(5x^2 + 2x^2))$$

$$= 1 + 25x^4 + 10x^6$$

$$= (1 + 5x^2)^2.$$

پس طول منحنی مطلوب از $x=1$ تا $x=2$ ، برابر است با

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$= \int_1^2 (1 + 5x^2) dx$$

$$= (x + 5x^3) \Big|_1^2$$

$$= (2 + 20) - (1 + 5)$$

$$= 16. \blacksquare$$

سؤال ۴: حد مطلوب برابر است با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - (i-1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{6}. \blacksquare$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1).$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1).$$

اکنون در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x = \frac{-1}{2}$ و سپس طرفین تساوی به دست آمده را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{16}{27},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^n} = \frac{8}{27}. \blacksquare$$

$$= \frac{1}{e-1} < 1,$$

پس بنابر آزمون ریشه، سری داده شده همگرای مطلق است.

(ج) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n = \frac{1}{(n \ln n) \sqrt{\ln(\ln n)}} \quad (n \geq 3).$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که a_n ها مثبت‌اند.

اکنون تابع $f: [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \frac{1}{(x \ln x) \sqrt{\ln(\ln x)}}$$

در نظر می‌گیریم. به وضوح f تابعی مثبت، پیوسته و نزولی است. برای $a \geq 3$ ، انتگرال

$$\int_3^a f(x) dx = \int_3^a \frac{1}{(x \ln x) \sqrt{\ln(\ln x)}} dx$$

را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، اگر $u = \sqrt{\ln(\ln x)}$ ، آنگاه $\ln(\ln x) = u^2$ و لذا

$$\frac{1}{x \ln x} dx = 2u du.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_3^a f(x) dx &= \int_{\sqrt{\ln(\ln 3)}}^{\sqrt{\ln(\ln a)}} \frac{2u}{u} du \\ &= 2 \left(\sqrt{\ln(\ln a)} - \sqrt{\ln(\ln 3)} \right). \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a f(x) dx = \infty$$

و در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده واگراست.

(د) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌باشد. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4} < 1,$$

پس بنابر آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا و در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است. \blacksquare

سؤال 6: توجه می‌کنیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

با دو بار مشتق‌گیری نسبت به x از طرفین تساوی بالا به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1),$$