۲-۲ قانون ویسکوزیته نیوتن[1]

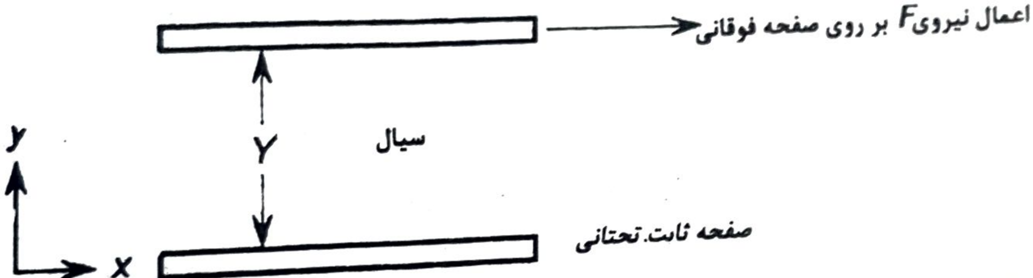
سیالی با وضعیتی مطابق شکل (۲-۲) در بین دو صفحه افقی با فاصله عمودی Y را در نظر بگیرید. صفحه پایین ساکن و صفحه بالایی تحت نیروی ثابت F در جهت x قرار گرفته و شروع به حرکت در جهت x می‌کند. حرکت صفحه بالایی متناسب با تنش برشی بین صفحه و سیال تنظیم شود که در مخالف حرکت صفحه عمل می‌کند و وقتی به شرایط پایا می‌رسیم که یک تعادل بین نیروی F و نیروی تنشی تنش برشی ایجاد شود که در این حالت صفحه بالایی با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. در شرایط پایدار نیوتن فهمید که سرعت V با نیروی F و فاصله Y و همچنین به طور معکوس با مساحت سطح صفحه A متناسب می‌باشد. یعنی

$$V \propto \frac{FY}{A}$$

$$\frac{F}{A} \propto \frac{V}{Y} \qquad (۳-۲)$$

1- Newton's Law of Viscosity

هیچ لغزشی در فصل مشترک سیال و صفحه رخ نمی‌دهد و از این رو وقتی صفحه بالایی با سرعت V در حرکت است، سیال چسبیده به آن نیز با سرعت V به حرکت می‌پردازد. به طور مشابه سیال چسبیده به صفحه پایین در حال سکون به سر می‌برد. پدیده عدم لغزش بواسطه توسعه یک گرادیان سرعت در سیال در جهت y می‌باشد. در معادله (۲-۳)، V/Y، گرادیان سرعت در جهت y را می‌توان بصورت دیفرانسیل به فرم dv_x / dy بیان کرد که v_x سرعت یک لایه از مایع در جهت x می‌باشد. همچنین در معادله (۲-۳) ، F/A تنش برشی در فصل مشترک سیال و صفحه بالایی می‌باشد. با نمایش تنش برشی با τ معادله (۲-۳) به صورت زیر در خواهد آمد.



شکل ۲-۲ جریان سیال بین دو صفحهٔ افقی موازی که با سرعتهای متفاوت حرکت می‌کنند.

$$\tau \propto \frac{dv_x}{dy}$$

یعنی تنش برشی متناسب با گرادیان‌سرعت‌در سیال است.ثابت‌تناسب، η بدین‌گونه تعریف می‌شود.

$$\tau = -\eta \frac{dv_x}{dy} \qquad (۲-۴)$$

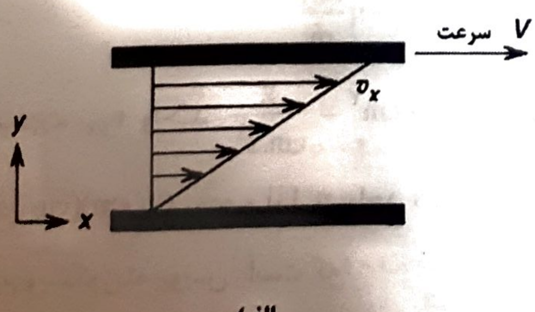
که همان ویسکوزیته سیال بوده، و معادله (۲-۴) قانون ویسکوزیته نیوتن می‌باشد. سیالاتی که از این معادله تبعیت می‌کنند به عنوان سیالات نیوتنی شناخته می‌شوند و در مقابل سیالاتی که رفتار غیر خطی بین تنش برشی و گرادیان سرعت dv_x / dy دارند به سیالات غیر نیوتنی[1] معروف‌اند. گازها، مایعات آبکی و مواد آلی ساده و فلزات مذاب رفتار نیوتنی از خود نشان می‌دهند و تعداد زیادی مایعات کمپلکس مانند محلولهای پلیمری و خمیرها، رفتار غیر نیوتنی دارند. در ادامه بحث حرکت آرام سیالات نیوتنی تراکم ناپذیر را پی می‌گیریم.

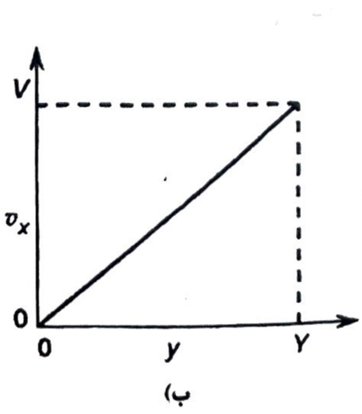
در شکل (۲-۳ الف) گرادیان ثابت سرعت در عرض سیال، V/Y ، توسط فلش ها نشان داده شده است. طول این فلش‌ها سرعت لایه را در y مربوطه نمایش می‌دهد. با یک گرادیان ثابت در سرعت، تنش برشی، در معادله (۲-۴) نیز ثابت خواهد بود. تنش برشی، τ، را با ارجاع به شکل

1- Non - Newtonian Fluids

(۲-۳ ب) می‌توان در نظر گرفت. به خاطر شرط عدم لغزش یک لایه سیال با ضخامت δ در تماس با صفحه پایینی در حال سکون است. در این حال لایه بعدی سیال با ضخامت δ با سرعت $\frac{V\delta}{Y}$ در حال حرکت است و این بواسطه تنش برشی موجود بین دو لایه سیال می‌باشد. به طور مشابه، لایه بعدی سیال با سرعتی معادل $2V\delta / Y$ در حرکت است که به خاطر تنش برشی موجود بین آن لایه و لایه زیری با سرعت کمتر می‌باشد. می‌توان اینطور بیان نمود که تنش برشی بین دو لایه سیال می‌کوشد تا سرعت لایه تندتر را کاهش و سرعت لایه آهسته را افزایش دهد. اختلاف در سرعت بین دو لایه (گرادیان سرعت) تنها با نیروی وارد به صفحه بالایی تامین و حمایت می‌شود. اگر این نیرو برداشته شود تنش برشی موجود باعث توقف حرکت صفحه بالایی خواهد شد. وجود یک اختلاف در سرعت بین دو لایه (گرادیان سرعت در سیال) باعث انتقال ممنتوم در لایه سریعتر به لایه کندتر و نیز باعث انتقال اتم‌ها یا مولکولهای کند موجود در لایه کندتر به لایه سریعتر و برعکس خواهد شد. این اثر را می‌توان با در نظر گرفتن دو مسافر با سرعت V_1، V_2 در یک جهت در مسیرهای موازی مشاهده نمود. اگر یک شخصی با جرم m از یک واگن به دیگری پرش کند و شخص دیگر با جرم m همین عمل را بطور متقابل انجام دهد یک ممنتوم به مقدار $m(V_2 - V_1)$ از محرک سریعتر به محرک کندتر منتقل می‌شود. حال این تصور را به دو لایهٔ کنار هم برده، پرش مسافران را پرش اتم‌ها یا مولکولها و انتقال ممنتوم همان اصطکاک یا تنش برشی بین دو لایه است. اگر چنین راه مناسبی در تبادل اختلاف نیروی محرکه دو واگن نبود، هر دو به حرکت با همان سرعت خود ادامه می‌دادند. از آنجائیکه ضخامت لایه‌ها در شکل (۲-۳ ب) بسیار کوچک و غیر قابل رؤیت است گرادیان سرعت در عرض سیال بصورت ثابت مطابق شکل (۲-۳ الف) در خواهد آمد.

همگون بودن تنش برشی و آهنگ انتقال ممنتوم با در نظر گرفتن واحدهایشان بصورت زیر هویدا می‌شود.





شکل ۲-۳ تغییرات سرعت مکانی نسبت به موقعیت سیال بین دو صفحه نمایش داده شده در شکل ۲-۲

$$\text{تنش برشی} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} = \text{جرم}\ \frac{\text{طول}}{(\text{زمان})^{۲}} \times \frac{۱}{\text{سطح}}$$

$$= \text{جرم}\ \frac{\text{طول}}{\text{زمان}} \times \frac{۱}{\text{زمان}} \times \frac{۱}{\text{سطح}}$$

$$= \frac{\text{سرعت} \times \text{جرم}}{\text{سطح} \times \text{زمان}}$$

$$= \frac{\text{ممنتوم}}{\text{سطح} \times \text{زمان}}$$

= انتقال ممنتوم در واحد زمان در واحد سطح

= **آهنگ (سرعت) انتقال ممنتوم در واحد سطح**

در شکل (۲-۳ب) گرادیان سرعت، dv_x / dy مثبت و جهت انتقال ممنتوم از منطقه‌ای با v_x بالاتر به ناحیه‌ای با v_x پایین‌تر است و آهنگ انتقال ممنتوم یک مقدار منفی است (یعنی ممنتوم در خلاف گرادیان سرعت منتقل می‌شود). گرادیان سرعت را می‌توان به عنوان نیروی محرکه انتقال ممنتوم در نظر داشت. اختلاف بین علامت گرادیان سرعت و جهت انتقال ممنتوم با علامت منفی در معادله (۲-۴) برطرف می‌شود. آهنگ انتقال ممنتوم در جهت y به علت حرکت سیال در جهت x برابر تنش برشی شده که به طور قراردادی بصورت τ_{yx} نمایش داده می‌شود. (برعکس اگر ممنتوم در جهت x به سبب حرکت در جهت y ایجاد شود تنش برشی آن بصورت τ_{xy} نمایش داده می‌شود).

بنابراین برای جریان سیال در جهت x قانون ویسکوزیته نیوتنی اینطور نوشته می‌شود.

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \qquad (۲-۵)$$

در سیستم cgs، τ_{yx} واحد $dyn / cm^{2} = \frac{g}{cm.s^{2}}$ را دارد. گرادیان سرعت $\frac{dv_x}{dy}$ دارای واحد $(1/cm)(cm/s) = (1/s)$ بوده و لذا η واحد g/cm.s را به خود اختصاص می‌دهد. واحد مرسوم ویسکوزیته پویس[1] است که

$$1\ \text{poise} = 1\ \text{P} = 1\ g/cm.s \qquad (۲-۶)$$

1- Poise

برای مایعات ساده و گازها یک واحد رایج‌تر به نام سانتی پویس[1] (cP) که $1\ cP = 10^{-2} P$ می‌باشد. به عنوان مثالهایی از اندازه ویسکوزیته، آب در دمای $20-22°C$ برابر با ۱cP و ویسکوزیته یک روغن موتور معمولی.در دمای $20°C$ برابر با ۸ cP است. در سیستم SI

$$1\ P = 1\ g/cm.s \times 10^{-3}\ kg/g \times 10^{2}\ cm/m$$

$$= 0/1\ kg/m.s$$

واحد kg/m.s را می‌توان به صورت زیر تعبیر نمود.

$$kg/m.s = kg/m^2 (m/s^2) s = \frac{N}{m^2}.s = Pa.s \quad (\text{پاسکال - ثانیه})$$

از این رو در سیستم SI ویسکوزیته یک روغن موتور معمولی در دمای $20°C$، ۰/۸ kg/m.s یا ۰/۸Pa.s است.

مثال ۲-۱

فضای بین دو ورق مسطح در فاصله ۰/۰۰۵ cm با روغنی با ویسکوزیته ۰/۲ Pa.s پر شده است. اگر صفحه پایین ثابت و صفحه بالایی با سرعت ۰/۵ m/s حرکت کند مطلوب است محاسبه تنش برشی لازم برای نگهداری صفحه بالایی در حرکت.

$$\frac{dv_x}{dy} = 0/5\ m/s \times \frac{1}{5 \times 10^{-5}} (\frac{1}{m}) = 10^4 s^{-1}$$

$$\eta = 0/2\ Pa.s = 0/2\ kg/m.s$$

در این صورت

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} = -0/2\ \frac{kg}{m.s} \times 10^4 (\frac{1}{s})$$

$$= -2000\ \frac{kg.m}{s^2} (\frac{1}{m^2})$$

$$= -2000\ \frac{N}{m^2}$$

1- Centipoise

۲-۴ جریان سیال بین دو صفحه صاف موازی

جریان کوتی به واسطه حرکت یکی از صفحات نسبت به دیگری صورت می‌گرفت و شرط عدم لغزش بین صفحات و سیال در نظر گرفته شد و تغییرات v_x در جهت y با یک معادله خطی برای لایه‌های سیال بیان گردید. در مقابل، جریان سیال بین دو صفحه موازی صاف و افقی نیاز به یک نیروی اعمالی به سیال در جهت جریان دارد. شرط عدم لغزش سیال در صفحات بدان معنی است که سرعت در لایه‌های تماس با دو صفحه صفر می‌باشد. و از این رو v_x با زیاد شدن فاصله عمودی از این دو صفحه به داخل سیال افزایش می‌یابد. تقارن نشان می‌دهد در وسط دو صفحه سرعت ماکزیمم را خواهیم داشت و در آنجا $\frac{dv_x}{dy}=0$ و در این ناحیه از معادله ۲-۵، τ_{yx} نیز صفر خواهد شد. این به عنوان یک شرط مرزی در حل مسائل از طریق موازنه ممنتوم در حجم معیار به ما کمک می‌کند.

بواسطه تقارن مناسب است صفحه میانی بین جداره‌ها را $y=0$ و فاصله دو جداره را 2δ در نظر بگیریم. حجم معیار می‌تواند در هر طرف $y=0$ در فاصله‌ای به اندازه کافی دور از مدخل ورودی در جایی که جریان سیال کاملاً توسعه یافته[1] و در حالت پایا انتخاب گردد که در مسیر حرکت سیال، سرعت جریان مستقل از موقعیت در جهت جریان خواهد شد و در حالت پایا مستقل از زمان نیز خواهد بود. ممنتوم ویسکوزی عمود بر خلاف جهت گرادیان سرعت بوده و از $y=0$ به سمت جداره‌ها انجام می‌گیرد. یک حجم معیار مطابق شکل (۲-۷) به ابعاد Δx، Δy و Δz در نظر می‌گیریم.

ممنتوم جابجایی بواسطه جریان سیال، در صفحه yz در x وارد و در صفحه yz در $x+\Delta x$ خارج می‌شود و ممنتوم ویسکوزی بواسطه وجود گرادیان سرعت موجود در سیال در صفحه xz در y وارد و در صفحه xz در $y+\Delta y$ خارج می‌گردد. در شرایط کاملاً توسعه یافته و پایا تحت یک نیروی خارجی، فشار استاتیک در سیال به طور خطی در جهت جریان کاهش می‌یابد. اگر $P|_x$ فشار استاتیک در x و $P|_{x+\Delta x}$ فشار استاتیک در $x+\Delta x$ باشد افت فشار[2] در طول حجم معیار در جهت جریان به اندازه $P|_x - P|_{x+\Delta x}$ خواهد بود. از این رو نیرویی که به علت فشار استاتیک در صفحه yz در x به حجم معیار اعمال می‌شود برابر $P|_x\,\Delta y\,\Delta z$ و نیروی عمل کننده در صفحه yz در $x+\Delta x$ بصورت $P|_{x+\Delta x}\,\Delta y\,\Delta z$ خواهد بود. از آنجائیکه جریان در راستای افقی است نیروی جاذبه در آن تأثیر ندارد.

1- Fully Develop Flow
2- Pressure Drop

اجزاء موازنه ممنتوم به صورت زیر است.

نرخ

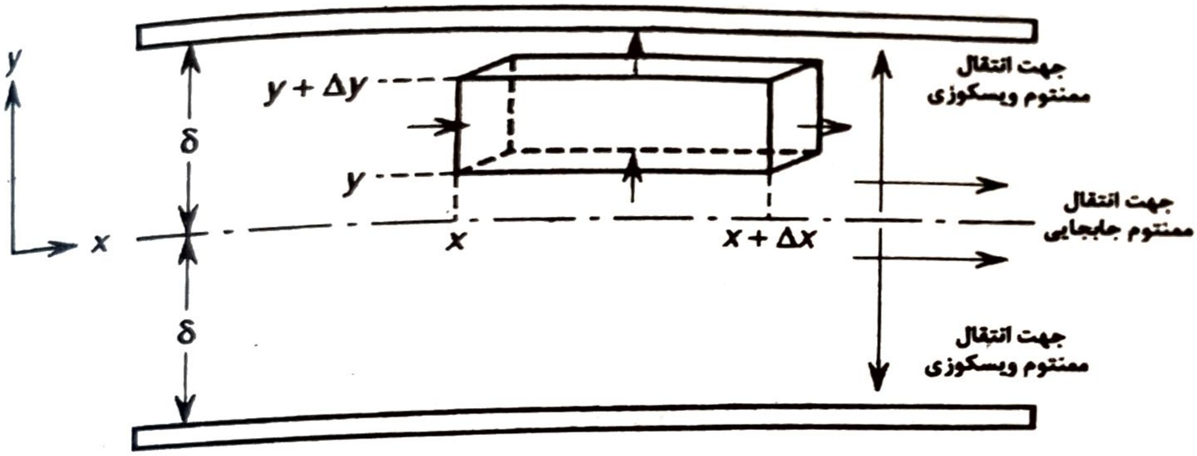
~~سرعت~~ ممنتوم جابجایی ورودی به حجم معیار $= \rho v_x^2|_x \, \Delta y \, \Delta z$

~~سرعت~~ ممنتوم جابجایی خروجی از حجم معیار $= \rho v_x^2|_{x+\Delta x} \, \Delta y \, \Delta z$

~~سرعت~~ ممنتوم ویسکوزی ورودی به حجم معیار $= \tau_{yx}|_y \, \Delta x \, \Delta z$

~~سرعت~~ ممنتوم ویسکوزی خروجی از حجم معیار $= \tau_{yx}|_{y+\Delta y} \, \Delta x \, \Delta z$

برآیند نیروهای عمل کننده به حجم معیار $= (P|_x - P|_{x+\Delta x}) \Delta y \, \Delta z$



شکل ۲-۷ حجم معیار و جهات انتقال ممنتوم ویسکوزی و جابجایی در جریان سیال بین دو صفحه موازی

و با موازنه ممنتوم مطابق شکل (۲-۶) داریم

$$(\rho v_x^2|_x - \rho v_x^2|_{x+\Delta x}) \Delta y \, \Delta z + (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) \Delta x \, \Delta z +$$
$$(P|_x - P|_{x+\Delta x}) \Delta y \, \Delta z = 0$$

دوباره از آنجائیکه جریان کاملاً توسعه یافته است، v_x تنها تابعی از y بوده و از این رو ترم اول معادله فوق صفر خواهد شد.

$$(\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) \Delta x \, \Delta z + (P|_x - P|_{x+\Delta x}) \Delta y \, \Delta z = 0$$

با تقسیم طرفین به $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ داریم.

$$\frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{P|_x - P|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

در حالت حدی وقتی Δx، Δy به سمت صفر بروند.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} = -\frac{d\tau_{yx}}{dy}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P|_x - P|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{dP_x}{dx}$$

و با توجه به اینکه P به صورت خطی نسبت به x کاهش می‌یابد، $\frac{dP}{dx}$ یک مقدار منفی، و از این رو $-\frac{dP}{dx} = \frac{\Delta P}{L}$ جائیکه ΔP اندازه تغییر فشار یا به عبارتی افت فشار حاصل در فاصله L است. بنابراین

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{\Delta P}{L}$$

و با انتگرال‌گیری داریم.

$$\tau_{yx} = \frac{\Delta P}{L} y + C_1$$

و شرط مرزی $\tau_{yx} = 0$ در $y = 0$ می‌دهد $C_1 = 0$

و از این رو

$$\tau_{yx} = \frac{\Delta P}{L} y \qquad (۲-۹)$$

این معادله چنین بیان می‌کند که τ_{yx} متناسب با افت فشار بر واحد طول در سیال و یک تابع خطی نسبت به y بوده و بالاترین مقدار آن $\frac{\Delta P \delta}{L}$ در جداره‌ها می‌باشد. با در نظر گرفتن قانون ویسکوزیته نیوتنی، معادله (۲-۵)

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$

داریم

$$-\eta \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta P}{L} y$$

با انتگرال‌گیری

$$v_x = \frac{-\Delta P}{2L\eta} y^2 + C_2$$

و با شرط مرزی $v_x = 0$ در $y = \pm\delta$

$$C_2 = \frac{\Delta P}{2L\eta} \delta^2$$

و نهایتاً

$$v_x = \frac{\Delta P}{2L\eta}(\delta^2 - y^2) \qquad (۲-۱۰)$$

v_x متناسب با $\frac{\Delta P}{L}$ و به طور معکوس با η متناسب است و همچنین به صورت تابع سهموی از y می‌باشد و ماکزیمم مقدار آن در $y = 0$ و برابر است با

$$V_{x,\max} = \frac{\Delta P}{2L\eta}\delta^2 \qquad (۲-۱۱)$$

توزیع سرعت و تنش برشی در شکل (۲-۸) نشان داده شده است. در یک هم‌سنجی با جریان کوئت که

بر خلاف جریان کوئت

۱) τ_{yx} مستقل از y

۲) v_x بصورت تابع خطی از y (در جریان بین صفحات موازی)

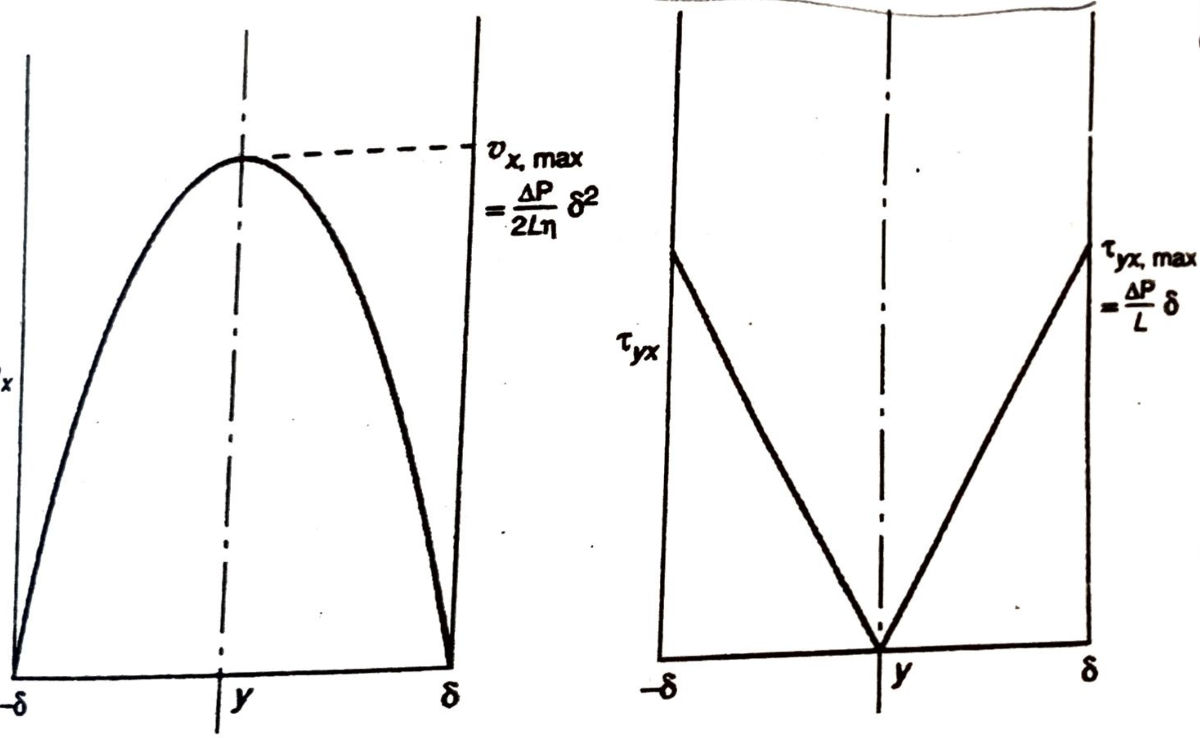
در جریان کوئت

مورد در جریان بین دو صفحه

۱) τ_{yx} تابع خطی از y

۲) v_x یک تابع سهموی از y است.

جریان بین صفحه



شکل ۲-۸ توزیع سرعت و تنش برشی مکانی در جریان سیال بین دو صفحه موازی

تنش‌های برشی عمل کننده بر جداره‌ها بواسطه جریان سیال ویسکوز بوده که خود با بکارگیری فشار عمودی وارد به سیال در جهت جریان به دست می‌آید. تنش برشی و افت فشار در سیال به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند. برای صفحات با پهنای W و طول L، نیروی برشی وارد به صفحات چنین است.

نیروی برشی = (تنش برشی) (سطح) = $(\tau_{yx}|_{y=\delta})(2LW)$

$$= \frac{\Delta P}{L}\delta(2LW)$$

$$= 2\Delta P\ \delta W$$

که برابر کاهش نیروی عمودی در طول یعنی $(\Delta P)(2\delta W)$ می‌باشد.

برای محاسبه دبی جرمی[1] و دبی حجمی[2] نیاز به دانستن سرعت متوسط سیال، $\bar{v}_x$ می‌باشد. محاسبه سرعت متوسط در شکل (۲-۹) نشان داده شده است. سرعت متوسط به نحوی است که مساحت $\bar{v}_x(2\delta)$ با مساحت زیر منحنی v_x از $y=\delta$ تا $y=-\delta$ برابر باشد. به طور ساده‌تر سطح $\bar{v}_x(\delta)$ با سطح زیر منحنی v_x از $y=0$ تا $y=\delta$ برابر است.

$$\bar{v}_x\delta = \int_0^\delta v_x\, dy$$

$$= \int_0^\delta \frac{\Delta P}{2L\eta}(\delta^2 - y^2)\, dy$$

$$= \frac{\Delta P}{2L\eta}\left(\delta^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^\delta$$

$$\bar{V}_x\cdot\delta = \frac{\Delta P}{3L\eta}\delta^3$$

بنابراین

$$\bar{v}_x \text{ (سرعت متوسط سیال)} = \frac{\Delta P}{3L\eta}\delta^{\cancel{3}\,2}$$

که مقدار آن $\frac{2}{3}$ مقدار $v_{x,\max}$ می‌باشد.

دبی حجمی، $\dot{V}$، به صورت زیر است.

$\dot{V}$ = (سطح مقطع) × (سرعت متوسط)

$$= \bar{v}_x(2\delta w)$$

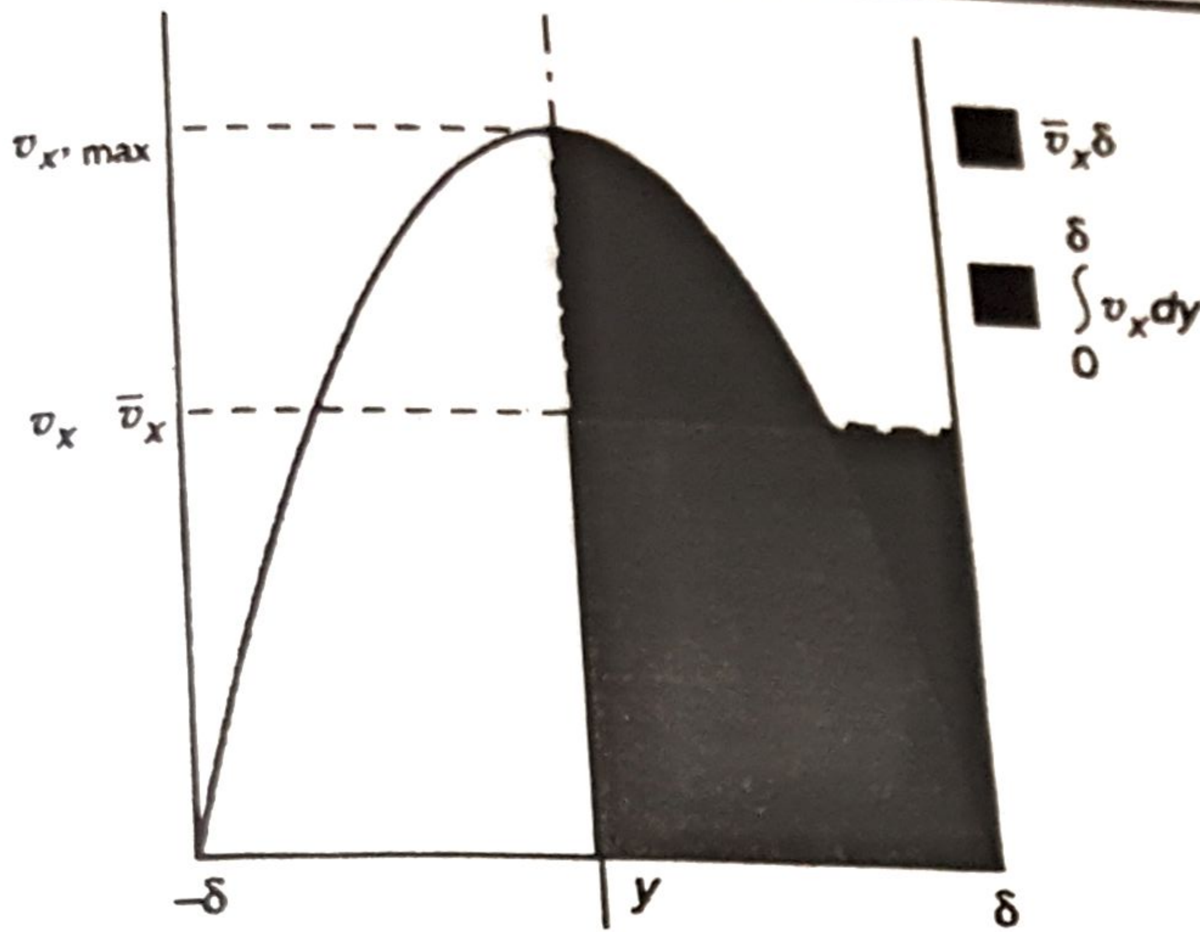
$$= \frac{2\Delta P}{3L\eta}\delta^3 W$$

و دبی جرمی، $\dot{M}$، این چنین است.

$(\dot{M})$ = (دانسیته سیال) × (دبی حجمی سیال)

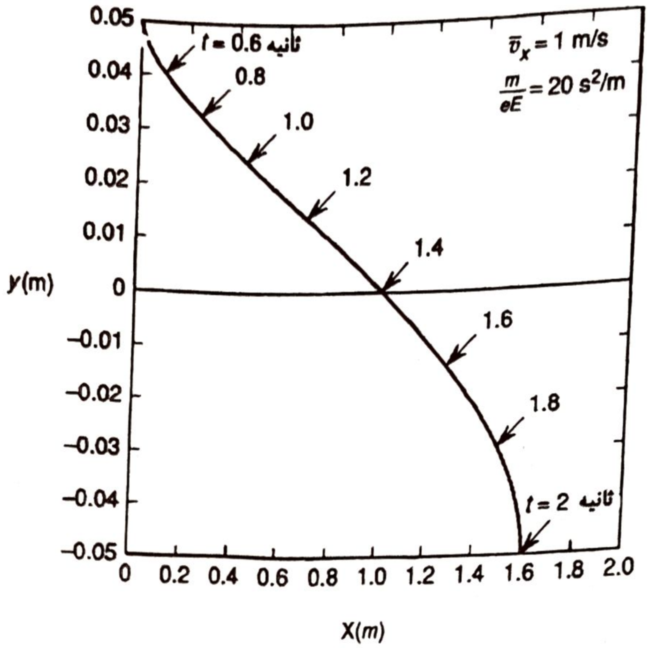
$$= \frac{2\Delta P}{3L\eta}\delta^3 W\rho$$

1- Mass Flow Rate
2- Volume Flow Rate



شکل ۲-۹ محاسبه سرعت متوسط جریان در جریان سیال بین دو صفحه موازی

مثال ۲-۲

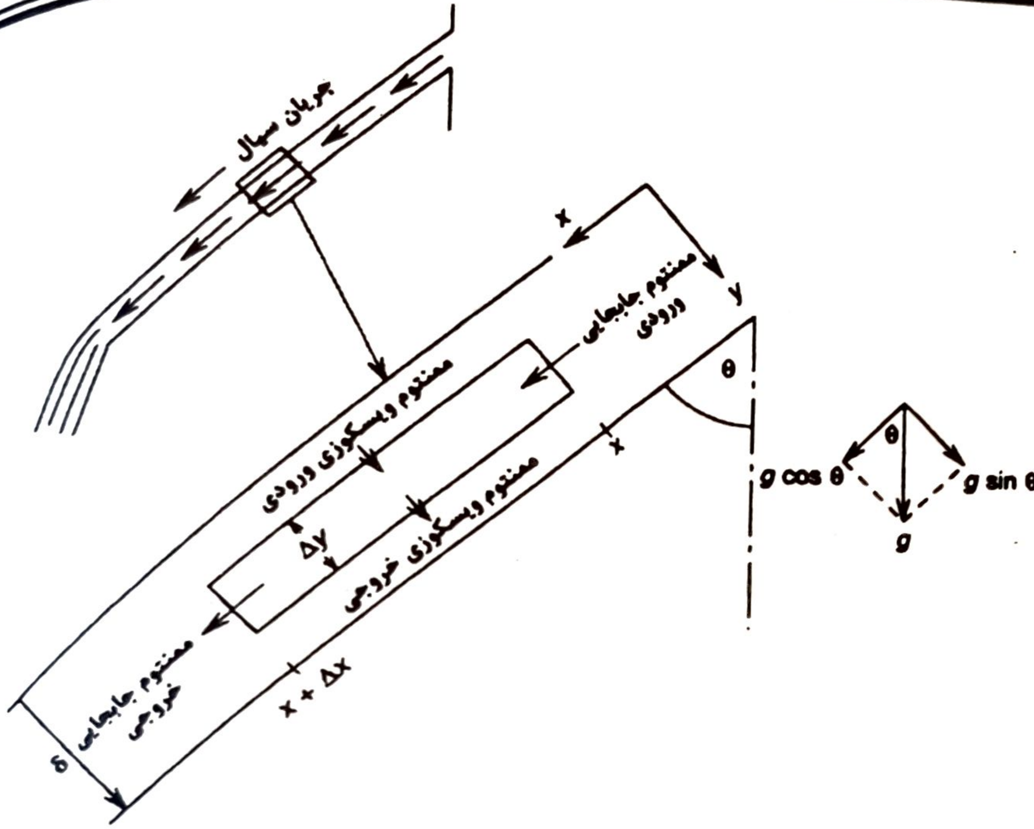


شکل ۲-۱۰ مسیر حرکت یک ذره غبار باردار شده در یک غبارگیر الکترواستاتیک

۲-۵ جریان سیال بر روی یک سطح شیب‌دار

جریان آزاد رو به پایین سیال در یک سطح شیب‌دار به واسطه وزن سیال می‌باشد (یعنی تاثیر جاذبه بر سیال). اگر سطح با شیبی تحت زاویه θ نسبت به خط عمود باشد مولفه جاذبه عمل کننده در جهت جریان به پایین $g\cos\theta$ می‌باشد. یک فیلم از سیال با ضخامت δ مطابق شکل (۲-۱۱) را در نظر بگیرید. سیال در تماس با سطح شیب‌دار فاقد حرکت است و حتی در فصل مشترک سیال - گاز نیز عدم لغزش داریم. گاز بالای سیال یک مقاومت ناچیز در برابر حرکت سیال دارد که ناشی از کم بودن ویسکوزیته گازها نسبت به مایعات می‌باشد. لایه گاز در تماس با سطح آزاد سیال با همان سرعت سطح آزاد حرکت می‌کند و از این رو تنش برشی در سطح آزاد سیال صفر است. در این صورت v_x از مقدار صفر در $y=\delta$ به سمت ماکزیمم مقدار خود در سطح آزاد افزایش می‌یابد و جهت انتقال ممنتوم ویسکوزی از سطح آزاد به سطح شیب‌دار است.

با توجه به موازنه ممنتوم، ممنتوم جابجایی از صفحه yz در x به حجم معیار وارد و در صفحه yz در $x+\Delta x$ از آن خارج می‌شود. باز در جریان پایا و کاملاً توسعه یافته مقدار ممنتوم جابجایی ورودی و خروجی به حجم معیار برابرند. ممنتوم ویسکوزی در صفحه xz در y به حجم معیار با نرخ $\tau_{yx}|_y \,\Delta x\,\Delta z$ وارد و در صفحه xz در $y+\Delta y$ از آن با نرخ $\tau_{yx}|_{y+\Delta y}\,\Delta x\,\Delta z$ خارج می‌گردد. نیروی عمل کننده بر سیال حجم معیار در جهت جریان اینگونه است.



شکل ۲-۱۱ حجم معیار مورد نظر در جریان سیال رو به پایین روی یک سطح شیب‌دار

$$F = (\text{جرم سیال})\ g\cos\theta$$
$$= (\text{دانسیته})\ (\text{حجم})\ g\cos\theta$$
$$= \rho g\cos\theta\ \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

از آنجائیکه v_x تنها تابعی از y است سرعت ممنتوم جابجایی ورودی به حجم معیار با سرعت ممنتوم خروجی از آن برابر است لذا موازنه ممنتوم روی حجم معیار بدین صورت است.

$$(\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y})\ \Delta z\,\Delta x + \rho g\cos\theta\ \Delta x\,\Delta y\,\Delta z = 0$$

با تقسیم طرفین به $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ و نیل دادن Δy به سمت صفر داریم.

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \rho g\cos\theta$$

با انتگرال‌گیری

$$\tau_{yx} = \rho g\cos\theta\ y + C_1$$

چون تنش برشی در سطح آزاد صفر است (یعنی $\tau_{yx}|_{y=0} = 0$) ثابت انتگرال‌گیری، C_1، صفر می‌شود.

پس

$$\tau_{yx} = \rho g\cos\theta\ y = -\eta\frac{dv_x}{dy}$$

با انتگرال گیری بعدی

$$v_x = \frac{-\rho g \cos\theta}{\eta}\frac{y^۲}{۲} + C_۲$$

دومین شرط مرزی $v_x = ۰$ در $y = \delta$ مقدار $C_۲$ را به صورت زیر به ما می‌دهد.

$$C_۲ = \frac{\rho g \cos\theta}{۲\eta}\delta^۲$$

و بنابراین

$$v_x = \frac{\rho g \cos\theta}{۲\eta}(\delta^۲ - y^۲) \qquad (۱۵-۲)$$

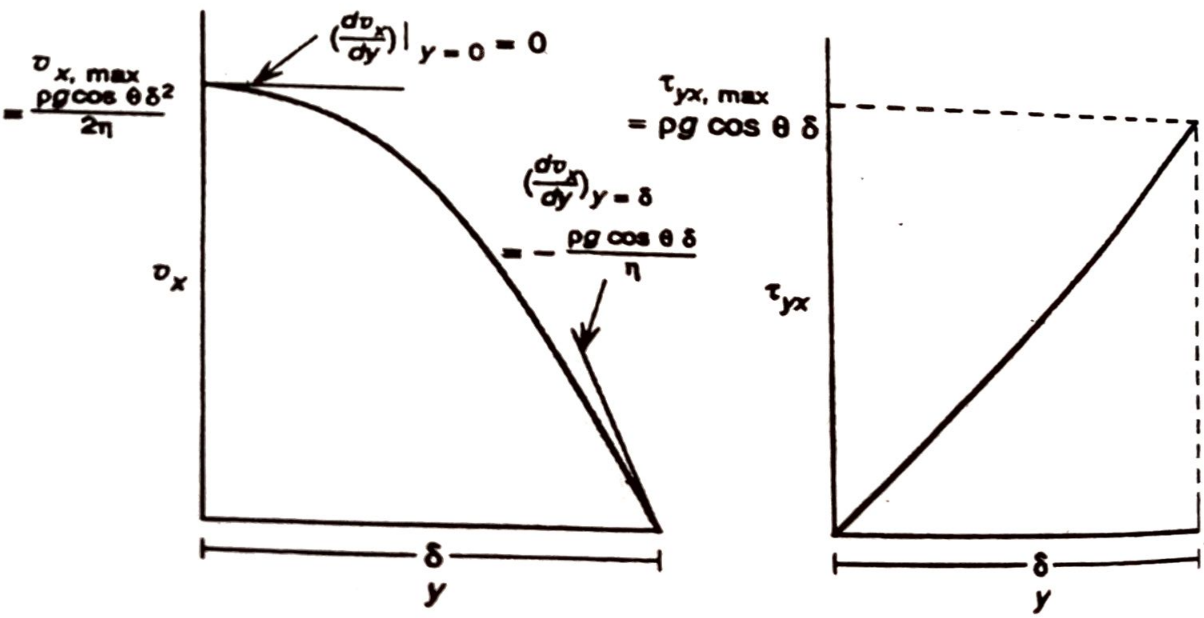
مقدار ماکزیمم v_x در $y = ۰$

$$v_{x,\max} = \frac{\rho g \cos\theta}{۲\eta}\delta^۲ \qquad (۱۶-۲)$$

سرعت و تنش برشی در شکل (۲-۱۲) نشان داده شده است. بنابراین

۱- تنش برشی، τ_{yx}، متناسب با نیروی مسبب جریان بوده (که با توجه به دانسیته سیال و زاویه θ تعیین شد) و بصورت تابع خطی از y می‌باشد.

۲- سرعت، v_x، با نیروی عامل جریان بطور مستقیم و به طور معکوس با ویسکوزیته متناسب بوده و بصورت تابع سهوی از y می‌باشد.



شکل ۲-۱۲ توزیع سرعت و تنش برشی مکانی در جریان سیال رو به پایین روی یک سطح شیب‌دار

مانند قبل، سرعت متوسط، $\bar{v}_x$ ، به طوری است که سطح $\bar{v}_x\delta$ با سطح $\int_0^\delta v_x dy$ برابر است.

$$\bar{v} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta v_x dy$$

$$= \frac{1}{\delta}\left(\frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}\right)\left[\delta^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^\delta$$

$$= \frac{\rho g\cos\theta}{3\eta}\delta^2$$

و مشابه جریان بین دو صفحه موازی $\frac{2}{3}$ مقدار v_{max} است. دبی حجمی بدین صورت است.

$$\dot{V} = \frac{\rho g\cos\theta}{3\eta}\delta^2(\delta W) \tag{۱۷-۲}$$

و دبی جرمی اینگونه است.

$$\dot{M} = \frac{\rho^2 g\cos\theta\delta^3 W}{3\eta} \tag{۱۸-۲}$$

با مشاهدات تجربی، جریان آرام رو به پایین از یک دیواره عمودی در راستای z نیازمند آن است که

$$Re \le 25$$

که عدد رینولدز طبق معادله زیر معرفی می‌شود.

$$Re = \frac{4\bar{v}_z\delta\rho}{\eta}$$

$= \frac{4\rho\bar{v}.\delta}{\eta}$ و $Re<25$

مثال ۲-۳

سرباره‌ای به طور مداوم روی سطح شیب دار از یک کوره شعله‌ای به یک مخزن هدایت می‌شود مطلوب است محاسبه ماکزیمم دبی جرمی سرباره در صورتیکه پهنای سطح شیب‌دار $1\,m$ و جریان آرام برقرار باشد. همچنین ارتباط موجود بین $\cos\theta, \delta, \bar{v}_x$ ، را تحقیق کنید. اطلاعات مورد نیاز:

$\rho = 2627\ kg/m^3$ ، دانسیته سر باره

$\eta = 0/31\ Pa.s$ ، ویکسوزیته سرباره

$W = 1\ m$

برای جریان آرام

$$Re = \frac{4\bar{v}\delta\rho}{\eta} \le 25$$

از معادله (۲-۱۸)

$$\dot{M} = \bar{v}_x \delta W \rho$$

بنابراین

$$\bar{v}_x \delta = \frac{\dot{M}}{W\rho}$$

(i)

پس

$$\mathrm{Re} = \frac{۴\dot{M}}{W\eta} \leq ۲۵$$

$$\dot{M} \leq \frac{۲۵W\eta}{۴} = ۲۵ \times ۱ \times ۰/۳۱\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m.s}} \times \frac{۱}{۴}$$

$$= ۱/۹۴\ \mathrm{kg/s}$$

با توجه به سرعت جریان برای 1/94 kg/s از معادله (i)،

$$\bar{v}_x \delta = ۱/۹۴\ \mathrm{kg/s} \times \frac{۱}{۱}\frac{۱}{\mathrm{m}} \times \frac{۱}{۲۶۲۷}\frac{\mathrm{m}^۳}{\mathrm{kg}}$$

$$= ۷/۳۸ \times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{m}^۲/\mathrm{s}$$

(ii)

از معادله (۲-۱۸)،

$$\dot{M} = \frac{\rho^۲ g \cos\theta \delta^۳ W}{۳\eta}$$

پس

$$\cos\theta \delta^۳ = \frac{۳\dot{M}\eta}{\rho^۲ g W}$$

$$= ۳ \times ۱/۹۴\ \mathrm{kg/s} \times ۰/۳۱\ \mathrm{kg/m.s} \times \frac{۱}{(۲۶۲۷)^۲}\frac{\mathrm{m}^۶}{\mathrm{kg}^۲}$$

$$\times \frac{۱}{۹۸/۱}\frac{\mathrm{s}^۲}{\mathrm{m}} \times \frac{۱}{۱}\frac{۱}{\mathrm{m}}$$

$$= ۲/۶۷ \times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{m}^۳$$

(iii)

معادلات (ii) و (iii) شامل سه عامل نامشخص δ، v_x و θ بوده‌و مقدار یکی از این سه مجهول به طور اختیاری می‌تواند انتخاب گردد (براساس وضعیتی که $۰ \leq \theta \leq ۹۰$). $\theta = ۸۵°$ را انتخاب می‌کنیم. از معادله (iii)

$$\delta^۳ = \frac{۲/۶۷ \times ۱۰^{-۸}}{\cos ۸۵°} = ۳/۰۶ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{m}^۳$$

از این رو، $\delta = ۰/۰۰۶۷۴\ \mathrm{m}$ و از معادله (ii)،

$$\bar{v}_x = \frac{۷/۳۸ \times ۱۰^{-۴}}{۰/۰۰۶۷۴} = ۰/۱۰۹\ \mathrm{m/s}$$

$\theta = 45°$ را انتخاب می‌کنیم. از معادله (iii)

$$\delta^3 = \frac{2/67 \times 10^{-8}}{\cos 45°} = 3/77 \times 10^{-8}\ m^3$$

از این رو $\delta = 0/00335\ m$ و

$$\bar{v}_x = \frac{7/38 \times 10^{-4}}{0/00335} = 0/22\ m/s$$

اگر $\theta = 0°$ را انتخاب کنیم (که مطابق سقوط سرباره از روی دیواره کوره شعله‌ای است) از معادله (iii)

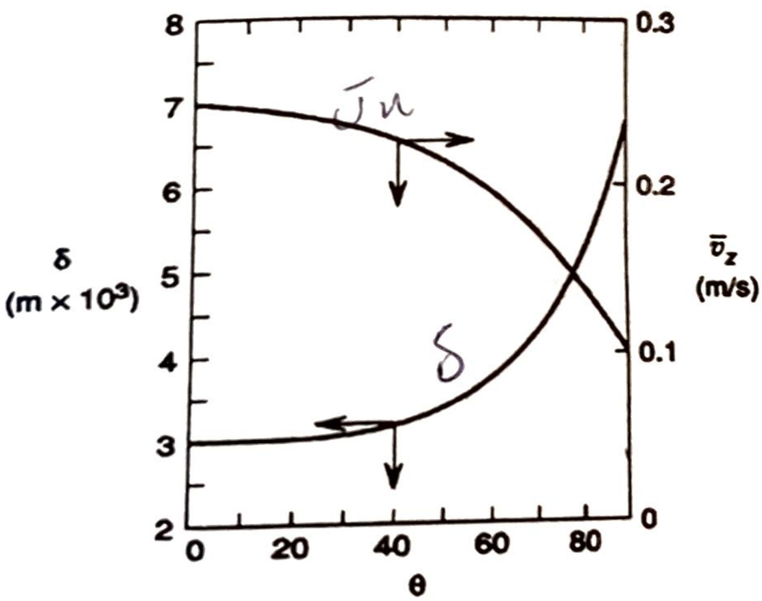
$$\delta^3 = 2/67 \times 10^{-8} m^3$$

از این رو $\delta = 0/003\ m$

و

$$\bar{v}_x = \frac{7/38 \times 10^{-4}}{0/003} = 0/247\ m/s$$

بنابراین، برای یک دبی جرمی داده شده در جریان آرام با کاهش θ، $\bar{v}_x$ افزایش و δ کاهش می‌یابد. این تغییرات برای مثال حاضر در شکل (۲-۱۳) نشان داده شده است.



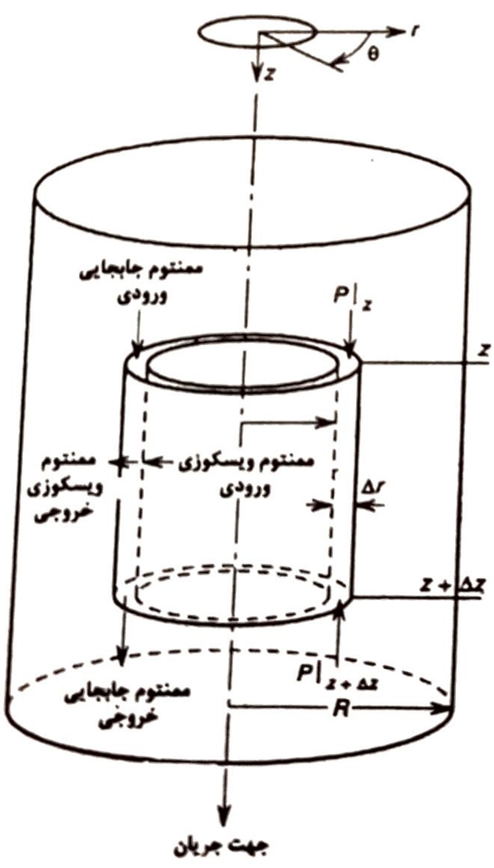
شکل ۲-۱۳ تغییرات زاویه شیب با عمق و سرعت متوسط جریان در جریان سیال رو به پائین روی یک سطح شیب‌دار

۲-۶ جریان سیال در یک سیلندر عمودی

یکی از متداولترین جریانها، جریان سیال در لوله یا سیلندر است. در شکل ۲-۱۴ جریان سیال در جهت z بوده و از این رو سرعت سیال با $\bar{v}_z$ نمایش داده می‌شود. سرعت سیال در تماس با جداره

داخلی به شعاع R، صفر بوده که در این صورت، v_z دارای یک ماکزیمم مقدار در محور لوله (یعنی در $r = 0$) می‌باشد. زمانیکه v_z با دور شدن از جداره به خط مرکز افزایش یافته، انتقال ویسکوزی ناشی از تنش برشی τ_{rz} در جهت شعاع از خط مرکز به جداره منتقل می‌شود زیرنویس τ_{rz} نشان می‌دهد که ممنتوم ویسکوزی در جهت r به علت حرکت سیال در جهت z انتقال می‌یابد.

با انتخاب مختصات استوانه‌ای مطابق شکل (۲-۱۴) حرکت سیال در لوله آسان می‌گردد و حجم معیار که به اندازه کافی دور از مدخل ورودی در حالت پایا و کاملاً توسعه یافته قرار می‌گیرد، طول این پوسته سیلندری Δz شعاع داخلی r و شعاع خارجی آن $r+\Delta r$ و حجم آن $2\pi r\,\Delta r\,\Delta z$ می‌باشد. با جریان سیال در جهت z ممنتوم جابجایی از قاعده بالایی با سرعت $\rho v_z^2|_z\, 2\pi r\,\Delta r$ وارد و از قاعده پایینی با سرعت $\rho v_z^2|_{z+\Delta z}\, 2\pi r\,\Delta r$ خارج می‌شود. ممنتوم ویسکوزی از سطح داخلی با سرعت $(\tau_{rz}(2\pi r\,\Delta z))|_r$ به حجم معیار وارد و از سطح خارجی با سرعت (نرخ) $(\tau_{rz}(2\pi r\,\Delta z))|_{r+\Delta r}$ خارج می‌شود. تأثیر جاذبه بر جریان عمودی سیال مثل این است که سیال داخل حجم معیار تحت نیروی جاذبه خودش یعنی وزن $\rho g(2\pi r\,\Delta r\,\Delta z)$ قرار گرفته و اگر جریان تحت تأثیر یک فشار اعمالی قرار گیرد، در موازنه نیرو $P|_z\,(2\pi r\,\Delta r)$ در جهت جریان در z و $P|_{z+\Delta z}\,(2\pi r\,\Delta r)$ در جهت عکس جریان در $z+\Delta z$ منظور کرد.



شکل ۲-۱۴ حجم معیار در مورد جریان سیال در یک لوله استوانه‌ای عمودی

موازنه ممنتوم در حجم معیار بدین صورت

$$(\rho v_z^{\text{۲}}|_z-\rho v_z^{\text{۲}}|_{z+\Delta z})\text{۲}\pi r\,\Delta r+(\tau_{rz}.(\text{۲}\pi r\,\Delta z))|_r-(\tau_{rz}.(\text{۲}\pi r\,\Delta z))|_{r+\Delta r}$$
$$+(P|_z-P|_{z+\Delta z})\text{۲}\pi r\,\Delta r+\rho g(\text{۲}\pi r\,\Delta r\,\Delta z)=\text{۰}$$

وقتی جریان پایا محقق شد، v_z تنها تابعی از r خواهد بود از این رو $v_z|_z=v_z|_{z+\Delta z}$. پس اولین ترم صفر خواهد شد.

با تقسیم طرفین به Δr و Δz و حذف $\text{۲}\pi$ داریم.

$$\frac{(r\tau_{rz})|_r-(r\tau_{rz})|_{r+\Delta r}}{\Delta r}+\frac{(P|_z-P|_{z+\Delta z})r}{\Delta z}+\rho g r=\text{۰}$$

و وقتی Δr و Δz به سمت صفر میل کند.

$$-\frac{d(r\tau_{rz})}{dr}-\frac{dP}{dz}r+\rho g r=\text{۰}$$

دوباره از تساوی $\frac{-dP}{dz}=\frac{\Delta P}{L}$ (کاهش فشار استاتیک که در طول L اتفاق می‌افتد)

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr}=(\frac{\Delta P}{L}+\rho g)r$$

با اولین انتگرال‌گیری

$$r\tau_{rz}=(\frac{\Delta P}{L}+\rho g)\frac{r^{\text{۲}}}{\text{۲}}+C_{\text{۱}}$$

$\tau_{rz}=\text{۰}$ در $r=\text{۰}$ ($\frac{dv_z}{dr}=\text{۰}$ در $r=\text{۰}$)، $C_{\text{۱}}=\text{۰}$ و لذا

$$\tau_{rz}=(\frac{\Delta P}{L}+\rho g)\frac{r}{\text{۲}}$$

(۲-۱۹)

$$=-\eta\frac{dv_z}{dr}$$

با انتگرال‌گیری

$$v_z=-(\frac{\Delta P}{L}+\rho g)\frac{r^{\text{۲}}}{\text{۴}\eta}+C_{\text{۲}}$$

که $v_z=\text{۰}$ در $r=R$

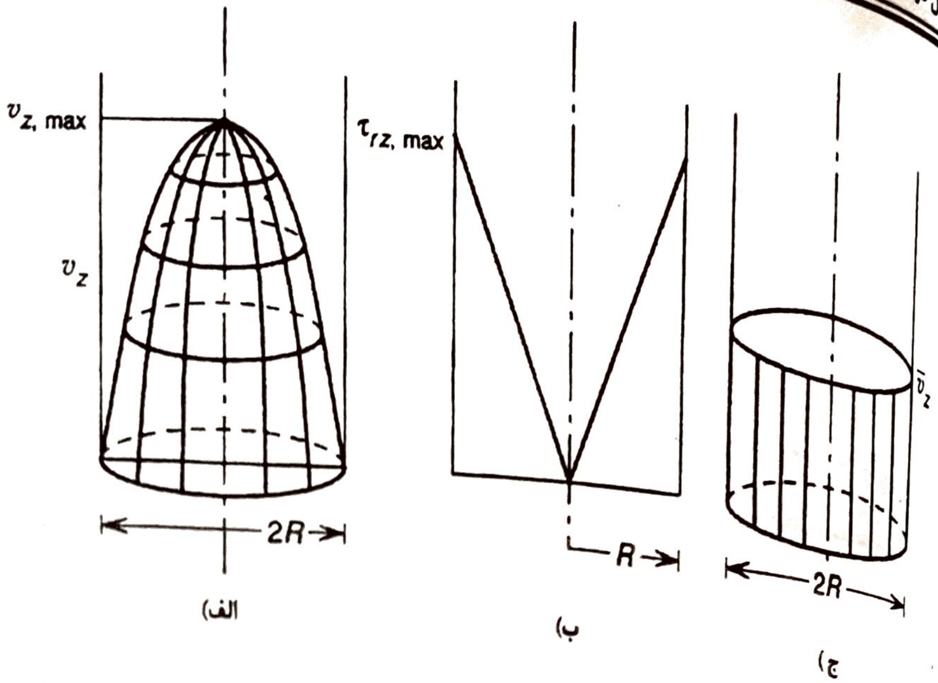
$$C_{\text{۲}}=(\frac{\Delta P}{L}+\rho g)\frac{R^{\text{۲}}}{\text{۴}\eta}$$

در نتیجه

(۲-۲۰)

$$v_z=(\frac{\Delta P}{L}+\rho g)\frac{R^{\text{۲}}-r^{\text{۲}}}{\text{۴}\eta}$$

v_z به صورت سهوی است و در شکل ۲-۱۵الف نشان داده شده است. شکل (۲-۱۵ ب) تغییرات τ_{rz} در مسیر قطر لوله را نشان می‌دهد. ماکزیمم مقدار v_z در $r=\text{۰}$ اتفاق افتد.



شکل ۲-۱۵ الف) تغییرات سرعت مکانی جریان نسبت به موقعیت شعاعی در جریان سیال در یک لوله استوانه‌ای
ب) تغییرات تنش برشی نسبت به موقعیت شعاعی در جریان سیال در یک لوله استوانه‌ای
ج) محاسبه سرعت متوسط در جریان سیال در یک لوله استوانه‌ای

$$v_{z,\max} = \left(\frac{\Delta P}{L}+\rho g\right)\frac{R^۲}{۴\eta} \qquad (۲\text{-}۲۱)$$

با ملاحظه شکل‌های (۲-۱۵ الف) و (۲-۱۵ ج) مقدار متوسط سرعت جریان $\bar{v}_z$ به شکلی است که حجم استوانه $\bar{v}_z\pi R^۲$ در شکل (۲-۱۵ج) با حجم سهمی گون شکل (۲-۱۵ الف) برابر باشد.

$$\bar{v}_z\pi R^۲ = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{R} v_z r\,dr\,d\theta$$

$$= ۲\pi\int_۰^{R}\left(\frac{\Delta P}{L}+\rho g\right)\frac{R^۲-r^۲}{۴\eta}r\,dr$$

$$= ۲\pi\,\frac{\Delta P/L+\rho g}{۴\eta}\left[\frac{R^۲r^۲}{۲}-\frac{r^۴}{۴}\right]_۰^R$$

$$= ۲\pi\left(\frac{\Delta P}{L}+\rho g\right)\frac{R^۴}{۱۶\eta}$$

یا

$$\bar{v} = \left(\frac{\Delta P}{L}+\rho g\right)\frac{R^۲}{۸\eta} \qquad (۲\text{-}۲۲)$$

$\bar{V} = \frac{1}{۲} V max$

که نصف مقدار $v_{\max}$ است. دبی حجمی $\dot{V}$ ،

$$\dot{V} = \bar{v}_z \pi R^2 = \pi(\frac{\Delta P}{L} + \rho g)\frac{R^4}{8\eta} \qquad (۲-۲۳)$$

معادله ۲-۲۳ به معادله هاگن- پویسوله[1] معروف است. دبی جرمی، $\dot{M}$ ، بدین صورت است.

$$\dot{M} = \dot{V}\rho = \pi\rho(\frac{\Delta P}{L} + \rho g)\frac{R^4}{8\eta} \qquad (۲-۲۴)$$

مثال ۲-۴

برای درک تأثیر دانسیته و ویسکوزیته به طور جداگانه جریان روغن، آب و هوا را در سیلندری به قطر ۰/۰۸ m در ۲۵°C بررسی می‌کنیم.

نوع سیال	ویسکوزیته (Pa.s)	چگالی (kg/m^3)
روغن	۰/۸	۸۸۸
آب	$۸/۵۷ \times ۱۰^{-۴}$	۹۹۷
هوا	$۱/۸۵ \times ۱۰^{-۵}$	۱/۱۷۷

توجه کنید که در مقایسه دانسیته آب و روغن، ویسکوزیته روغن تقریباً $۱۰^۳$ برابر ویسکوزیته آب است و ویسکوزیته آب تنها ۴۶ برابر هوا است. دانسیته آب تقریباً $۱۰^۳$ برابر هوا می‌باشد. در ابتدا بررسی می‌کنیم که ماکزیمم سرعت متوسط هر یک از این سیالات درلوله‌افقی‌به طوری که جریان آرام یعنی $Re = ۲۱۰۰$ برقرار باشد چقدر است.

$$Re = ۲۱۰۰ = \frac{\bar{v}_x D\rho}{\eta}$$

یا

(i)

$$\bar{v}_x = \frac{۲۱۰۰\eta}{D\rho}$$

برای روغن

$$\bar{v}_x = \frac{۲۱۰۰ \times ۰/۸}{۰/۰۸ \times ۸۸۸} = ۲۳/۶۵ \text{ m/s}$$

برای آب

1- Hagen - Poiseuille Equation