



نام درس : ریاضی ۱ - فصل دوم

نام آموزشگاه : شهید حقانی (سمپاد)

تاریخ برگزاری ۱۴۰۱/۰۸/۱۰

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : دهم

نام دبیر : نوردی

عنوان آزمون : کاربرگ ۵- نسبت های مثلثاتی

۱) مساحت متوازی الاضلاعی با دو قطر ۱۲ و ۱۴ و زاویه بین اقطار 120° چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

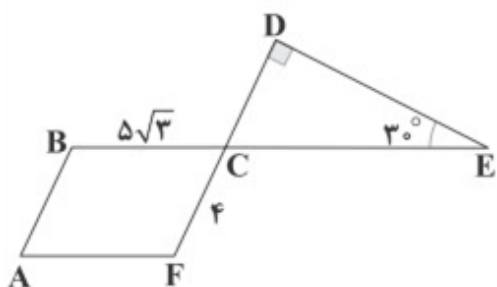
۱۶۸ (۴)

۱۲۶ (۳)

۸۴ (۲)

۴۲ (۱)

۲) در شکل زیر مساحت متوازی الاضلاع BCFA چقدر است؟



۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

۳) مساحت متوازی الاضلاعی که طول دو ضلع آن ۳ و ۵ و یکی از زاویه های آن 150° است، کدام است؟

$15\sqrt{3}$ (۴)

$7/5\sqrt{3}$ (۳)

۱۵ (۲)

$7/5$ (۱)

۴) حاصل عبارت $\frac{(\text{Cotg } 30^\circ \times \text{Sin } 60^\circ \times \text{Cos } 60^\circ) + (\text{Cos } 90^\circ \times \text{Sin } 90^\circ)}{\text{Cotg } 30^\circ \times \text{tg } 30^\circ \times \text{Sin } 45^\circ \times \text{tg } 0^\circ + \text{Cos } 0^\circ}$ کدام است؟

تعریف نشده (۴)

صفر (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

۵) در مثلث قائم الزاویه ABC، $\hat{A} = 90^\circ$ است. اگر $\sin \hat{B} = 0/8$ باشد، $\tan \hat{C}$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$0/6$ (۳)

$\frac{5}{3}$ (۲)

$0/75$ (۱)

۶) حاصل عبارت $\frac{\text{tg } 60^\circ - \text{Cos } 30^\circ}{1 + \text{Sin } 30^\circ \cos 60^\circ}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

۷) حاصل عبارت $\text{Cos } 60^\circ \text{ Cotg } 30^\circ$ با کدام عبارت زیر برابر نیست؟

$\sqrt{3} \text{ Sin } 30^\circ$ (۴)

$\text{Sin } 30^\circ \text{ tg } 60^\circ$ (۳)

$\text{Cos } 30^\circ$ (۲)

$\sqrt{3} \text{ Sin } 45^\circ$ (۱)



۸ برای کدام مقدار α ، رابطه‌ی $\tan \alpha < \cot \alpha$ برقرار است؟

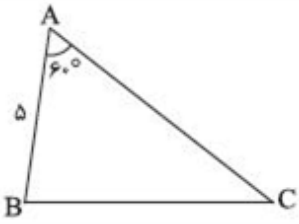
-39.0° (۴)

28.0° (۳)

50.0° (۲)

77.0° (۱)

۹ در شکل زیر مساحت مثلث $10\sqrt{3}$ است. اندازه ضلع BC کدام است؟



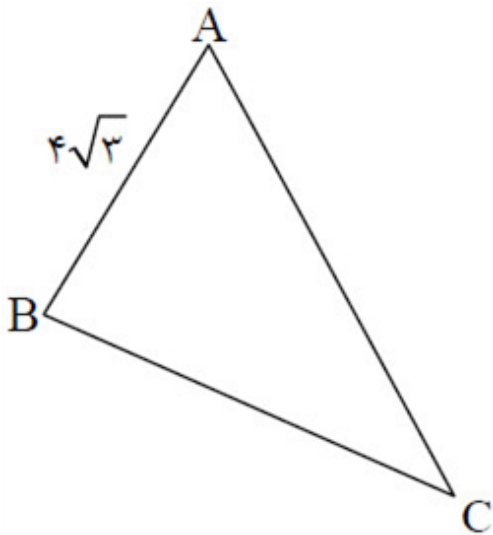
$\frac{10\sqrt{3}}{2}$ (۴)

۱۰ (۳)

$\frac{10\sqrt{3}}{3}$ (۲)

۷ (۱)

۱۰ در شکل مقابل، در مثلث $\triangle ABC$ ، $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ است. اگر $AB = 4\sqrt{3}$ باشد، نسبت طول AC به طول BC کدام است؟



$\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\frac{1 + \sqrt{6}}{6}$ (۱)

۱۱ مساحت مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ برابر ۷۲ است. اگر اندازه‌ی ساق AB برابر ۱۲ باشد، اندازه‌ی کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث کدام است؟

$\frac{11\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$12\sqrt{2}$ (۲)

$6\sqrt{2}$ (۱)

۱۲ اگر خورشید با افق، زاویه‌ی 60° بسازد، طول سایه‌ی یک درخت به ارتفاع ۱۸ متر چند سانتی‌متر است؟ ($\sqrt{3} = 1.7$)

۱۵۳۰ (۴)

۱۲۴۰ (۳)

۱۰۲۰ (۲)

۵۱۰ (۱)



۱۳ در مثلث ABC، رابطه‌ی $\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}}{4} + \frac{\hat{B}}{2}\right) = 1$ برقرار است. این مثلث همواره چه نوع مثلثی است؟

- ۱ متساوی الساقین ۲ قائم الزاویه ۳ متساوی الاضلاع ۴ نامشخص

۱۴ در مثلث ABC، اگر $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ باشد، طول ضلع a کدام است؟

۱ $b \sin \hat{C} + c \sin \hat{B}$ ۲ $b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$

۳ $b \sin \hat{B} + c \sin \hat{C}$ ۴ $b \cos \hat{B} + c \cos \hat{C}$

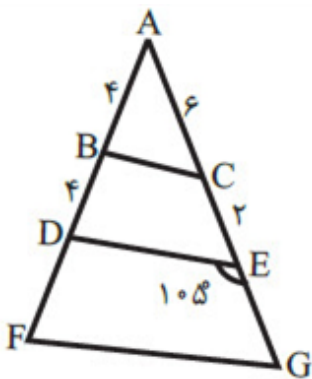
۱۵ علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه‌ی آن $\frac{4}{5}$ متر است، محاسبه کند. قد علی $\frac{1}{5}$ متر و طول سایه‌ی او $\frac{6}{5}$ متر است. ارتفاع درخت چند متر است؟

- ۱ ۱۲ ۲ $\frac{13}{5}$ ۳ ۱۵ ۴ $\frac{9}{5}$

۱۶ یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویه‌ی 45° پرتاب می‌شود، اگر این موشک ۱۰۰۰ متر را در مسیر خط راست طی کند، ارتفاع این موشک از سطح زمین تقریباً چقدر است؟

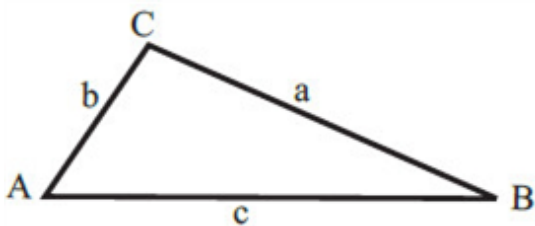
- ۱ ۶۲۰ ۲ ۷۲۰ ۳ ۸۲۰ ۴ ۵۲۰

۱۷ در شکل مقابل DE موازی FG است. مساحت چهارضلعی BCED کدام است؟



- ۱ ۱۳ ۲ ۱۰ ۳ ۱۱ ۴ ۱۶

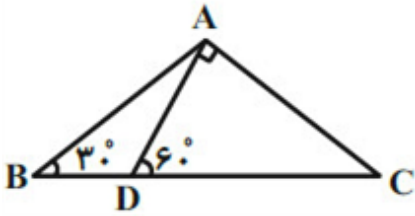
۱۸ در شکل مقابل $a \sin B + b \sin A = t$ و $c = \frac{2}{3}t$ است. مساحت این مثلث کدام است؟



- ۱ $\frac{t^2}{3}$ ۲ $\frac{t^2}{6}$ ۳ $\frac{2}{3}t^2$ ۴ $\frac{3}{4}t^2$



۱۹ مساحت مثلث ABC در شکل زیر کدام است؟ ($BD = 4$)



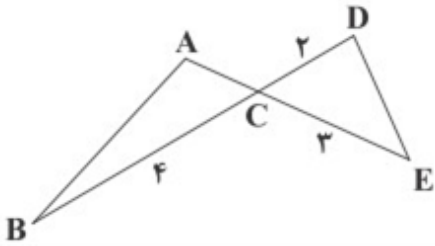
$24\sqrt{3}$ (۴)

۱۲ (۳)

۲۴ (۲)

$12\sqrt{3}$ (۱)

۲۰ اگر مساحت دو مثلث ABC و CDE برابر باشند، مقدار AC چقدر است؟



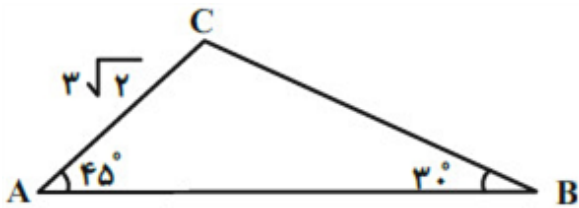
$1/5$ (۴)

۲ (۳)

$1/6$ (۲)

$1/8$ (۱)

۲۱ مساحت مثلث ABC در شکل مقابل کدام است؟



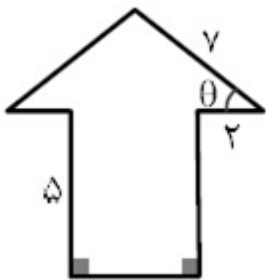
$\frac{9 + 9\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$9 + 2\sqrt{3}$ (۳)

$3 + 2\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$ (۱)

۲۲ سیمی فلزی به طول ۳۱ سانتی‌متر به شکل یک پیکان متقارن درآمده است. $\cos \theta$ کدام است؟



$\frac{1}{3}$ (۴)

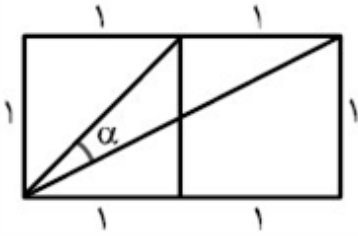
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)



۲۳ در مستطیل روبه‌رو، $\sin \alpha$ کدام است؟



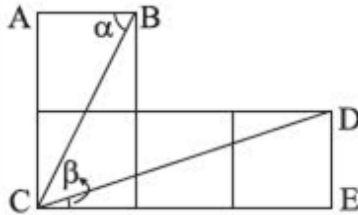
$\frac{2\sqrt{10}}{10}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{10}}{5}$ (۲)

$\frac{\sqrt{10}}{10}$ (۱)

۲۴ شکل زیر از چهار مربع یک‌سان به ضلع یک واحد تشکیل شده است. حاصل $\sin \beta + \tan \alpha$ کدام است؟



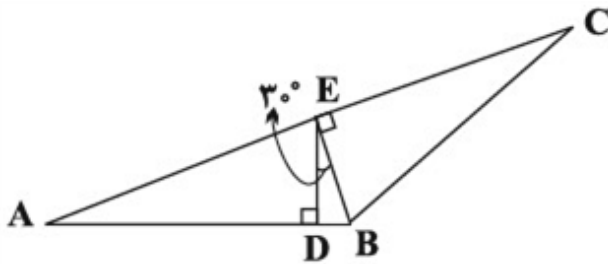
$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$2 + \frac{\sqrt{10}}{10}$ (۲)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}}$ (۱)

۲۵ در شکل مقابل، اگر $AC = 2BC$ و $AD = 2\sqrt{3}$ ، طول BC کدام است؟



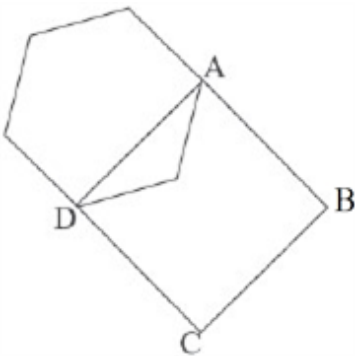
$\frac{10}{3}$ (۴)

۳ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{8}{3}$ (۱)

۲۶ مساحت شش‌ضلعی منتظم چند برابر مربع ABCD است؟



$\frac{3}{4}$ (۴)

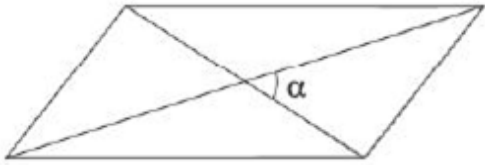
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)



۲۷ در متوازی‌الاضلاع مقابل طول قطرها ۶ و ۸ سانتی‌متر و $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$ است. مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر کدام گزینه می‌شود؟



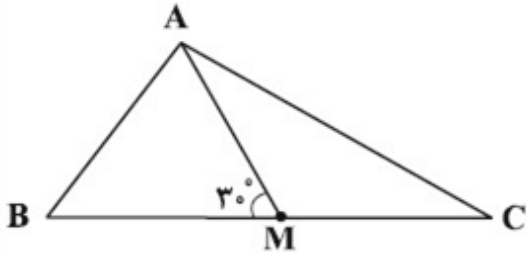
$8\sqrt{2}$ (۴)

$16\sqrt{2}$ (۳)

۸ (۲)

۱۶ (۱)

۲۸ در شکل زیر، AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC و $\angle AMB = 30^\circ$ است. حاصل $\cot \hat{C} - \cot \hat{B}$ کدام است؟



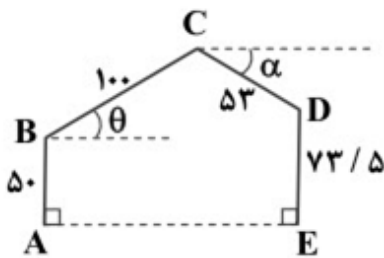
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۲۹ در شکل مقابل زاویه‌ی α برابر 30° است. زاویه‌ی θ چند درجه است؟



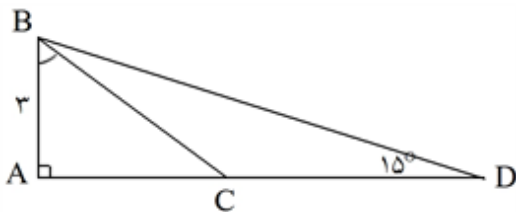
۶۰ (۴)

۴۵ (۳)

۳۰ (۲)

۱۵ (۱)

۳۰ در شکل زیر $\hat{ABC} = 60^\circ$ و $\hat{D} = 15^\circ$ می‌باشد. مقدار $\tan 15^\circ$ کدام است؟



$2 + \sqrt{3}$ (۴)

$3 + \sqrt{2}$ (۳)

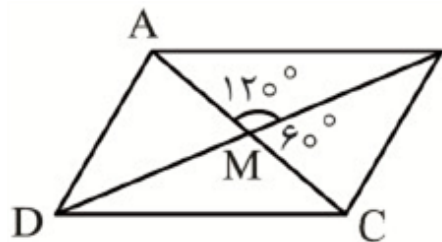
$2 - \sqrt{3}$ (۲)

$3 - \sqrt{2}$ (۱)



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در متوازی الاضلاع، قطرهای منصف یکدیگرند و آنرا به چهار مثلث هم‌مساحت (معادل) تقسیم می‌کنند، بنابراین:



$$S_{\square} = 4S_{\triangle MBC} = 4 \left(\frac{1}{2} MB \times MC \times \sin 60^\circ \right)$$

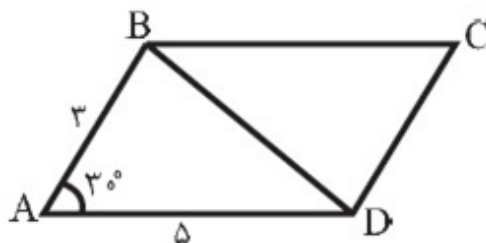
$$= 4 \times 7 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\square} = 42\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\triangle DCE : \widehat{D} = 90^\circ, E = 30^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$$

$$S_{ABCF} = CB \times CF \times \sin \widehat{C} = 5\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در متوازی الاضلاع، زاویه‌های مجاور، مکمل هم هستند و با رسم قطر، دو مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود، پس با توجه به شکل، داریم:



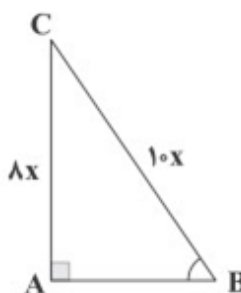
$$S(ABCD) = 2S(\triangle ABD) = 2 \left(\frac{1}{2} AB \times AD \times \sin 30^\circ \right)$$

$$= 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = 7.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(\cot 30^\circ \times \sin 60^\circ \times \cos 60^\circ) + (\cos 90^\circ \times \sin 90^\circ)}{\cot 30^\circ \times \tan 30^\circ \times \sin 45^\circ \times \tan 45^\circ + \cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times 1}{\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} \Rightarrow \begin{cases} AC = 8x \\ BC = 10x \end{cases}$$

پس بنا به رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 100x^2 - 64x^2 = 36x^2 \Rightarrow AB = 6x$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{6x}{8x} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با جای‌گذاری نسبت‌های مثلثاتی داده شده، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{Cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Sin} 30^\circ = \frac{1}{2}, \operatorname{Cos} 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{Cos} 30^\circ}{1 + \operatorname{Sin} 30^\circ \operatorname{Cos} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\operatorname{Cos} 60^\circ \operatorname{Cotg} 30^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مقدار هریک از گزینه‌ها را می‌یابیم:

$$\text{گزینه ۱: } \sqrt{3} \operatorname{Sin}^2 45^\circ = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه ۲: } \operatorname{Cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

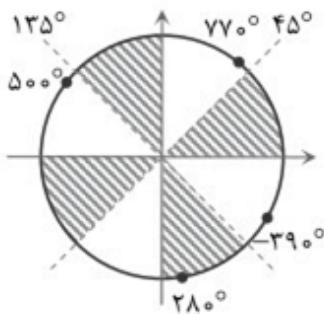
$$\text{گزینه ۳: } \operatorname{Sin} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه ۴: } \sqrt{3} \operatorname{Sin}^2 30^\circ = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \times$$

پس گزینه‌ی ۴ با مقدار عبارت داده شده برابر نیست.

۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نواحی مشخص شده $\tan \alpha < \cot \alpha$ است. هر یک از زوایا را در دایره نشان داده‌ایم:



$$77^\circ = 2(36^\circ) + 5^\circ$$

$$50^\circ = 36^\circ + 14^\circ$$

$$28^\circ = 27^\circ + 1^\circ$$

$$-39^\circ = -36^\circ - 3^\circ$$

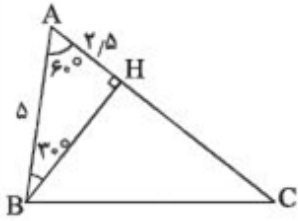
فقط 28° در ناحیه‌ی هاشورخورده قرار دارد.



$$S_{ABC} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow AC = 8$$

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم:



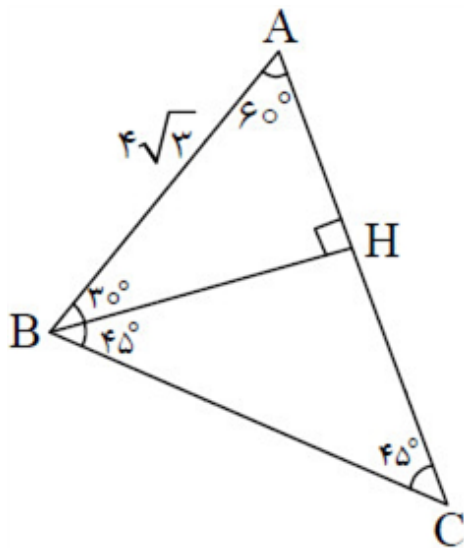
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AH}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = \frac{5}{2} \Rightarrow HC = \frac{11}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BH}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle BHC : BC^2 = BH^2 + HC^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{75}{4} + \frac{121}{4} = \frac{196}{4} = 49 \Rightarrow BC = 7$$

توجه: از قضیه کسینوس‌ها هم می‌توانستفاده کرد و BC را به دست آورد.



$$AH = \frac{1}{2}(4\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$BH^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$$

$$BH = 6 \Rightarrow HC = 6$$

$$BC^2 = 36 + 36 = 72 \Rightarrow BC = 6\sqrt{2}$$

$$AC = 2\sqrt{3} + 6$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \sin \alpha = 72 \Rightarrow \sin \alpha = 1 = \sin 90^\circ$$

مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است. $\alpha = 90^\circ$

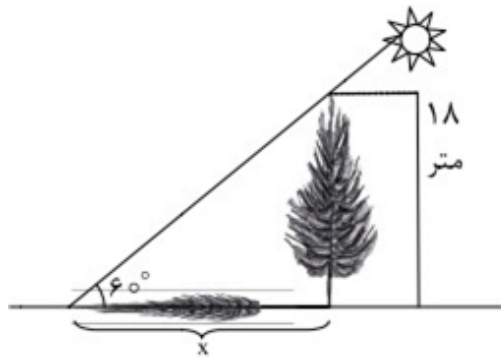
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 144 + 144 = 288 \Rightarrow BC = 12\sqrt{2}$$

طول وتر $12\sqrt{2}$

در مثلث $\triangle ABC$ ، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث یعنی AH همان میانه وارد بر وتر است.

$$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲



$$\tan 60^\circ = \frac{18}{x} = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} = 6(1.7) = 10.2 \text{ متر}$$

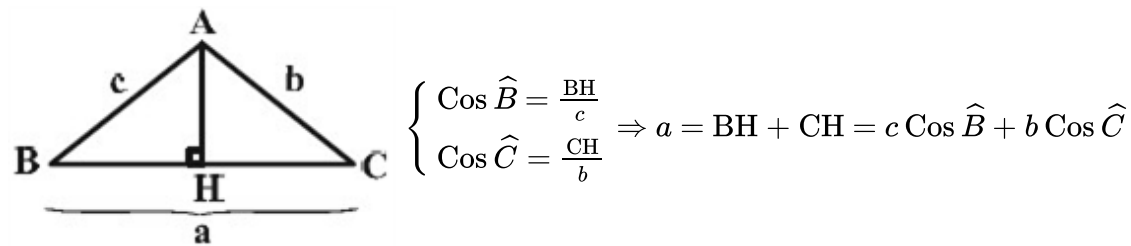
$$x = 10.2 \text{ متری}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\tan 45^\circ = 1$ ، بنابراین $\frac{\hat{A}}{4} + \frac{\hat{B}}{2} = 45^\circ$ داریم: ۱۳

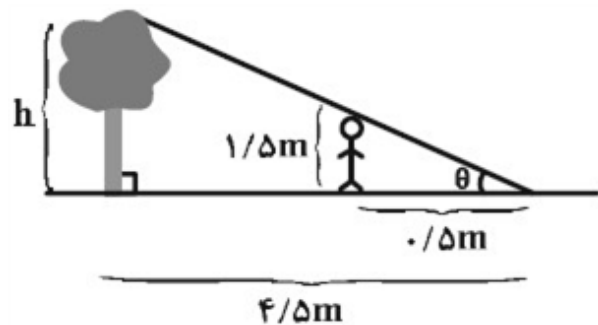
$$\frac{\hat{A}}{2} + \hat{B} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ} \frac{\hat{A}}{2} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

بنابراین مثلث ABC ، همواره متساوی‌الساقین است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴



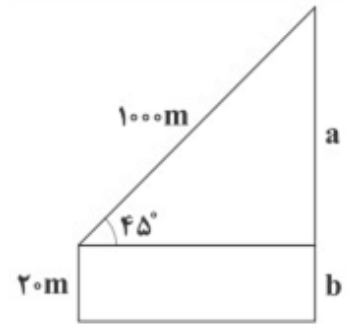
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر داریم: ۱۵



$$\cot \theta = \frac{4/5}{1/5} = \frac{4}{1} \Rightarrow h = 4 \text{ m}$$



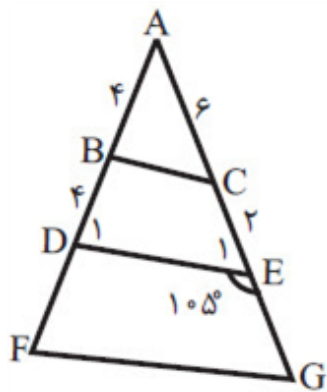
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{1000} \Rightarrow a = 1000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 707$$

ارتفاع از سطح زمین $a + b = 707 + 20 = 727$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست می‌آوریم: ۱۷



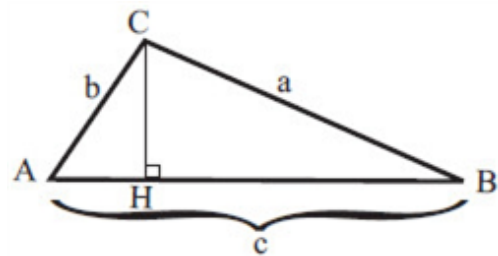
$$\begin{cases} \widehat{D_1} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ \\ \widehat{E_1} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 16$$

$$S_{BCED} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ABC} = 16 - 6 = 10$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر ارتفاع مثلث را از رأس C رسم کنیم و آن را CH بنامیم، داریم: ۱۸



$$\sin \widehat{B} = \frac{CH}{a} \Rightarrow a \sin \widehat{B} = CH$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{CH}{b} \Rightarrow b \sin \widehat{A} = CH$$

$$\Rightarrow a \sin \widehat{B} + b \sin \widehat{A} = 2CH \Rightarrow t = 2CH \Rightarrow CH = \frac{t}{2}$$

از طرفی مساحت مثلث ABC نیز از این رابطه به دست می‌آید:

$$S = \frac{CH \times c}{2} = \frac{\frac{t}{2} \times \frac{c}{2}}{2} = \frac{tc}{8}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال، زوایای $\widehat{B}$ و $\widehat{DAB}$ برابر با 30° هستند. بنابراین مثلث ABD متساوی الساقین است. پس $AD = BD = 4$.

$$\triangle ACD : \sin \widehat{C} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{CD} \Rightarrow CD = 8$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{8} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

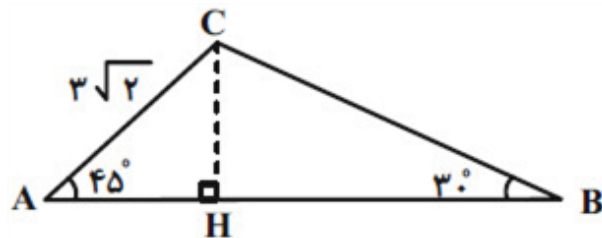
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 \times \frac{1}{2} = 12\sqrt{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S(\triangle ABC) = S(\triangle DCE)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} CD \times CE \times \sin \widehat{C} \Rightarrow AC \times 4 = 2 \times 3 \Rightarrow AC = 1.5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



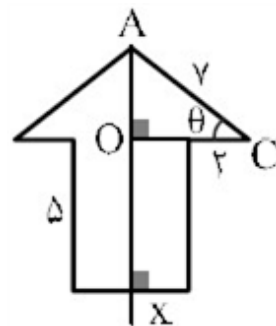
$$\triangle ACH : \cos 45^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{3\sqrt{2}}$$

$$AH = 3 = CH$$

$$\triangle BCH : \tan 30^\circ = \frac{CH}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{BH} \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CH \times AB = \frac{1}{2} \times 3 \times (3 + 3\sqrt{3}) = \frac{9 + 9\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، طول ضلع OC در مثلث قائم الزاویه ای AOC برابر $x + 2$ است. محیط پیکان ۳۱ سانتی متر است، پس:



$$2x = 31 - (2 \times 2 + 5 \times 2 + 7 \times 2) \Rightarrow x = 1.5 \text{ متر}$$

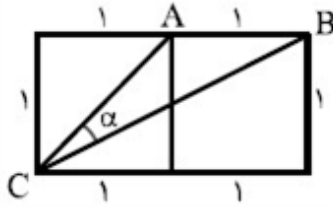
$$\cos \theta = \frac{OC}{AC} = \frac{2 + 1.5}{7} = \frac{1}{2}$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه ای OAC داریم:



۲۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



واضح است که مساحت مثلث ABC برابر $\frac{1}{2}$ است. از طرفی داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

همچنین به سادگی از رابطه‌ی فیثاغورس به دست می‌آید که $BC = \sqrt{5}$ و $AC = \sqrt{2}$ ، بنابراین:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

۲۴

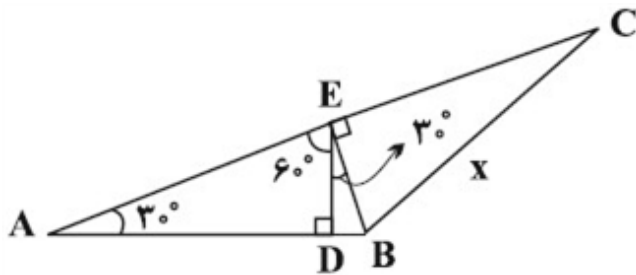
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در مثلث CDE با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $CD = \sqrt{10}$.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{AC}{AB} = 2 \\ \sin \beta &= \frac{DE}{CD} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha + \sin \beta = 2 + \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\hat{A} = 30^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داده شده، $\angle DEA = 60^\circ$ است. بنابراین:



$$\triangle ADE : \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AE = 2 \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow DE = 2 \end{cases}$$

$$\triangle DEB : \cos 30^\circ = \frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BE = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث BCE داریم:

$$\begin{aligned} EC^2 + BE^2 &= BC^2 \\ \Rightarrow (AC - 2)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 &= x^2 \Rightarrow (2x - 2)^2 + \frac{16}{2} = x^2 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 + \frac{16}{2} = x^2 \\ \Rightarrow 3x^2 - 16x + \frac{64}{2} &= 0 \Rightarrow 9x^2 - 48x + 64 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{48}{2 \times 9} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

۲۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ضلع شش‌ضلعی منتظم را a در نظر بگیریم، قطر کوچک شش‌ضلعی منتظم برابر $\sqrt{3}a$

است و مساحت آن $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ است، پس نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}{(\sqrt{3}a)^2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}{3a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

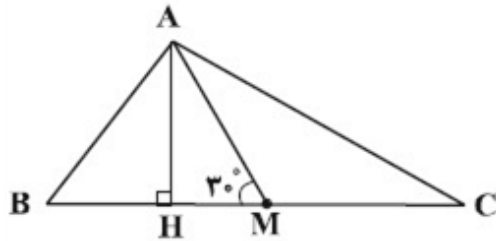


می‌دانیم $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ، پس داریم:

$$\frac{7}{9} = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{9} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = 4 \times 3 \times 4 \times \sin \alpha = 4 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{3} = 16$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، داریم:



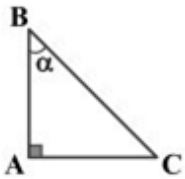
$$\cot \hat{C} = \frac{CH}{AH}, \cot \hat{B} = \frac{BH}{AH}$$

$$\begin{aligned} \cot \hat{C} - \cot \hat{B} &= \frac{CH - BH}{AH} \\ &= \frac{(CM + HM) - (BM - HM)}{AH} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{CM - BM + 2HM}{AH} \xrightarrow{CM=BM} \cot \hat{C} - \cot \hat{B} = \frac{2HM}{AH} = 2 \cot (\widehat{AMB}) \\ &= 2 \cot 30^\circ = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

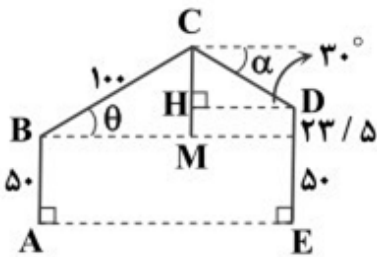


$$\sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:

$$\triangle CHD: \sin 30^\circ = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{53} \Rightarrow CH = 26/5$$

$$CM = CH + HM = 50$$

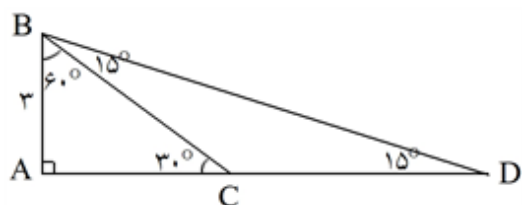


$$\sin \theta = \frac{CM}{CB} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

در مثلث BCM داریم:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً داریم:



$$\triangle ABC : \hat{C} = 30^\circ$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{BC} \Rightarrow BC = 6 \\ \cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{6} \Rightarrow AC = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

از طرفی در $\triangle BCD$ ، زاویه‌ی BCA زاویه‌ی خارجی است و داریم:

$$\hat{CBD} + \hat{CDB} = 30^\circ \Rightarrow \hat{CBD} = 15^\circ \Rightarrow \text{متساوی الساقین است } \triangle BCD \Rightarrow CD = BC = 6$$

بنابراین:

$$\triangle ABD : \tan 15^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC + CD} = \frac{3}{3\sqrt{3} + 6} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴