

سوالات مرحله دوم المپياد رياضي

دوره سي و يکم

www.irschool.net



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان



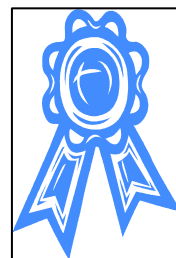
معاونت دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

سی و یکمین دوره المپیاد ریاضی

نوبت اول

تاریخ: ۹۲/۲/۱۲ - ساعت: ۸:۳۰ - مدت: ۲۷۰ دقیقه

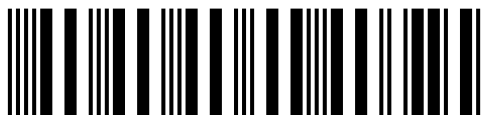


شماره پرونده: -----
کد ملی: -----
نام پدر: -----
نام مدرسه: -----

استان: -----
منطقه: -----
حوزه: -----
پایه تحصیلی: -----

شماره صندلی

.



توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.



کد ملی: -----



(۱) همه a و b های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که

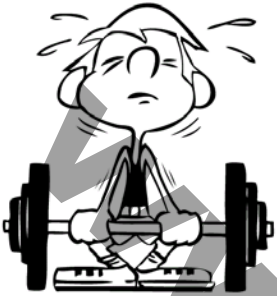
$$\frac{a}{b} = b/a.$$

(توضیح: اگر $a = 92$ و $b = 13$ ، آن‌گاه b/a برابر سیزده و نود و دو صدم است.)

www.hirschschool.net



کد ملی: -----



۲) فرض کنید اعداد طبیعی w_1, w_2, \dots, w_n و وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \dots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه باقی‌مانده نیز کامل است.

www.harschool.net



کد ملی: -----



۳) مثلث دل‌خواه ABC داده شده است. وسط کمان BC از دایره محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطه O ، مرکز دایره محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایره محیطی در نقطه N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

www.hirschool.net



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان



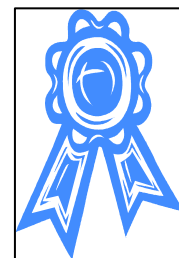
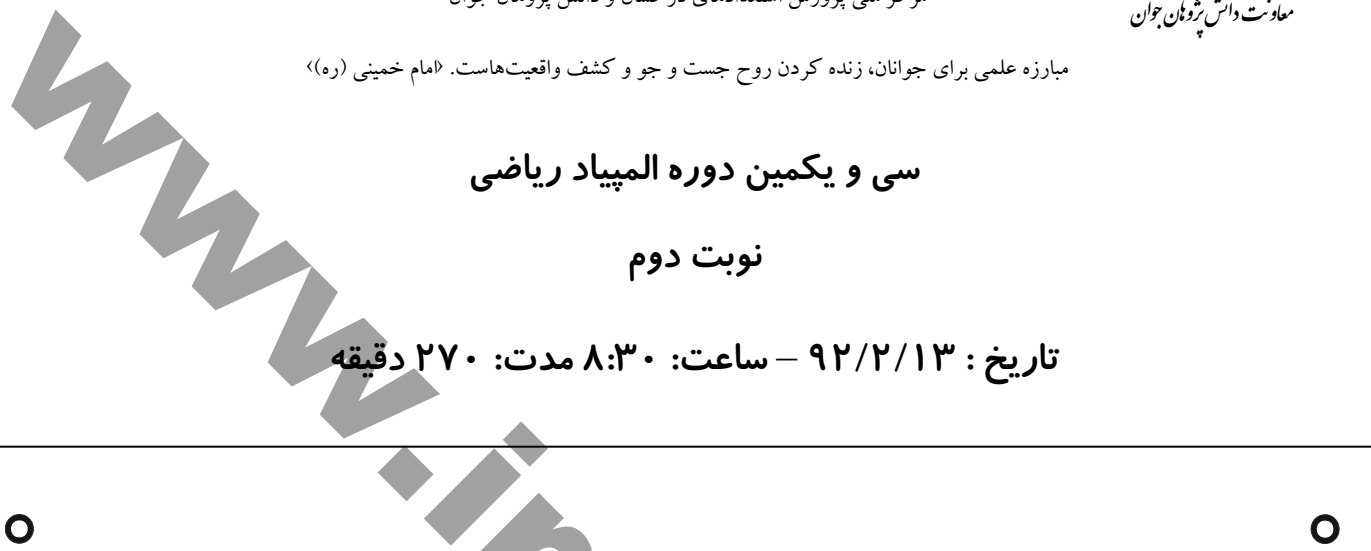
معاونت دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

سی و یکمین دوره المپیاد ریاضی

نوبت دوم

تاریخ: ۹۲/۲/۱۳ - ساعت: ۸:۳۰ - مدت: ۲۷۰ دقیقه

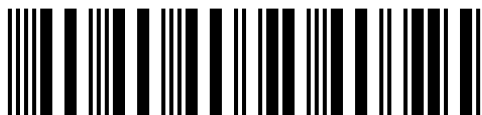


شماره پرونده: -----
کد ملی: -----
نام پدر: -----
نام مدرسه: -----

استان: -----
منطقه: -----
حوزه: -----
پایه تحصیلی: -----

شماره صندلی

.



توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- ۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۴- با توجه به آنکه برگه های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.



کد ملی: -----



۴) فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطه K را روی پاره خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایره محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایره C را در نقطه T قطع می‌کند. قرینه P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

www.irschool.net



کد ملی: -----



۶) دنباله $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = \left[\frac{2a_{n+1}}{a_n} \right] + \left[\frac{2a_n}{a_{n+1}} \right]$$

که در آن منظور از $[x]$ ، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = 4$ و $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

www.hirschool.net

