فصل دوم : نظریه اعداد

نظریه اعداد شاخه ای از ریاضیات است که در مورد اعداد صحیح و زیر مجموعه های آن صحبت می کند. اعدا دصحیح و بخصوص اعداد صحیح مثبت (اعداد طبیعی)از قدیمیترین و پایه ای ترین محصولات تفکر بشر می باشد و در تمدنهای باستانی برای مقاصدی نظیر داد و سند و محاسبه طول و مساحت زمینها و ساختمانها و تعیین وقت بکار برده می شده است .از مهمترین ابزارهای نظریه اعداد می توان به اصل استقرا و اصل خوشترتیبی اشاره نمود .ما قبل از پرداختن به این دو اصل چند تعریف را بررسی میکنیم.

عضو ابتدای یک مجموعه :

مجموعه ای مانند A را در نظر میگیریم. $a \in A$ را عضو ابتدای A می نامیم هرگاه :

$$\forall x \in A: \quad x \le a$$

عضو انتهای یک مجموعه :

مجموعه ای مانند A را در نظر میگیریم. $a \in A$ را عضو انتهای A می نامیم هرگاه :

$$\forall x \in A: \quad x \ge a$$

اصل خوشترتیبی: هر زیر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح دارای کوچکترین عضو است.

تمرین (خاصیت ارشمیدسی): اگر a و b دو عدد طبیعی باشند ثابت کنید عدد طبیعی n موجود است که $na \ge b$

اثبات : فرض کنیم برای هر عدد طبیعی n , na< b (فرض خلف) پس برای هر n

b-na≥۰ , لذا b-na عددی طبیعی است. مجموعه $S = \{b - na : n \in N\}$ را در نظر میگیریم. این مجموعه زیر مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی است لذا طبق اصل خوشترتیبی دارای کوچکترین عضو است .آنرا b – m a مینامیم $(m \in N)$. داریم:

$$1 > 0 \overset{+m}{\Rightarrow} m + 1 > m \overset{\times(-a)}{\Rightarrow} -(m+1)a < -ma \overset{+b}{\Rightarrow} b - (m+1)a < b - ma$$

و این یعنی b-(m+۱)a عضوی از S است که از کیپوچکترین عضو S کمتر است. این یک تناقض است پس فرض خلف نادرست است لذا حکم ثابت می شود.

مجموعه از بالا کراندار:فرض کنیم $A \subset Z$. A را از بالا کراندار می نامیم هرگاه عدد صحیح k موجود باشد که :

$$\forall x \in A : x \le k$$

مجموعه از پایین کراندار:فرض کنیم $A \subset Z$. A را از پایین کراندار می نامیم هرگاه عدد صحیح k موجود باشد که :

$$\forall x \in A : x \ge k$$

تمرین : هر زیر مجموعه از Z که از پایین کراندار باشد دارای کوچکترین عضو است.

اثبات: فرض کنیم A زیر مجموعه نا تهی از اعداد صحیح باشد که از پایین کراندار است.بنابراین عدد صحیح k موجود است که : $\forall x \in A : k < x$

مجموعه $S = \{x - k : x \in A\}$ را در نظر می گیریم.واضح است که S دارای کوچکترین عضو است . (زیرا S زیر مجموعه ای نا تهی از اعداد طبیعی است) کوچکترین عضو S را r۰-k مینامیم که در آن $r_0 \in A$.ثابت میکنیم r۰ عضو S است.

$$r_0 - k \text{ کوچکترین عضو S} \Rightarrow \forall x \in A : r_0 - k \le x - k \Rightarrow r_0 \le x$$

پس r. کوچکترین عضو S است.

اصل استقرا ریاضی : فرض کنیم S زیر مجموعه از اعداد طبیعی باشد که در دو شرط زیر صدق کند

الف- $1 \in S$

ب – اگر $k \in S$ آنگاه $k+1 \in S$

در این صورت S=N

قضیه : اصل استقرا ریاضی را می توان از اصل خوشترتیبی نتیجه گرفت.

اثبات: فرض کنیم S زیر مجموعه از اعداد طبیعی باشد که در دو شرط زیر صدق کند

الف- $1 \in S$

ب – اگر $k \in S$ آنگاه $k+1 \in S$

ثابت می کنیم S=N

فرض کنیم $S \neq N$ (فرض خلف) در اینصورت $N - S \neq \varnothing$ بنا بر این $N - S$ زیر مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی است لذا طبق اصل خوشترتیبی دارای کوچکترین عضو است که آنرا r مینامیم.

$$\begin{matrix} r \in N - S \\ 1 \in S \end{matrix} \quad \overset{N-S \cap S=\varnothing}{\Rightarrow} \quad r \neq 1 \quad \overset{r \in N}{\Rightarrow} \quad r > 1 \Rightarrow r-1 \in N$$

r-۱ طبیعی است لذا باید عضو S یا متمم آن یعنی N-S تعلق داشته باشد. اما

r-۱ نمی تواند عضو N-S باشد زیرا از کوچکترین عضو آن کمتر است. پس به ناچار باید $r-1 \in S$

$$r-1 \in S \quad \Rightarrow \quad (r-1)+1 \in S \quad \Rightarrow \quad r \in S$$

و این یک تناقض است زیرا r نمی تواند هم عضو S و هم عضو N-S باشد.پس فرض خلف نادرست است لذا S=N

قضیه استقزا ریاضی: اگر برای هر n , $p_{(n)}$ یک گزاره باشد که در دو شرط زیر صدق کند

الف – $p_{(1)}$ درست

ب – اگر $p_{(k)}$ درست باشد آنگاه $p_{(k+1)}$ درست باشد

در اینصورت برای تمام اعداد طبیعی n , $p_{(n)}$ درست است.

اثبات: مجموعه {$p_{(x)}$ درست : $S=\{X \in N$ را در نظر می گیریم . واضح است $S \subset N$

همچنین: $P_{(1)}$ درست $\Rightarrow 1 \in S$

حال فرض کنیم $k \in S$

$$k \in S \Rightarrow \text{درست}\ p_{(k)} \Rightarrow \text{درست}\ p_{(k+1)} \Rightarrow k+1 \in S$$

بنابراین S زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی است که در شرایط اصل استقرا ریاضی صدق می کند لذا $S = N$ و این یعنی برای هر عدد طبیعی n , $p_{(n)}$ درست است.

تذکر : در قضیه استقرا ریاضی به جای آنکه n از ۱ شروع شود می تواند از هر عدد طبیعی دیگری شروع شود.

اصل استقرا قوی ریاضی :فرض کنیم $S \subseteq N$ در دو شرط زیر صدق کند :

الف - $1 \in S$

ب – اگر برای هر عدد طبیعی n اعداد طبیعی کوچکتر از n عضو S باشند آنگاه $n \in S$

در اینصورت $S=N$

تمرین : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $\binom{n}{k} \in N$ که در آن k صحیح و $0 \le k \le n$

اثبا ت بوسیله استقرا روی n .

حکم برای n=۱ بدیهی است (شروع استقرا) زیرا

$$k = 0 \Rightarrow \binom{1}{0} = 1 \in N$$

$$k = 1 \Rightarrow \binom{1}{1} = 1 \in N$$

حال فرض کنیم $P_{(n)}$ درست باشد(فرض استقرا) . ثابت می کنیم $P_{(n+1)}$ درست است(حکم استقرا) .

فرض استقرا $\Rightarrow \forall k \in N \quad , \quad 0 \le k \le n : \binom{n}{k} \in N$

ما باید ثابت کنیم برای هر $0 \le k \le n+1 \quad , \quad \binom{n+1}{k} \in N$

اگر k=۰ یا k=n+۱ $\binom{n+1}{k} \in N$ زیرا $\binom{n+1}{0} = 1$ و $\binom{n+1}{n+1} = 1$

حال فرض کنیم ۰< k < n+۱

داریم: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ از آنجایی که ۰< k < n+۱ نتیجه می شود ≤k-۱≤n.

طبق فرض استقرا $\binom{n}{k-1} \in N$ و $\binom{n}{k} \in N$ پس $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \in N$ لذا $\binom{n+1}{k} \in N$

و این حکم را ثابت می کند .

تمرین : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید : $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$

اثبات بوسیله استقرا روی n :

حکم برای n=۲ بدیهی است (شروع استقرا) زیرا سمت چپ برابر $\binom{2}{2}$ و سمت راست برابر $\binom{3}{3}$ است که هر دو برابر ۱ می باشند.

فرض کنیم حکم برای n درست باشد (فرض استقرا) حکم را برای n+۱ ثابت میکنیم(حکم استقرا). پس باید ثابت کنیم $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$

فرض استقرا $\Rightarrow \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$

$$\xRightarrow{+\binom{n+1}{2}} \quad \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$

اما $\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$ بنابراین : $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$

پس حکم استقرا ثابت می شود لذا حکم مساله درست می باشد.

تمرین : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

اثبات : واضح است $2\binom{m}{2}+m=m^2$ بنا بر این :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 \;=1+[2\binom{2}{2}+2)+(2\binom{3}{2}+3)+\ldots+(2\binom{n}{2}+n]$$

$$=2[\;\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{2}{2}\;]=2\binom{n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{2(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تقسیم پذیری

تعریف : فرض کنیم a و b دو عدد صحیح و b≠۰ a را بر b تقسیم پذیر مینامیم هرگاه

عدد صحیح k موجود باشد که a=bk

اگر a بر b تقسیم پذیر باشد در اینصورت می نویسیم b I a و می خوانیم b عاد میکند a یا b عدد a را می شمارد .

مثال: $6|18$ $\quad 5|30$ $\quad 7|28$ $\quad 16|32$

خواص تقسیم پذیری:

۱- اگر $a|b$ در اینصورت: الف) $-a|b$ ب) $a|-b$ ج) $-a|-b$

اثبات : $a|b \Rightarrow \exists k \in Z : b = ka$

$$b = ka \Rightarrow b = (-a)(-k) \Rightarrow -a|b$$

$$b = ka \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \Rightarrow -b = a(-k) \Rightarrow a|-b$$

$$b = ka \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \Rightarrow -b = (-a)k \Rightarrow -a|-b$$

۲- اگر $a|b$ و $b \neq 0$ آنگاه $|a| \leq |b|$

اثبات: $a|b \Rightarrow \exists k \in Z : b = ka \quad \overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} \quad k \neq 0$

$$k \neq 0 \quad , \quad k \in Z) \Rightarrow \quad |k| \geq 1 \quad \overset{\times a}{\Longrightarrow} \quad |ka| \geq |a| \quad \Rightarrow \quad |b| \geq |a|$$

۳- اگر $a|b$ و $b|a$ دراینصورت $a = \pm b$

اثبات: $a|b$ پس طبق تعریف $a \neq 0$ و همچنین $b|a$ بنابراین $b \neq 0$

داریم:

$$\begin{matrix} a|b \overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} |a| \leq |b| \\ b|a \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} |b| \leq |a| \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad |a| = |b| \quad \Rightarrow \quad a = \pm b$$

۴- برا ی هر عدد صحیح a , $\pm 1|a$

اثبات :

$$a = a \times 1 \Rightarrow \quad 1 \mid a$$

$$a = (-a)(-1) \Rightarrow \quad -1 \mid a$$

۵- اگر $a \mid 1$ در اینصورت $a = \pm 1$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid 1 \\ 1 \mid a \end{array}\right. \Rightarrow a = \pm 1$$

۶- اگر $a \neq 0 \quad , \quad a \in Z$ آنگاه $a \mid 0$

اثبات : $0 = 0(a) \Rightarrow a \mid 0$

۷- اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ در اینصورت برای هر دو عدد صحیح m و n داریم $a \mid mb + nc$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists k_1 \in Z : k_1 a = b \overset{\times m}{\Rightarrow} mk_1 a = mb \\ a \mid c \Rightarrow \exists k_2 \in Z : k_2 a = c \overset{\times n}{\Rightarrow} nk_1 a = nc \end{array}\right. \Rightarrow (k_1 m + k_2 n)a = mb + nc \Rightarrow a \mid mb + nc$$

۸- اگر $a \mid b$ آنگاه برای هر عدد صحیح $c \quad ,$ $a \mid bc$ و همچنین اگر $c \neq 0$ آنگاه $ac \mid bc$

اثبات : $a \mid b \Rightarrow \exists k \in Z : ka = b \overset{\times c}{\Rightarrow} kac = bc \Rightarrow a \mid bc$

همچنین $bc = kac$ پس $ac \mid bc$

۹- اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ در اینصورت $ac \mid bd$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists k_1 \in Z : k_1 a = b \\ c \mid d \Rightarrow \exists k_2 \in Z : k_2 c = d \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 k_2 ac = bd \Rightarrow ac \mid bd$$

مثالهایی از بخشپذیری

تمرین: اگر n یک عدد صحیح و $3 \mid 2n+1$ ثابت کنید $9 \mid 4n^2 + 10n + 4$

اثبات:

$$\left\{\begin{array}{l} 3 \mid 2n+1 \\ 3 \mid 3 \end{array}\right. \Rightarrow 3 \mid 2n+1+3 \Rightarrow 3 \mid 2n+4$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3 \mid 2n+1 \\ 3 \mid 2n+4 \end{array}\right. \Rightarrow 3 \times 3 \mid (2n+1)(2n+4) \Rightarrow 9 \mid 4n^2 + 10n + 4$$

تمرین: اگر a و n دو عدد صحیح باشند و $a \mid 3n+1$ و $a \mid 12n+5$ ثابت کنید $a = \pm 1$

اثبات :

$$\begin{array}{l} a \mid 3n+1 \\ a \mid 12n+5 \end{array} \Rightarrow a \mid (12n+5)-4(3n+1) \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a=\pm 1$$

نکته : با توجه به رابطه های(در رابطه دوم n فرد است)

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$$
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-2}b^2 - \ldots + b^{n-1})$$

داریم

$$a-b \mid a^n - b^n$$

$$a+b \mid a^n + b^n \qquad (\text{n فرد})$$

تمرین : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $26 \mid 3^{6n} + 25$

اثبات:

$$3^3 - 1 \mid (3^3)^{2n} - 1 \Rightarrow 26 \mid 3^{6n} - 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} 26 \mid 3^{6n} - 1 \\ 26 \mid 26 \end{array}\right. \Rightarrow 26 \mid (3^{6n} - 1) + 26 \Rightarrow 26 \mid 3^{6n} + 26$$

تمرین : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $10 \mid 3^{4n} - 9$

$$3^2+1 \mid (3^2)^{2n+1}+1 \Rightarrow 10 \mid 3^{4n+2}+1$$

اثبات:

$$\begin{cases} 10 \mid 3^{4n+2}+1 \\ 10 \mid 10 \end{cases} \Rightarrow 10 \mid (3^{4n+2}+1)-10 \Rightarrow 10 \mid 3^{4n+2}-9$$

تمرین : ثابت کنید مربع هر عدد فرد بصورت ۸q+۱ است که در آن q∈Z

اثبات : هر عدد فرد بصورت ۴k=۱ یا ۴k+۳ است.

$$(4k+1)^2 = 16k^2+8k+1 = 8\underbrace{(2k^2+k)}_{q}+1 = 8q+1$$

$$(4k+3)^2 = 16k^2+24k+9 = 16k^2+24k+8+1 = 8\underbrace{(2k^2+3k+1)}_{q}+1 = 8q+1$$

تمرین : اگر a و b اعداد صحیح فرد باشند ثابت کنید $8 \mid a^4-b^4$

اثبات : a و b هردو فرد هستند پس مربع آنها نیز فرد می باشند. بنابر این مربع a۲و مربع b۲ بصورت ۸q+۱ مباشد.

$$\begin{matrix} a^4 = 8q_1+1 \\ b^4 = 8q_2+1 \end{matrix} \Rightarrow a^4-b^4 = 8(q_1-q_2) \Rightarrow 8 \mid a^4-b^4$$

تمرین : ثابت کنید برای هر عدد صحیح فرد n , $24 \mid n^3-n$

اثبات : n۳-n=(n-۱) n (n+۱) . می دانیم حاصلضرب سه عدد متوالی مضرب ۳ است بنابراین $3 \mid n^3-n$ از

طرفی n فرد است لذا $8 \mid n^2-1$ بنابر این:

$$8 \mid n^2-1 \Rightarrow 8 \mid n(n^2-1) \Rightarrow 8 \mid n^3-n$$

اگر عددی مضرب ۳ و ۸ باشد مضرب ۲۴ است و این یعنی: $24 \mid n^3 - n$

تمرین : برای هر عدد صحیح n ثابت کنید $4 \nmid n^2 + 2$

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 8q+1 \Rightarrow n^2 + 2 = 8q+3 \Rightarrow n^2 + 2 = 4q' + 3 \Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$$
$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$$

تمرین : اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a-b \mid a$ ثابت کنید $a-b \mid b$

اثبات :
$$\begin{matrix} a-b \mid a \\ a-b \mid a-b \end{matrix} \Rightarrow a-b \mid a-(a-b) \Rightarrow a-b \mid b$$

تمرین : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$

اثبات: برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی n میدانیم $a-b \mid a^n - b^n$

بنابراین : $2-(-10 \mid 2^n - (-1)^n \Rightarrow 3 \mid 2^n + (-1)^n$

تمرین : نشان دهید حاصلضرب چهار عدد صحیح متوالی بعلاوه یک مربع کامل است.

اثبات:
$$(n-1)n(n+10(n+2)+1 = (n^2+n)(n^2+n-2)+1$$
$$= (n^2+n)^2 - 2(n^2+n)+1 = ((n^2+n)-1)^2$$

تمرین: اگر برای عدد طبیعی n , $4 \mid 3n+1$ ثابت کنید $4 \mid 51n^2 + 20n + 1$

اثبت:

$$4 \mid 3n+1 \Rightarrow 4 \mid 17(3n+1) \Rightarrow 4 \mid 51n^2+17n$$

$$\begin{cases} 4 \mid 3n+1 \\ 4 \mid 51n^2+17n \end{cases} \Rightarrow \quad 4 \mid (51n^2+17n)+(3n+1) \Rightarrow 4 \mid 51n^2+20n+1$$

تمرین : برای هر عدد طبیعی و زوج n ثابت کنید $48 \mid n^3-4n$

اثبات : $n^3-4n=(n-2)n(n+2)$, n زوج است پس عدد صحیح k موجود است که n=۲k پس:

$$n^3-4n=(2k-2)2k(2k+2) \Rightarrow n^3-4n=8\underbrace{(k-1)k(k+1)}_{2q}=16q$$

تمرین : به ازاء چند عدد صحیح n کسر $\dfrac{15n+14}{3n+2}$ صحیح است؟

$$\frac{15n+14}{3n+2} \in Z \Rightarrow 3n+2 \mid 15n+14$$

$$\begin{matrix} 3n+2 \mid 15n+14 \\ 3n+2 \mid 5(3n+2) \end{matrix} \Rightarrow 3n+2 \mid (15n+14)-(15n+10) \Rightarrow 3n+2 \mid 4 \Rightarrow 3n+2=\pm1,\pm2,\pm4$$

$3n+2=1 \Rightarrow n=\dfrac{1}{3}$ غ ق ق

$3n+2=-1 \Rightarrow n=-1$ ق ق

$3n+2=2 \Rightarrow n=0$ ق ق

$3n+2=-2 \Rightarrow n=-\dfrac{4}{3}$ غ ق ق

$3n+2=4 \Rightarrow n=\dfrac{2}{3}$ غ ق ق

$3n+2=-4 \Rightarrow n=-2$ ق ق

پس کسر $\frac{15n+14}{3n+2}$ به ازاء سه عدد صحیح n , صحیح است.

الگوریتم تقسیم

سوال: آیا عدد ۳۷ را می توان بصورت مضربی از عدد ۵ بعلاوه ی عدد صحیح دیگری نوشت؟

پاسخ: ۳۷=۵(۵)+۱۲ , ۳۷=۶(۵)+۷ , ۳۷=۷(۵)+۲

۳۷=۴(۵)+۱۷ , ۳۷=۹(۵)+(-۸) , ۳۷=۸(۵)+(-۳)

مورد ۳۷=۷(۵)+۲ با بقیه متفاوت است زیرا در این حالت ۳۷ را بصورت مضربی از ۵ بعلاوه عددی بزرگتر مساوی صفر و کمتر از ۵ نوشته ایم. این نمایش (۳۷=۷(۵)+۲) منحصر بفرد است. یعنی در تمام دنیا اگر کسی بخواهد ۳۷ را بصورت مضربی از ۵ بعلاوه عددی بزرگتر مساوی صفر و کمتر از ۵بنویسد فقط میتواند بنویسد ۳۷=۷(۵)+۲

قضیه (الگوریتم تقسیم):اگر a و یک عدد صحیح و b عدد طبیعی باشدآنگاه اعداد صحیح و منحصر بفرد q و r موجودند که

$$a=bq+r \qquad , \qquad 0\le r<b$$

اثبات : مجموعه $S=\{a=mb>0 \mid m\in Z\}$ را در نظر می گیریم. واضح است $S\subset N$

ثابت می کنیم S ناتهی است.

$$a-(-|a|-1)b=a+(|a|+1)b\ge a+|a|+1>0$$

پس $a-(-|a|-1)b \in S$ لذا S زیر مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی است بنابراین طبق اصل خوشترتیبی دارای کوچکترین عضو است. کوچکترین عضو S را r' می نامیم .

$$r' \in S \Rightarrow \exists q' \in Z : a-q'b=r' \Rightarrow a=q'b+r'$$

برای r' و b سه حالت رخ میدهد . الف- $r'<b$ ب - $r'=b$ ج - $r'>b$

در حالت الف و ب r و q مناسب را ارائه می دهیم و ثابت می کنیم ج نمی تواند رخ دهد (و بنابر این در حالت ج نیاز به ارائه r و q نیست)

الف) اگر $r'<b$ با توجه به مثبت بودن r' ($r' \in S$ پس $r'>0$)داریم $0<r'<b$ کافیست $r=r'$ و $q=q'$ در این حالت $0 \le r<b$, $a=bq+r$

ب – اگر $r'=b$ آنگاه $a=bq'+b$ و لذا $a=b(q'+1)+0$ پس در این حالت $r=0$ و $q=q'+1$

ج) حالت ج رخ نمی دهد . فرض کنیم رخ دهد(فرض خلف)

$$r'>b \Rightarrow r'-b>0 \qquad (1)$$

$$r'-b=a-bq'-b \Rightarrow r'=a-(q'+1)b \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه میشود $r'-b$ عضو S است . که این امکان ندارد زیرا $r'-b$ از کوچکترین عضو S کمتر است.پس فرض خلف نادرست است و این یعنی

حالت ج رخ نمی دهد.

اثبات منحصر بفرد بودن r و q :

فرض کنیم $0 \le r_1 < b$, $a = bq_1 + r_1$ و $0 \le r_2 < b$, $a = bq_2 + r_2$ باید ثابت کنیم

$r_1 = r_2 \quad , \quad q_1 = q_2$

$$bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \quad \Rightarrow \quad b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \quad \Rightarrow \quad b \mid r_2 - r_1$$

اگر $r_1 \neq r_2$ در اینصورت $r_1 - r_2 \neq 0$ پس $|b| \le |r_2 - r_1|$ اما این امکان ندارد زیرا $r_1 < b$ و $r_2 < b$ پس

$|r_2 - r_1| < b$ و در نتیجه $r_1 = r_2$

$$bq_1 + \cancel{r_1} = bq_2 + \cancel{r_2} \Rightarrow bq_1 = bq_2 \Rightarrow q_1 = q_2$$

قضیه نمایش

عددی مانند ۳۷۵ را در نظر گرفته ایم . فرض کنیم شما از عددی که در نظر گرفته ایم اطلاعی ندارید و قرار است با طرح پرسشهایی به ارقام عدد مورد نظر برسید.

چه روشی را پیشنهاد میکنید؟

ضمن آنکه ارقام عدد بدست آمد می توانیم ۳۷۵ را بصورت مجموعی از مضارب توانهای نزولی ۱۰ بنویسیم :

$$375 == 3(10^2) + 7(10) + 5$$

در حالت کلی قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه نمایش: هر عدد طبیعی a را می توانیم بصورت منحصر بفردی برحسب مضارب توانهای نزولی هر عدد طبیعی دیگری مانند $b \neq 1$ بصورت زیر بنویسیم :

$$a = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + ... + a_1 b^1 + a_0$$

که در آن $0 \leq a_i < b \quad , \quad 0 \leq i \leq k$

تمرین : ۳۷۵ را یکبار برحسب توانهای نزولی ۸ و بار دیگر بر حسب توانهای نزولی ۷ بنویسید.

پاسخ: $7^3 = 343 \quad , 7^2 = 49 \quad , 7^1 = 7 \quad , 8^2 = 64 \quad , 8^1 = 8$

$$375 = 5(8^2) + 6(8) + 7$$

$$375 = 1(7^3) + 0(7^2) + 4(7) + 7$$

قرارداد : در قضیه نمایش $(a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0)_b$ را نمایش عدد a در مبنای عدد b مینامیم .

مثال: نمایش عد ۳۷۵ در مبنای ۸ بصورت $(567)_8$ و نمایش آن در مبنای ۷ بصورت $(1044)_7$ می باشد.

تذکر: برای تعین نمایش عدد در مبنای ۱۰ برعکس عمل می کنیم.

مثال: نمایش عددی در مبنای ۵ بصورت $(421)_5$ است. نمایش آنرا در مبنای ۱۰ مشخص نمایید.

پاسخ: $(421)_5 = 4(5^2) + 2(5) + 1 = 111$

تمرین : نمایش عددی در مبنای ۹ بصورت $(ab)_9$ و نمایش آن در مبنای ۷ بصورت $(ba)_7$ است. نمایش این عدد را در مبنای ۱۰ مشخص کنید.

پاسخ: $(ab)_9 = (ba)_7 \Rightarrow 9a + b = 7b + a \Rightarrow 8a = 6b \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$

اما $\begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$ قابل قبول نیستزیرا در مبنای ۷ رقم ها باید کمتر از ۷ باشند . پس

$b < 7 \quad , \quad a < 7$ لذا $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$ بنابر این :

نمایش عدد در مبنای ۱۰ =۹(۳)+۴=۳۱

تمرین : در کدام مبنا : $(17)_a + (75)_a = (114)_a$

پاسخ:

$$(17)_a + (75)_a = (114)_a \Rightarrow a + 7 + 7a + 1 = a^2 + a + 1 \Rightarrow a^2 - 7a - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a = -1 \end{cases}$$

پس مبنای مورد نظر ۸ میباشد.

تمرین:نمایش عددی دز مبنای ۳ بصورت $(11111)_3$ میباشد در کدام مبنا بصورت $(441)_a$ نوشته می شود؟

$$(441)_a = (11111)_3 \Rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 1(3)^4 + 1(3)^3 + 1(3)^2 + 1(3) + 1$$

پاسخ:

$$\Rightarrow 4a^2 + 4a \ -120 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -6 \end{cases}$$

۲۰ - عددی در مبنای ۲ هشت رقم دارد.این عدد در مبنای ۱۲ چند رقم دارد؟

۱)دو رقم ۲) سه رقم ۳) سه یا چهار رقم ۴) دو یا سه رقم

پاسخ: کوچکترین عدد هشت در مبنای ۲ $= (10000000)_2 = 2^7 = 128 = 10(12^1) + 8 = (a8)_{12}$

بزرگترین عدد هشت در مبنای ۲ $= (11111111)_2 = (100000000)_2 - 1 = 2^8 - 1$

$$= 255 = 1(12^2) + 9(12^1) + 3 = (193)_{12}$$

پس عدد مورد نظر در مبنای ۱۲ دو یا سه رقم دارد.

تذکر : در مبنای ۱۲ ده و یازده رقم می باشند که به ترتیب آنها را با a و b نشان میدهیم.

تست ۱: در یک عمل تقسیم ۴۴ واحد به مقسوم و سه واحد به مقسوم علیه اضافه می کنیم. از باقیمانده یک واحد کم می شود و خارج قسمت تغییری نمی کند.خارج قسمت کدام است؟

۱)۱۵ ۲)۱۷ ۳)۱۱ ۴)۱۳

پاسخ : گزینه ۱

$$-\begin{cases} a = bq + r \\ a + 44 = (b+2)q + r - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 44 = 3q - 1 \quad \Rightarrow\Rightarrow q = 15$$

تست ۲ :در یک تقسیم مقسوم علیه ۳۱ و باقیمانده ۱۱ میباشد. به مقسوم ۱۰۱

واحد اضافه می کنیم . خارج قسمت چه تضییری می کند؟

۱) دو واحد اضافه می شود　　　　۲) سه واحد کم می شود

۳) دو واحد کم می شود　　　　۳) سه واحد اضافه می شود

پاسخ : گزینه ۲

$$a = 31q + 11 \xrightarrow{+101} a + 101 = 31q + 101 + 11 \Rightarrow a + 101 = 31q + 93 + 19$$
$$\Rightarrow a + 101 = 31(q+3) + 19$$

بنابراین به خارج قسمت سه واحد اضافه می شود.

تست ۳ : چند عدد طبیعی وجود دارد که اگر بر ۸۱ تقسیم شود باقیمانده ۴ برابر

خارج قسمت مس باشد.

۱)۲۳　　　　۲)۲۲　　　　۳)۲۱　　　　۴)۲۰

پاسخ : گزینه ۴

$$a = 81q + 4q \quad , \quad 0 < 4q < 81$$
$$0 < 4q < 81 \xrightarrow{\div 4} 0 < q < 20/25 \Rightarrow 0 < q \le 20$$

لذا ۲۰ عدد برای q و بنابر این ۲۰ عدد برای مقسوم وجود دارد.

عدد اول

تعریف : عدد طبیعی p>۱ را اول می نامیم هر گاه بجز بر خودش و یک بر هیچ عدد طبیعی دیگری بخشپذیر نباشد.

اگر عدد طبیعی n>۱ اول نباشد آنرا مرکب می نامیم .

تست : ۴ اگر مجموع دو عدد اول برابر ۱۹۳ باشد حاصلضرب آمها کدام است؟

۱)۳۸۲ ۲)۴۹۷ ۳)۵۱۷ ۴)۵۲۴

پاسخ : گزینه ۱

مجموع دو عدد زمانی فرد است که یکی از آنها فرد باشد و ۲ تنها عدد اول فرد است . بنابر این یکی از آنها ۲ و دیگری ۱۹۱ است لذا حاصلضرب دو عدد ۳۸۲

می باشد.

تمرین :ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n , $27^n - 1$ عددی مرکب است.

اثبات: $$27^n - 1 = (3^n)^3 - 1 = (3^n - 1)(3^{2n} + 3^n + 1)$$

پس $27^n - 1$مرکب است.

تمرین : ثابت کنید هر عدد اول بجر ۲ بصورت ۴q+۱ یا ۴q+۳ می باشد.

اثبات: طبق الگوریتم تقسیم هر عد طبیعی بصورت ۴q یا ۴q+۱ یا ۴q+۲ یا ۴q+۳ است . اما ۴q و ۴q+۲ زوج اند پس ا و ل نمی باشند (بجز در حالت ۴(۰)+۲) بنابراین هر عدد اول بجز ۲ بصورت ۴q+۱ یا ۴q+۳ می باشد.

تمرین : ثابت کنید هر عدد اول بجر ۲و۳ بصورت ۶q+۱ یا ۶q+۵ می باشد.

اثبات: طبق الگوریتم تقسیم هر عد طبیعی بصورت ۶q یا ۶q+۱ یا ۶q+۳ یا ۶q+۴

یا ۶q+۵ میباشد. اما ۶q و ۶q+۲ و ۶q+۴ زوجند پس اول نمی باشند (مگر در حالت ۶(۰)+۲) . همچنین ۶q+۳

و ۶qمضرب ۳ میباشند پس اول نمی باشند

(مگر در حالت ۶(۰)+۳) لذا هر عدد اول بجز ۲ و ۳ تنها می تواند بصورت ۶q+۱

یا ۶q+۵ باشد.

تمرین : ثابت کنید اگر p>۳ او ل باشد آنگاه p۲=۶k+۱ که در آن k یک عدد صحیح است.

اثبات : $p>3 \Rightarrow p=6q\pm1 \Rightarrow p^2=36q^2\pm12q+1 \Rightarrow p^2=6k+1$ اول است

تمرین:اگر p>۳ اول باشد ثابت کنید $24 \mid p^2-1$

اثبات : p فرد است پس مربع آن بصورت ۸k+۱ است .لذا p۲-۱ مضرب ۸ است.

p>۳ اول است پس طبق مساله قبل p۲-۱ مضرب ۶ است لذا مضرب ۳ است.

P۲-۱ مضرب ۳ و مضزب ۸ است بنابر این $24 \mid p^2-1$

تست ۵ : چند عدد اول به شکل n۳-۱ وجود دارد ؟

۱) صفر ۲)۱ ۳)۳ ۴) بی شمار

پاسخ : گزینه ۲

$n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ بنابر این در حالتی که $n-1\neq1$ عدد n^3-1 مرکب است و این یعنی n^3-1 تنها در حالت $n=2$ عدد اول است.

تمرین : ثابت کنید اگر $2^n - 1$ اول باشد آنگاه n اول است.

اثبات: فرض کنیم n مرکب باشد دراینصورت اعداد طبیعی kوm موجودند بطوریکه

در اینصورت $1 < k, m < n, n = km$:

$$2^n - 1 = (2^k)^m - 1 = (2^k - 1)[(2^k)^{m-1} + (2^k)^{m-2} + (2^k)^{m-3} + \ldots + 1]$$

ملاحظه می شود $2^n - 1$ بصورت حاصلضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از ۱ در آمده است که این با اول بودن $2^n - 1$ تناقض دارد پس حتما باید n اول باشد.

تمرین : ثابت کنید اگر $2^n + 1$ عدد اول باشد آنگاه n به شکل توانی از ۲ می باشد.

اثبات : فرض کنیم n به شکل توانی از ۲ نباشد در اینصورت میتوان n را بصورت حاصلضرب یک عدد فرد در یک عدد طبیعی دیگر مانند n=(۲k+۱)m نوشت.لذا:

$$2^n + 1 = (2^m)^{2k+1} + 1 = (2^m + 1)[(2^m)^{2k} - (2^m)^{2k-1} + \ldots + 1]$$

در اینجا $2^n + 1$ بصورت حاصلضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از ۱ نوشته شده است که این با اول بودن $2^n + 1$ تناقض دارد .پس n به شکل توانی از ۲ میباشد.

قضیه : هر عدد صحیح بجز ± 1 حد اقل یک مقسوم علیه اول دارد.

اثبات:عدد صحیح $n \neq \pm 1$ را در نظر میگیریم . اگر n=۰ حکم بدیهی است (زیرا

$2 \mid 0$, $3 \mid 0$, $5 \mid 0$....). حال فرض کنیم $n \neq 0$ مجموعه $S = \{k : k > 1, k \mid n\}$ را در نظر میگیریم . واضح است

$S \subset N$ و $S \neq \varnothing$ (حداقل میدانیم $|n| \in S$) بنابر این طبق اصل

خوشترتیبی S نا تهی است لذا دارای کوچکترین عضو است. کوچکترین عضو آنرا p مینامیم.ثابت میکنیم p اول است .

فرض کنیم اول نباشد (فرض خلف). پس عدد طبیعی q موجود است که $1 < q < p \quad ,\therefore \quad q \mid p$ بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} q \mid p \\ p \mid n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad q \mid n \quad \overset{q>1}{\Longrightarrow} \quad q \in S$$

این یک تناقض است زیرا q از کوچکترین عضو S کمتر است پس نباید عضو S باشد لذا فرض خلف نادرست است و p یک عدد اول است.

قضیه :مجموعه اعداد اول نا متناهی است.

اثبات : فرض کنیم مجموعه اعداد اول متناهی باشد(فرض خلف) وتنها اعداد اول بصورت $p_۱ , p_۲ , p_۳ , \dots , p_n$ باشند . واضح است عدد $p = p_n \dots p_۳ \, p_۲ \, p_۱ + ۱$ مخالف ± 1 است . بنا بر این طبق قضیه قبل یک مقسوم علیه اول دارد. اما طبق فرض خلف تنها اعداد اول $p_۱ , p_۲ , p_۳ , \dots , p_n$ می باشند لذا $i \quad (1 \le i \le n)$موجود است که $p_i \mid p_n \dots p_3 p_2 p_1 + 1$ از طرفی $p_i \mid p_n \dots p_3 p_2 p_1$ (حاصلضرب چند عدد مضرب هر کدام از عاملها میباشد) لذا:

$$\left.\begin{array}{l} p_i \mid p_n \dots p_3 p_2 p_1 + 1 \\ p_i \mid p_n \dots p_3 p_2 p_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p_i \mid (p_n \dots p_3 p_2 p_1 + 1) - p_n \dots p_3 p_2 p_1 \Rightarrow \quad p_i \mid 1$$

که این یک تناقض است زیرا هیچ عدد اولی ۱ را نمی شمارد.پس فرض خلف نادرست است و بنابر این مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

قضیه :اگر n یک عدد مرکب باشد آنگاه حداقل یک مقسوم علیه اول ککوچکتر مساوی $\sqrt{n}$ دارد.

اثبات: n مرکب است پس اعداد طبیعی a و b موجودند که n=ab و $1 < a \le b < n$

$$a \le b \stackrel{\times a}{\Longrightarrow} \quad a^2 \le ab \quad \Rightarrow \quad a \le \sqrt{n}$$

از آنجائیکه $a \ne \pm 1$ پس یک مقسوم علیه اول دارد که آنرا p مینامیم.

$$p \mid a \Rightarrow \quad p \le a \quad \stackrel{a \le \sqrt{n}}{\Longrightarrow} \quad p \le \sqrt{n}$$

$$\begin{matrix} p \mid a \\ a \mid n \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad p \mid n$$

پس p یک مقسوم علیه اول n است که $p \le \sqrt{n}$

تمرین : ثابت کنید ۱۰۳ عدد اول است.

اثبات: فرض کنیم ۱۰۳ مرکب باشد در اینصورت یکی از اعداد اول کوچکتر مساوی $\sqrt{103}$ باید مقسوم علیه ۱۰۳ باشد

اما ۲ ,۳ , ۵ , ۷ تنها اعداد اول کوچکتر مساوی $\sqrt{103}$ می باشند که هیچکدام مقسوم علیه ۱۰۳ نمی باشند.بنابر

این

۱۰۳ عدد اول است.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

تعریف : فرض کنیم a وb دو عدد صحیح و حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد در ا ینصورت بزرگترین مقسو م علیه مشترک آنها (ب م م) که آنرا با (a,b) نشان میدهیم برابر با عدد d است هرگاه d در دو شرط زیر صدق کند.

الف - $d|a \quad , \quad d|b$

ب - $(c|a \quad , \quad c|b) \quad \Rightarrow \quad c \le d$

قضیه (قضیه بزو): فرض کنیم a وb دو عدد صحیح و حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد . در اینصورت کوچکترین عضو مجموعه $S = \{ma + nb > 0 : m,n \in Z\}$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک a وb میباشد یعنی

$$\min(S) = (a,b)$$

سوال: آیا یک ترکیب مثبت از دو عدد صحیح الزاما ب م م آنها است؟

پاسخ: خیر اما حتما بزرگتر یا مساوی ب م م آنها است.

مثال: a=۷۶ , b=۱۸ داریم ۴ = (۱۸) ۴-(۷۶) ۱ بنابراین $4 \ge (76,18)$

سوال : یک عدد وجود دارد که اگر یک ترکیب از دو عدد برابر آن باشد قطعا ب م م آنها است. آن عدد کدام است؟

پاسخ: عدد ۱ .زیرا اگر یک ترکیب مثبت از دو عدد برابر ۱ باشد قطعا کوچکترین ترکیب مثبت از آن دو عدد است بنابراین:

$$(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists m,n \in Z : ma + nb = 1$$

تعریف : دو عدد صحیح را نسبت به هم اول می نامیم(متباین) هرگاه ب م م آنها برابر ۱ باشد.

تمرین: ثابت کنید ۲۵ و ۱۸ نسبت به هم اولند.

پاسخ: $7(18)-5(25)=1 \quad \Rightarrow \quad (25,18)=1$

چند نکته :

۱- برای هر عدد صحیح a , $(1,a)=1$

اثبات: $1(1)+0(a)=1 \quad \Rightarrow \quad (1,a)=1$

۲- برای هر عدد صحیح a , $(-1,a)=1$

اثبات: $-1(-1)+0(a)=1 \quad \Rightarrow \quad (-1,a)=1$

۳- اگر a=bq+r در اینصورت (a , b)=(r, b) به عبارت دیگر $(\cancel{bq}+r,b)=(r,b)$

اثبات: فرض کنیم $(a,b)=d$, $(r,b)=d'$. باید ثابت کنیم $d=d'$

داریم:

$$m_1a+n_1b=d \quad \Rightarrow \quad m_1(bq+r)+n_1b=d \quad \Rightarrow \quad k_1r+k_2b=d$$

پس یک ترکیب از b و r برابر d است لذا $d \geq (r,b)$

همچنین:

$$m_2r+n_2b=d \quad \Rightarrow \quad m_2(a-bq)+n_2b=d' \quad \Rightarrow \quad k_1'a+k_2'b=d'$$

پس یک ترکیب از b و a برابر d' است لذا $d' \geq (a,b)$

$$\left.\begin{array}{l} d \geq (r,b) \\ d' \geq (a,b) \end{array}\right. \Rightarrow \quad d = d'$$

و حکم ثابت می شود.

تذکر : در این نکته r و q مربوط به الگوریتم تقسیم نمی باشند یعنی r می تواند منفی و یا بزرگتر مساوی b نیز باشد.

مثال: ب م م دو عدد ۷۶ و ۱۸ را مشخص کنید.

$$(76,18) = (\cancel{4(18)} + 4,18) = (4, \cancel{4(4)} + 2) = (4,2) = 2$$

۴- اگر a یک عدد صحیح باشد دراینصورت $(a,0) = |a|$

اثبات : کافی است ثابت کنیم $|a|$ در دو شرط الف و ب مربوط به تعریف ب م م صدق میکند.

واضح است $\text{lal} \mid 0 \quad , \quad \text{lal} \mid a$ بنابر این شرط الف تعریف برقرار است.

حال فرض کنیم $c \mid 0 \quad , \quad c \mid a$ باید ثابت کنیم $c \leq \text{lal}$

$$c \leq \text{lal} \overset{a \neq 0}{\Longrightarrow} \text{lcl} \leq \text{lal} \overset{c \leq |c|}{\Longrightarrow} \text{c} \leq \text{lal}$$

پس شرط ب نیز برقرار است.

۵- اگر $a \mid b$ آنگاه $(a,b) = |a|$

اثبات :

$$a \mid b \Rightarrow \exists k \in Z : b = ka$$

$$(a,b) = (a, \cancel{ka} + 0) \Rightarrow (a,b) = (a,0) \Rightarrow (a,b) = |a|$$

خواص زیر را به کمک تعریف میتوان ثابت نمود

۶- اگر k یک عدد صحیح و مخالف صفر باشد در اینصورت $(ka,kb) = |k|(a,b)$

۷- اگر n یک عدد طبیعی باشد در اینصورت $(a^n, b^n) = (a,b)^n$

۸- $(a,b) = (b,a) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$

تمرین : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $(n^4 + 7n^2 - 5n - 4, n-1) = 1$

اثبات :

$$(n^4 + 7n^2 - 5n - 4, n-1) = (\cancel{n^4 - n^3} + \cancel{n^3 - n^2} + \cancel{8n^2 - 8n} + \cancel{3n - 3} - 1, n-1)$$
$$= (-1, n-1) = 1$$

تست ۵ : اگر d=(۵n+۴،۲n+۳) و n یک عدد طبیعی باشد کدام صحیح است. (آزاد۶۵)

۱) d =۱   ۲) d=۱ یا d=۷   ۳) d=۷ , d=۱   ۴) d=۱

پاسخ: گزینه ۲

$$(5n+4, 2n+3) = (\cancel{4n+6} + n - 2, 2n+3) = (n-2, 2n+3) = (n-2, \cancel{2n-4} + 7) = (n-2, 7) = d$$

$\Rightarrow \quad d \mid 7 \quad \Rightarrow$ d=۱ یا d=۷

تست ۶: اگر n یک عدد طبیعی باشد و $(n^3-n,n^2-n)=30$ مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ : گرینه ۳

$$(n^3-n,n^2-n)=(\cancel{n^3-n^2}+\cancel{n^2-n}\ ,n^2-n)\Rightarrow(0,n^2-n)=30$$
$$\Rightarrow n^2-n=30\Rightarrow n=6$$

تمرین: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $\left(n!+1,(n+1)!+1\right)=1$

اثبات :

$$\left(n!+1,(n+1)!+1\right)=\left(n!+1,(n+1)!+n+1-n\right)=\left(n!+1,\ \cancel{(n+1)(n!+1)}-n\right)$$
$$=(\cancel{n!}+1,-n)=(1,-n)=1$$

تمرین: اگر a نسبت به دو عدد b و c اول باشد ثابت کنید a نسبت به bc اول است.

اثبات:

$$\begin{cases}(a,b)=1 & \Leftrightarrow \quad \exists m,n\in Z: ma+nb=1\\(a,c)=1 & \Leftrightarrow \quad \exists m',n'\in Z: m'a+n'c=1\end{cases}\Rightarrow(ma+nb)(m'a+n'c)=1\times1$$
$$\Rightarrow(mm'a+mn'c+m'nb)a+nn'bc=1\Rightarrow(a,bc/0=1$$

نکته: بوسیله استقرا می توان ثابت کرد اگر a نسبت به اعداد $b_n,\dots,b_3,b_2,b_1$
اول باشد آنگاه نسبت به حاصلضرب آنها اول است یعنی: $(a,b_n,\dots,b_3,b_2,b_1)=1$

تمرین : اگر $(a,b)=1$ ثابت کنید برای هر دو عدد طبیعیm وn $(a^n,b^m)=1$

اثبات:

$$\underbrace{(a,b)=1,(a,b)=1,....,(a,b)=1}_{\text{مرتبه } m}\Rightarrow (a,b^m)=1$$

$$\underbrace{(a,b^m)=1,(a,b^m)=1,....,(a,b^m)=1}_{\text{بار } n}\Rightarrow (a^n,b^m)=1$$

تمرین : اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $c \mid a+b$ ثابت کنید c نسبت به a و b اول است.

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} c \mid a+b \Rightarrow \exists k\in Z : a+b=kc \\ (a,b)=1 \Leftrightarrow \exists m,n\in Z : ma+nb=1 \end{array}\right. \Rightarrow ma+n(kc-a)=1 \Rightarrow (m-n)a+nkc=1 \Rightarrow (a,c)=1$$

مشابها (b,c)=۱

تمرین : ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ آنگاه $(a,a\pm b)=1$

اثبات : $(a,\cancel{a}\pm b)=(a,\pm b)=(a,b)=1$

تمرین : ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ آنگاه $(ab,a\pm b)=1$

اثبات: $(a,b)=1 \Rightarrow \begin{cases}(a,a\pm b)=1\\(b,a\pm b)=1\end{cases} \Rightarrow (ab,a\pm b)=1$

تمرین : ثابت کنید اگر $(a,b)=d$ آنگاه $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$

اثبات:
$$(a,b)=d \Rightarrow \exists m,n\in Z: ma+nb=d \overset{\div d}{\Rightarrow} m(\frac{a}{d})+n(\frac{b}{d})=1 \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$$

تمرین : اگر برای عدد طبیعی n , $a^n \mid b^n$ ثابت کنید $a \mid b$

اثبات
:

$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1 \Rightarrow \left((\frac{a}{d})^n,(\frac{b}{d})^n\right)=1(d^n)$$

$$\Rightarrow \exists x,y\in Z: x(\frac{a}{d})^n+y(\frac{b}{d})^n=1 \Rightarrow xa^n+yb^n=d^n \Rightarrow d^n \ge (a^n,b^n) \Rightarrow d^n \ge \left|a^n\right| \Rightarrow d \ge |a| \qquad (1)$$

$$(a,b)=d \Rightarrow d \mid a \Rightarrow d \le |a| \qquad (2)$$

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می شود $d=|a|$

$$(a,b)=|\mathrm{a}| \Rightarrow |\mathrm{a}| \mid \mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{a} \mid \mathrm{b}$$

تمرین:اگر $(a,b)=1$ثابت کنید ۲ یا$1=(a+b,a-b)$

$$(a+b,a-b)=d \Rightarrow (a+b,\cancel{a+b}-2b)=d \Rightarrow (a+b,-2b)=d \Rightarrow d\mid 2b$$

اثبات:

$$(a+b,a-b)=d \Rightarrow (a+b,2a\cancel{-a-b})=d \Rightarrow (a+b,2a)=d \Rightarrow d\mid 2a$$

$$\begin{cases} d\mid 2a \\ d\mid 2b \end{cases} \Rightarrow d\mid (2a,2b) \Rightarrow d\mid 2(a,b) \Rightarrow d\mid 2$$

از رابطه $d\mid 2$ نتیجه می شود d=۱ یا d=۲

تمرین:اگر a و b فرد باشند و $(a,b)=1$ثابت کنید $(a+b,a-b)=2$

اثبات: فرض کنیم $b=2n+1$, $b=2m+1$ و همچنین $d=(a+b,a-b)$

$$d=(a+b,a-b)=(2m+1+2n+1,2m+1-2n-1)=2(m+n+1,m-n) \Rightarrow 2\mid d$$

از طرفی طبق مساله قبل : $d\mid 2$

$$\begin{matrix} d\mid 2 \\ 2\mid d \end{matrix} \Rightarrow d=\pm 2 \overset{d>0}{\Longrightarrow} d=2$$

تمرین: اگر $a\mid c$ و $b\mid c$ و $(a,b)=1$ ثابت کنید $ab\mid c$

اثبات:

$$a\mid c \Rightarrow \exists k_1 \in Z : c=k_1 a$$

$$b\mid c \Rightarrow \exists k_2 \in Z : c=k_2 b$$

$$(a,b)=1 \Rightarrow \exists m,n \in Z : ma+nb=1 \overset{\times c}{\Longrightarrow} mac+nbc=c \Rightarrow ma(k_2 b)+nb(k_1 a)=c \Rightarrow ab\mid c$$

سوال :آیا از رابطه $a \mid bc$ می توان نتیجه گرفت $a \mid c$ یا $a \mid b$

پاسخ: خیر . بطور مثال $6 \mid 3\times 4$ اما $6 \nmid 3$ و $6 \nmid 4$

با وجود مثال بالا ما قضیه زیر را داریم.

قضیه(لم اقلیدس): اگر $a \mid bc$ و $(a,b)=1$ در اینصورت $a \mid c$

اثبات:

$$a \mid bc \Rightarrow \exists k \in Z : bc = ka$$

$$(a,b)=1 \Rightarrow \exists m,n \in Z : ma+nb=1 \overset{\times c}{\Longrightarrow} mac+nbc=c \Rightarrow mac+n(ka)=c \Rightarrow a \mid c$$

قضیه : اگر p یک عدد اول باشد و $p \mid bc$ در اینصورت $p \mid b$ یا $p \mid c$

اثبات : واضح است p یا ۱ $=(p,b)$

اگر $(p,b)=b$ در اینصورت طبق خاصیت الف ب م م $p \mid b$

اگر $(p,b)=1$ با توجه به اینکه $p \mid bc$ طبق لم اقلیدس $p \mid c$

نکته : بوسیله استقرا می توان ثابت کرد قضیه قبل قابل تعمیم است . یعنی اگر p یک عدد اول باشد $p \mid a_1a_2...a_n$

آنگاه i , $1 \le i \le n$ موجود است که $p \mid a_i$

تمرین:اگر p یک عدد اول باشد و $p \mid a^n$ ثابت کنید $p^n \mid a^n$

اثبات : $p \mid a^n \Rightarrow p \mid aa...a \Rightarrow p \mid a \Rightarrow \exists k \in Z : a = kp \Rightarrow a^n = k^n p^n \Rightarrow p^n \mid a^n$

قضیه بنیادی حساب

قضیه : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را صرفنظر از ترتیب بصورت منحصر بفردی از حاصلضرب اعداد اول نوشت.

تذکر : در تجزیه اعداد طبیعی به عا ملهای اول میتوان حاصلضرب چند عدد اول مساوی را بصورت توانی از آن نوشت.

$$n = p_1^{\alpha} p_2^{\alpha} ... p_k^{\alpha}$$

تمرین: ثابت کنید هر عدد طبیعیبزرگتر از ۱ را می توان بصورت حاصلضرب یک مربع

کامل و یک عدد صحیح بدون عامل مربع (بجز ۱) نوشت.

اثبات: فرض کنیم n>۱ یک عدد طبیعی باشد . طبق قضیه بنیادی حساب میتوان آنرا به عا ملهای اول بصورت

$n = p_1^{\alpha} p_2^{\alpha} ... p_k^{\alpha}$ تجزیه نمود .برای هر i فرض کنیم

$\alpha_i = 2\beta_i + r_i$ که در آن $r_i = 0$ یا $r_i = 1$. بنا براین :

$$n = p_1^{2\beta} p_2^{2\beta} ....p_n^{2\beta} \times p_1^{r} p_2^{r} ....p_n^{r}$$

اگر قرار دهیم $A = p_1^{2\beta} p_2^{2\beta} ....p_n^{2\beta}$ و $B = p_1^{r} p_2^{r} ....p_n^{r}$ در اینصورت $n = AB$ که

در آن A مربع کامل است و B هیچ عامل مربع کامل ندارد.

کوچکترین مضرب مشترک (ک م م)

تعریف : فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند . کوچکترین مضرب مشترک آنها عدد مثبت m است وآنرا با نماد [a,b] نشان می دهیم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند .

الف- $a \mid m \quad , \quad b \mid m$

ب – اگر $b \mid c \quad , \quad a \mid c \quad , \quad c > 0$ در اینصورت $m \leq c$

قضیه : فرض کنیم a و b دو عدد طبیعی باشند که بصورت زیر به عوامل اول تجزیه شده باشند

$$a = p_1^{\alpha} p_2^{\alpha} \dots p_k^{\alpha} \quad , \quad b = p_1^{\beta} p_2^{\beta} \dots p_k^{\beta}$$

در اینصورت :

$$[a,b] = p_1^{\gamma} p_2^{\gamma} \dots p_k^{\gamma} \quad , \quad (a,b) = p_1^{\delta} p_2^{\delta} \dots p_k^{\delta}$$

که در آن :

$$\delta_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\} \quad , \quad \gamma_i = Max\{\alpha_i, \beta_i\}$$

مطالبی دیگر از (ب م م) و (ک م م)

دو عدد $a = 18 \quad , \quad b = 15$ را در نظر می گیریم. داریم : $(18,15) = 3$

و همچنین $\quad 15=5(3) \quad , \quad 18=6(3)$ و نیز $\quad (6,5)=1$

این مطلب در حالت کلی برقرار است یعنی اگر $(a,b)=d$ آنگاه a' و b' موجودند

که $\quad b=b'd \quad , \quad a=a'd \quad , \quad (a',b')=1$

نکته : اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $(a,b)=d$ در اینصورت :

1) $[a,b]=a'b'd$ $\qquad$ 2) $ab=a'b'd^2$

تذکر: از نکته ۲ می توان نتیجه گرفت : $ab=(a,b)[a,b]$

تمرین : چند جفت عدد طبیعی موجود است که ب م م آنها ۱۲ و ک م م آنها ۲۱۶ است؟

$$a'b'd=216 \Rightarrow 12a'b'=216 \Rightarrow a'b'=18$$

$$a'b'=18 \Rightarrow \begin{cases} a'=18 \\ b'=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} a'=9 \\ b'=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=216 \\ b=12 \end{cases} , \quad \begin{cases} a=108 \\ b=12 \end{cases}$$

بنابر این دو جفت عدد طبیعی با شرایط مساله موجود است.

تمرین : اعداد طبیعطی aو b را چنان مشخص کنید که ب م م آنها ۶ و حاصلضرب آنها ۸۶۴ باشد.

پاسخ : $a'b'd^2=864 \Rightarrow 36a'b'=864 \Rightarrow a'b'=24$

$$a'b'=24 \Rightarrow \begin{cases} a'=24 \\ b'=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} a'=8 \\ b'=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=144 \\ b=6 \end{cases} , \quad \begin{cases} a=48 \\ b=18 \end{cases}$$

تمرین : تفاضل دو عدد طبیعی ۳۰ و ک م م آنها ۵۰۴ است.آن دو عدد را مشخص کنید.

پاسخ :

$$\frac{a-b}{[a,b]}=\frac{30}{504}\Rightarrow\frac{(a'-b')d}{a'b'd}=\frac{5}{84}\Rightarrow\frac{(a'-b')}{a'b'}=\frac{5}{84}$$

$(5,504)=1 \quad , \quad (a'-b',a'b')=1$ پس

$$\begin{cases}a'-b'=5\\ a'b'=84\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}a'=12\\ b'=7\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}a=72\\ b=42\end{cases}$$

نکته : کسر $\frac{x}{y}$ را تحویل ناپذیر می نامیم هرگاه $(x,y)=1$

اگر دو کسر $\frac{x}{y}$ و $\frac{a}{b}$ تحویل نا پذیر باشند و $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ در اینصورت $x=a \quad , \quad y=b$

تمرین : برای اعداد طبیعی a و b ثابت کنید $(a+b,[a,b])=(a,b)$

اثبات :

$$(a,b)=d\Rightarrow(a',b')=1\Rightarrow(a'+b',a'b')=1\xrightarrow{\times d}(a'd+b'd,a'b'd)=d\Rightarrow(a+b,[a,b])=d$$

قضیه : فرض کنیم a و bدو عدد صحیح و حد اقل یکی از آنها مخالف صفر باشد. دراینصورت ب م م آنها عدد مثبت d هرگاه d در دو شرط زیر صدق کند:

الف - $d|a$ و $d|b$

ب -اگر $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c|d$

قضیه : فرض کنیم a و bدو عدد صحیح . دراینصورت ک م م آنها عدد مثبت m هرگاه m در دو شرط زیر صدق کند:

الف - $a|m$ و $b|m$

ب – اگر $a|c$ و $b|c$ آنگاه $c|m$

۱. مشخص نمودن توان عدد اول p در تجزیه n!

سوال : می دانیم $31! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times 30\times 31$ و در بین اعداد ۱ تا ۳۱ مضرب ۳ وجود دارد . آیا می توان نوشت :

۳۱!=۳^۱۰× (عددی فاقد عامل ۳)

پاسخ: خیر زیرا مضارب ۹ یک عامل ۳ اضافی دارند و همچنین مضارب ۲۷ دو عامل ۳

اضافی دارند بنا براین :

۳۱!=۳^(تعداد مضارب ۳ + تعداد مضارب ۹ + تعداد مضارب ۲۷) × (عامل فاقد ۳)

ملاحظه می کنیم اگر ۳۱ را به ۳ تقسیم کنیم تعداد مضارب ۳ و اگر آنرا به ۹ تقسیم کنیم تعداد مضارب ۹ و اگر آنرا به ۲۷ تقسیم تعدادمضارب ۲۷ مشخی میشوند.

$$\begin{array}{l} 31\,\underline{|3} \\ \quad 10\,\underline{|3} \\ \qquad 3\,\underline{|3} \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

۳۱!=۳^۱۴× (عامل فاقد ۳)

نکته : برای مشخص کردن توان عدد اول p در تجزیه !n به عوامل اول کافیست مجموع خارج قسمت های تقسیمات متوالی n بر p را مشخص کنیم.

تمرین: !۲۵ را به اعداد اول تجزیه کنید.

$$\begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{2} \\ \quad 12\,\lfloor\underline{2} \\ \qquad 6\,\lfloor\underline{2} \\ \qquad\quad 3\,\lfloor\underline{2} \\ \qquad\qquad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{3} \\ \quad 8\,\lfloor\underline{3} \\ \qquad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{5} \\ \quad 5\,\lfloor\underline{5} \\ \qquad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{7} \\ \quad 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{11} \\ \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{13} \\ \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{17} \\ \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{19} \\ \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25\,\lfloor\underline{23} \\ \quad 1 \end{array}$$

بنابر این $25!=2^{22}\times 3^{10}\times 5^{6}\times 7^{3}\times 11^{2}\times 13\times 17\times 19\times 23$

سوال : تعداد صفرها ی سمت راست عدد !۳۷ چقدر است؟

پاسخ:دقیقا به تعداد توان عدد ۵ در تجزیه !۳۷ به اعداد اول. زیرا تنها اعداد اولی که حاصلضرب آنها صفر تولید می کند ۲ و ۵ می باشند و مسلما تعداد ۲ها از تعداد ۵ ها بیشتر می باشد.

$$\begin{array}{l} 37\,\lfloor\underline{5} \\ \quad 7\,\lfloor\underline{5} \\ \qquad 1 \end{array}$$

پس !۳۷ در سمت راست هشت صفر دارد.

سوال: عدد $\frac{900!}{90!}+\frac{400!}{40!}$ چند رقم صفر در سمت راست دارد؟

واضح است تعداد صفرهای سمت راست عدد $\frac{900!}{90!}$ از تعداد صفر های $\frac{400!}{40!}$ بسیار بیشتر است . بنابراین تعداد صفرهای سمت راست عدد $\frac{900!}{90!}+\frac{400!}{40!}$ دقیقا با تعداد صفرهای سمت راست عدد $\frac{400!}{40!}$ برابر است.

برای تعین صفر های سمت راست عدد $\frac{400!}{40!}$ کافی است تعداد صفر های عدد !۴۰ را از تعداد ی صفر های !۴۰۰ کم کنیم.

$$40 \,\underline{|5} \quad 8 \,\underline{|5} \quad 1 \qquad\qquad 400 \,\underline{|5} \quad 80 \,\underline{|5} \quad 16 \,\underline{|5} \quad 3$$

پس $\dfrac{400!}{40!}+\dfrac{900!}{90!}$, ۹۰ صفر در سمت راست دارد.

همنهشتی

تعریف : عدد طبیعی n را در نظر می گیریم . دو عدد صحیح a و b را همنهشت به پیمانه n مینامیم هر گاه a-b مضرب n باشد. در اینصورت می نویسیم $a \overset{n}{\equiv} b$

بعبارت دیگر

$$a \overset{n}{\equiv} b \quad \Leftrightarrow \quad n \mid a-b$$

مثال : از آنجایی که تفاضل ۳۷ و ۲۲ مضرب ۳ , ۵ , ۱۵ می باشد در اینصورت رابطه های زیر را خواهیم داشت .

$$37 \overset{3}{\equiv} 22 \qquad 37 \overset{5}{\equiv} 22 \qquad 37 \overset{15}{\equiv} 22$$

تمرین : پنج عدد برای طرف دوم رابطه همنهشتی $43 \overset{5}{\equiv}$ مشخص کنید .

پاسخ : $43 \overset{5}{\equiv} 18 \qquad 43 \overset{5}{\equiv} -7 \qquad 43 \overset{5}{\equiv} -2 \qquad 43 \overset{5}{\equiv} 13 \qquad 43 \overset{5}{\equiv} 3$

نکته :

۱- اگر $a \overset{n}{\equiv} b$ در اینصورت $b \overset{n}{\equiv} a$

۲- برای هر عدد طبیعی n و هر عدد صحیح a واضح است $a \overset{n}{\equiv} a$

خواص همنهشتی

۱- اگر $a \overset{n}{\equiv} b$ در اینصورت برای هر عدد صحیح a و هر عدد طبیعی k :

الف_ $a \pm c \overset{n}{\equiv} b \pm c$ ب- $ac \overset{n}{\equiv} bc$ ج- $a^k \overset{n}{\equiv} b^k$

۲- اگر $a \overset{n}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ در اینصورت $a \overset{n}{\equiv} c$

۳- اگر $\begin{cases} a \overset{n}{\equiv} b \\ c \overset{n}{\equiv} d \end{cases}$ در اینصورت $\begin{cases} a \pm c \overset{n}{\equiv} b \pm d \\ ac \overset{n}{\equiv} bd \end{cases}$

سوال : عدد ۱۶۳ به پیمانه ۱۰ با چه اعدادی همنهشت است ؟

$$163 \overset{10}{\equiv} 3 \qquad 163 \overset{10}{\equiv} 13 \qquad 163 \overset{10}{\equiv} 63 \qquad 163 \overset{10}{\equiv} -7 \qquad 163 \overset{10}{\equiv} -17$$
$$163 \overset{10}{\equiv} 23 \qquad 163 \overset{10}{\equiv} -37 \qquad 163 \overset{10}{\equiv} 103$$

ملاحظه می شود ۱۶۳ با اعداد زیادی همنهشت می باشد اما مورد $163 \overset{10}{\equiv} 3$ از همه موارد جالب تر است زیرا سمت راست رقم یکان ۱۶۳ می باشد.

نکته :در همنهشتی به پیمانه ۱۰ طرف دوم رقم یکان طرف اول است . البته به شرط آنکه طرف دوم بزرگتر مساوی ۰ و کمتر از ۱۰ باشد.

تمرین : رقم یکان عدد $7^{251}+13$ را مشخص کنید .

پاسخ:

$$7^2 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow (7^2)^{125} \overset{10}{\equiv} (-1)^{125} \Rightarrow 7^{250} \overset{10}{\equiv} 1 \overset{\times 7}{\Rightarrow} 7^{251} \overset{10}{\equiv} -7$$
$$\Rightarrow 7^{251}+13 \overset{10}{\equiv} -7+13 \Rightarrow 7^{251}+13 \overset{10}{\equiv} 6$$

بنابر این رقم یکان $7^{251}+13$ عدد ۶ است.

تمرین : رقم یکان عدد $13^{87}+3$ را مشخص کنید.

پاسخ :

$$13 \overset{10}{\equiv} 3 \quad \Rightarrow \quad 13^{87} \overset{10}{\equiv} 3^{87}$$
$$3^2 \overset{10}{\equiv} -1 \quad \Rightarrow \quad (3^2)^{43} \overset{10}{\equiv} (-1)^{43} \quad \Rightarrow \quad 3^{86} \overset{10}{\equiv} -1 \quad \overset{\times 3}{\Longrightarrow} \quad 3^{87} \overset{10}{\equiv} -3 \quad \Rightarrow \quad 13^{87} \overset{10}{\equiv} -3$$
$$\Rightarrow \quad 13^{87}+3 \overset{10}{\equiv} 0$$

تذکر : معادله $x^2+5x+7=2$ را در نظر می گیریم . برای حل این معادله ابتدا عدد ۲ را به سمت چپ منتقل می کنیم و به ۲- تغییر می دهیم . در واقع مانند آن است که به دو طرف ۲- را اضافه کرده ایم(خواص تساوی). در همنهشتی نیز می توانیم یک عدد صحیح را به دو طرف اضافه کنیم .بنابر این در همنهشتی نیز می توانیم یک عدد را از یک طرف به طرف دیگر منتقل کرده و علامت را تغییر بدهیم.

سوال: عدد ۲۸ به پیمانه ۵ با چه اعدادی همنهشت است؟

$$28 \overset{5}{\equiv} 3 \qquad 28 \overset{5}{\equiv} 8 \qquad 28 \overset{5}{\equiv} 13 \qquad 28 \overset{5}{\equiv} -2 \qquad 28 \overset{5}{\equiv} -7$$

ملاحظه می شود ۲۸ به پیمانه ۵ بااعداد زیادی همنهشت است اما مورد $28 \overset{5}{\equiv} 3$ با بقیه متفاوت است . زیرا باقی مانده ۲۸ بر ۵ عدد ۳ می باشد.

نکته :در همنهشتی به پیمانه n طرف دوم باقی مانده تقسیم طرف اول بر پیمانه است . البته به شرط آنکه طرف دوم بزرگتر مساوی ۰ و کمتر از n باشد.

تمرین : باقی مانده تقسیم عدد $3^{85}+3^{86}$ را بر ۳۵ بدست آورید؟

$$3^3 \overset{35}{\equiv} -8 \quad \Rightarrow \quad 3^6 \overset{35}{\equiv} \cancel{64}^{-6} \quad \Rightarrow \quad 3^{12} \overset{35}{\equiv} \cancel{36}^{1}$$

$$\Rightarrow \quad 3^{12} \overset{35}{\equiv} 1 \quad \Rightarrow \quad (3^{12})^7 \overset{35}{\equiv} (1)^7 \quad \Rightarrow \quad 3^{84} \overset{35}{\equiv} 1 \quad \overset{\times 3}{\Rightarrow} \quad 3^{85} \overset{35}{\equiv} 3 \qquad (1)$$

$$3^{85} \overset{35}{\equiv} 3 \quad \overset{\times 3}{\Rightarrow} \quad 3^{86} \overset{35}{\equiv} 9 \qquad (2)$$

$$(1) \quad , \quad (2) \quad \Rightarrow 3^{85} + 3^{86} \overset{35}{\equiv} 12$$

تمرین : فرض کنیم $a^{97} \overset{10}{\equiv} -17$ و a یک عددطبیعی باشد در اینصورت رقم یکان عدد a^{97} را مشخص کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a^{97} \overset{10}{\equiv} -17 \\ 0 \overset{10}{\equiv} 20 \end{cases} \Rightarrow a^{97} + 0 \overset{10}{\equiv} 20 + (-17) \Rightarrow a^{97} \overset{10}{\equiv} 3$$

نکته : از آنجایی که مضارب پیمانه با صفر همنهشت می باشند اگر مضارب پیمانه را به یک طرف اضافه کنیم اشکالی ایجاد نمی شود .همچنین اگر عددی به پیمانه n با صفر همنهشت باشد حتما مضرب n است.

تذکر : در تعریف همنهشتی پیمانه عددی صحیح بود اما اگر پیمانه را عددی طبیعی فرض کنیم اشکالی ایجاد نمی شود. این مطلب قدرت ما را در حل مسائل بالا می برد.

تمرین:به ازاء چند عدد صحیح n , کسر $\dfrac{15n+14}{3n+2}$ صحیح می باشد ؟

پاسخ: کسر $\dfrac{15n+14}{3n+2}$ زمانی صحیح است که صورت مضرب مخرج باشد لذا:

$$15n + 14 \overset{3n+2}{\equiv} 0 \Rightarrow \cancel{15n+10}^{0} + 4 \overset{3n+2}{\equiv} 0 \Rightarrow 4 \overset{3n+2}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow \quad 3n+2 \mid 4 \Rightarrow 3n+2 = \pm 1 \ \text{یا} \ \pm 2 \ \text{یا} \ \pm 4$$

$\Rightarrow$ n=۱ یا ۰ یا -۲

تمرین:باقی مانده عدد روج a بر ۲۳ , ۲۰ است . باقی مانده $\frac{a}{2}$ را بر ۲۳ بدست آورید.

پاسخ: فرض کنیم a=۲k بنابراین $\frac{a}{2}=k$

$$2k\overset{23}{\equiv}17 \overset{\times 12}{\Rightarrow} \cancel{24}^{1}k\overset{23}{\equiv}\cancel{204}^{20} \Rightarrow k\overset{23}{\equiv}20$$

لذا باقیمانده $\frac{a}{2}$ بر ۲۳ عدد ۲۰ میباشد.

تمرین : اگر تاقی ماتده عدد فرد a بر ۲۵ برابر ۱۳ باشد باقیمانده $\frac{a-1}{2}$ بر ۲۳ را بدست آورید.

پاسخ: فرض کنیم a=۲k+۱ بنابراین $\frac{a-1}{2}=k$

$$2k+1\overset{25}{\equiv}13 \Rightarrow 2k\overset{25}{\equiv}12 \overset{\times 13}{\Rightarrow} 26k\overset{25}{\equiv}156 \Rightarrow k\overset{25}{\equiv}6$$

نکته(تغییر پیمانه) :برای عدد طبیعی k از رابطه $a\overset{n}{\equiv}b$ رابطه $ak\overset{nk}{\equiv}bk$ را می توان نتیجه گرفت. همچنین اگر $a\overset{n}{\equiv}b$ و $k\,|\,n$ آنگاه $a\overset{k}{\equiv}b$

تمرین : باقیمانده عدد a بر ۹ و ۶ بترتیب ۲ و ۵ می باشد . باقیمانده a را بر ۱۸ بدست آورید.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{9}{\equiv}2 \overset{\times 2}{\Rightarrow} 2a\overset{18}{\equiv}4 \\ a\overset{6}{\equiv}5 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3a\overset{18}{\equiv}15 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-2a\overset{18}{\equiv}11 \Rightarrow a\overset{18}{\equiv}11$$

یعنی باقیمانده a بر ۱۸ برابر ۱۱ می باشد.

تمرین : اگر باقیمانده a بر ۱۲ برابر ۸ باشد باقیمانده ۵a+۲ بر ۳ را بدست آورید.

پاسخ:
$$a \overset{12}{\equiv} 8 \xRightarrow{3|12} a \overset{3}{\equiv} 8 \Rightarrow a \overset{3}{\equiv} 2 \xRightarrow{\times 5} 5a \overset{5\times 3}{\equiv} 10 \xRightarrow{+2} 5a+2 \overset{5\times 3}{\equiv} 12$$

تست ۷ (سراسری ۷۵):باقیمانده تقسیم عدد a بر ۲۹ , برابر ۱۲ است. اگر a+۱۷ مضرب ۲۱ باشد رقم وسط کوچکترین عدد a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ :گزینه ۴

$$a \overset{29}{\equiv} \cancel{12}^{\,-17} \Rightarrow a \overset{29}{\equiv} -17 \Rightarrow\Rightarrow a+17 \overset{29}{\equiv} 0$$
$$a+17 \overset{21}{\equiv} 0$$

بنابر این a+۱۷ مضرب ۲۱ و ۲۹ میباشد لذا کوچکترین a+۱۷ ک م م ۲۱ و ۲۹ است.

$[21,29]=21\times 29=609 \Rightarrow a$ کوچکترین =۶۰۹-۱۷=۵۹۲

تست ۸: اگر باقیمانده اعداد ۱۳۳و ۵۶ بر عدد $1<b<20\,,b$ برابر باشند دراینصورت باقیمانده ۱۵۰ بر b کدام است؟

۱)۳یا ۵ ۲)۳یا ۷ ۳)۲یا ۵ ۴)۲یا ۷

پاسخ : گزینه ۲

$$\begin{array}{l} 133 \overset{b}{\equiv} r \\ 56 \overset{b}{\equiv} r \end{array} \Rightarrow 133 \overset{b}{\equiv} 56 \Rightarrow 133-56 \overset{b}{\equiv} 0 \Rightarrow 77 \overset{b}{\equiv} 0 \Rightarrow b|77$$

$b|77 \xRightarrow{1<b<20} b=7$ یا ۱۱

$$150 \overset{7}{\equiv} 3 \quad , \quad 150 \overset{11}{\equiv} 7$$

چند نکته

تابع حسابی :هر تابع $f : N \rightarrow R$ را یک تابع حسابی می نامیم.

تابع ضربی: تابع ضربی f که در شرایط زیر صدق میکند را تابع حسابی می نامند .

$$f_{(ab)} = f_{(a)} f_{(b)}$$
$$(a,b) = 1$$

نکته : اگر تابع f ضربی باشد و اعداد a_1 a_2 a_3 ,..., a_n دوبدو نسبت به هم اول باشند آنگاه :

$$f_{(a\,a\ \ldots.\,a)} = f_{(a)} f_{(a)} \ldots. f_{(a)}$$

تابع $\varphi -$ اویلر :تابعی است که به هر عدد طبیعی n (بزرگتر از ۱) تعداد اعداد طبیعی کوچکتر n که نسبت به n اولند را نسبت می دهد.

مثال : $\varphi_{(8)}$ و $\varphi_{(10)}$ راحساب کنید.

$$1,\cancel{2},3,\cancel{4},5,\cancel{6},7,\cancel{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{(8)} = 4$$
$$1,\cancel{2},3,\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},7,\cancel{8},9,\cancel{10} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{(10)} = 4$$

تمرین : $\varphi_{(7)}$ و $\varphi_{(11)}$ راحساب کنید.

$$1,2,3,4,5,6,\cancel{7} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{(7)} = 6$$
$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\cancel{11} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{(11)} = 10$$

نکته : برای عدد اول p , $\varphi_{(p)}$

قضیه : تابع $\varphi -$ اویلر یک تابع ضربی است.

تمرین : $\varphi_{(10)}$ و $\varphi_{(15)}$و $\varphi_{(30)}$و $\varphi_{(42)}$ راحساب کنید.

$$\varphi_{(10)} = \varphi_{(2\times5)} = \varphi_{(2)}\varphi_{(5)} = (2-1)(5-1) = 4$$
$$\varphi_{(15)} = \varphi_{(3\times5)} = \varphi_{(3)}\varphi_{(5)} = (3-1)(5-1) = 8$$
$$\varphi_{(30)} = \varphi_{(2\times3\times5)} = \varphi_{(2)}\varphi_{(3)}\varphi_{(5)} = (2-1)(3-1)(5-1) = 8$$
$$\varphi_{(42)} = \varphi_{(2\times3\times7)} = \varphi_{(2)}\varphi_{(3)}\varphi_{(7)} = (2-1)(3-1)(7-1) = 12$$

تمرین : $\varphi(3^4)$ راحساب کنید.

پاسخ: اعداد ۱ تا ۸۱ را در نظر میگیریم. مضارب ۳ را کنار می گذاریم . تعداد اعداد باقیمانده همان $\varphi(3^4)$ می باشد.

$$\varphi(3^4) = 81-\frac{81}{3} = 3^4 - 3^3$$

نکته : برای عدد اول p و عدد طبیعی α :

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

تمرین : $\varphi_{(25)}$ و $\varphi_{(12)}$ و $\varphi_{(100)}$ راحساب کنید.

$$\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5^2 - 5 = 20$$
$$\varphi(12) = \varphi(3\times 2^2) = (3-1)(2^2-2) = 4$$
$$\varphi(100) = \varphi(5^2\times 2^2) = (5^2-5)(2^2-2) = 40$$

قضیه اویلر:فرض کنیم a یک عدد صحیح و n یک عدد طبیغی باشد و ۱=(n,a)

در اینصورت : $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1$

قضیه فرما : فرض کنیم a یک عدد صحیح و p یک عدد یک عدد اول باشد و $p\nmid a$ دراینصورت: $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

تذکر: قضیه فرما حالت خاصی از قضیه اویلر است.

تمرین: باقی مانده ۱۷+۳^{۱۲۲} را بر ۳۵ بدست آورید.

$$(3,35)=1 \Rightarrow 3^{\varphi(35)} \overset{35}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{(5-1)(7-1)} \overset{35}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{24} \overset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^{24})^5 \overset{35}{\equiv} (1)^5 \Rightarrow 3^{120} \overset{35}{\equiv} 1$$
$$\overset{\times 9}{\Rightarrow} 3^{122} \overset{35}{\equiv} 9 \overset{+17}{\Rightarrow} 3^{122} + 17 \overset{35}{\equiv} 26$$

بنابراین باقی مانده ۱۷+۳^{۱۲۲} بر ۳۵ برابر ۶ می باشد.

تست ۹ : باقی مانده $1+2^{41}+3^{51}+4^{61}+5^{71}+6^{81}$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ : گزینه ۴

$$(2,11)=1 \Rightarrow 3^{\varphi(11)} \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{10} \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^{10})^4 \overset{11}{\equiv} (1)^4 \quad 2^{40} \overset{11}{\equiv} 1 \overset{\times 2}{\Rightarrow} 2^{41} \overset{11}{\equiv} 2$$

مشابها $3^{51} \overset{11}{\equiv} 3$ و $4^{61} \overset{11}{\equiv} 4$ و $5^{71} \overset{11}{\equiv} 5$ و $6^{81} \overset{11}{\equiv} 6$ لذا:

$$1+2^{41}+3^{51}+4^{61}+5^{71}+6^{81} \overset{11}{\equiv} 1+2+3+4+5+6 \overset{11}{\equiv} 10$$

تقسیم طرفین همنهشتی بر یک عدد

قبلا دیدیم از رابطه همنهشتی $a \overset{n}{\equiv} b$ میتوان رابطه $ac \overset{n}{\equiv} bc$ را برای هر عدد صحیح c نتیجه گرفت.آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ یعنی از رابطه $ac \overset{n}{\equiv} bc$ می توان نتیجه گرفت $a \overset{n}{\equiv} b$

پاسخ: خیر . به طور مثال $6\times 2 \overset{9}{\equiv} 6\times 5$ اما $2 \overset{9}{\not\equiv} 5$

با وجود منفی بودن پاسخ سوال بالا ما قضیه زیر را برای تقسیم دو طزف یک همنهشتی بر یک عدد را داریم.

قضیه : اگر $ac \overset{n}{\equiv} bc$ دراینصورت $a \overset{\frac{n}{d}}{\equiv} b$ که در آن $d=(c,n)$

اثبات:

$$(n,c)=d \Rightarrow (\frac{n}{d},\frac{c}{d})=1$$

$$ac \overset{n}{\equiv} bc \Rightarrow \exists k \in Z : ac-bc=kn \Rightarrow c(a-b)=kn \Rightarrow \frac{c}{d}(a-b)=k\frac{n}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{d} \Big| \frac{c}{d}(a-b) \overset{(\frac{n}{d},\frac{c}{d})=1}{\Rightarrow} \frac{n}{d} \Big| (a-b) \Rightarrow \quad a \overset{\frac{n}{d}}{\equiv} b$$

تمرین : اگر باقیمانده ۱+۱۸a بر ۱۴ برابر ۱۳ باشد در اینصورت باقی مانده ۳a+۴ بر عدد ۷ را بدست آورید.

پاسخ: $$18a+1\overset{14}{\equiv}13\Rightarrow 18a\overset{14}{\equiv}12\overset{\div 6}{\Rightarrow}\ 3a\overset{\frac{14}{2}}{\equiv}2\Rightarrow 3a\overset{7}{\equiv}2\Rightarrow 3a+4\overset{7}{\equiv}6$$

نکته : اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m\overset{4}{\equiv}n$ در اینصورت برای هر عدد طبیعی a رقم یکان a^m و رقم یکان a^n برابرند .بعبارت دیگر $a^m\overset{10}{\equiv}a^n$

تست ۱۱ (سراسری ۶۵): رقم یکان $۱+۲^{۱۰۱}+۳^{۱۰۱}+۴^{۱۰۱}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ۱

$$101\overset{4}{\equiv}1\Rightarrow 2^{101}\overset{10}{\equiv}2\quad ,\quad 3^{101}\overset{10}{\equiv}3\quad ,\quad 4^{101}\overset{10}{\equiv}4$$
$$\Rightarrow 1+2^{101}+3^{101}+4^{101}\overset{10}{\equiv}1=2+3+4\overset{10}{\equiv}0$$

تست ۱۲ :عدد $9^{(9^9+1)}$ به کدام رقم ختم می شود؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ:گزینه ۱

$$9\overset{4}{\equiv}1\Rightarrow 9^9\overset{4}{\equiv}1\Rightarrow 9^9+1\overset{4}{\equiv}2\Rightarrow$$
$$9^{(9^9+1)}\overset{10}{\equiv}9^2\overset{10}{\equiv}1$$

معادله سیاله

مساله : مغازه داری تعدادی کیسه برنج به وزن ۵ کیلو گرم و تعدادی دیگر به وزن ۴ کیلو گرم دارد. اگر وزن کیسه ها روی هم ۵۱ کیلو گرم باشد او از هر کدام چند کیسه دارد؟

پاسخ: تعداد کیسه های به وزن ۴ کیلو گرم:x

تعداد کیسه های به وزن ۵ کیلو گرم:y

بنا براین معادله دو مجهولی ۴x+۵y=۵۱ را خواهیم داشت .

$x=1 \Rightarrow y=9/4$ غ ق ق

$x=2 \Rightarrow y=8/6$ غ ق ق

$x=3 \Rightarrow y=7/8$ غ ق ق

$x=4 \Rightarrow y=7$ ق ق

$x=5 \Rightarrow y=6/2$ غ ق ق

$x=6 \Rightarrow y=5/4$ غ ق ق

$x=7 \Rightarrow y=4/6$ غ ق ق

$x=8 \Rightarrow y=3/8$ غ ق ق

$x=9 \Rightarrow y=3$ ق ق

ملاحظه می شود این مغازه دار ممکن است" ۴ کیسه ۴ کیلو گرمی و ۷ کیسه ۵ کیلو گرمی" داشته و یا اینکه " ۹ کیسه ۴ کیلو گرمی و ۳ کیسه۵ کیلو گرمی" داشته باشد .

البته اگر y=۱۱ آنگاه x=-۱ که این جواب قابل قبول نیست .اما به نوعی می توان تعبیری برای آن در نظر گرفت . مثلا این مغازه دار ۱۱ کیسه ۵ کیلو گرمی در مغازه موجود دارد و یک کیسه ۴ کیلو گرمی بدهکار است.

تعریف : هر معادله به صورت ax+by=c که در آن a و b و c اعداد صحیح می باشند را یک معادله سیاله دو متغیره خطی می نامیم.

جوابهای معادله سیاله ax+by=c

اعداد صحیح x_0 و y_0 که در معادله صدق می کنند را یک جواب معادله سیاله ax+by=c مینامند.

مثال : ۴x+۵y=۵۱ یک معادله سیاله است که $\begin{cases} x_0=4 \\ y_0=7 \end{cases}$ یک جواب آن است.

سوال : آیا معادله سیاله ax+by=c همواره جواب دارد ؟

پاسخ : خیر . مثلا معادله سیاله ۴x+۶y=۵۱ فاقد جواب است زیرا سمت چپ زوج است در حالی که سمت راست فرد است. همچنین معادله سیاله ۳x+۶y=۲۲ فاقد جواب است زیرا سمت چپ مضرب ۳ است در حالی که سمت راست مضرب ۳ نیست.

قضیه : معادله سیاله ax+by=c دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,b)|c$

اثبات: قرار میدهیم (a,b)=d . ابتدا فرض کنیم $d|c$ ثابت می کنیم معادله دارای جواب است .

$$d|c \Rightarrow \exists k \in Z : c = kd$$

$$(a,b)=d \Rightarrow \exists m,n \in Z : ma+nb=d \overset{\times k}{\Rightarrow} mka+nkb=kd \Rightarrow mka+nkb=c \Rightarrow a(mk)+b(nk)=c$$

بنابر این معادله دارای جواب $\begin{cases} x_0 = mk \\ y_0 = nk \end{cases}$ است.

برعکس: اینک فرض کنیم معادله دارای جواب صحیح $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ باشد.

جواب معادله $y_0, x_0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = c$

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow d|ax_0+by_0 \quad \Rightarrow d|c$$

و حکم ثابت می شود.

تعین جوابهای معادله سیاله

تمرین : معادله سیاله ۴x+۵y =۵۱ را در نظر می گیریم . اولا جوابهای کلی معادله ثانیا ۴ جواب خصوصی آنرا مشخص کنید.

پاسخ: $4x+5y=51 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{51-5y}{4}$

در اینجا x را بدست آورده ایم اما برای ما قابل قبول نیست.زیرا باید شکل بدست آمده به فرم صحیح باشد بنابراین:

$$x=\frac{51-5y}{4} \quad \Rightarrow x=\frac{52-4y-1-y}{4} \Rightarrow x=13-y-\frac{y+1}{4}$$

در اینجا باید y+۱ مضرب ۴ باشد.

$$y+1=4k \qquad (k\in Z) \qquad \Rightarrow \boxed{y=4k-1}$$

Y به فرم صحیح بدست آمده است. حال y بدست آمده را در رابطه $x=13-y-\frac{y+1}{4}$

قرار می دهیم.

$$x=13-(4k-1)-k \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-5k+14}$$

برای تعین جوابهای خصوصی مقادیری را به k اختصاص میدهیم.

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=14\\ y_1=-1\end{cases} \qquad k=1\Rightarrow\begin{cases}x_2=9\\ y_2=3\end{cases} \qquad k=-1\Rightarrow\begin{cases}x_3=19\\ y_3=-5\end{cases} \qquad k=2\Rightarrow\begin{cases}x_4=4\\ y_4=7\end{cases}$$

تمرین: جوابهای کلی معادله سیاله ۱۳x+۱۷y=۱۰۰ را بدست آورید.

پاسخ: $x=\frac{100-17y}{13}\Rightarrow x=\frac{104-4-13y-4y}{13}\Rightarrow x=8-y-\frac{4+4y}{13}\Rightarrow 4+4y=13k$

$4+4y=13k$ خود یک معادله سیاله است. فعلا این معادله سیاله را حل می کنیم.

$$4y=13k-4\Rightarrow y=\frac{12k+k-4}{4}\Rightarrow y=3k-1+\frac{k}{4}\Rightarrow k=4m \qquad (m\in Z)$$

$$\Rightarrow y=3(4m)-1+m\Rightarrow \boxed{y=13m-1}$$

$$x=8-(13m-1)-4m\Rightarrow \boxed{x=-17m+9}$$

روش دوم(استفاده از همنهشتی) :

$$13x+17y=100\Rightarrow 13x\overset{17}{\equiv}100\Rightarrow -4x\overset{17}{\equiv}-2\overset{\times 4}{\Rightarrow}-16x\overset{17}{\equiv}-8\Rightarrow x\overset{17}{\equiv}-8\Rightarrow \boxed{x=17k-8}$$

این مقدار بدست آمده را در معادله اصلی قرار می دهیم.

$$13(17k-8)+17y=100 \Rightarrow 17y=204-13(17k)$$
$$\Rightarrow \boxed{y=-13k+12}$$

تذکر : در روش اول ما به جواب $\begin{cases} x=-17m+9 \\ y=13m-1 \end{cases}$ و در روش دوم به جواب $\begin{cases} x=17k-8 \\ y=-13k+12 \end{cases}$ رسیدیم . این

دو جواب در ظاهر با هم متفاوت می باشند ام در اصل یکسان می باشند. مثلا اگر در شکل اول به جای m عدد ۰ را قرار

دهیم به جواب رسیدیم $\begin{cases} x_0=9 \\ y_0=-1 \end{cases}$ میزسیم. حال اگر در شکل دوم جواب به جای k عدد ۱ باز هم به همان جواب

$\begin{cases} x_0=9 \\ y_0=-1 \end{cases}$ میرسیم.

تمرین: ثابت کنید اگر .x و .y یک جواب خصوصی معادله سیاله ax+by=c باشدآنگاه

جوابهای کلی معادله بصورت $\begin{cases} x=x_0+\frac{b}{d}k \\ y=y_0-\frac{a}{d}k \end{cases}$ می باشد که در آن (a,b)=d .

اثبات: فرض کنیم .x و .y یک جواب دیگر معادله باشد .ثابت می کنیم $\begin{cases} x_1=x_0+\frac{b}{d}k \\ y_1=y_0-\frac{a}{d}k \end{cases}$

$\Rightarrow ax_0+by_0=c$ .x و .y یک جواب معادله است .

$\Rightarrow ax_1+by_1=c$ x۱ و y۱ یک جواب معادله است.

بنابراین $ax_1+by_1=ax_0+by_0$ لذا $ax_1-ax_0=by_0-by_1$

$$ax_1-ax_0=by_0-by_1 \Rightarrow a(x_1-x_1)=b(y_0-y_1) \overset{\div d}{\Rightarrow} \frac{a}{d}(x_1-x_0)=\frac{b}{d}(y_0-y_1)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{d}\Big|\frac{a}{d}(x_1-x_0) \overset{(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1}{\Rightarrow} \frac{b}{d}\Big|(x_1-x_0) \quad \Rightarrow \exists k\in Z \Rightarrow x_1-x_0=\frac{b}{d}k \quad \Rightarrow x_1=x_0+\frac{b}{d}k$$

اکنون اگر $x_1=x_0+\frac{b}{d}k$ را در رابطه $ax_1+by_1=ax_0+by_0$ خواهیم داشت $y_1=y_0-\frac{a}{d}k$

تمرین: با استفاده از تمرین قبل جوابهای کلی معادله سیاله ۷x+۲y=۱۱ را بدست آورید.

پاسخ: واظح است که x.=۲ , y.=-۲ یک جواب برای معادله می باشد . پس جوابهای کلی معادله بصورت $\begin{cases} x=2+2k \\ y=-2-7k \end{cases}$ می باشد.

تمرینهای فصل دوم

۱- به وسیله استقرا ثابت کنید $9 \mid 2^{2n}+15n+8 \quad , \quad (n\in N)$

اثبات: حکم برای n=۱ بدیهی است(شروع استقرا).زیرا $2^{2(1)}+15(1)+8=27$ و $9 \mid 27$

فرض کنیم حکم برای n=k درست باشد(فرض استقرا). حکم را برای n=k+۱ ثابت میکنیم (حکم استقرا).یعنی باید ثابت کنیم $9 \mid 4^{k+1}+15(k+1)+8$

فرظ استقرا $\Rightarrow 4^k+15k+8=9q$

$$4^{k+1}+15(k+1)+8=4(9q-15k-8)+15k+23=36q-45k-9=9(4q-5k-1)=9q'$$

پس $9 \mid 4^{k+1}+15(k+1)+8$ یعنی حکم استقرا درست است لذا حکم مساله درست می باشد.

۲- اگر n یک عدد طبیعی باشد ثابت کنید $72 \mid 8^n+9^n-17^n$

اثبات:

$$(a+b)^n-(a^n+b^n)=\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+....+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^n-(a^n+b^n)=kab \quad \Rightarrow \quad (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} (a^n+b^n)$$

حال مقادیر a=۸ و b=۹ را در رابطه بالا جایگزین می کنیم.

$$(8+9)^n \overset{8\times 9}{\equiv} (8^n+9^n) \Rightarrow 17^n \overset{72}{\equiv} (8^n+9^n) \Rightarrow 72 \mid 8^n+9^n-17^n$$

۳- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $100 \mid 7^{n+2}+7^n-50$

اثبات:

$$7^{n+2}+7^n-50 \overset{4}{\equiv} (-1)^{n+2}+(-1)^n-2=(-1)^2(-1)^n+(-1)^n-2$$

$$\Rightarrow 7^{n+2}+7^n-50 \overset{4}{\equiv} 2(-1)^n-2 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 4 \mid 7^{n+2}+7^n-50 \qquad (1)$$

$$7^{n+2}+7^n-50=7^n(7^2+1)-50=50(7^n-1) \Rightarrow 25 \mid 7^{n+2}+7^n-50 \qquad (2)$$

$$(2),(1) \quad \Rightarrow 100 \mid 7^{n+2}+7^n-50$$

۴- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \overset{13}{\equiv} 0$

اثبات:

$$3^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{6n} \overset{13}{\equiv} 1 \overset{\times 9}{\Rightarrow} 3^{6n+2} \overset{13}{\equiv} 9 \qquad (1)$$

$$3^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{3n} \overset{13}{\equiv} 1 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3^{3n+1} \overset{13}{\equiv} 3 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 3^{6n+2}+3^{3n+1} \overset{13}{\equiv} 9+3 \overset{+1}{\Rightarrow} 3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \equiv 13 \Rightarrow 3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \overset{13}{\equiv} 0$$

۵- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $6^{3n-1}+7 \overset{43}{\equiv} 0$

اثبات:حکم برای n=۱ بدیهی است زیرا $6^{3(1)-1}+7=43$

اکنون فرض کنیم n>۱ بنابر این عدد طبیعی m موجود است که n=m+۱ لذا برای هر عدد طبیعی m باید ثابت کنیم

$6^{3(m+1)-1}+7 \overset{43}{\equiv} 0$ بعبارت دیگر برای هر عدد طبیعی m ثابت کنیم $6^{3m+2}+7 \overset{43}{\equiv} 0$

$$6^2 \overset{43}{\equiv} -7 \overset{\times 6}{\Rightarrow} 6^3 \overset{43}{\equiv} -42 \Rightarrow 6^3 \overset{43}{\equiv} 1 \Rightarrow 6^{3n} \overset{43}{\equiv} 1 \overset{\times 36}{\Rightarrow} 6^{3n+2} \overset{43}{\equiv} 36 \Rightarrow 6^{3n+2} \overset{43}{\equiv} -7 \Rightarrow 6^{3n+2}+7 \overset{43}{\equiv} 0$$

۶- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $3^{2n+2}-2^{4n+4}\overset{7}{\equiv}0$

اثبات:

$$3\overset{7}{\equiv}-4\Rightarrow 3^{2n+2}\overset{7}{\equiv}(-4)^{2n+2}\Rightarrow 3^{2n+2}\overset{7}{\equiv}4^{2n+2}\Rightarrow 3^{2n+2}\overset{7}{\equiv}(2^2)^{2n+2}\Rightarrow 3^{2n+2}\overset{7}{\equiv}2^{4n+4}\Rightarrow 3^{2n+2}-2^{4n+4}\overset{7}{\equiv}0$$

۷- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $10^{9n}+10^{6n}-10^{3n}+12\overset{13}{\equiv}0$

اثبات :

$$10\overset{13}{\equiv}-3\Rightarrow 10^3\overset{13}{\equiv}-27\Rightarrow 10^3\overset{13}{\equiv}-1\Rightarrow 10^{3n}\overset{13}{\equiv}(-1)^n \qquad (1)$$

$$10^{3n}\overset{13}{\equiv}(-1)\Rightarrow 10^{6n}\overset{13}{\equiv}1 \qquad (2)$$

$$10^{3n}\overset{13}{\equiv}(-1)\Rightarrow 10^{9n}\overset{13}{\equiv}(-1)^n \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3)\Rightarrow 10^{9n}+10^{6n}-10^{3n}\overset{13}{\equiv}1\Rightarrow 10^{9n}+10^{6n}-10^{3n}+12\overset{13}{\equiv}13\Rightarrow 10^{9n}+10^{6n}-10^{3n}+12\overset{13}{\equiv}0$$

۸- باقی مانده $2^{2(18n+1)}+10^{n+1}+4$ را بر ۹ را پیدا کنید. $(n\in N)$

اثبات :

$$2^3\overset{9}{\equiv}-1\Rightarrow (2^3)^6\overset{9}{\equiv}(-1)^6\Rightarrow 2^{18}\overset{9}{\equiv}1\Rightarrow 2^{18n}\overset{9}{\equiv}1\overset{\times 2}{\Rightarrow}2^{18n+1}\overset{9}{\equiv}2\Rightarrow(2^{18n+1})^2\overset{9}{\equiv}(2)^2$$

$$\Rightarrow 2^{2(18n+1)}\overset{9}{\equiv}4 \qquad (1)$$

$$10\overset{9}{\equiv}1\Rightarrow 10^{n+1}\overset{9}{\equiv}1 \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow 2^{2(18n+1)}+10^{n+1}\overset{9}{\equiv}4+1\overset{+4}{\Rightarrow}2^{2(18n+1)}+10^{n+1}+4\overset{9}{\equiv}9\overset{9}{\equiv}0$$

۹- جوابهای کلی معادله همنهشتی $9x\overset{17}{\equiv}1$ را بدست آورید.

پاسخ: $9x \overset{17}{\equiv} 1 \overset{\times 2}{\Rightarrow} \cancel{18}^{1} x \overset{17}{\equiv} 2 \Rightarrow x \overset{17}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 17k + 2$

۱۰- ثابت کنید معادله $x^2 + y^2 = 1387$ در Z جواب ندارد.

پاسخ: عدد ۱۳۸۷ بصورت ۴q+۳ است.

$$x \text{ و } y \text{ فرد} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4k + 2$$

$$x \text{ و } y \text{ زوج} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4k$$

$$x \text{ و } y \text{ یکی فرد و یکی زوج} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4k + 1$$

بنابر این سمت چپ و راست هرگز برابر نمی باشند.

۱۱- اگر $(b,4) = (a,4) = 2$ ثابت کنید $(a+4) = 4$.

اثبات: فرض کنیم $a = 4q + r$, $0 \le r < 4$ بنابراین :

$$(a+b,4) = 2 \Rightarrow (\cancel{4q} + r,4) = 2 \Rightarrow (r,4) = 2 \Rightarrow 2|r \Rightarrow r = 0 \text{ یا } r=2$$

اما r نمی تواند برابر با ۲ باشد زیرا $(0,4) \neq 2$ بنابر این r=۲ پس $a = 4q + 2$ و مشابها $b = 4q' + 2$

$$(a+b,4) = (\cancel{4q} + 2 + \cancel{4q'} + 2,4) = (4,4) = 4$$

۱۲- اگر $(a,b) = 1$ ثابت کنید $(a^2 - b^2, ab) = 1$

$$\begin{matrix} (a,b) = 1 \Rightarrow (a+b,ab) = 1 \\ (a,b) = 1 \Rightarrow (a-b,ab) = 1 \end{matrix} \Rightarrow ([a+b][a-b],ab) = 1 \Rightarrow (a^2 - b^2, ab) = 1$$

۱۳- دو عدد طبیعی a و b را چنان تعین کنید که ۲=(a,b) و $80[a,b] = 21(a^2 - b^2)$

پاسخ:

$$80a'b'd = 21(a'^2d^2 - b'^2d^2) \Rightarrow 80a'b' = 21(a'^2 - b'^2)d \Rightarrow 80a'b' = 42(a'^2 - b'^2)$$

$$\Rightarrow \frac{a'^2 - b'^2}{a'b'} = \frac{80}{42} \Rightarrow \frac{a'^2 - b'^2}{a'b'} = \frac{40}{21} \Rightarrow \begin{cases} a'^2 - b'^2 = 40 \\ a'b' = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 7 \\ b' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 6 \end{cases}$$

۱۴- برای دو عدد طبیعی a و b فرض کنید $c = [a,b]$ و $\frac{a}{b} = \frac{9}{13}$ و $ab + c = 12$, دراینصورت a و b را بیابید.

پاسخ:

$$\frac{a'd}{b'd} = \frac{9}{13} \Rightarrow \begin{cases} a' = 9 \\ b' = 13 \end{cases} \Rightarrow a'b' = 117$$

$$ab + c = 12 \times 117 \Rightarrow a'b'd^2 + a'b'd = 12 \times 117 \Rightarrow 117d^2 + 117d = 12 \times 117 \Rightarrow d^2 + d - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (d-3)(d+4) = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = a'd = 27 \\ b = b'd = 39 \end{cases}$$

۱۵- اگر $a \mid c$ و $b \mid c$ و ۱=(a,b) ثابت کنید $ab \mid c$

اثبات:

$$a \mid c \Rightarrow \exists k \in Z : c = ka$$

$$b \mid c \Rightarrow \exists k' \in Z : c = k'b$$

$$(a,b) = 1 \Rightarrow \exists m,n \in Z : ma + nb = 1$$

$$ma + nb = 1 \overset{\times c}{\Rightarrow} mac + nbc = c \Rightarrow mak'b + nbka = c \Rightarrow ab(mk' + nk) = c \Rightarrow ab \mid c$$

۱۶- اگر ۱=(a,۱۳) و ۱=(b,۱۳) ثابت کنید $13 \mid a^{24} - b^{24}$

اثبات:

$$(a,13) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(13)} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (a^{12})^2 \overset{13}{\equiv} (1)^2 \Rightarrow a^{24} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$(b,13) = 1 \Rightarrow b^{\varphi(13)} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow b^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (b^{12})^2 \overset{13}{\equiv} (1)^2 \Rightarrow b^{24} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow a^{24} - b^{24} \overset{13}{\equiv} 1 - 1 \Rightarrow a^{24} - b^{24} \overset{13}{\equiv} 0 \Rightarrow 13 \mid a^{24} - b^{24}$$

۱۸- دو عدد طبیعی a وb را چنان مشخص کنید که داشته باشیم:

$$\frac{[a,b]}{(a,b)} - 2 = a - b \quad , \quad a + b = 5(a,b)$$

پاسخ:
$$\begin{cases}\dfrac{a'b'd}{d}-2=a'd-b'd\\ a'd+b'd=5d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a'b'-2=(a'-b')d\\ a'+b'=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=\dfrac{a'b'-2}{a'-b'}\\ a'+b'=5\end{cases}$$

حال از رابطه $a'+b'=5$ با توجه به اینکه a' و b' نسبت به هم اولند داریم :

$\begin{cases}a'=4\\ b'=1\end{cases}$ یا $\begin{cases}a'=3\\ b'=2\end{cases}$ یا $\begin{cases}a'=2\\ b'=3\end{cases}$ یا $\begin{cases}a'=1\\ b'=4\end{cases}$ که از هرکدام به ترتیب نتیجه میشود $d=\dfrac{2}{3}$ یا

$d=4$ یا $d=-4$ یا $d=-\dfrac{2}{3}$ که تنها جواب قاتل قبول $d=4$ میباشد.بنابراین $\begin{cases}a=12\\ b=8\end{cases}$

۱۹- اگر a و b و c مضرب ۷ نباشند باقی مانده $a^{۱۳۸۶}+b^{۱۳۸۶}+c^{۱۳۸۶}$ را بر ۷ بدست آورید.

پاسخ: $a^{1386}\overset{7}{\equiv}1 \Rightarrow (a^6)^{231}\overset{7}{\equiv}(1)^{231} \Rightarrow a^6\overset{7}{\equiv}1 \Rightarrow a^{7-1}\overset{7}{\equiv}1 \Rightarrow (a,7)=1$ مشابها $b^{1386}\overset{7}{\equiv}1$ و

$c^{1386}\overset{7}{\equiv}1$ بنابراین $a^{1386}+b^{1386}+c^{1386}\overset{7}{\equiv}3$

۲۰- ثابت کنید اگر $3a+6b-4\overset{17}{\equiv}0$ در اینصورت $7a-3b+2\overset{17}{\equiv}0$

اثبات: $3a+6b-4\overset{17}{\equiv}0\overset{\times 8}{\Rightarrow}\cancel{24}^{\,7}a+\cancel{48}^{\,-3}b-\cancel{32}^{\,+2}\overset{17}{\equiv}0\Rightarrow 7a-3b+2\overset{17}{\equiv}0$