تاریخ: ۲۹ دی ۱۳۷۹
وقت: ۳ ساعت

به نام خدا

آزمون نهایی ریاضی عمومی ۱

۱ـ انتگرال نامعین زیر را پیدا کنید.

$$I = \int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx$$

(۲/۵ نمره)

۲ـ در همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر بحث کنید:

$$\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$$

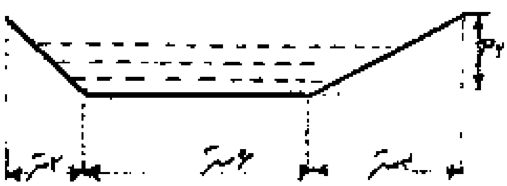
(۲/۵ نمره)

۳ـ فرض کنید

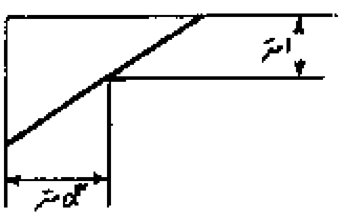
$$L(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \qquad , \qquad F(x) = \int_{\ln\sqrt{2}}^x \frac{e^{2t}}{t}dt$$

تابع F را برحسب تابع L بیان کنید. (۲ نمره)

۴ـ دایره $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ را حول محور xها دوران می‌دهیم، اندازهٔ سطح رویهٔ جسم حاصل را محاسبه کنید. (۳ نمره)



۵ـ یک استخر مستطیل شکل ۱۲ متر طول و ۶ متر عرض دارد و گودترین قسمت آن ۲ متر عمق دارد. مقطع استخر مطابق شکل روبه‌رو است. استخر را با سرعت ۲۰ متر مکعب در دقیقه با آب پر می‌کنیم. سرعت افزایش ارتفاع آب در لحظه‌ای که ارتفاع آب از گودترین قسمت استخر برابر ۱/۵ متر است را پیدا کنید. (۲ نمره)



۶ـ طول بزرگترین تیر چوبی را (بر حسب a) چنان پیدا کنید که از یک راهرو L شکل (مطابق شکل مقابل) قابل عبور باشد (از کلفتی تیر صرفنظر می‌شود). (۲ نمره)

۷ـ بازهٔ همگرایی سری زیر را به‌دست آورید (با ذکر دلیل):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

(۲ نمره)

۸ـ الف) بسط مک‌لارن تابع $\ln(1+x)$ را به‌دست آورید. (۰/۵ نمره)

ب) به‌کمک قسمت الف مقدار $\ln(\frac{9}{10})$ را با خطای کمتر از 5×10^{-3} پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

۹ـ مجموع سری زیر را

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

حساب کنید (۲ نمره)

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم ـ ریاضی عمومی ۱

تاریخ: ۸۲/۱۰/۱۵

وقت: $3\frac{1}{2}$ ساعت

- بارم سؤالات از ۶۰ نمره است.

۱) نمودار تابع $f(x) = e^x - \ln x$ (تعریف شده برای $x > 0$) را رسم کنید و خصوصاً نشان دهید مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ رخ می‌دهد.(۱۰ نمره)

۲) مقدار انتگرال $\int_{0}^{0/1} \sqrt{1 + x^3}\,dx$ را با خطای کمتر از 10^{-8} محاسبه کنید.(۱۰ نمره)

۳) فرض کنید $b > 0$. مساحت ناحیه محصور بین محور x ها، خط واصل بین مبدأ و نقطهٔ $(\sqrt{1+b^2}, b)$ و شاخهٔ سمت راست هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را محاسبه نمایید.(۱۰ نمره)

۴) ناحیه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ را بدست آورید و سپس مقدار سری را در هر نقطه از ناحیه همگرایی محاسبه کنید.(۸ نمره)

(مقصود از ناحیه همگرایی، مجموعهٔ همهٔ نقاطی است که سری در آنها همگراست.)

۵) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دو مرتبه مشتق‌پذیر است. اگر تقعر f رو به بالا باشد (f محدب باشد) و $f(0) = 0$، ثابت کنید برای هر $x > 0$ داریم $\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)dt \le \frac{1}{2} f(x)$.(۸ نمره)

۶) الف) نشان دهید انتگرال ناسرهٔ $\int_{1}^{\infty} (\frac{1}{x} - \ln(1 + \frac{1}{x}))dx$ همگراست. (۳ نمره)

ب) نتیجه بگیرید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ که در آن $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n}^{n+1} \frac{dx}{x}$، همگراست. بعلاوه اگر مجموع این سری برابر s باشد، نشان دهید $s = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n)$ (۵ نمره)

۷) تابع $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است و $f'(0) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. نشان دهید f'' حداقل در یک نقطه صفر می‌شود.(۶ نمره)

بسمه تعالی

EbiMath.com

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۱

۲۲—۰۱۵

نیمسال اوّل ۸۴—۸۳

مدّت امتحان: ۳ ساعت

پنجشنبه ۸۳/۹/۲۶

سؤال ۱. مقدار حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{(2n+3)^2-1^2}+\frac{1}{(2n+6)^2-2^2}+\dots+\frac{1}{(2n+3n)^2-n^2}\right)$$

سؤال ۲. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^7+x^6+3x^5+2x^4+x^3+x-1}{x^6+2x^4+x^2}\,dx$$

سؤال ۳. سطح زیر منحنی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{1+e^{x^2}}$، محصور به محور x و محدود به دو خط $x=\sqrt{\ln 3}$ و $x=\sqrt{\ln 8}$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران را محاسبه کنید.

سؤال ۴. همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر را بررسی کنید.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5x}$$

سؤال ۵. فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x\in[0,1]$ تعریف کنید $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.
ثابت کنید نقطهٔ c، $0\le c\le 1$، موجود است که $F(1)-F(c)=\int_0^1 xf(x)dx$.

سؤال ۶. الف) فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر x، $f(x)\ge 0$. اگر $\int_0^1 f(x)dx=0$، ثابت کنید برای هر x، $f(x)=0$.

ب) فرض کنید k عددی ثابت باشد. نشان دهید تابع پیوستهٔ $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ویژگی‌های زیر وجود ندارد:

۱) $\forall x\in[0,1]:\ f(x)\ge 0$، ۲) $\int_0^1 f(x)dx=1$، ۳) $\int_0^1 xf(x)dx=k$، ۴) $\int_0^1 x^2 f(x)dx=k^2$.

توزیع نمره: سؤال ۱: ۳ نمره، سؤال ۲: ۴ نمره، سؤال ۳: ۳ نمره، سؤال ۴: ۳ نمره،
سؤال ۵: ۳ نمره، سؤال ۶: الف) ۱/۵ نمره، ب) ۲/۵ نمره.

مجموع: ۲۰ نمره.

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۱

سؤال ۱:

$$\text{حد مطلوب} = \lim_{n\to+\infty} n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2n+3i)^2-i^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2+3\frac{i}{n})^2-(\frac{i}{n})^2}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{(2+3x)^2-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{8x^2+12x+4}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}.\ \square$$

سؤال ۲: با تقسیم صورت تابع زیرانتگرال بر مخرج آن می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{تابع زیرانتگرال} = x+1+\frac{x^5-x^2+x-1}{x^6+2x^4+x^2}.$$

اکنون با فرض

$$\frac{x^5-x^2+x-1}{x^6+2x^4+x^2}=\frac{x^5-x^2+x-1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

به دست می‌آوریم $A=-1$، $B=1$، $C=-2$، $D=0$، $E=0$ و $F=1$.

پس

$$\text{انتگرال مطلوب}=\int\left(x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+\tan^{-1}x+C.\ \square$$

سؤال ۳: حجم حاصل از دوران برابر است با

$$2\pi\int_{\sqrt{\ln 3}}^{\sqrt{\ln 8}} x\sqrt{1+e^{x^2}}\,dx.$$

با فرض $\sqrt{1+e^{x^2}}=u$ به دست می‌آوریم $x\,dx=\frac{u\,du}{u^2-1}$

و لذا حجم مطلوب برابر خواهد بود با

$$2\pi\int_2^3 \frac{u^2}{u^2-1}\,du$$

$$=2\pi\int_2^3\left(1+\frac{1/2}{u-1}-\frac{1/2}{u+1}\right)du$$

$$=2\pi\left(u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\Big]_2^3$$

$$=2\pi\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right).\ \square$$

سؤال ۴: می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5x}=\int_0^1\frac{dx}{x^2+5x}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5x}$$

برای $0<\epsilon$ داده شده، اگر $\epsilon\le x\le 1$، آنگاه $\frac{1}{x^2+5x}\ge\frac{1}{6x}$، و لذا $\int_\epsilon^1\frac{dx}{x^2+5x}\ge\int_\epsilon^1\frac{dx}{6x}$. اما $\lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^1\frac{dx}{6x}=+\infty$، در نتیجه $\int_0^1\frac{dx}{x^2+5x}$ واگراست که واگرایی انتگرال داده شده را به دست می‌دهد. $\square$

سؤال ۵: F تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است و لذا می‌توانیم انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء را به کار گیریم:

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 x\,dF(x) = xF(x)\Big]_0^1-\int_0^1F(x)\,dx = F(1)-\int_0^1F(x)\,dx$$

اکنون قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال نتیجه می‌دهد که نقطهٔ $0\le c\le1$ موجود است که $\int_0^1F(x)\,dx=(1-0)F(c)=F(c)$ و لذا $\int_0^1 xf(x)\,dx=F(1)-F(c)$. $\square$

سؤال ۶: الف) فرض کنید $x_0\in(0,1)$ موجود باشد که $f(x_0)>0$. در نتیجه پیوستگی f ایجاب می‌کند که $\delta>0$ موجود است که $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(0,1)$ و f روی $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ مثبت است. از طرفی f روی بازهٔ بستهٔ $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ اینفیمم خود را در نقطه‌ای چون c به خود می‌گیرد. حال افراز $P=\{0,x_0-\delta,x_0+\delta,1\}$ را از $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه

$$0=\int_0^1f(x)\,dx\ge L(P,f)\ge f(c)(2\delta)>0,$$

که تناقض است. پس برای هر $x_0\in(0,1)$، $f(x_0)=0$ و چون f بر $[0,1]$ پیوسته است، لذا $f=0$ روی $[0,1]$. $\square$

ب) فرض کنید چنین تابع fای موجود باشد. می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_0^1(x-k)^2f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2f(x)-2kxf(x)+k^2f(x)\right)dx$$

$$=\int_0^1x^2f(x)\,dx-2k\int_0^1xf(x)\,dx+k^2\int_0^1f(x)\,dx$$

$$=k^2-2k^2+k^2$$

$$=0.$$

چون برای هر $x\in[0,1]$، $(x-k)^2f(x)\ge0$، لذا (الف) نتیجه می‌دهد که برای هر $x\in[0,1]$، $(x-k)^2f(x)=0$ یا $f(x)=0$. در نتیجه $1=\int_0^1f(x)\,dx=0$ که تناقض است. پس چنین تابع fای وجود ندارد. $\square$

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱

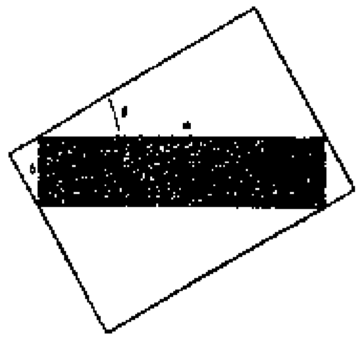
۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۸۴-۸۳

مدّت امتحان: ۳ ساعت و نیم

پنجشنبه ۸۳/۱۰/۲۴

سؤال ۱. در میان تمام مستطیل‌های محیط بر مستطیلی مفروض با اضلاع a و b، مقدار ماکزیمم مساحت چقدر است؟



سؤال ۲. فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعی ۲ بار مشتق‌پذیر باشد و $f(0)=f(1)=0$. اگر f تابعی مقعر باشد (یعنی برای هر $x\in[0,1]$، $f''(x)\leq 0$)، ثابت کنید طول منحنی f حداکثر برابر با ۳ است. (راهنمایی: از نامساوی $\sqrt{1+a^2}\leq 1+|a|$ که برای هر عدد حقیقی a صادق است استفاده کنید.)

سؤال ۳. همگرایی انتگرال زیر را ثابت کنید. (راهنمایی: از انتگرال‌گیری به روش جز به جز استفاده کنید.)

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$$

سؤال ۴. فرض کنید $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر $x\in[0,+\infty)$ داشته باشیم $(f(x))^2=1+2\int_0^x f(t)dt$. ضابطهٔ تابع f را به‌دست آورید.

سؤال ۵. حاصل انتگرال زیر را با خطای کمتر از ۰/۰۰۱ محاسبه کنید.

$$\int_0^1\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

سؤال ۶. همگرایی (مطلق یا مشروط) یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$$

سؤال ۷. مقدار سری زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(n+3)!}$$

توزیع نمره: سؤال‌های ۲ و ۴ هر کدام ۲/۵ نمره و بقیهٔ سؤال‌ها هر کدام ۳ نمره.

مجموع: ۲۰ نمره.

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی یک – دی ماه ۱۳۸۴

تعداد سؤال: ۶ – مدّت امتحان: ۳ ساعت – جمع نمرات این آزمون ۶۵ است.

---

۱) دایره‌ای به مرکز $(b, \circ)$ و شعاع a را $(\circ < a < b)$ حول محور y ها دوران می‌دهیم، حجم جسم ایجاد شده را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

---

۲) الف) مطلوبست محاسبهٔ طول منحنی تابع $f(x) = x^{\text{۲}}$ از نقطهٔ $(\circ, \circ)$ تا نقطهٔ $(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}, \frac{\text{۱}}{\text{۴}})$. (۱۰ نمره)

ب) انتگرال $\int \frac{\text{۱} + \sqrt[\text{۳}]{x}}{\text{۱} + \sqrt{x}}\, dx$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

---

۳) ثابت کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم: (۶ نمره)

$$\int_{\circ}^{\infty} x^{\text{۲}n+\text{۱}} e^{-\frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}}\, dx = \text{۲}^n n!$$

---

۴) مقدار تقریبی $\int_{\circ}^{\text{۱}} \sin(x^{\text{۲}})\, dx$ را با خطای کمتر از $\text{۱}\circ^{-\text{۵}}$ بدست آورید. (۶ نمره)

---

۵) الف) برای $|x| < \text{۱}$، سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ با چه تابعی برابر است؟ (۴ نمره)

ب) فاصلهٔ (بازهٔ) همگرایی سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{x^{\text{۲}n+\text{۳}}}{n(\text{۲}n+\text{۳})}$ را بدست آورید. (۴ نمره)

ج) تعیین کنید که در داخل فاصلهٔ همگرایی، سری فوق با چه تابعی برابر است. (۶ نمره)

د) مقدار سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{n(\text{۲}n+\text{۳})\text{۴}^n}$ را محاسبه کنید. (۳ نمره)

---

۶) تابع f روی فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته $(\circ \leq a < b)$ و روی (a, b) مشتق پذیر است. نشان دهید اعداد $c_{\text{۱}}$ و $c_{\text{۲}}$ در فاصلهٔ (a, b) وجود دارند بطوریکه: (۶ نمره)

$$f'(c_{\text{۱}}) = (a+b)\frac{f'(c_{\text{۲}})}{\text{۲}c_{\text{۲}}}.$$

موفّق باشید.

ریاضیات عمومی ۱

امتحان نهائی، ۱۳۸۸/۱۱/۱

وقت: سه ساعت

۱. برای $x \neq 0$ تعریف می کنیم.

$$f(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$$

نشان دهید می‌توان $f(0)$ را به گونه‌ای تعریف کرد که تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. (۸ نمره)

۲. حدهای زیر را پیدا کنید:

(الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\log_a^x)^{\frac{1}{x}}$ که در اینجا $a > 1$ عددی داده شده است.

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a+n}{b+n})^n$ که در اینجا a و b اعداد حقیقی داده شده‌اند.

(۱۲ نمره— هر یک ۶ نمره)

۳. تابع تعریف شده با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ برای $x > 0$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $a \geq 1$، حجم حاصل از دوران ناحیهٔ زیر نمودار f و بالای محور x بین خطوط راست $x = a$ و $x = a^2$ حول محور x را به $V(a)$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید $V(a)$ ماکسیمم خود را در بازهٔ $[1, +\infty[$ می‌گیرد و نقطهٔ a را به گونه‌ای پیدا کنید که $V(a)$ ماکسیمم باشد.
(راهنمایی: نیازی به محاسبهٔ انتگرال نیست).
(۱۴ نمره)

۴. مساحت بین نمودار $y = \tan^{-1} x$، خط $y = \frac{\pi}{2}$ و خطوط راست $x = 0$ و $x = A$ را محاسبه کنید ($A > 0$). وقتی $A \to +\infty$، آیا این مساحت به مقداری متناهی میل می‌کند؟ جواب خود را توجیه کنید.
(۱۴ نمره)

۵. تابع تعریف شده با ضابطه $f(x)=\sqrt{1+x}$ برای $x\geq -1$ را در نظر می‌گیریم و از چند جمله‌ای $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ به عنوان تقریب آن برای $|x|$ کوچک استفاده می‌کنیم.

(الف) نشان دهید برای $x=\frac{1}{100}$، مقدار تقریب از مقدار تابع کوچکتر است و خطای تقریب از 10^{-7} تجاوز نمی‌کند. برای $x=\frac{-1}{100}$، نشان دهید مقدار تقریب از مقدار تابع بزرگتر است ولی خطای تقریب از 10^{-6} کوچکتر است.
(۸ نمره)

(ب) سری تیلور f حول ۰ را بنویسید، بازهٔ همگرایی آن را توصیف کنید، و همگرایی یا واگرایی سری در دو نقطهٔ انتهایی بازه را بررسی کنید.
(۱۰ نمره)

۶. نمودار $\cos x$ را روی بازهٔ $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر عدد حقیقی $t\neq 0$، نقطهٔ اشتراک نمودار $\cos x$ با خط راست $y=\frac{1}{t}x$ را به $(f(t),g(t))$ نمایش می‌دهیم. همچنین به ازای $t=0$، قرار می‌دهیم $f(0)=0$.

(الف) نشان دهید f در $t=0$ مشتق‌پذیر است. مشتق آن را به دست آورید، و نمودار تقریبی تابع f را رسم کنید.
(۱۰ نمره)

(ب) به فرض اینکه f در $t=0$ تحلیلی است (یعنی برابر سری تیلور خود در یک بازهٔ باز حول ۰ است)، جملات سری تیلور تا درجه ۳ (با شمول درجه ۳) را محاسبه کنید.
(۴ نمره)

مجموع: ۸۰ نمره

<u>جواب ۱</u> برای $x \neq 0$، مقدار $f(x)$ آمیزهٔ جبری تابع‌های پیوسته است با مخرج ناصفر، پس در $x \neq 0$ پیوسته است. اگر تابع در نقطهٔ صحیح $x=0$ حد داشته باشد و مقدار $f(0)$ را برابر آن حد تعریف کنیم، تابع حاصل در $x=0$ نیز پیوسته خواهد بود. حال sinh و سینوس هر دو در ۰ تحلیلی هستند و

$$\sinh x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

بنابراین برای $x \neq 0$

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3} + x(\underbrace{\cdots}_{\text{سری همگرا}})$$

نتیجه اینکه $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$ و با تعریف $f(0)=\frac{1}{3}$ یک تابع پیوسته حاصل می‌گردد.

اگر به جای استفاده از سری، از هوپیتال هم استفاده کنند نمره می‌گیرند

<u>جواب ۲</u>

(الف)

$$(\log_a x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}}{e^{\frac{\ln(\ln a)}{x}}}$$

حال برای a ثابت $\frac{\ln(\ln a)}{x} \to 0$ وقتی $x \to +\infty$، پس حد مخرج برابر ۱ است

از طرفی دیگر می‌دانیم $\frac{\ln x}{x} \to 0$ وقتی $x \to +\infty$، پس $\frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\,\frac{\ln x}{x}$

نیز به صفر میل می‌کند وقتی $x \to +\infty$. بنابراین حد صورت نیز برابر ۱ است. داریم

$$\lim_{x\to+\infty} (\log_a x)^{\frac{1}{x}} = 1 .$$

(ب)

$$\left(\frac{a+n}{b+n}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

طبق مطلب کتاب درسی

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = e^x$$

راه دوم:

$$\left(\frac{a+n}{b+n}\right)^n = \left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)^n = \left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)^{-b}\left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)^{b+n} \to 1\cdot e^{a-b}$$

$$V(a)=\pi\int_a^{a^2} f(x)^2\,dx \geq 0$$

توجه کنید که $V(a)\to 0$ وقتی $a\to+\infty$ زیرا درجه مخرج $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ از ۱ بزرگتر است، انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ همگرا است، پس $\int_a^{+\infty}$ و به طور اولی $\int_a^{a^2}$ را می‌توان با بزرگ کردن a دلخواه کوچک کرد. از طرف دیگر $V(1)=0$، بنابراین ماکسیمم باید در یک نقطهٔ درونی $(1,\infty)$ به دست آید. همچنین طبق قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال $V(a)$ همواره نسبت به a مشتق‌پذیر است $(a>0)$ پس در نقطهٔ ماکسیمم مشتق باید صفر شود.

$$0=V'(a)=\pi\{(2a)(f(a^2))^2-f(a)^2\} \Rightarrow (2a)(f(a^2))^2=f(a)^2$$

$$\sqrt{2a}\,f(a^2)=\pm f(a) \Rightarrow \sqrt{2a}\,\frac{1}{a(a^2+1)}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}\,(a+1)}$$

$$a(a^2+1)=\pm\sqrt{2}\,a(a+1) \Rightarrow a^2+1=\pm\sqrt{2}(a+1)$$ (چون $a\geq 1>0$)

$$\begin{cases} a^2-\sqrt{2}a+1-\sqrt{2}=0 \\ a^2+\sqrt{2}a+1+\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

ریشهٔ حقیقی ندارد

$$a=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4+4\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2+4\sqrt{2}}}{2}$$

تنها ریشهٔ مثبت: $a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2+4\sqrt{2}}}{2}$

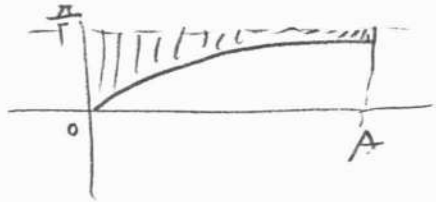
اگر ماکسیمم را طرح
ریشه را به دست آورند و ثابت
کنند ماکسیمم است
نمره کامل می‌گیرند بدون
مقدمات اولیه

چون به هر حال تابع باید ماکسیمم داخلی داشته باشد، این نقطه مطلوب است.

راه دیگر: اگر با گذاردن $\sqrt{x}=t$ از طریق تجزیه کسرها به کسرهای جزئی انتگرال را به دست آورند ولی نتوانند به جواب برسانند بسته به میزان پیشرفت و درستی محاسبات حداکثر ۱۰ نمره

۱)

جواب ٤



مساحت $= (\frac{\pi}{2})A - \int_0^A \tan^{-1}x\,dx$

حل

$$\int_0^A \tan^{-1}x\,dx \underset{\text{انتگرال جزء به جزء}}{=\!=\!=} x\tan^{-1}x\Big|_0^A - \int_0^A \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= A\tan^{-1}A - 0 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^A$$

$$= A\tan^{-1}A - \frac{1}{2}\ln(1+A^2)$$

مساحت $= \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}A\right)A + \frac{1}{2}\ln(1+A^2)$ (۱/۰ نمره)

چون $A>0$، $\tan^{-1}A$ در $]0,\frac{\pi}{2}[$ است، $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A=\cot^{-1}A$، پس

$$\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A\right)A = (\cot^{-1}A)(A)$$

فرض می‌کنیم $\cot^{-1}A=\theta$، پس

$$\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A\right)A = \theta\cdot\cot\theta = \frac{\theta}{\sin\theta}\cos\theta$$

وقتی $A\to+\infty$، $\theta\to 0$ و عبارت بالا برابر ۱ می‌شود، پس

مساحت $= \left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A\right)A + \frac{1}{2}\ln(A^2+1) \longrightarrow +\infty$

وقتی $A\to+\infty$.

(۴ نمره)

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}},\ f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\ f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

٤

سوال ۵

$$f'''(x)=+\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

چند جمله‌ای را داریم، چند جمله‌ای تیلور درجه ۲ تابع بالا است حول 0 .

الف) برای $\frac{1}{100}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{x^3}{3!}\left(+\frac{3}{8}\right)(1+t)^{-5/2}$$

که t بین 0 و $\frac{1}{100}$ است. در واقع جمله خطا مثبت است، پس مقدار تقریب از مقدار واقعی کوچکتر است.

$$\text{خطا}=\frac{x^3}{3!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)\frac{1}{\sqrt{(1+t)^5}}$$

حداکثر این عبارت برای $t=0$ به دست می‌آید

$$\text{خطا}\le\frac{1}{10^6\times 16}<10^{-7}$$

۴ نمره

برای $-\frac{1}{100}$ ، جمله باقیمانده است

$$\frac{(-10^{-2})^3}{3!}\left(\frac{3}{8}\right)(1+t)^{-5/2}$$

که t بین 0 و $-\frac{1}{100}$ است. این عبارت منفی است، پس مقدار تقریب بزرگتر از مقدار واقعی است

$$|\text{خطا}|=\frac{1}{10^6\times 16}\,\frac{1}{(1+t)^{5/2}}$$

حداکثر خطا وقتی است که $t=-\frac{1}{100}$ ، پس

$$|\text{خطا}|<\frac{1}{10^6\times 16}\cdot\frac{10^5}{99^{5/2}}<\frac{1}{160\times\sqrt[4]{99^5}}<10^{-6}$$

۴ نمره

در واقع خطای کمتر از 10^{-7} هم کافیست ولی اثبات آن جا داشته و نیازی به جبر نداشته

ب) این حالت خاص سری دو جمله‌ای است که بازه همگرایی آن $]-1,+1[$ است و

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}x^n$$

۲ نمره

$$= 1+\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\cdot n!}x^n \qquad (*)$$

در نقطهٔ $x=1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{n}$$

این یک سری متناوب است که از نوع لایب‌نیتز هست، به علاوه جملهٔ عمومی به صفر میل می‌کند وقتی $n\to+\infty$ زیرا که قدر مطلق جملهٔ عمومی از $\frac{1}{n}$ کوچکتر است پس طبق آزمون لایب‌نیتز همگراست.

در نقطهٔ $x=-1$ با جایگذاری در $(*)$ نتیجه می‌گیریم که سری عبارت است از:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{n}}$$

نشان می‌دهیم سری ↑ نیز همگراست.

تابع $g(x)=2-\sqrt{1-x}$ را در نظر می‌گیریم. با استقراء نتیجه می‌شود که $g^{(n)}(0)>0$ برای هر $n\geq 0$ و چون ابتدا در واقع یک سری در جملات ضرب شده در (-1) است که در آن جملات ۲ اضافه شده، شعاع همگرایی 1 دارد. چون همهٔ $g^{(n)}$ها مثبت هستند بنابر تمرین ۱۴ بخش ۳ فصل ۶، نتیجه می‌شود که سری تیلور g در نقاط انتهایی به تابع همگراست. بسط تیلور g هست:

$$2-\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}(-x)^n\right\}$$

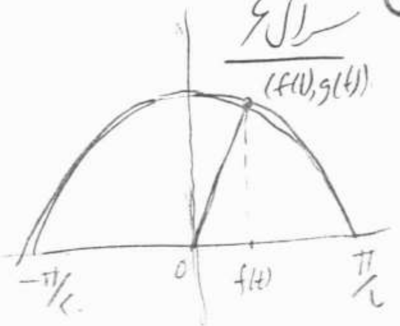
$$=1+\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\cdot n!}x^n$$

همگرایی این سری در نقطهٔ انتهایی $x=1$ نتیجهٔ مطلوب را می‌دهد.

نمرهٔ این قسمت به همه افزوده می‌شود

۶

سؤال ۶



$$t\neq 0:\quad \frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\frac{f(t)}{t}=f(t)\frac{g(t)}{f(t)}=g(t)=\cos f(t)$$

اگر ثابت کنیم f در ۰ پیوسته است، چون کسینوس نیز پیوسته است، نتیجه می‌شود که:

$$\cos(f(t))\longrightarrow \cos(f(0))=\cos 0=1$$

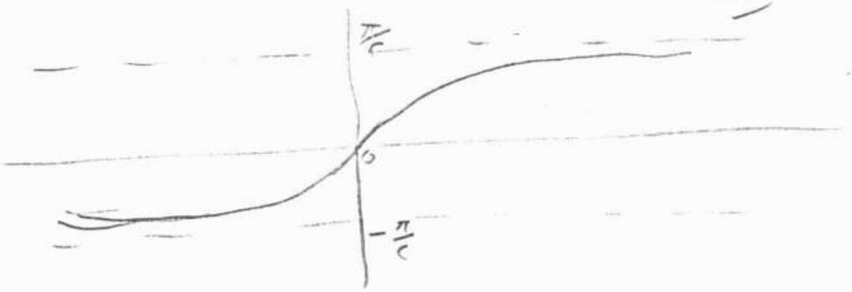
پس $f'(0)=1$.

برای پیوستگی $f(t)$ در $t=0$: $\frac{f(t)}{t}=\cos f(t)$، پس $|f(t)|=|t||\cos f(t)|$

$|f(t)|\le |t|$

بنابراین $|f(t)-f(0)|=|f(t)-0|=|f(t)|\le|t-0|$ و برای $\varepsilon>0$ داده شده، اگر بگیریم $\delta=\varepsilon$ حکم به اثبات می‌رسد.

به سبب زوج بودن تابع کسینوس $\cos(-x)=\cos x$، داریم $f(-t)=-f(t)$. به علاوه وقتی $t\to+\infty$، $\frac{1}{t}\to0^+$ و $f(t)\to\frac{\pi}{2}$. به طور مشابه وقتی $t\to-\infty$، $\frac{1}{t}\to0^-$ و $f(t)\to-\frac{\pi}{2}$. بنابراین نمودار به شکل زیر است:



(ب) چون تابع f فرد است، همه ضرایب جملات زوج سری تیلور در ۰ برابر صفر هستند و سری تیلور به صورت زیر است:

$$f(t)=c_1t+c_3t^3+\cdots$$

در (الف) ثابت کردیم $c_1=1$. از $f(t)=t\cos f(t)$ داریم

$$t+c_3t^3+\cdots=t\cos(t+c_3t^3+\cdots)$$
$$=t\left(1-\frac{t^2}{2!}+\text{جملات درجه بالاتر}\right)$$

$$\Rightarrow\quad c_3=-\frac{1}{2}$$

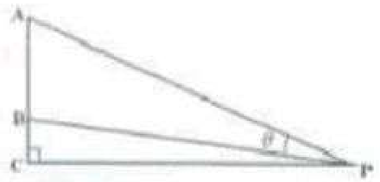
به نام خدا

ریاضیات عمومی ۱

امتحان پایان ترم
مدت: ۳ ساعت

تاریخ پنجشنبه ۲۲ دی ۱۳۹۰

۱ در شکل روبرو فرض کنید طول پاره خط AB برابر با 9، طول پارخط BC برابر با 3، طول پاره خط CP برابر با x و زاویه دید نقطه P از پارخط AB برابر با θ باشد.



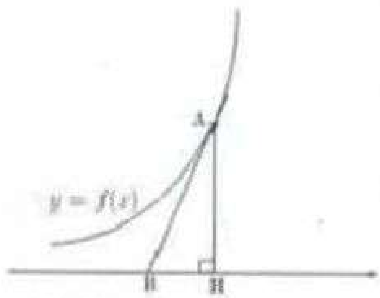
الف) مقدار θ را بر حسب x محاسبه کنید.

ب) برای چه مقداری از $x \in]0, +\infty[$، زاویه دید θ بیشترین مقدار ممکن است؟

ج) یک نمودار تقریبی از تغییرات θ وقتی x در بازه $[0, +\infty[$ تغییر می کند رسم نمایید. (در این نمودار صعودی، نزولی بودن تابع و همچنین تحدب و تقعر آن را مشخص کنید).

(الف)(۵ نمره)، (ب)(۸ نمره)، (ج) (۷ نمره)

۲ همه توابع مشتق پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را چنان بیابید که برای هر نقطه A روی نمودار این تابع خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه A حتما محور x ها را در یک نقطه یکتای B قطع کند (نقطه B وابسته به A است) و فاصله B تا H (H پای عمود خارج شده از A بر محور x ها است) برابر مقدار ثابت $a > 0$ باشد.



(۱۵ نمره)

۳ ثابت کنید انتگرال ناسره زیر همگراست:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\, dx$$

(۱۵ نمره)

۴ فرض کنید $f(x) \geqslant 0$ یک تابع پیوسته و صعودی روی فاصله $[1, +\infty[$ است. نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

سپس فرض کنید $f(x) = \ln x$، نامساوی زیر را نتیجه گیری کنید:

$$n^n e^{-n+1} \leqslant n! \leqslant (n+1)^{n+1} e^{-n}.$$

(۱۵ نمره)

ادامه پشت صفحه

۵ سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ را در نظر گیرید.

الف) نشان دهید برای $|x| < 1$ سری فوق به $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ همگراست. (۸ نمره)

ب) نتیجه گیری کنید برای $0 < x < 1$ داریم $\ln\frac{1+x}{1-x} > 2x$. (۵ نمره)

ج) به کمك قسمت (ب) نشان دهید $e < 3$. (۷ نمره)

۶ برای $n \geqslant 1$، تعریف می کنیم $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

الف) نشان دهید $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. (۵ نمره)

ب) نشان دهید $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-a_n}{\frac{1}{n}} = \ln(2)$. (۵ نمره)

ج) در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ بحث کنید (با ذکر دلیل). (۵ نمره)

موفق باشید

بسمه تعالی

راه حل سؤالات امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

پاییز ۱۳۹۰

راه حل سؤال ۱:

داریم:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a}{x} - \tan^{-1}\frac{b}{x}$$

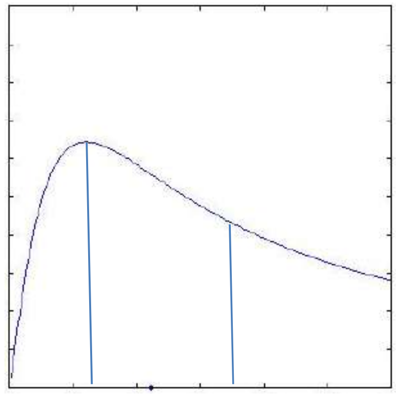
که در آن $a = \overline{AC} = 12$ و $b = \overline{BC} = 3$. پس $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{a}{x^2+a^2} + \frac{b}{x^2+b^2}$. بنابر این مشتق θ صفر است اگر و تنها اگر $x^2 = ab$ یعنی $x = 6$. به علاوه:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{2ax}{(x^2+a^2)^2} - \frac{2bx}{(x^2+b^2)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow a(x^2+b^2)^2 > b(x^2+a^2)^2 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})x^2 > \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab}) \\
&\Leftrightarrow x^2 > 6 \times 21 \Leftrightarrow x > 3\sqrt{14}
\end{aligned}$$

بنابراین دارمی $\theta''(6) < 0$. پس $x = 6$ یک ماکزیمم موضعی است. همچنین داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1}(+\infty) = 0 \\
&\lim_{x\to +\infty} \theta(x) = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(0) = 0
\end{aligned}$$

پس $x = 6$ ماکزیمم مطلق است.



راه حل سؤال ۲:

ابتدا معادلهٔ خط مماس بر نقطهٔ A به مختصات $(t, f(t))$ روی نمودار تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{y - f(t)}{x - t} = f'(t)$$

این خط محور x ها را در نقطهٔ B قطع می‌کند. مختصات این نقطه به ازای $y = ۰$ در معادلهٔ فوق به‌دست می‌آید. بنابراین مؤلفهٔ x نقطهٔ B برابر است با $t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$.

چون فاصلهٔ B, H همواره برابر با مقدار ثابت a است، پس داریم:

$$\left| t - (t - \frac{f(t)}{f'(t)}) \right| = a$$

یا معادلاً

$$\left| \frac{f(t)}{f'(t)} \right| = a$$

چون تابع f پیوسته و f' همواره مخالف صفر است، پس $\dfrac{f}{f'}$ یک تابع پیوسته است (فرض می‌کنیم f' پیوسته است، هرچند نیازی نیست). پس رابطهٔ فوق معادل است با

$$\forall t : \frac{f(t)}{f'(t)} = a \text{ یا } \forall t : \frac{f(t)}{f'(t)} = -a$$

می‌دانیم تنها توابعی که در معادلهٔ $f'(t) = \lambda f(t)$ صدق می‌کنند، توابع به شکل $f(t) = ce^{\lambda t}$ ها هستند که c یک مقدار ثابت است. پس کلاً به دو دسته جواب $f(t) = ce^{-\frac{۱}{a}t}$ و $f(t) = ce^{\frac{۱}{a}t}$ می‌رسیم.

توجه کنید که c ناصفر است.

راه حل سؤال ۳:

باید ثابت کنیم انتگرال‌های زیر همگرا هستند:

$$II = \int_{۱}^{\infty} \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} dx \text{ و } I = \int_{۰}^{۱} \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} dx$$

برای اثبات همگرایی I، با استفاده از دستور هوپیتال داریم:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} = \lim_{x \to ۰} \frac{۲xe^{-x^{۲}}}{۲x} = \lim_{x \to ۰} e^{-x^{۲}} = ۱$$

بنابراین تابع $\frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}}$ روی بازهٔ $[۰,۱]$ کران‌دار است. این تابع پیوسته هم هست. بنابراین I همگرا است.

برای اثبات همگرایی II به وضوح داریم:

$$\forall x \geq ۱ : \quad ۰ \leq \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} \leq \frac{۱}{x^{۲}}$$

حال چون $\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}} = ۱$ همگرا است، پس II نیز همگرا است.

راه حل سؤال ۴:

برای $x \geq ۱$، $f(x) \geq ۰$ پیوسته و صعودی است. افراز $p = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ از بازهٔ $[۱, n]$ را در نظر بگیرید. پس:

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} m([i-۱, i]) \leq \int_a^b f \leq \sum_{i=۲}^{n} M([i-۱, i])$$

بنابراین $\sum_{k=۱}^{n-۱} f(k) \geq \int_۱^n f$ و $\sum_{k=۲}^{n} f(k) \leq \int_۱^n f$.

حال برای تابع $f(x) = \ln(x)$ داریم:

$$u = ۱ \quad , \quad v = \ln(x)$$
$$\Rightarrow \int_۱^n ۱ \times ln(x) dx = x \ln x \Big|_۱^n - \int_۱^n dx = n \ln n - n + ۱$$

پس طبق قسمت قبل داریم

$$\sum_{k=۱}^{n-۱} \ln k \leq n \ln n - n + ۱ \leq \sum_{k=۲}^{n} \ln k$$

بنابراین از یک طرف:

$$\ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln(n-۱) \leq n \ln n - n + ۱$$
$$\Rightarrow \ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln n \leq (n+۱) \ln(n+۱) - (n+۱) + ۱$$
$$\Rightarrow \ln(n!) \leq \ln(n+۱)^{(n+۱)} - n$$
$$\Rightarrow n! \leq (n+۱)^{(n+۱)} e^{-n}$$

و از طرف دیگر:

$$n \ln n - n + ۱ \leq \ln ۲ + \ln ۳ + \cdots + \ln n = \ln(n!)$$
$$\Rightarrow n! \geq n^n e^{-n+۱}$$

و حکم ثابت می‌شود.

راه حل سوال ۵:

سری هندسی زیر برای $|x| \leq ۱$ همگرا است:

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^{۲} + \cdots$$

بنابراین طبق قضیه می‌توانیم از طرفین جمله به جمله انتگرال بگیریم:

$$-\ln(۱-x) = x + \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} + \cdots$$

به طور مشابه:

$$\frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^{۲} - \cdots + (-۱)^{n} x^{n} + \cdots$$
$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^{۲}}{۲} + \cdots + \frac{(-۱)^{n} x^{n+۱}}{n+۱} + \cdots$$

با جمع زدن این دو رابطه داریم:

$$\frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = \frac{۱}{۲}(\ln(۱+x) - \ln(۱-x)) = x + \frac{x^{۳}}{۳} + \cdots + \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \cdots$$

حال چون همهٔ جملات این سری مثبت هستند، با در نظر گرفتن جملهٔ اول به دست می‌آوریم که $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) > ۲x$ برای $۰ < x < ۱$. (روش دیگر: در نظر گرفتن تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) - ۲x$ و اثبات مثبت بودن مشتق آن، صعودی بودن آن و مقایسه با $f(۰)$)

همچنین با قرار دادن $x = \frac{۱}{۲}$ در این نامساوی به دست می‌آوریم:

$$\ln(\frac{۳/۲}{۱/۲}) > ۱ \Rightarrow \ln ۳ > ۱ \Rightarrow e < ۳$$

راه حل سوال ٦:

الف) داریم:

$$1 - a_n = \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^n})dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$$

از طرفی چون $x^n \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq 0$، با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید $\frac{1}{n+1} \leq 1 - a_n \leq 0$. پس $1 - a_n \to 0$.

ب) روش اول: قرار می‌دهیم $x^n = u$. بنابر این $nx^{n-1}dx = du$. پس:

$$1 - a_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}du \Rightarrow n(1 - a_n) = \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}du$$

از طرفی $\int_0^1 \frac{1}{1+u}du = \ln 2$. بنابراین:

$$\ln 2 - n(1 - a_n) = \int_0^1 \frac{1 - u^{\frac{1}{n}}}{1+u}du$$

داریم $1 - u^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1 - u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \leq 0$ پس با انتگرال گیری از دو طرف به‌دست می‌آید

$$0 \leq \ln 2 - n(1 - a_n) \leq 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

بنابراین $\ln 2 - n(1 - a_n) \to 0$ و حکم ثابت می‌شود.

روش دوم: اثبات نامساوی $1 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1 - x^n$ و انتگرال‌گیری از طرفین؛ سپس محاسبهٔ حد طرفین.

روش سوم: از فرمول جزء به جزء به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1 - a_n}{1/n} = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx = x\ln(1+x^n)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

سپس از طرفین نامساوی $\ln(1+x^n) \leq x^n$ انتگرال می‌گیریم و در رابطهٔ فوق جایگذاری می‌کنیم. سپس حد آن را محاسبه می‌کنیم.

ج) با استفاده از قسمت ب به دست می‌آوریم از جایی به بعد $\frac{1}{n} \times \frac{\ln 2}{2} \geq a_n - 1$ و از واگرایی سری $\sum_n \frac{1}{n}$ نتیجه می‌شود که سری $\sum_n 1 - a_n$ واگرا است.

به‌نام خدا

EbiMath.com

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۲۲ − ۰۱۵

نیمسال اوّل ۹۲—۹۱

تاریخ امتحان: ۹۱/۱۰/۱۳
مدّت امتحان: ۳ ساعت

- این امتحان شامل ۵ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در کتابچهٔ امتحانی بنویسید و در هر برگهٔ کتابچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.
- در طول جلسهٔ امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$(\text{الف})\ \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx \qquad (\text{ب})\ \int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx \qquad (\text{ج})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx \quad (n\in\mathbb{N})$$

سؤال ۲. طول قوس منحنی $y=e^x$ را از نقطهٔ $(\ln\sqrt{3},\sqrt{3})$ تا نقطهٔ $(\ln\sqrt{8},\sqrt{8})$ محاسبه کنید.

سؤال ۳. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$(\text{الف})\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} \qquad (\text{ب})\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\right)^n$$

سؤال ۴. نشان دهید $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ و سپس همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$ را بررسی کنید.

سؤال ۵. هر یک از توابع f و g با ضابطه‌های زیر را به یک سری تیلور حول $a=0$ بسط دهید و در هر حالت شعاع همگرایی سری را محاسبه کنید. با استفاده از سری‌های به‌دست آمده، مشتق دهم f و g را در صفر به دست آورید.

$$(\text{الف})\ f(x)=\frac{x}{x^2+16} \qquad (\text{ب})\ g(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$$

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۰+۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۲: ۱۰ نمره، سؤال ۳: ۱۰+۱۰ نمره،
سؤال ۴: ۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۵: ۱۰+۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره

سؤال ۱ (الف)

$$\int \frac{(1+x)^{۲}}{\sqrt{۳-۲x-x^{۲}}} = \int \frac{(1+x)^{۲}}{\sqrt{۴-(1+x)^{۲}}}\,dx$$

$$= \int \frac{۴\sin^{۲}\theta}{۲\cos\theta}\,۲\cos\theta\,d\theta \qquad \begin{cases} 1+x = ۲\sin\theta \\ dx = ۲\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

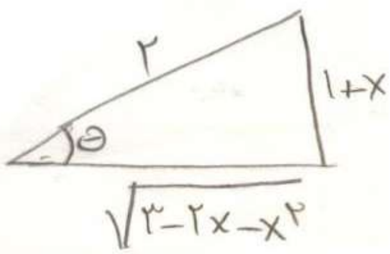
$$= \int ۴\sin^{۲}\theta\,d\theta$$

$$= \int ۲(1-\cos ۲\theta)\,d\theta$$

$$= ۲\left(\theta - \frac{1}{۲}\sin ۲\theta\right) + C$$

$$= ۲\left[\theta - \sin\theta\cos\theta\right] + C$$

$$= ۲\left[\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{۲}\right) - \left(\frac{1+x}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳-۲x-x^{۲}}}{۲}\right)\right] + C$$



سؤال ۱ (ب)

$$\frac{x^{۳}+۲x^{۲}+x+1}{x^{۲}(x^{۲}+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^{۲}}+\frac{Cx+D}{x^{۲}+1}$$

$$=\frac{Ax(x^{۲}+1)+B(x^{۲}+1)+(Cx+D)x^{۲}}{x^{۲}(x^{۲}+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^{۳}+(B+D)x^{۲}+Ax+B}{\text{مخرج کسر}}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+D=۲ \\ A=1 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ D=1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{۲}}+\frac{1}{x^{۲}+1}\right\}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x}+\tan^{-1}(x)+C_1$$

سؤال ۱ (ب)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x \underbrace{\cos x \, dx}_{d(\sin x)}$$

$$= \left[\cos^{2n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)(2n-1)(-\sin x)(\cos^{2n-2} x)\, dx$$

$$= 0 + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n-2} x \, dx$$

$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{2n-2} dx$$

$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n-2} x - \cos^{2n} x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x \, dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

سوال ۲

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}$$

$$L = \int_{\ln\sqrt{۳}}^{\ln\sqrt{۸}} \sqrt{1 + e^{۲x}}\, dx$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{1+e^{۲x}} \\ u^{۲} = 1 + e^{۲x} \\ ۲u\,du = ۲e^{۲x}\,dx \\ dx = \dfrac{u}{e^{۲x}}\,du \\ \quad = \dfrac{u}{u^{۲}-1}\,du \end{cases}$$

$$= \int_{۲}^{۳} \frac{u^{۲}}{u^{۲}-1}\, du$$

$$= \int_{۲}^{۳} \left[1 + \frac{1}{u^{۲}-1}\right] du$$

$$= \int_{۲}^{۳} \left[1 + \frac{\frac{1}{۲}}{u-1} - \frac{\frac{1}{۲}}{u+1}\right]$$

$$= \left[u + \frac{1}{۲}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{۲}^{۳}$$

$$= 1 + \frac{1}{۲}\ln\left|\frac{۲}{۴}\right| - \frac{1}{۲}\ln\left|\frac{1}{۳}\right| = 1 + \frac{1}{۲}\ln\left(\frac{۳}{۲}\right)$$

سوال ۳ قسمت (الف)

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)(2n+1)}}{\dfrac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}}$$

$$= \lim \frac{n+1}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

بنا به آزمون نسبت سری مورد نظر همگرا است.

سوال ۵ ۳ قسمت (ب)

$$a_n = \left(\frac{e^{n} + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right)^n$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{e^{n} + e^{-n}}{e^{2n} - 1}$$

ضرب صورت و مخرج کسر در e^{-2n}

$$= \lim \frac{e^{-n} + e^{-3n}}{1 - e^{-2n}}$$

$$= \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0 < 1$$

بنابه آزمون ریشه همگرا است

راه دوم به جای ضرب کردن صورت و مخرج کسر در عامل e^{-2n} می‌تواند از هوپیتال استفاده کند:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n} - e^{-n}}{2e^{2n}}$$

$$= \lim \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-3n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 0)$$

سوال ۴ قسمت اول

راه اول

$$y = \ln\left(\sqrt[n]{n}\right) = \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} y = \lim \frac{\frac{1}{n}}{1} \quad \text{(هوپیتال)}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim \sqrt[n]{n} = \lim \exp(y) = e^{0} = 1$$

راه دوم قرار می‌دهیم $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$. آنگاه $0 < h_n$ ،

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \Longrightarrow n = (1+h_n)^n = 1 + n h_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \cdots$$

$$> \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

$$\frac{n(n-1)}{2} h_n^2 < n \Longrightarrow 0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

اما چون حد عبارت سمت راست صفر است، پس $h_n \to 0$ ،
معادلاً $\sqrt[n]{n} \to 1$.

تست دوم سری مورد نظر با سری $\sum \frac{1}{n}$ هم‌رفتار است چرا که

$$\lim \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

پس $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ هم واگرا است.

راه دوم چون $\lim \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$ ، پس برای n های بزرگ داریم $\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{2}$ لذا $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$

پس از آزمون مقایسه، سری $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ واگرا است.

سؤال ۵

قسمت (الف)

$$f(x) = \frac{x}{16} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{16}\right)}$$

$$= \frac{x}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{16}\right)^n$$

$$= \frac{x}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^n} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^{n+1}} x^{2n+1}$$

برای برقراری تساوی‌ها باید فرض شود $\left|\frac{x^2}{16}\right| < 1$ معادلاً

$|x| < 4$. پس $R = 4$

$$f^{(10)}(0) = 10! \times (x^{10} \text{ ضریب جمله}) = (10!)(0) = 0 \Big\} \ (2)$$

سمت (ب)

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\,x^n$$

با مشتق‌گیری:

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\,x^{n-1}$$

طرفین را در x^3 ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x^3}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\,x^{n+2}$$

برای برقراری تساوی‌های بالا باید فرض کنیم که $\left|\frac{x}{2}\right|<1$

معادلاً $|x|<2$.

$$g^{(10)}(0) = 10!\times(\text{ضریب جمله } x^{10}) = 10!\times\frac{8}{2^9}$$

به نام خدا

ریاضیات عمومی ۱

امتحان پایان ترم

مدت: ۳ ساعت

تاریخ پنجشنبه ۱۹ دی ۱۳۹۲

۱ نشان دهید برای هر $x \in [0, \frac{1}{2}]$ نامساوی $(1-x)e^{(x+x^2)} \geq 1$ برقرار است. (۲۰ نمره)

۲ نمودار تابع $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم.
حجم ناحیه تولید شده را بدست آورید. (۲۰ نمره)

۳ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ را با ذکر دلیل محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

۴ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است بطوریکه $|f'(x)| \leq M$ برای هر $x \in \mathbb{R}$.
ثابت کنید:

الف) اگر برای $c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(c) = 0$ آنگاه برای هر $h \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\left|\int_c^h f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}M(h-c)^2$$

(۱۰ نمره)

ب) اگر برای $a < b$ داشته باشیم $f(a) = f(b) = 0$، آنگاه $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{4}M(b-a)^2$
(۱۰ نمره)

۵ شعاع همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n\ln(n)}$ با متغیر حقیقی x را محاسبه کنید و همگرایی آن را در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه همگرایی بررسی کنید. (۲۰ نمره)

۶ تابع $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$ را در نظر می‌گیریم.

الف) مشتق f را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ب) نشان دهید $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (۱۰ نمره)

موفق باشید

$\boxed{1}$ نشان دهید برای $x\in[0,\frac{1}{2}]$ نامساوی $(1-x)e^{x+x^2}\geq 1$ برقرار است.

راه حل. تابع $f(x)=(1-x)e^{x+x^2}$ را در نظر می‌گیریم.

داریم $f(0)=1$ همچنین

$$f'(x)=x(1-2x)\,e^{x+x^2}$$

با توجه به اینکه $0\leq x\leq\frac{1}{2}$ داریم:

$$f'(x)\geq 0$$

بنابراین $f(x)$ بین $[0,\frac{1}{2}]$ صعودی است در نتیجه

$$\forall x\in[0,\tfrac{1}{2}]\qquad f(x)\geq f(0)$$

$$\Rightarrow\quad f(x)\geq 1$$

$\boxed{2}$ نمودار تابع $f:[1,2]\to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$ را حول محور xها

دوران می‌دهیم. حجم ناحیه تولیدشده را بدست آورید.

<u>راه حل</u>

حجم ناحیه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V=\int_1^2 \pi\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}}\right)^2 dx=\int_1^2 \pi\,\frac{1}{x^2(1+x)}\,dx$$

دقت کنید که $\dfrac{1}{x^2(1+x)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$

بنابراین $\pi\left(-\frac{1}{x}-\ln(x)+\ln(1+x)\right)$ یک تابع اولیه است

$$\Rightarrow V=\pi\left(-\frac{1}{x}-\ln(x)+\ln(1+x)\right)\Bigg|_1^2$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-2\ln(2)+\ln(3)\right)$$

[۳] مقدار $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ را با ذکر دلیل محاسبه کنید.

راه حل. داریم

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

که یک مجموع ریمان برای تابع $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ روی بازه $]0,1[$ است.
بنابراین مسئله منجر به محاسبه یک انتگرال ناسره می‌شود:

$$\int_{0^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ نتیجه می‌شود

$$\int_{0^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=2\int_{0^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=2\operatorname{Arc\,sin}(t)\Big|_{0^+}^{1^-}=2\frac{\pi}{2}=\pi$$

$\boxed{4}$ فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است بطوریکه $|f'(x)| \leq M$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ ثابت کنید (الف) اگر برای $c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(c)=0$ آنگاه برای هر $h \in \mathbb{R}$ داریم

$$\left| \int_c^h f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{2} M (h-c)^2$$

(ب) اگر برای $a<b$ داشته باشیم $f(a)=f(b)=0$ آنگاه $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{4}M(b-a)^2$

حل: (الف) تابع

$$g(h) = \int_c^h f(x)\, dx$$

را درنظر می‌گیریم. طبق قضیه تیلور می‌توان نوشت:

$$g(h) = g(c) + g'(c)(h-c) + \frac{g''(d)}{2!}(h-c)^2$$

که d بین c و h است.

اما $g(c) = \int_c^c f(x)\,dx = 0$ و $g'(c) = f(c) = 0$ بنابراین رابطه بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$g(h) = \frac{g''(d)}{2!}(h-c)^2$$

$$\rightarrow |g(h)| \leq \frac{M}{2}(h-c)^2$$

(ب) نقطه $h = \frac{b+a}{2}$ را درنظر می‌گیریم و دوبار از نامساوی قسمت (الف) استفاده می‌کنیم:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^h f(x)\,dx\right| + \left|\int_h^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}M(h-a)^2 + \frac{1}{2}M(h-b)^2$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}M(b-a)^2$$

۵

شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln(n)}$ با متغیر حقیقی x را بیابید و همگرایی آن را در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه همگرایی بررسی کنید.

راه حل دقت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln(n)}}\right| = 1$$

بنابراین شعاع همگرایی آن برابر با یک است.

بنابراین سری روی بازه باز $]-1,1[$ مطلقاً همگرا است.

همگرایی در $x=-1$

به سری $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ می‌رسیم که یک سری متناوب لایب‌نیتس است و همگرا است.

همگرایی در $x=1$

به سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ می‌رسیم،

این سری با استفاده از آزمون انتگرال با مقایسه با $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$ واگرا می‌شود

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln(\ln(x))\Big|_2^{\infty} = \infty$$

ریز نمره

[6]

تابع $f(x)=\int_{x^2}^{x^2+1}\sin(e^t)\,dt$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) مشتق f را محاسبه کنید.

(ب) نشان دهید $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

راه حل (الف) طبق قاعده لایب‌نیتس داریم:

$$f'(x)=\sin\left(e^{x^2+1}\right)(2x)-\sin\left(e^{x^2}\right)(2x)$$

(ب) داریم

$$\int_{x^2}^{x^2+1}\sin(e^t)\,dt=\int_{x^2}^{x^2+1}\left(-e^{-t}\right)\left(\cos e^t\right)'\,dt$$

$$\underset{\text{جزء به جزء}}{=}-e^{-t}\cos e^t\Big|_{x^2}^{x^2+1}-\int_{x^2}^{x^2+1}e^{-t}\cos e^t\,dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_{x^2}^{x^2+1}\sin(e^t)\,dt=\lim_{x\to\infty}\left(-e^{-(x^2+1)}\cos(e^{x^2+1})+e^{-x^2}\cos(e^{x^2})\right)-\lim_{x\to+\infty}\int_{x^2}^{x^2+1}e^{-t}\cos e^t\,dt$$

جمله اول با توجه به کراندار بودن $\cos e^{x^2}$ و $\cos e^{x^2+1}$ و با توجه به اینکه

$e^{-x^2}\to 0$ و $e^{-(x^2+1)}\to 0$ (وقتی $x\to+\infty$) به صفر میل می‌کند

جمله دوم با توجه به اینکه $\cos e^t$ کراندار است و $e^{-t}\to 0$ وقتی $t\to+\infty$ به صفر میل می‌کند

پس کلاً حد برابر با صفر است.

به نام او، برای او

پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۹۳/۱۰/۲۵

وقت امتحان: ۳ ساعت

۱. انتگرال‌های نامعین زیر را حساب کنید.

(الف)
$$\int \frac{2x}{1-x^4}\mathrm{d}x.$$

(ب)
$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x.$$

۲. تابع f با ضابطه زیر در چه نقطه‌ای از بازه $[0, \frac{\pi}{3}]$ ماکسیمم می‌شود؟

$$f(x) = \int_{x/2}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

۳. الف) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x داریم $e^x > 1 + x$.

ب) نشان دهید سری زیر همگراست:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2}).$$

۴. الف) سری تیلور تابع $\sin x$ را حول $\frac{\pi}{4}$ حساب کنید.

ب) با استفاده از قضیه تقریب خطای چندجمله‌ای تیلور نشان دهید که این سری برای هر x حقیقی به تابع $\sin x$ همگراست.

۵. حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n) - \ln(k)}{\sqrt{nk}}.$$

موفق باشید.

به نام او و برای او

پاسخ سؤال‌های امتحان پایان ترم

ریاضی عمومی ۱ (پاییز ۹۳)

① [۲۰ نمره]

(الف) [۱۰ نمره]

۴ نمره $\left\{ \quad \frac{2x}{1-x^4} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \right.$

۲ نمره $\left\{ \quad A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = 1,\ D = 0 \right.$

۴ نمره $\left\{ \quad \int \frac{2x}{1-x^4}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C \right.$

(ب) [۱۰ نمره]

۴ نمره $\left\{ \quad I = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = -e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x\,dx}_{dv} \right.$

۴ نمره $\left\{ \quad = -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{I} \right.$

بنابراین،

۲ نمره $\left\{ \quad I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) \right.$

---

② [۲۰ نمره] هرگاه $f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt$، داریم $f'(x) = g(b(x))b'(x) - g(a(x))a'(x)$.

در مسئلهٔ داده شده داریم $b(x) = x$ ، $a(x) = \frac{x}{2}$ ، $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. پس:

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sin x - \sin\frac{x}{2}}{x}$$

تابع $\sin(x)$ در بازهٔ $[0, \frac{\pi}{3}]$ اکیداً صعودی است، پس به ازای هر $x \in (0, \frac{\pi}{3})$، $\sin x > \sin\frac{x}{2}$ و در نتیجه $f'(x) > 0$. بنابراین f در بازهٔ $[0, \frac{\pi}{3}]$ اکیداً صعودی است و ماکسیمم آن در انتهای بازه، یعنی $\frac{\pi}{3}$، رخ می‌دهد.

[۲۰ نمره] ③

[۱۰ نمره] (الف) برای هر $x\in\mathbb{R}$، با توجه به بسط تیلور مرتبهٔ اول همراه با جملهٔ خطا داریم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^c$$

که در آن c عددی بین ۰ و x است.

چون همواره $\frac{x^2 e^c}{2}\geqslant 0$، پس $e^x \geqslant 1+x$.

[۱۰ نمره] (ب) با توجه به قسمت (الف) برای $x>-1$ داریم $x=\ln e^x \geqslant \ln(1+x)$.

پس $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant \frac{1}{n^2}$. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ همگراست.

[۲۰ نمره] ④

[۱۰ نمره] (الف)

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots$$

[۱۰ نمره] (ب) قرار دهید:

$$S_m(x)=\sum_{n=0}^{m} \frac{\sin^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$x_0\in\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. با توجه به خطای تقریب چندجمله‌ای تیلور داریم: ۵ نمره

$$|\sin(x_0)-S_m(x_0)|=\frac{\sin^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\left|x_0-\frac{\pi}{4}\right|^{m+1}$$

که در آن ξ عددی بین x_0 و $\frac{\pi}{4}$ است.

چون همواره $|\sin^{(m+1)}(\xi)|\leqslant 1$، پس ۵ نمره

$$|\sin(x_0)-S_m(x)|\leqslant \frac{|x_0-\frac{\pi}{4}|^{m+1}}{(m+1)!}$$

چون $\lim_{m\to\infty}\frac{|x_0-\frac{\pi}{4}|^{m+1}}{(m+1)!}$، پس

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x_0)=\sin(x_0)$$

⑤ [۲۰ نمره]

۱۰ نمره

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n)-\ln(k)}{\sqrt{nk}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{n}{k}\right)\sqrt{\frac{n}{k}}$$

$$=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

۱۰ نمره

$$\left[u=\sqrt{x}\quad,\ du=\frac{1}{۲\sqrt{x}}\right]=-۴\int_0^1 \ln u\ du$$

$$[\text{چون انتگرال ناسره است}]=-۴\lim_{\varepsilon\to ۰}\int_{\varepsilon}^{1}\ln u\ du$$

$$=-۴\lim_{\varepsilon\to ۰}\left(u\ln u-u\Big|_{u=\varepsilon}^{1}\right)$$

$$=-۴\lim_{\varepsilon\to ۰}\left(-1-\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon\right)$$

$$=۴$$

امتحان پایان ترم ریاضی ۱ — دانشگاه شریف

مورخ: ۹۴/۳/۱۷ طول امتحان: سه ساعت تعداد سوال: ٦ عدد

توجه: برگه سوالات را نیز برگردانید. کسانی که رعایت نکنند جریمه خواهند شد.

۱) انتگرال

$$\int_1^e x^3(\ln x)^2\,dx$$

را به روش جزء به جزء محاسبه کنید.

---

۲) الف) کسر زیر را به کسرهای جزئی تجزیه کنید (توجه کنید که عامل $x^2+6x+10$ تجزیه‌ناپذیر است):

$$\frac{100}{x^2\left(x^2+6x+10\right)}$$

ب) انتگرال زیر از کسر جزئی داده شده را با تغییر متغیر مناسب محاسبه کنید:

$$\int_{-3}^{\infty} \frac{6x+26}{(x^2+6x+10)^2}\,dx$$

---

۳) شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری

$$\sum \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}$$

را بدست آورید.

---

۴) همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید:

$a)\quad \sum \frac{(2n)!\,6^n}{(3\,n)!}$ $\qquad$ $b)\quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

ادامه در پشت

$c)\quad \sum \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})$ $\qquad\qquad$ d) $\quad \sum \frac{1}{n(\ln n)^5}$

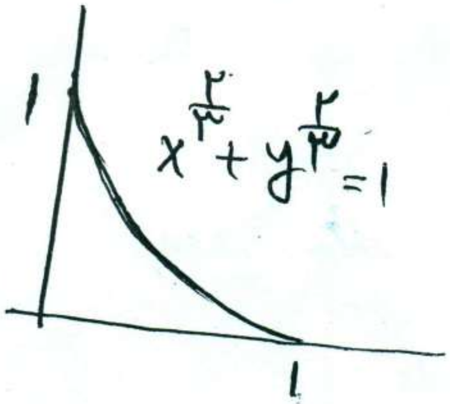
---

۵) تابع $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ را بصورت یک سری توانی حول مبداء بسط داده و بازه بازی که بسط بر آن معتبر است را مشخص کنید. سپس با استفاده از آن بسط مقدار $f^{(12)}(0)$ را بدست آورید.

---

۶) الف) قسمتی از خم $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ که در ربع اول صفحه واقع است را حول محور x دوران می‌دهیم. مطلوب است مساحت رویه حاصل از دوران. <u>راهنمایی</u>: آیا اگر dx را از ds خارج کنیم انتگرال موردنظر راحت محاسبه می‌شود و یا اگر در عوض dy را خارج کنیم؟.

ب) طول خم معرفی شده در قسمت (الف) را محاسبه کنید.



به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ: ۹۵/۱۰/۳۰
شماره: ....
پیوست: ....

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۳۰)

۲۲–۰۱۵

نیمسال اوّل ۹۶–۹۵

مدّت امتحان: ۳ ساعت

- این امتحان شامل ٦ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچهٔ امتحانی بنویسید و در هر برگهٔ دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.
- در طول جلسهٔ امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx$

(ب) $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx$

(ج) $\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

سؤال ۲. فرض کنید $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$. نشان دهید $c\in[0,1]$ موجود است طوری که $f(c)=c$.

سؤال ۳. (الف) حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به مثلثی در صفحهٔ xy به رئوس $(1,0)$، $(2,1)$ و $(3,0)$ حول محور y را بیابید.

(ب) طول منحنی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{x^2}\sqrt{5t^3+2t}\,dt$ از $x=1$ تا $x=2$ را بیابید.

سؤال ۴. با استفاده از انتگرال معین مقدار حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-0}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n-1)^2}}\right)$$

سؤال ۵. برای هر یک از سری‌های داده شده در زیر، مشخص کنید کدام همگرای مطلق است، کدام همگرای مشروط است و کدام واگرا.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{-n}$

(ج) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n\ln n)\sqrt{\ln(\ln n)}}$

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

سؤال ۶. با استفاده از سری هندسی، مجموع سری عددی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

توزیع نمره.
سؤال ۱: ۶+۷+۷=۲۰ نمره، سؤال ۲: ۱۰ نمره،
سؤال ۳: ۱۰+۱۰=۲۰ نمره، سؤال ۴: ۱۰ نمره،
سؤال ۵: ۱۰+۷+۶+۷=۳۰ نمره، سؤال ۶: ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره

به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

حل مسائل امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱
۹۵/۱۰/۳۰

سؤال ۱: (الف) قرار می‌دهیم $\tan^{-1}(\sqrt{x})=u$ و $dx=dv$. در این صورت $du=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$ و می‌توانیم فرض کنیم $x=v$. در نتیجه

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx = x\tan^{-1}(\sqrt{x})-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.$$

حال اگر $\sqrt{x}=t$، آنگاه $x=t^2$ و لذا $dx=2tdt$. پس

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx &= x\tan^{-1}(\sqrt{x})-\frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t^2}(2tdt)\\ &= x\tan^{-1}(\sqrt{x})-\int\frac{t^2}{1+t^2}dt\\ &= x\tan^{-1}(\sqrt{x})-\int dt+\int\frac{1}{1+t^2}dt\\ &= x\tan^{-1}(\sqrt{x})-t+\tan^{-1}t+C\\ &= x\tan^{-1}(\sqrt{x})-\sqrt{x}+\tan^{-1}(\sqrt{x})+C\\ &= (1+x)\tan^{-1}(\sqrt{x})-\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

(ب) اگر $x=3\tan t$، آنگاه $dx=3(1+\tan^2 t)dt$ و لذا

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx &= \int\frac{\sqrt{9+9\tan^2 t}}{3^4\tan^4 t}(3(1+\tan^2 t)dt)\\ &= \int\frac{\frac{3}{\cos t}}{3^4\frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}\left(\frac{3}{\cos^2 t}dt\right)\\ &= \frac{1}{9}\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt.\end{aligned}$$

حال با فرض $\sin t=u$ به دست می‌آوریم $\cos tdt=du$، پس

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx &= \frac{1}{9}\int\frac{1}{u^4}du\\ &= -\frac{1}{27}\frac{1}{u^3}+C\\ &= -\frac{1}{27}\frac{1}{\sin^3 t}+C\\ &= -\frac{1}{27}\frac{1}{\sin^3(\tan^{-1}(\frac{x}{3}))}+C\\ &= -\frac{1}{27}\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}\right)^3+C.\end{aligned}$$

(ج) می‌نویسیم

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

و به دست می‌آوریم

$$\begin{cases}B+C=0\\ A-B-2C+D=1\\ B+C-2D=-2\\ A-B+D=-1\end{cases}$$

که این نیز ایجاب می‌کند $A=-1$، $B=1$، $C=-1$ و $D=1$. پس

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx &= \int\frac{-1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{1}{x-1}dx\\ &\quad+\int\frac{-x+1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{1}{x-1}+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+C. \blacksquare\end{aligned}$$

سؤال ۲: با توجه به فرض می‌توانیم بنویسیم

$$\int_0^1(f(x)-x)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

از طرفی دیگر، چون f تابعی پیوسته است پس بنابر قضیهٔ مقدار میانی برای انتگرال، $c\in[0,1]$ موجود است طوری که

$$\int_0^1(f(x)-x)dx=(1-0)(f(c)-c)=f(c)-c.$$

در نتیجه $f(c)-c=0$ و لذا $f(c)=c$. $\blacksquare$

سؤال ۳: (الف) مثلث داده شده از تقاطع دو خط به معادلات $y=x-1$ و $y=-x+3$ با محور x به دست می‌آید. پس در واقع می‌خواهیم حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به محور x و زیر منحنی تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & : 1\le x\le 2\\ -x+3 & : 2\le x\le 3\end{cases}$$

حول محور y را محاسبه کنیم. حجم این جسم، V، نیز برابر است با

$$V = 2\pi\int_1^3 xf(x)dx$$

$$= 2\pi\left(\int_1^2 xf(x)dx + \int_2^3 xf(x)dx\right)$$

$$= 2\pi\left(\int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^3 x(-x+3)dx\right)$$

$$= 2\pi\left(\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{-1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_2^3\right)$$

$$= 2\pi\left(\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-9+\frac{27}{2}\right)-\left(\frac{-8}{3}+6\right)\right)$$

$$= 4\pi.$$

(ب) با استفاده از قاعدهٔ زنجیری و قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$f'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(2x\sqrt{5x^6+2x^2}\right).$$

در نتیجه

$$1+f'(x)^2 = 1+\frac{5}{4}\left(4x^2(5x^6+2x^2)\right)$$

$$= 1+25x^8+10x^4$$

$$= (1+5x^4)^2.$$

پس طول منحنی مطلوب از $x=1$ تا $x=2$، L، برابر است با

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx$$

$$= \int_1^2 (1+5x^4)dx$$

$$= (x+x^5)\Big|_1^2$$

$$= (2+32)-(1+1)$$

$$= 32. \ \blacksquare$$

سؤال ۴: حد مطلوب برابر است با

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(i-1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}0 = \frac{\pi}{6}. \ \blacksquare$$

سؤال ۵: (الف) برای راحتی قرار می‌دهیم $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$. پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که a_nها مثبت‌اند.

ابتدا همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

را بررسی می‌کنیم. اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$$

در نظر بگیریم، آنگاه

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0.$$

این نیز نتیجه می‌دهد که f تابعی اکیداً نزولی است و لذا برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f(n+1)<f(n)$ یا $a_{n+1}<a_n$. یعنی اینکه دنبالهٔ (a_n)، دنباله‌ای نزولی است. هم‌چنین،

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = 0.$$

پس بنابر آزمون سری‌های متناوب، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست.

حال همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

را بررسی می‌کنیم. سری مذکور، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی واگراست، زیرا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

در نتیجه، سری داده شده همگرای مشروط است.

(ب) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{-n}.$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که a_nها مثبت‌اند. چون

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}-1\right)^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-1\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{e-1} < 1,$$

پس بنابر آزمون ریشه، سری داده شده همگرای مطلق است.

(ج) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n = \frac{1}{(n \ln n)\sqrt{\ln(\ln n)}} \qquad (n \geq 3).$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که a_nها مثبت‌اند.
اکنون تابع $f : [3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f(x) = \frac{1}{(x \ln x)\sqrt{\ln(\ln x)}}$$

در نظر می‌گیریم. به وضوح f تابعی مثبت، پیوسته و نزولی است. برای $a \geq 3$، انتگرال

$$\int_3^a f(x)dx = \int_3^a \frac{1}{(x \ln x)\sqrt{\ln(\ln x)}} dx$$

را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، اگر $\sqrt{\ln(\ln x)} = u$، آنگاه $\ln(\ln x) = u^2$ و لذا

$$\frac{1}{x \ln x} dx = 2u du.$$

در نتیجه

$$\int_3^a f(x)dx = \int_{\sqrt{\ln(\ln 3)}}^{\sqrt{\ln(\ln a)}} \frac{2u}{u} du$$
$$= 2\left(\sqrt{\ln(\ln a)} - \sqrt{\ln(\ln 3)}\right).$$

پس

$$\lim_{a \to \infty} \int_3^a f(x)dx = \infty$$

و در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده واگراست.

(د) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌باشد. چون

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4} < 1,$$

پس بنابر آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا و در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است. ■

<u>سؤال ۶:</u> توجه می‌کنیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1).$$

با دو بار مشتق‌گیری نسبت به x از طرفین تساوی بالا به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1 < x < 1),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (-1 < x < 1).$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (-1 < x < 1).$$

اکنون در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x = \frac{-1}{2}$ و سپس طرفین تساوی به دست آمده را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{16}{27},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^{n}} = \frac{8}{27}. \blacksquare$$

به نام خدا

تاریخ: ۱۳۹۶/۰۴/۰۱
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

۲۲–۰۱۵

نیمسال دوم ۹۶–۹۵

سؤال ۱. نمودار تابع $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x)=[(x^2+1)(x+2)]^{-\frac{1}{2}}$$

راحول محور x ها دوران می دهیم. حجم ناحیه حاصل رامحاسبه کنید.

(۲۰ نمره)

سؤال ۲. تابع $f:]1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x)=\int_x^{2x}\exp(-t^2)\,dt$$

را در نظر بگیرید.

(الف) مشتق تابع f رامحاسبه کنید.

(۱۰ نمره)

(ب) نشان دهید $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

(۱۰ نمره)

سؤال ۳. (الف) نشان دهید انتگرال ناسره $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ همگرا ست و مقدارش را محاسبه کنید.

(۱۰ نمره)

(ب) حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\sqrt{\frac{i}{n-i}}$$

(۱۰ نمره)

ادامه سؤالات در پشت برگه

سؤال ۴. همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید:

(الف)

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n\log n}$$

(۱۰ نمره)

(ب)

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{۲}$$

(۱۰ نمره)

سؤال ۵. دنباله $\{a_n\}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a_n = \int_{\circ}^{۱} \sin^n(x)\,dx, \qquad n = ۱,۲,۳,\cdots$$

(الف) نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n = \circ$

(۱۰ نمره)

(ب) نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}a_n$ همگرا ست.

(۱۰ نمره)

سؤال ٦. سری توانی $\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{x^k}{(k+۱)!}$ را در نظر بگیرید.

(الف) مقدار $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ را محاسبه کنید و سپس فاصلهٔ همگرایی سری توانی فوق را بیابید.

(۱۰ نمره)

(ب) مشخص کنید (در داخل فاصلهٔ همگرایی) سری توانی فوق برابر با کدام تابع می باشد.

(۱۰ نمره)

راه حل سوالات پایان ترم　　　　نیمسال دوم ۹۶-۹۵

ریاضی عمومی ۱

۱-

$$V = \text{حجم} = \int_0^1 \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+2)}$$

اما می‌دانیم: $\frac{1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2}$ که با محاسبه اعداد A ، B ، C داریم:

$$A = \frac{-1}{5}, \quad B = \frac{2}{5}, \quad C = \frac{1}{5}$$

سپس داریم:

$$V = \frac{\pi}{5}\left(\int_0^1 \frac{-x+2}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+2} \right)$$

$$V = \frac{\pi}{5}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x+2} \right)$$

$$V = \frac{\pi}{5}\left(-\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1 + 2\Big[\operatorname{Arctg}(x)\Big]_0^1 + \Big[\log(x+2)\Big]_0^1 \right)$$

$$V = \frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi}{2} + \log 3 - \frac{3}{2}\log 2 \right)$$

۲- (الف)

$$f'(x) = 2\exp(-(2x)^2) - 1\exp(-x^2) = 2\exp(-4x^2) - \exp(-x^2)$$

(ب) مطابق قضایا می‌دانیم:

$$f(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)\,dt = (2x - x)\exp(-c^2)$$

که در آن c بین x و $2x$ می‌باشد بنابراین

$$0 \leq x e^{-4x^2} \leq f(x) \leq x e^{-x^2}$$

برای هر $x \geq 1$.

اما با توجه به خواص تابع exp (یا استفاده از دستور هوپیتال) می‌دانیم:

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

راه حل (های) دیگری نیز وجود دارد.

۳ - (الف)

$$I=\int_{0^+}^{1^-}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_{0^+}^{1^-}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}=\int_{0^+}^{1^-}\frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

با تغییر متغیر $u=2x-1$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{-1^+}^{1^-}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\Big[\mathrm{Arcsin}(u)\Big]_{-1^+}^{1^-}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\pi$$

راه دیگر: با تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ نیز می‌توان انتگرال را محاسبه نمود.

(ب) با توجه به قضایا می‌دانیم:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}(1-\frac{i}{n})}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\sqrt{\frac{i}{n-i}}$$

۴ - (الف) توابع $x\mapsto \log x$ و $x\mapsto x$ برای $x\geq 1$، صعودی هستند، بنابراین تابع نامنفی $x\mapsto\frac{1}{x\log x}$ (برای $x\geq 1$) نزولی است و مطابق قضیه، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ همگرا است $\Leftrightarrow$ انتگرال ناسره $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log x}$ همگرا است.

از طرف دیگر داریم: $u=\log x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log x}=\int_{\log 2}^{\infty}\frac{du}{u}=\Big[\log u\Big]_{\log 2}^{\infty}=\infty$$ (واگرا است)

نتیجتاً، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ واگرا است.

(ب) با توجه به خواص تابع وما (یا استفاده از دستور هوپیتال)، برای هر $\alpha > 0$، داریم:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}} = 0$$

بنابراین، برای $x > 0$ به اندازه کافی بزرگ، داریم:

$$0 \leq \frac{\log x}{x^{\alpha}} \leq 1$$

سپس، با انتخاب $\alpha = \frac{1}{3}$، عدد طبیعی N_0 چنان موجود است که

$$n \geq N_0 \implies \left(\frac{\log n}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{3}}}$$

هم اکنون، با توجه به اینکه سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{3}}}$ همگراست (مثلاً با استفاده از آزمون انتگرال)، نتیجه خواهیم گرفت که سری $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^2$ همگراست.

راه حل (های) دیگری نیز وجود دارد.

۵ - (الف) با توجه به خواص تابع $\sin$ می دانیم (مثلاً با استفاده از قضیه مقدار میانگین)

$$\forall x \in [0, 1]: \quad 0 \leq \sin x \leq x$$

در این صورت داریم

$$0 \leq a_n = \int_0^1 \sin^n x \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

نتیجتاً، خواهیم داشت:

$$\lim_{n \to} a_n = 0$$

(ب) با توجه به خواص تابع سینوس می‌دانیم: $\forall x \in [0,1] : 0 \leqslant \sin x \leqslant 1$

بنابراین $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی خواهد بود، چون

$$\forall x \in [0,1] : 0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x \Longrightarrow \underbrace{\int_0^1 \sin^{n+1} x \, dx}_{a_{n+1}} \leqslant \underbrace{\int_0^1 \sin^n x \, dx}_{a_n}$$

در اینصورت با توجه به قضیه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگراست (با استفاده از قسمت (الف)).

<u>راه حل</u> دیگری نیز وجود دارد.

۶- (الف) بدیهی است داریم ($[x]$ = جزء صحیح عدد x):

$$n! = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times \left[\tfrac{n}{2}\right]}_{I} \times \underbrace{\left(\left[\tfrac{n}{2}\right]-1\right) \times \cdots \times 1}_{II} \geqslant I \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

سپس، خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

بنابراین شعاع همگرایی سری توانی برابر است با

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{(k+1)!}}} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{(k+1)!} \geqslant \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$$

بنابراین $\rho = \infty$ و نتیجتاً فاصله همگرایی سری توانی برابر $]-\infty, +\infty[$ می‌باشد.

(ب) می‌دانیم که سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ برابر تابع e^x می‌باشد (مثلاً با استفاده از تقریب توابع با چندجمله‌ای تیلور آن). حال اگر $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ را با $f(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$x f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) - 1 = e^x - 1$$

بنابراین برای x مخالف صفر، مقدار $f(x)$ برابر $\frac{e^x - 1}{x}$ می‌باشد.

از طرف دیگر، بوضوح، برای $x = 0$ مقدار سری توانی برابر $f(0) = 1$ می‌باشد.

<u>راه حل</u> دیگری نیز وجود دارد.

بسمه تعالی

ریاضیات عمومی ۱ | امتحان میان ترم | تاریخ پنجشنبه ۲ آذر ۱۳۹۶

مدت: ۳ ساعت

۱ فرض کنید z یک عدد مختلط باشد به‌طوری‌که $|z| = 1$. نشان دهید دو عدد مختلط w با شرط $|w| = 1$ وجود دارند به‌طوری‌که $z = \frac{w}{\bar{w}}$. (۱۰ نمره)

۲ فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد به‌طوری‌که $f(0) = f(1)$.

الف) برای هر عدد صحیح مثبت n نشان دهید نقطهٔ a وجود دارد به‌طوری‌که $f(a) = f(a + \frac{1}{n})$. (۱۰ نمره)

ب) فرض کنید $L > 0$ یک عدد غیرصحیح و $f(x) = \sin^2(\pi Lx) - x\sin^2(\pi L)$. نشان دهید $f(0) = f(1)$. آیا نقطهٔ a وجود دارد به‌طوری‌که $f(a) = f(a + \frac{1}{L})$؟ (۱۰ نمره)

۳ الف) مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{3\tan x - \tan 3x}$ را به‌دست آورید. (۱۰ نمره)

ب) تابع f سه بار مشتق‌پذیر است و مشتق سوم آن پیوسته است. نشان دهید

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + 2f(x - h) - f(x - 2h)}{2h^3} = f'''(x).$$

(۱۰ نمره)

۴ الف) مقدار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را به‌کمک چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ سوم $\sin x$ حول صفر تقریب بزنید و خطای آن را تخمین بزنید. (۱۰ نمره)

ب) مقدار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را به‌کمک چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ سوم $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ حول صفر تقریب بزنید و خطای آن را تخمین بزنید.

(در هر دوقسمت سؤال، نوشتن عبارت تقریب کفایت می‌کند، لازم به محاسبه آن نیست). (۱۰ نمره)

۵ فرض کنید $G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x^2 - 2y = \cos(y - 4) \right\}$.

الف) نشان دهید G نمودار تابعی مانند $y = f(x)$ است که دامنه‌اش کل $\mathbb{R}$ است. (۶ نمره)

ب) نشان دهید تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است و برای $x \geq 0$ اکیدا صعودی و برای $x \leq 0$ اکیدا نزولی است. (۶ نمره)

ج) نشان دهید $f(3) = 4$، $f'(3) = 3$، $f''(3) = \frac{11}{2}$ (۶ نمره)

د) معادلهٔ خط مماس بر G در نقطهٔ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید. (۶ نمره)

ه) فرض کنید $\begin{bmatrix} 2{,}9 \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \in G$. تقریب‌های درجهٔ ۱ و ۲ برای $\tilde{y}$ را محاسبه کنید. (۶ نمره)

(در پاسخ به هر کدام از قسمت‌های سؤال ۵ می‌توانید از قسمت‌های قبلی این سؤال استفاده کنید).

به‌نام خدا

تاریخ: ۹۷/۱۰/۲۰
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۴)

مدّت امتحان: ۳ ساعت

۲۲–۰۱۵

نیمسال اوّل ۹۸–۹۷

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچهٔ امتحانی بنویسید و در هر برگهٔ دفترچه فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- در پشت جلد دفترچهٔ امتحانی که مشخصات خود را نوشته‌اید چیزی ننویسید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.

سؤال ۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{(n^2+1^2)^2}+\frac{1}{(n^2+2^2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n^2+n^2)^2}\right)$

(ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)}$

سؤال ۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

(ب) $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$

(ج) $\int \frac{1}{3+2\cos x}dx$

سؤال ۳. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right) \qquad (a>1)$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$

سؤال ۴. ناحیهٔ محدود به منحنی $y=\ln x$، محور x، خط $x=1$ و خط $x=e$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از این دوران را بیابید.

سؤال ۵. (الف) شعاع همگرایی و بازهٔ همگرایی (فاصلهٔ همگرایی) سری توانی زیر را به دست آورید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-2x)^n}{n}.$$

(ب) سری تیلور تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ را حول نقطهٔ ۱ به دست آورید و سپس حاصل سری زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}$$

سؤال ٦. فرض کنید $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت، درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) اگر به‌ازای هر $x\in[0,1]$، $\int_0^1 f(xt)dt=0$، آنگاه f تابع ثابت صفر است.

(ب) اگر f روی $[0,1]$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $c\in(0,1)$ وجود دارد با این ویژگی که

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{f'(c)}{2}.$$

توزیع نمره. سؤال ۱: ۵+۵ نمره، سؤال ۲: ۵+۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۳: ۵+۵+۵ نمره، سؤال ۴: ۱۵ نمره، سؤال ۵: ۱۰+۱۰ نمره، سؤال ٦: ۸+۷ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره

EbiMath.com

بسمه تعالی

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی۱، دی ۹۸ — زمان: ۳ ساعت

در سوال‌های چند قسمتی می‌توانید از نتیجه قسمت‌های بالاتر اگر چه آن را حل نکرده باشید در قسمت‌های پایین‌تر استفاده کنید.

۱. همه نقاط بحرانی تابع زیر را روی کل $\mathbb{R}$ بدست آورده و نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی آن را مشخص کنید. (۱۰ نمره)

$$F(x) = \int_{-2}^{x^2-1} \sqrt[3]{t^3 - 3t^2}\, dt$$

۲. الف. نشان دهید $0 \leq \int_0^1 \frac{1 - t^{1/n}}{1+t}\, dt \leq \frac{1}{n+1}$ (۵ نمره)

ب. فرض کنید $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dt$. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} n a_n = \ln 2$. (۱۰ نمره)

ج. با ذکر دلیل، همگرایی سری $\sum a_n$ را بررسی کنید. (۵ نمره)

۳. انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{(1+\tan x)\tan x}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۴. نشان دهید انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\, dx$ همگرا است. (۱۰ نمره)

۵. حجم ظرفی به ارتفاع π که مساحت مقطع افقی آن در ارتفاع $0 \leq t \leq \pi$ برابر $1 + \sin^5 t$ است را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۶. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ همگرا است و مقدار آن را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۷. الف. نشان دهید $f(x) = \frac{1}{x}$ روی $\mathbb{R} - \{0\}$ تحلیلی است و سری تیلور آن را حول نقطه ۱۰ بنویسید. (۱۰ نمره)

ب. نشان دهید $f(x) = \ln|x|$ روی $\mathbb{R} - \{0\}$ تحلیلی است و سری تیلور آن را حول نقطه ۱۰ بنویسید. (۱۰ نمره)

ج. مقدار $\ln(11) - \ln(10)$ را با دقت یک‌هزارم محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

موفق باشید

$$F(x)=\int_{-2}^{x^2-1}\sqrt[3]{t^3-3t^2}\,dt \Rightarrow F'(x)=2x\sqrt[3]{(x^2-1)^3-3(x^2-1)^2}=2x\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x^2-4)}$$ 0/2 نمره (1)

$$F'(x)=0 \Rightarrow 2x\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x^2-4)}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x^2-1)^2=0 \\ (x^2-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{باتکرار یک} \\ x=\pm 1 & \text{باتکرار دو} \\ x=\pm 2 & \text{باتکرار یک} \end{cases}$$ 0/5 نمره

روش اول تعیین نقاط بحرانی با آزمون مشتق اول:

x		-2		-1		0		1		2	
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$x=-2$ و $x=2$ نقاط مینیمم موضعی

0/3 نمره $\rightarrow$ $x=0$ نقطه ماکسیمم موضعی

توجه داریم نمی‌توان از آزمون مشتق دوم در یافتن نوع نقاط بحرانی استفاده کرد، چون که در این نقاط مشتق دوم وجود ندارد:

$$F''(x)=2\sqrt[3]{(x^2-1)^3-3(x^2-1)^2}+2x\,\frac{3\times 2x(x^2-1)^2-6\times 2x(x^2-1)}{3\sqrt[3]{\left((x^2-1)^3-3(x^2-1)^2\right)^2}}$$

$$=2\sqrt[3]{(x^2-1)^3-3(x^2-1)^2}+\frac{4x^2(x^2-1)\left[x^2-3\right]}{\sqrt[3]{\left((x^2-1)^3-3(x^2-1)^2\right)^2}}$$

درصورت استفاده از آزمون مشتق دوم در یافتن ماکسیمم موضعی $x=0$، حداکثر 0/8 نمره داده شود.

$F''(0)<0 \rightarrow$ $x=0$ نقطه ماکسیمم موضعی است

ولی F'' در $x=\pm 2$ و $x=\pm 1$ وجود ندارد.

۲) الف) برای $0\leq t\leq 1$ داریم:

$$0\leqslant \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\leqslant \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+0}=1-t^{\frac{1}{n}}$$ ۲ نمره

$$\Rightarrow \int_0^1 0\,dt\leqslant \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt\leqslant \int_0^1 \left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)dt \Rightarrow 0\leqslant \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt\leqslant \left[t-\frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right]_0^1$$ ۱ نمره ۱ نمره

$$\Rightarrow 0\leqslant \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt\leqslant 1-\frac{n}{n+1} \Rightarrow \quad 0\leqslant \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt\leqslant \frac{1}{n+1}$$ ۱ نمره

ب)

$$a_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx \xlongequal[\frac{du}{dx}=nx^{n-1}]{u=x^n} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{u}\,du}{1+u} \Rightarrow n a_n=\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u}du \quad (*)$$ 2

$$\int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt=\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt-\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt=\ln(1+t)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt=\ln 2-\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt$$ 4

با استفاده از قسمت (الف) داریم:

$$0\leqslant \ln 2-\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt\leqslant \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\ln 2\leqslant -\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt\leqslant -\ln 2+\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln 2-\frac{1}{n+1}\leqslant \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt\leqslant \ln 2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \ln 2-\frac{1}{n+1}\leqslant n a_n\leqslant \ln 2$$ 3

با استفاده از قضیه فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} n a_n=\ln 2$$ 1

ج) بنابر قسمت (ب) دیدیم که $\lim_{n\to\infty} n a_n=\ln 2$ در نتیجه:

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\ln 2<\infty$$ 2

با توجه به رابطه بالا و اینکه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است (1) و با استفاده از آزمون حد نسبت (1) می‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum a_n$ واگرا است. (1)

③

$$\int \frac{dx}{\tan x\,(1+\tan x)} \xrightarrow[\frac{du}{dx}=1+\tan^2 x]{u=\tan x} \int \frac{du}{(1+u^2)\,u\,(1+u)} \quad ②$$

$$\frac{1}{u(1+u)(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} + \frac{Cu+D}{1+u^2} \longrightarrow \begin{cases} \boxed{A=1} \; ① & \leftarrow \text{ضریب ثابت} \\ A+B+D=0 & \leftarrow \text{ضریب } u \\ A+C+D=0 & \leftarrow \text{ضریب } u^2 \\ A+B+C=0 & \leftarrow \text{ضریب } u^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B+D=-1 \\ C+D=-1 \\ B+C=-1 \end{cases} \xrightarrow{D=-1-B} \begin{cases} C-B=0 \\ B+C=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{2}} \; ①, \quad \boxed{B=-\frac{1}{2}} \; ①$$

$$\boxed{D=-\frac{1}{2}} \; ①$$

$$\int \frac{du}{u(1+u)(1+u^2)} = \int \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1+u}{1+u^2}\,du$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\tan^{-1}u - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + C \quad ②$$

$$= \ln|\tan x| - \frac{1}{2}\ln|1+\tan x| - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x) - \frac{1}{2}x + C \quad ②$$

$$= \ln\left|\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}}\right| + \frac{1}{2}\ln|\cos x| - \frac{1}{2}x + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan x\,\sqrt{|\cos x|}}{\sqrt{1+\tan x}}\right| - \frac{1}{2}x + C$$

(4)

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx + \int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$$ 2 نمره

نشان می‌دهیم که $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ همگراست. برای هر x داریم $e^{-x^2} > 0$ و در نتیجه

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} < \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx < \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 0-(-1) = 1$$

2

پس با استفاده از آزمون مقایسه، $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ همگراست. 2

نشان می‌دهیم که $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ همگراست. با استفاده سری تیلر e^{-x^2} داریم:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

$$1-e^{-x^2} = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + \cdots \Rightarrow \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1$$ 2

با توجه به تعریف حد فوق برای تابع $\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ در $x=0$، این تابع در یک همسایگی محذوف $x=0$ کراندار است. در نتیجه

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$$ 2

موجود است.

0/2 1 2 5

$$ج = \int_0^{\pi} (1+\sin^5 t)\, dt = \int_0^{\pi} dt + \int_0^{\pi} \sin^5 t\, dt = \pi + \int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)^2 \sin t\, dt$$

$$\overset{u=\cos t}{\underset{\frac{du}{dt}=-\sin t}{=\!=}} \pi - \int_1^{-1} (1-u^2)^2\, du = \pi + \int_{-1}^{1} (1-2u^2+u^4)\, du$$

2 1

$$= \pi + u\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}u^3\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{5}u^5\Big|_{-1}^{1} = \pi + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \pi + \frac{16}{15}$$

2

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} \overset{③}{=} \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \overset{②}{=} 1-\frac{1}{k+1}$$ ⑥

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \overset{②}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} \overset{①}{=} \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) \overset{②}{=} 1$$

اگر با مقایسه $\frac{1}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2}$ $(n\in N)$ و توجه به همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ نتیجه گرفته شود ولی مقدار آن محاسبه نشود، 5 نمره از 10 نمره داده شده است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n}$$

توجه داریم که ابتدا باید سری به صورت حد دنباله مجموع جزئی نوشته شود یعنی

در پس از محاسبه $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2+n}$، حد $k\to\infty$ محاسبه شود.

از راه حل های مشابه زیر به تناسب نمره کسر شده:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\cancel{\cdots} = 1$$

۷) الف) فرض کنیم $a \in \mathbb{R}-\{0\}$:

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{x-a+a}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{x-a}{a}\right)+1}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\left(\frac{a-x}{a}\right)}$$ 1

توجه داریم که برای هر $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$ 1

2 ← لذا برای هر x که $-1<\frac{a-x}{a}<1$ - یا به عبارت بهتر برای $0<x<2a$ (اگر $a>0$) یا $2a<x<0$ (اگر $a<0$)

داریم:

$$f(x)=\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{a-x}{a}\right)+\left(\frac{a-x}{a}\right)^2+\left(\frac{a-x}{a}\right)^3+\cdots\right]$$

در نتیجه برای $0<x<2a$ $(a>0)$ یا $2a<x<0$ $(a<0)$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a^3}(x-a)^2-\frac{1}{a^4}(x-a)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n \quad \circledast$$

لذا تابع f روی $\mathbb{R}-\{0\}$ تحلیلی است. 2

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n$$ 2

(توجه داریم که برای $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ، $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ ، ... ، $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ و در نتیجه $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}$. یعنی سری سمت چپ تساوی بالا، واقعاً همان سری تیلور تابع f حول نقطه $a\neq 0$ است).

سری تیلور f حول نقطه 10:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^{n+1}}(x-10)^n$$ 2

برای راه حل های دیگر به تناسب زیر نمره داده شده است:

نوشتن سری تیلور ← 4

بیان شعاع همگرایی سری تیلور در نقطه دلخواه ← 2

اثبات همگرایی سری تیلور در نقطه دلخواه به تابع در همسایگی ← 4

ب) از قسمت قبل دیدیم که تابع $g(x)=\frac{1}{x}$ روی $\mathbb{R}-\{0\}$ تحلیلی است و

$$g(x)=\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n.$$

توجه داریم $f(x)=\ln|x|=\int g(x)\,dx$ 1 . در نتیجه بنا به قضیه کتاب چون g تحلیلی است تابع f روی $\mathbb{R}-\{0\}$ تحلیلی است و داریم: 2

$$f(x)=\int g(x)\,dx \overset{2}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1}+c$$ 1 1

$$\Rightarrow \ln|x| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1}+c$$

که در آن برای یافتن c، کافی است $x=a$ را جایگذاری کنیم:

$$\ln|a|=c$$ 2

در نتیجه سری تیلور f حول $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ به صورت زیر است:

$$f(x)=\ln|x|=\ln|a|+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1}$$

برای $a=10$ داریم:

$$f(x)=\ln|x|=\ln 10+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}}(x-10)^{n+1}$$ 1

ج)

$$f(11)=\ln(11)=\ln(10)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}} \Rightarrow \ln(11)-\ln(10)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}}$$ 4 1

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}}$$

$$=0.095+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}}$$ 5

در نتیجه مقدار $\ln(11)-\ln(10)$ با دقت یک هزارم برابر است با 0.095 است.

به نام خدا

آزمون پایان ترم

درس ریاضی عمومی ۱

۲۳ تیر ۹۹

دانشجویان محترم درس ریاضی عمومی یک، لطفاً قبل از پاسخ‌گویی به سؤالات که در صفحه‌ی بعد آمده است، به موارد زیر توجه فرمایید:

۱ ـ این آزمون شامل ۱۲ سؤال بوده و ۶ نمره دارد و پاسخ خود را تنها باید در سامانه‌ی درس افزار شریف cw بارگذاری نموده و از ارسال پاسخ به ایمیل دستیاران آموزشی یا ایمیل اساتید محترم درس بپرهیزید.

۲ ـ پاسخ حتماً باید در قالب یک فایل PDF با کیفیت مناسب و خوانا بارگذاری شده و نام فایل حتماً باید شماره دانشجوییِ شخص نگارنده باشد.

۳ ـ مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۸ صبح روز ۲۵ تیر است و امکان بارگذاری پاسخ با تاخیر وجود ندارد.

۴ ـ در پاسخ‌دهی به آزمون می‌توانید از کتاب آدامز و ماشین‌حساب ساده (فاقد برنامه‌نویسی) استفاده نموده و حتماً باید شخصاً به سوالات پاسخ داده و استفاده از هیچ ابزار دیگری مجاز نیست.

با آرزوی موفقیت

سوال ۱ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 نقاطی متمایز در صفحه مختلط هستند. اگر علامت «بار» به معنی مزدوج مختلط باشد، نشان‌دهید:

الف) Z_1, Z_2, Z_3 روی یک خط قرار دارند اگر و تنها اگر $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1} = \frac{\bar{Z}_3-\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2-\bar{Z}_1}$.

ب) خط گذرا از Z_1, Z_2 بر خط گذرا از Z_3, Z_4 عمود است اگر و تنها اگر $\frac{Z_2-Z_1}{\bar{Z}_2-\bar{Z}_1} + \frac{Z_4-Z_3}{\bar{Z}_4-\bar{Z}_3} = 0$.

سوال ۲ تابع $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = 2x - \ln x - 4$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان‌دهید f دقیقاً یک ریشه دارد.

ب)نشان‌دهید تابع $x + f(x)$ در هیچ فاصله‌ای حول ریشه‌ی f انقباضی نیست.

ج)عدد λ را طوری بدست‌آورید که تابع $g(x) = x+\lambda f(x)$ انقباضی شود و نشان‌دهید g فاصله‌ی $[2,3]$ را به‌توی خودش می‌برد.(g را انقباضی گوییم هرگاه $0 \le k < 1$ یافت شود که برای هر x, y داشته باشیم $|g(x)-g(y)| \le k|x-y|$).

د) به کمک تابع g ریشه‌ی f را با تقریب 10^{-3} محاسبه کنید.

سوال ۳ یک آونگ (پاندول) به طول $20cm$ را در نظر بگیرید. با استفاده از مفاهیم و ابزارهای مشتق محاسبه کنید طول آونگ چقدر افزایش یابد تا دوره‌ی تناوب آونگ حداقل ۰/۰۵ ثانیه افزایش یابد. (یادآوری: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ که در آن T دوره‌ی تناوب و L طول آونگ و g شتاب گرانش است)

سوال۴ از رودخانه‌ای به عرض a کانالی عمودی به عرض b ساخته‌شده‌است. بیشترین طول قایقی که بتواند از رودخانه وارد کانال شود چقدر است؟ (قایق به‌گونه‌ای است که می‌توان از عرض آن صرف‌نظر کرد)

سوال۵ برای هر $a > 0$ مطلوبست محاسبه‌ی حد روبه‌رو: $\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$.

سوال۶ همه‌ی مشتقات تابع $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ را در مبدأ محاسبه نموده و نمودار تابع f را روی اعداد حقیقی رسم کنید.

سوال۷ با استفاده از یک رابطه تحویل انتگرال نامعین روبه‌رو را محاسبه‌کنید: $\int (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} dx$.

سوال۸ برای هر تابع پیوسته‌ی f روی $[0,\pi]$ نشان‌دهید: $\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$.

سوال۹ می‌خواهیم برای تقریب $\int_0^x e^{-t^2}dt$ از تابع $x \arctan x$ روی بازه‌ی $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ استفاده کنیم. حداکثر خطا را تخمین بزنید.

سوال۱۰ به کمک تقریب سری تیلور مقدار $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ را با تقریب 10^{-3} محاسبه‌کنید.

سوال۱۱ انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ را محاسبه‌کنید. (راهنمایی: می‌توانید از سری‌های توانی استفاده‌کنید)

سوال۱۲ سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ را بر حسب توابع مقدماتی محاسبه‌کنید. شعاع همگرایی این سری چیست؟

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۱

EbiMath.com

سوال ۱

تابع $f(x)=\sin(x)-x\cos(x+1)$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) با استفاده از مقدار معلوم $f(x)$ در نقطهٔ 0، مقدار تقریبی $f(-\frac{1}{8})$ را با استفاده از تقریب خطی پیدا کنید. (نیازی به استفاده از ماشین حساب برای محاسبه اعشاری عبارت به دست آمده به وسیلهٔ روش تقریب خطی نیست، صرفاً عبارت به دست آمده توسط تقریب خطی را بنویسید).

(ب) نشان دهید قدرمطلق خطای محاسبهٔ قسمت (الف) کمتر یا مساوی $\frac{1}{32}$ است.

(ج) نشان دهید $f(-\frac{1}{8})$ منفی است. (استفاده از ماشین حساب مجاز نیست. راهنمایی: در صورت نیاز می‌توانید از قسمت (ب) استفاده کنید و همچنین نامساوی $\cos(1)<\frac{3}{4}$ را با مقایسه زاویه 1 بر حسب رادیان، با زوایای آشنایی که کسینوس آنها را می‌دانید ثابت کنید).

(د) نشان دهید نقطهٔ c در بازهٔ $]-1,0[$ هست به طوری که $f(c)=0$.

(ه) نشان دهید نقطهٔ d در بازهٔ $[-1,0]$ هست به طوری که $f'(d)=0$.

سوال ۲

می‌خواهیم یک لیوان استوانه‌ای شکل از مقوا بسازیم که به اندازه حجم معینی ظرفیت داشته باشد و مقدار مقوای به کار رفته در آن کمترین مقدار باشد. نسبت ارتفاع لیوان به قطر کف آن چقدر باید باشد؟

توضیح: در این سوال لیوان، مثل یک لیوان معمولی سر باز است.

سوال ۳

تابع $f(x)=\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست آورید.

(ب) به ازای چه x هایی $f(x)$ ماکسیمم موضعی می‌شود؟ (استفاده از ماشین حساب یا نرم افزارهای محاسباتی به جهت محاسبه اعشاری یک عبارت برای تعیین مثبت یا منفی بودن آن در آزمون مشتق دوم مجاز است).

سوال ۴

(الف) با استفاده از بسط مکلورن انتگرال $f(x)=\int_0^x \sin(t^2)dt$ را به صورت یک سری توانی بیان کنید.
(شکل کلی ضرایب آن را بنویسید و حداقل چهار جمله اول آن را به دست آورید).

(ب) مقدار تقریبی این انتگرال برای $x=1$ را تا 3 رقم اعشار حساب کنید.

EbiMath.com

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۱

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- در قسمت ب) و در فرمول خطا، یعنی $E = \frac{f''(c)}{2}x^2$، برای یک c مناسب بین ۰ تا x، دانشجویان c را صفر یا x قرار می‌دهند و کران بالای مربوط به f'' را محاسبه نمی‌کنند.
- در قسمت ج) و برای اثبات $f\left(-\frac{1}{8}\right) < 0$، دانشجویان از نتیجه حاصل از محاسبهٔ خطا، یعنی نامساوی $\left|f\left(-\frac{1}{8}\right) - L\left(-\frac{1}{8}\right)\right| < \frac{1}{32}$، استفاده نمی‌کنند و به‌طور مستقیم از ماشین حساب برای محاسبهٔ $L\left(-\frac{1}{8}\right)$ اقدام می‌کنند.
- اشتباه رایج دیگر استفاده از ماشین حساب برای نشان دادن $\cos 1 < \frac{3}{4}$ است.
- در قسمت د) از نتیجه قسمت ج) استفاده نمی‌کنند و فقط $f(-1) > 0$ و $f(0) = 0$ را در نظر می‌گیرند و به خطا می‌روند $\cdots$

پاسخ سوال ۱ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف)

می‌دانیم تقریب خطی $f(x)$ حول نقطهٔ $x = a$، برابر است با

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

پس برای $f(x) = \sin x - x\cos(x+1)$، حول نقطهٔ $x = 0$، تقریب خطی می‌شود

$$L(x) = f(0) + f'(0)x,$$

که با توجه به محاسبات زیر

$$f(0) = \sin 0 - 0 \cdot \cos 1 = 0,$$
$$f'(x) = \cos x - \cos(x+1) + x\sin(x+1),$$
$$\Longrightarrow \quad f'(0) = \cos 0 - \cos 1 + 0 \cdot \sin 1 = 1 - \cos 1,$$

داریم

$$L(x) = ۰ + (۱ - \cos ۱)x = (۱ - \cos ۱)x.$$

پس مقدار تقریبی $f\left(-\frac{۱}{۸}\right)$ می‌شود

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right) \approx L\left(-\frac{۱}{۸}\right) = \frac{\cos ۱ - ۱}{۸}.$$

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت ب)}}$

اگر $L(x)$ تقریب خطی $f(x)$ حول صفر و $E = f(x) - L(x)$ خطای تقریب باشد، می‌دانیم

$$E = \frac{f''(c)}{۲}x^۲, \qquad \text{برای یک } c \text{ مناسب بین } ۰ \text{ تا } x$$

پس می‌توان تخمین زیر را داشت

$$|E| \leq \frac{M}{۲}x^۲,$$

که در آن M سوپریمم $|f''|$ روی بازهٔ $[۰, x]$، برای $x > ۰$، می‌باشد. (اگر $x < ۰$ باشد، سوپریمم روی بازهٔ $[x, ۰]$ خواهد بود.)

برای $f(x) = \sin x - x\cos(x+۱)$ داریم

$$f''(x) = -\sin x + ۲\sin(x+۱) + x\cos(x+۱).$$

پس برای خطای تقریب قسمت (الف) داریم

$$|E| \leq \frac{M}{۲}\left(\frac{۱}{۸}\right)^۲ = \frac{M}{۱۲۸},$$

که در آن M سوپریمم $|f''|$ روی بازهٔ $\left[۰, \frac{۱}{۸}\right]$ است.

از طرفی به‌کمک نامساوی مثلث و با توجه به‌این‌که $۰ \leq x \leq \frac{۱}{۸}$، داریم

$$\begin{aligned}\left|f''(x)\right| &= \left|-\sin x + ۲\sin(x+۱) + x\cos(x+۱)\right|,\\ &\leq |-\sin x| + \left|۲\sin(x+۱)\right| + \left|x\cos(x+۱)\right| \leq ۱ + ۲ + \frac{۱}{۸} = \frac{۲۵}{۸} < ۴.\end{aligned}$$

در نتیجه $M \leq \frac{۲۵}{۸} < ۴$، و

$$|E| \leq \frac{M}{۱۲۸} \leq \frac{\frac{۲۵}{۸}}{۱۲۸} < \frac{۴}{۱۲۸} = \frac{۱}{۳۲}.$$

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت ج)}}$

طبق قسمت (الف) و (ب) می‌دانیم

$$\frac{\cos ۱-۱}{۸}-E\leq f\left(-\frac{۱}{۸}\right)\leq\frac{\cos ۱-۱}{۸}+E,$$

که در آن $|E|\leq\frac{۱}{۳۲}$ می‌باشد.

از طرفی چون تابع کسینوس روی $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ نزولی است، می‌توان نوشت

$$۰<\frac{\pi}{۴}<۱<\frac{\pi}{۲}\quad\Longrightarrow\quad ۰<\cos ۱<\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\frac{۳}{۴},$$

یا خلاصتا

$$\cos ۱<\frac{۳}{۴}.$$

حال به‌کمک

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right)\leq\frac{\cos ۱-۱}{۸}+E,$$

و با توجه به تخمین اخیر برای $\cos ۱$، یعنی $\cos ۱<\frac{۳}{۴}$، و این‌که $E\leq|E|\leq\frac{۱}{۳۲}$، داریم

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right)\leq\frac{\cos ۱-۱}{۸}+E<\frac{\frac{۳}{۴}-۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲}=-\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۳۲}=۰,$$

یا

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right)<۰.$$

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت د)}}$

با توجه به قسمت (ج) می‌دانیم

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right)<۰.$$

از طرفی

$$f(-۱)=\sin(-۱)-(-۱)\cos(-۱+۱)=-\sin ۱+۱=۱-\sin ۱>۰.$$

حال چون $f\left(-\frac{۱}{۸}\right)<۰$ و $f(-۱)>۰$، و چون f تابعی پیوسته است، از قضیهٔ مقدار بینی وجود حداقل یک $c\in\left(-۱,-\frac{۱}{۸}\right)\subset(-۱,۰)$ به‌طوری‌که $f(c)=۰$ تضمین شده است.

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت ه)}}$

روش اوّل:

با توجه به تخمین مربوط به $\cos 1$ در قسمت (ج)، یعنی $\cos 1 < \frac{3}{4}$، و محاسباتی ساده، داریم

$$\begin{aligned}
&f'(x) = x\sin(x+1) + \cos x - \cos(x+1),\\
&f'(0) = 0 + 1 - \cos 1 > 1 - \frac{3}{4} > \frac{1}{4} > 0,\\
&f'(-1) = -1\sin 0 + \cos(-1) - \cos 0 = \cos 1 - 1 < \frac{3}{4} - 1 < -\frac{1}{4} < 0.
\end{aligned}$$

حال چون $f'(0) > 0$ و $f'(-1) < 0$، و چون f' تابعی پیوسته است، از قضیهٔ مقدار بینی وجود حداقل یک $d \in (-1,0)$ به‌طوری‌که $f'(d) = 0$ تضمین شده است.

روش دوم:

از قسمت (د) می‌دانیم $f(c) = 0$ برای یک $c \in (-1,0)$ برقرار است. از طرفی چون‌که $f(0) = 0$ می‌باشد، پس طبق قضیهٔ رول وجود حداقل یک $d \in (c,0) \subset (-1,0)$ به‌طوری‌که $f'(d) = 0$ تضمین شده است.

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۲

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- نسبت ارتفاع به قطر خواسته شده است و به تفاوت شعاع و قطر باید دقت شود.
- در این سوال، چون دو متغیر داریم، یعنی ارتفاع و قطر، پس نیاز داریم از هر دو رابطهٔ حجم و مساحت جانبی، استفاده کنیم.
- باید توجه داشت که مشتق حجم نسبت به قطر، به دلیل ثابت بودن آن، صفر است. همچنین مشتق مساحت را برابر صفر می‌گذاریم تا کاندید نقطهٔ مینیمم را بیابیم.

پاسخ سوال ۲ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

قرار می‌دهیم

$$\text{قطر قاعده} = D,$$
$$\text{ارتفاع استوانه} = h,$$
$$\text{حجم استوانه} = V = \pi h\frac{D^۲}{۴},$$
$$\text{مساحت کف استوانه} = \pi\frac{D^۲}{۴},$$
$$\text{مساحت جانبی استوانه} = \pi Dh.$$

طبق مفروضات مسئله، برای حجم ثابت استوانه، یعنی

$$\text{حجم استوانه} = V = \pi h\frac{D^۲}{۴} = \text{ثابت},$$

می‌خواهیم مقدار

$$\text{مساحت کل بدنه‌ی استوانه} = S = \pi\frac{D^۲}{۴} + \pi Dh,$$

را کمینه کنیم. قبل از بهینه‌سازی مساحت کل بدنه‌ی استوانه، توجه کنید که

$$V = \pi h\frac{D^۲}{۴} \implies h = \frac{۴V}{\pi D^۲} \implies \text{مساحت کل بدنه‌ی استوانه} = S = \pi\frac{D^۲}{۴} + \frac{۴V}{D}.$$

حال مساحت کل بدنه‌ی استوانه را به‌کمک مشتق گرفتن کمینه می‌کنیم؛ یعنی مشتق آن نسبت به متغیر قطر را برابر صفر قرار داده و قطر را می‌یابیم. این مقدار به‌دست آمده برای قطر، باعث کمینه شدن مساحت کل بدنه‌ی استوانه می‌شود.

$$S' = \frac{dS}{dD} = \pi\frac{D}{۲} - \frac{۴V}{D^۲} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad D^۳ = \frac{۸V}{\pi}.$$

حال با توجه به رابطه‌های $h = \frac{۴V}{\pi D^۲}$ و رابطهٔ اخیر فوق، یعنی $D^۳ = \frac{۸V}{\pi}$، نسبت ارتفاع به قطر برابر می‌شود با

$$\frac{h}{D} = \frac{۴V}{\pi D^۳} = \frac{۴V}{\pi \cdot \frac{۸V}{\pi}} = \frac{۱}{۲}.$$

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۳

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- برای قسمت الف) بهترین راه یافتن مشتق، استفاده از قاعده زنجیره‌ای و قضیهٔ اساسی حسابان است تا بتوان ریشه‌های مشتق مرتبهٔ اوّل (یعنی نقاط بحرانی) را یافت و در قسمت ب) استفاده کرد.
- در قسمت ب) تنها برای محاسبات مربوط به تعیین مثبت یا منفی بودن مشتق دوم در نقاط بحرانی، مجاز به استفاده از ماشین حساب بودید و نه یافتن ریشه‌های مشتق!

پاسخ سوال ۳ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف) از قاعدهٔ زنجیره‌ای و قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = b'(x)f\left(b(x)\right) - a'(x)f\left(a(x)\right).$$

پس محاسبه‌ای ساده برای $f(x) = \int_x^{۲x} e^{-t^۲}\,dt$، نتیجه می‌دهد

$$f'(x) = ۲e^{-۴x^۲} - e^{-x^۲},$$

و متعاقبا

$$f''(x) = -۱۶xe^{-۴x^۲} + ۲xe^{-x^۲}.$$

راه‌حل قسمت ب) برای یافتن ماکسیمم کافیست مشتق اوّل صفر و مشتق دوم منفی باشد. ابتدا نقاطی که در آن مشتق اوّل صفر است را می‌یابیم.

$$f'(x) = ۲e^{-۴x^۲} - e^{-x^۲} = ۰ \implies ۲e^{-۴x^۲} = e^{-x^۲}$$
$$\implies e^{۳x^۲} = ۲ \implies x = \pm\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}.$$

حال چون

$$f''\left(+\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}\right) = -۱۶\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۴}{۳}} + ۲\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۱}{۳}} < ۰,$$

و

$$f''\left(-\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}\right) = +۱۶\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۴}{۳}} - ۲\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۱}{۳}} > ۰,$$

است، پس طبق آزمون مشتق مرتبهٔ دوم،

$$x = +\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}$$

نقطهٔ ماکسیمم موضعی است.

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در سوال ۴

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- در قسمت ب) دانشجویان $n = ۳$ را درست محاسبه می‌کنند، ولی ۴ جملهٔ اوّل را با هم جمع می‌کنند، به‌جای ۳ جملهٔ اوّل. در صورت درست بودن بقیه قسمت‌ها، ۷ نمره کم شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان $f(۱)$ را ننوشته‌اند که بعد بگویند سری متناوب است و بنابراین خطا را با استنداد به خطای سری‌های متناوب، در نظر گرفته و به ادامه مطلب بپردازند. در این حالت، در صورت درستی بقیه قسمت‌ها، ۵ نمره کم شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان جملهٔ $(n+۱)$-ام سری را کمتر از ۰٫۰۰۱ در نظر گرفته‌اند که نادرست است. باید کمتر از ۰٫۰۰۰۵ در نظر می‌گرفتند.
- در قسمت ب) دانشجویان بدون هیچ توضیحی ۴ جمله یا ۳ جملهٔ اوّل را با ۰٫۰۰۰۵ یا ۰٫۰۰۱ مقایسه کرده‌اند و نتیجه گرفته‌اند باید چند جملهٔ اوّل را با هم جمع کنند. حتی در صورت نتیجه‌گیری درست، نمره‌ای به‌این پاسخ‌های بی‌توضیح داده نشده است، مگر در حالتی‌که توجه کنند که مقدار جملهٔ $(n+۱)$-ام باید از ۰٫۰۰۰۵ کمتر باشد که در صورت قید این مطلب ۵ نمره و در صورت درست نوشتن جملهٔ $(n+۱)$-ام در مقایسه، $۵+۸$ نمره به ایشان داده شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان جملهٔ $(n+۱)$-ام سری را اشتباه نوشته‌اند که ۴ نمره برای این اشتباه و بالطبع ۱۲ نمره دیگر برای ادامه راه حل کم شده است.
- در قسمت الف) تعداد زیادی از دانشجویان سعی کرده بودند سری تیلور انتگرال داده شده را مستقیما بنویسند که البته موفق هم نبوده‌اند، ولی به‌خاطر تلاش آنها، ۱ یا ۲ نمره به آن‌ها داده شده است.

پاسخ سوال ۴ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف)

ابتدا بسط مکلورن $\sin x$ را می‌نویسیم، یعنی

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \cdots .$$

حال قرار می‌دهیم $x=t^۲$، و داریم

$$\sin(t^۲)=t^۲-\frac{t^۶}{۳!}+\frac{t^{۱۰}}{۵!}-\frac{t^{۱۴}}{۷!}+\cdots+(-۱)^n\frac{t^{۴n+۲}}{(۲n+۱)!}+\cdots.$$

با انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله از سری فوق، روی بازهٔ $[۰,x]$، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_۰^x\sin(t^۲)\,dt\\&=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۷}{۷\times ۳!}+\frac{x^{۱۱}}{۱۱\times ۵!}-\frac{x^{۱۵}}{۱۵\times ۷!}+\cdots+(-۱)^n\frac{x^{۴n+۳}}{(۴n+۳)\times(۲n+۱)!}+\cdots\\&=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۴n+۳}}{(۴n+۳)\times(۲n+۱)!}.\end{aligned}$$

راه‌حل قسمت ب)

مقدار انتگرال قسمت قبل به‌ازای $x=۱$، یعنی $f(۱)$، می‌شود

$$\begin{aligned}f(۱)=\int_۰^۱\sin(t^۲)\,dt&=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۷\times ۳!}+\frac{۱}{۱۱\times ۵!}-\cdots+\frac{(-۱)^n}{(۴n+۳)\times(۲n+۱)!}+\cdots\\&=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۴n+۳)\times(۲n+۱)!}.\end{aligned}$$

برای این‌که جواب فوق که یک سری متناوب است را تا ۳ رقم اعشار حساب کنیم، کافیست تا جمله‌ای پیش برویم که خطای آن کمتر از $\frac{۵}{۱۰۰۰۰}$ باشد. می‌دانیم حداکثر خطا در یک سری متناوب که تا جملهٔ n-ام نوشته شده است، از قدرمطلق اولین جملهٔ استفاده نشده، یعنی جملهٔ $(n+۱)$-ام، کمتر است. پس می‌نویسیم

$$\left|\frac{(-۱)^n}{(۴n+۳)\times(۲n+۱)!}\right|\leq\frac{۵}{۱۰۰۰۰},$$

که کوچک‌ترین عدد صحیح برای برقراری این عبارت $n=۳$ می‌باشد. یعنی نامساوی فوق برای هر $n\geq ۳$، برقرار است. پس مقدار تقریبی را برای $x=۱$، تا ۳ رقم اعشار، با جمع جملات مربوط به اندیس‌های $n=۰,۱,۲$، به‌صورت زیر داریم.

$$\int_۰^۱\sin(t^۲)\,dt\approx\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۷\times ۳!}+\frac{۱}{۱۱\times ۵!}=\frac{۲۸۶۷}{۹۲۴۰}.$$

تذکر: در راه‌حل، از قرارداد کتاب آدامز در معنای دقت تا ۳ رقم اعشار استفاده کردیم: دقیق بودن تا ۳ رقم اعشار یعنی تفاضل دو مقدار کمتر از ۰٫۰۰۰۵ شود. دقت شود که اگر تفاضل دو عدد کمتر از ۰٫۰۰۱ باشد

لزوما نتیجه نمی‌دهد که دو عدد با هم تا ۳ رقم اعشار برابر هستند، مثلا دو عدد

$$a = \pi = ۳/۱۴۱۵۹۲\cdots$$

و

$$b = ۳/۱۴۰۹$$

را در نظر بگیرید. به‌وضوع $|a-b| < ۰/۰۰۱$ می‌باشد، ولی a و b تا ۳ رقم اعشار برابر نیستند.

به‌نام خدا

آزمون نهایی ریاضی عمومی ۱

وقت: ۳ ساعت

تنها به پاسخ‌هایی نمره کامل تعلق می‌گیرد که دلایل و توضیحات بطور کامل ذکر شده باشد.

سوال اول. (۵ نمره)

اگر وارون تابع f توسط ضابطه $\frac{x-1}{x+1}$ داده شده باشد و وارون تابع g توسط ضابطه $\frac{2x-1}{x-1}$ داده شده باشد، دامنه و برد تابعهای f و g را مشخص کنید و سپس وارون تابع $f \circ g$ که از ترکیب توابع f و g حاصل شده است را به‌دست آورید.

سوال دوم. (۱۰ نمره)

مطلوب است محاسبه دو حد زیر

.۱

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^3+4}-2}{t^3}$$

.۲

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x^3}$$

سوال سوم. (۵ نمره)

مطلوب است محاسبه y'' در تابع ضمنی $xy+e^y=e$ وقتی $x=0$ است.

سوال چهارم. (۱۰ نمره)

به داخل مخزن آبی به شکل یک مخروط وارونه با مقطع دایره‌ای به شعاع ۳ متر و ارتفاع ۶ متر بطور پیوسته آب با نرخ ۴ مترمکعب در دقیقه پمپ می‌شود. وقتی ارتفاع آب ۵ متر است نرخ تغییر ارتفاع آب بر حسب متربر دقیقه چقدر است؟

سوال پنجم. (۱۶ نمره)

مطلوب است محاسبه انتگرال‌های نامعین زیر

۱.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$$

۲.

$$\int \arctan(x)dx$$

۳.

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$$

۴.

$$\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}dx$$

سوال ششم. (۹ نمره)

مقدار انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx.$$

سوال هفتم. (۱۵ نمره)

در مورد همگرایی و یا واگرایی هر کدام از سری‌های زیر با ذکر دلیل تصمیم بگیرید.

۱.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2n+5}$$

۲.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n-1}{\sqrt{n^4+2}}$$

۳.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$$

۴.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

۵.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{5n+1}\right)^n.$$

سوال هشتم. (۱۰ نمره)

مطلوب‌است محاسبه شعاع همگرایی و دامنه همگرایی سری توانی زیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} (x-5)^n.$$

سوال نهم. (۵ نمره)

با استفاده از مشتق گیری از سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ مقدار دقیق سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

سوال دهم. (۱۵ نمره)

سری مک‌لوران تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ راپیدا کنید. شعاع همگرایی آنرا محاسبه کنید. با تخمین خطا با استفاده از نامساوی تیلور نشان دهید داخل شعاع همگرایی این سری با $f(x)$ برابر است.

موفق باشید.

EbiMath.com

سوال ۱ـ می‌دانیم دامنه و برد f برابر برد و دامنه f^{-1} است پس

$R_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$R_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx + y = x - 1 \qquad x(1-y) = y+1$$

$$f(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g^{-1}(x) = y = \frac{2x-1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x - 1 \qquad x(2-y) = 1-y$$

$$g(x) = \frac{1-x}{2-x}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \frac{2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1}{\frac{x-1}{x+1} - 1} = \frac{\frac{2x-2-x-1}{x+1}}{\frac{-2}{x+1}} = \frac{x-3}{-2}$$

سوال ۲ـ هر قسمت ۵ نمره

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^3+4} - 2}{t^3} \times \frac{\sqrt{t^3+4} + 2}{\sqrt{t^3+4} + 2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^3+4} + 2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 1/3$$

سوال ۳ـ

$$x = 0 \Rightarrow 0 \times y(0) + e^{y(0)} = e \Rightarrow y(0) = 1$$

از معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$y + xy' + y'e^y = 0 \xrightarrow{x=0} 1 + y'(1)\, e^1 = 0$$

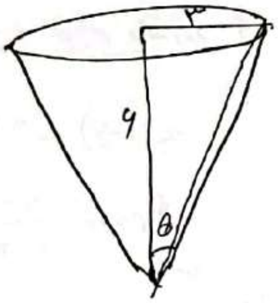
$$y'(1) = -e^{-1}$$

مشتق نسبت به x

$$2y' + xy'' + y''e^y + (y')^2 e^y = 0 \xrightarrow{x=0} -2e^{-1} + 0 + y''(0)\, e + e^{-2} e^1 = 0$$

$$y''(0) = 1$$

سوال ۴ -



$$\tan\theta = \frac{3}{6}$$

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{1}{2}$$

چون از پایین فروط بیرون می‌شود در هر لحظه داریم

$$r(t) = \frac{1}{2} h(t)$$

$$v(t) = \frac{h(t)\,\pi\, r^2(t)}{3} \longrightarrow v(t) = \frac{\pi}{12} h^3(t)$$

مشتق نسبت به زمان

$$\dot v(t) = \frac{\pi}{4} h^2(t)\,\dot h(t) \xRightarrow[\dot v(t)=4]{h(t)=5} \dot h(t) = \frac{16}{25\pi}$$

سوال ۵) هر قسمت ۴ نمره

① $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx \qquad x^{3/2} = u,\quad \frac{3}{2} x^{1/2}\,dx = du \rightarrow x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\,du$$

$$= \int \frac{2}{3}\frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} u = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(x^{3/2}\right)$$

② $$= \int \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} = x\operatorname{arctg}(x) - \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}}_{-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2)}$$

③ $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx \xrightarrow[dx = 2\cos t\,dt]{x = 2\sin t} \int \frac{2\cos t \cdot 2\cos t}{4\sin^2 t}\,dt$$

$$\int \cot^2 t + 1 - 1\,dt = -\cot t - t \xRightarrow{t = \sin^{-1}(x/2)} -\cot\left(\sin^{-1} x/2\right) - \sin^{-1}(x/2)$$

④ $$\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3} \times \frac{4}{4}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{Ln}\left(x^4+4x^2+3\right)$$

سوال ۶) انتگرال فوق در نقطه $x=0$ ناسرگی دارد. طبق ترتیب داریم

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 (\ln x)^2 dx \underset{\substack{\text{جزء به جزء}\\ c\to 0^+}}{=} \lim \left(x(\ln x)^2 \Big|_c^1 - \underbrace{\int 2x\cdot\frac{1}{x}\cdot \ln x\, dx}_{-2\int \ln x\, dx} \right)$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \left(0 - \frac{(\ln c)^2}{\frac{1}{c}} - 2x\ln x \Big|_c^1 + 2x \Big|_c^1 \right)$$

هر اول و دوم هوپیتال

$$= \lim_{c\to 0^+} \frac{2\ln c \cdot \frac{1}{c}}{\frac{1}{c^2}} + 2c\ln c + 2 - 2c$$

$$= \underbrace{\lim_{c\to 0} 4\frac{\ln c}{\frac{1}{c}}}_{\text{هوپیتال}} + 2 = 0 + 2$$

انتگرال ناسره برابر ② است

سوال ۷) هر قسمت ۳ نمره

① $\sum \frac{1}{n^3+2n+5}$ = همگرا زیرا سری مثبت

$$\frac{1}{n^3+2n+5} \le \frac{1}{n^3} \rightarrow$$ طبق آزمون مقایسه سری همگراست

همگرا به خاطر $3>1$

---

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n-1}{\sqrt{n^4+2}}$ = واگرا

شرط لازم همگرایی را ندارد زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{2n^2+3n-1}{\sqrt{n^4+2}} \right| = 2 \neq 0$$

③ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$

دنباله $\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ نزولی است و به صفر میل می‌کند و جملات سری یک در میان مثبت و منفی‌اند

پس طبق آزمون لایب نیتز سری همگراست

CamScanner

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم. همگرایی این سری معادل با همگرایی انتگرال

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \xrightarrow[\frac{1}{x}dx = du]{\ln x = u} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\infty} < \infty$$

پس سری همگرا است

⑤ $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{5n+1}\right)^n$$

از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{3n-4}{5n+1}\right)^n\right|^{1/n} = 3/5 < 1$$

همگرا

سوال ۸ -

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} (x-5)^n$$

از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left((-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} (x-5)^n\right)^{1/n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|2(x-5)|}{1} < 1$$

$$|x-5| < 1/2$$

پس شعاع همگرایی $1/2$ حول $x=5$ است باید دو نقطه ابتدا و انتها را بررسی کنیم. در $x = 5+1/2$ همگرایی داریم به علت آزمون لایب‌نیتز در $x = 5-1/2$ واگرایی داریم (به علت آزمون سری $\sum \frac{1}{n^p}$ ، $p=1/2$)

سوال ۹) $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ ، $|x|<1$ از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\sum n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{\text{ضرب در } x} \sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \sum n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

در x ضرب می‌کنیم و به جای $x=1/2$ قرار دهیم داریم

$$\sum \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{16}$$

سوال ۱۰ - در اینجا از بسط سری دوجمله ای استفاده می کنیم. می دانیم شعاع همگرایی این سری یک است. چون $|x|<1$ داریم

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \dots$$

حال می دانیم اگر $f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x)$ آنگاه اگر $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$ آنگاه در بازه همگرایی

$f(x)$ با سری تیلور برابر است.

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x)=(1+x)^{1/3} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{3}-n}$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left|\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{3}-n}(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$|x|\leq 1$

صورت از جنس $\left(\frac{n}{3}\right)!$ و مخرج $(n!)$ پس حد مورد نظر صفر است و $f(x)$ در این بازه با سری

برابر است. حال چون $k=\frac{1}{3}>0$ در دو سر بازه یعنی $x=1$ و $x=-1$ نیز سری با $f(x)$ برابر است.

ریاضی عمومی ۱ **(زمستان ۱۴۰۱)**

آزمون پایان‌ترم

مدرسین: دکتر جمالی، دکتر خانه‌دانی، دکتر رزوان، و دکتر رنجبر **زمان آزمون:** ۲۱۰ دقیقه

سوال ۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) **(۵ نمره)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{4} x+\cos^{4} x}$،

ب) **(۵ نمره)** $\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{2})^{3}}$.

سوال ۲

(۱۰ نمره) سطح و حجم شیء سه‌بعدی که توسط معادلات زیر توصیف می‌شود را محاسبه کنید (a ثابت مثبتی است).

$$x^{2}+y^{2} \leq a^{2}, \quad y^{2}+z^{2} \leq a^{2}.$$

سوال ۳

سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2}$ را در نظر بگیرید.

آ) **(۵ نمره)** به ازای چه مقادیری از x، سری همگراست؟

ب) **(۵ نمره)** سری را بر حسب نگاشت‌های مقدماتی محاسبه کنید.

ج) **(۲ نمره)** مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$ را محاسبه کنید.

سوال ۴

سری $S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$ و مجموع جزئی آن S_n را در نظر بگیرید.

آ) **(۵ نمره)** نشان دهید

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} < S < S_n + \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

ب) **(۳ نمره)** بهترین N را بیابید که اگر به‌جای S از S_n برای $n \geq N$ استفاده شود، خطا از 10^{-3} نابیشتر باشد.

ج) **(۲ نمره)** اگر به جای S از $S_n + \frac{1}{2}\left(\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right)$ استفاده شود، N را طوری بیابید که برای $n \geq N$ خطا از 10^{-3} نابیشتر باشد.

سوال ۵

آ) **(۵ نمره)** ماکزیمم مطلق $|x^n \ln x|$ را روی بازه $[0, 1)$ محاسبه کنید، که n عدد صحیح مثبتی است.

ب) **(۵ نمره)** با استفاده از قضیه تیلور، خطای حاصل از استفاده $\int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x$ را بجای

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln x \mathrm{d}x$$

محاسبه کنید، که n عدد صحیح مثبتی است.

ج) **(۳ نمره)** انتگرال $\int_0^1 (e^x - 1) \ln x \mathrm{d}x$ را با تقریب 10^{-4} محاسبه کنید.

سوال ۶

(۱۰ نمره) فرض کنید p عددی مثبت باشد. با استفاده از تکنیک‌های انتگرال ریمان نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

سوال ۷

(۱۰ نمره) تمامی اعداد مثبت p را چنان بیابید که انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ همگرا باشد (با شرح دقیق محاسبات).

ریاضی عمومی ۱ **(زمستان ۱۴۰۱)**

پاسخ آزمون پایان‌ترم

مدرسین: دکتر جمالی، دکتر خانه‌دانی، دکتر رزوان، و دکتر رنجبر **زمان آزمون:** ۲۱۰ دقیقه

پاسخ سوال ۱

آ) با استفاده از اتحادهای مثلثاتی $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ داریم:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{2dx}{1+\cos^2 2x}$$

(۱ نمره). مجددا، با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ داریم:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4\int \frac{dx}{3+\cos 4x}$$

(۱ نمره). حال با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos 4x = \frac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}$ و تغییر متغیر $u = \tan 2x$ داریم:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{du}{2+u^2}$$ **(۱ نمره)**

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + c$$ **(۱ نمره)**

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\tan 2x}{2}\right) + c.$$ **(۱ نمره)**

ب) با استفاده از تغییر متغیر $x = \tan t$ داریم:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t$$ (۱ نمره)

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t$$ (۱ نمره)

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right) \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t\right)$$ (۱ نمره)

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 2\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \,\mathrm{d}t}_{0} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t \,\mathrm{d}t}_{0}\right)$$ (۱ نمره)

$$= \frac{3\pi}{16}.$$ (۱ نمره)

پاسخ سوال ۲

حجم:

$$V = 8\int_{0}^{a} \mathrm{d}V = 8\int_{0}^{a} \left(\sqrt{a^2-y^2}\right)^2 \mathrm{d}y = 8\int_{0}^{a} (a^2-y^2)\mathrm{d}y = 8(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{16a^3}{3},$$

(۵ نمره).

سطح:

$$S = 16\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}S = 16\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{a^2-y^2}\right)'\right)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= 16\int_{0}^{a} a\,\mathrm{d}y = 16a^2,$$

(۵ نمره).

پاسخ سوال ۳

آ) با تعریف دنباله‌ی $a_n = \frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}$ داریم:

$$\frac{۱}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{۱}{۳n+۱}}{\frac{۱}{۳n-۲}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{۳n-۲}{۳n+۱}\right| = ۱ \Rightarrow R = ۱. \qquad \textbf{(۱ نمره)}$$

مطابق قضایای درس، سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}$، در همسایگی به مرکز $x_۰ = ۰$ و به شعاع $R = ۱$، یعنی بازه‌ی $(-۱, ۱)$ همگرای مطلق است **(۱ نمره)**. همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}$ را برای $x = ۱$ و $x = -۱$ جداگانه بررسی می‌کنیم.

- برای $x = ۱$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}.$$

با توجه به این‌که برای هر عدد طبیعی n داریم $a_{n+۱}a_n < ۰$ و $|a_{n+۱}| \leq |a_n|$، و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$، مطابق با آزمون لایب‌نیتز می‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}$ همگراست **(۱ نمره)**.

- برای $x = -۱$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۱}{۳n-۲}.$$

با توجه به واگرایی سری همساز $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ و با استفاده از آزمون مقایسه حدی می‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۱}{۳n-۲}$ واگراست **(۱ نمره)**.

درنتیجه، سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}$ برای هر $x \in (-۱, ۱]$ همگراست **(۱ نمره)**.

ب) برای هر $x \in (-۱, ۱)$، داریم:

$$\frac{۱}{۱+x^۳} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^{۳n}.$$

با تغییر اندیس $n \leftarrow n-۱$ داریم:

$$\frac{۱}{۱+x^۳} = \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}x^{۳n-۳}.$$

(۱ نمره). درنتیجه،

$$\frac{۱}{۱+x^۳} = \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}x^{۳n-۳} \Rightarrow \int_۰^x \frac{\mathrm{d}t}{۱+t^۳} = \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\int_۰^x t^{۳n-۳}\mathrm{d}t \qquad \textbf{(۱ نمره)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲} = \int_۰^x \frac{\mathrm{d}t}{۱+t^۳} \qquad \textbf{(۱ نمره)}$$

با استفاده از تفکیک کسر داریم

(۱ نمره)
$$\frac{۱}{۱+t^۳}=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۱+t}+\frac{-t+۲}{۱-t+t^۲}\right)$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}=\frac{۱}{۶}\left(\ln\left|\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲-x+۱}\right|+۲\sqrt{۳}\tan^{-۱}(\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}})+\frac{\pi}{\sqrt{۳}}\right).$$ (۱ نمره)

ج) با توجه به همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}$ در $x=۱$ و با استفاده از قضیه آبل داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}=\lim_{x\to ۱^-}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}=\frac{۱}{۶}\left(\ln ۴+۲\frac{\pi}{\sqrt{۳}}\right)=\frac{۱}{۳}\left(\ln ۲+\frac{\pi}{\sqrt{۳}}\right).$$

(۲ نمره)

پاسخ سوال ۴

آ) داریم:

(۱.۰)
$$S=S_n+\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}.$$

(۱ نمره) بعلاوه، با توجه به اکیدا نزولی بودن تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ روی $x>۰$، داریم:

$$\int_k^{k+۱}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}<\frac{۱}{k^۲}\Rightarrow\sum_{k=n+۱}^{\infty}\int_k^{k+۱}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}<\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}$$
$$\Rightarrow\int_{n+۱}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}<\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}$$
$$\Rightarrow S_n+\int_{n+۱}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}<S$$

(۲ نمره) به طور مشابه داریم:

$$\int_{k-۱}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}>\frac{۱}{k^۲}\Rightarrow\sum_{k=n+۱}^{\infty}\int_{k-۱}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}>\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}$$
$$\Rightarrow\int_{n}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}>\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}$$
$$\Rightarrow S_n+\int_{n}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^۲}>S$$

(۲ نمره). درنتیجه،

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} < S < S_n + \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

ب) با استفاده از نامساوی قسمت قبل داریم:

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} < S - S_n < \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < S - S_n < \frac{1}{n},$$

(۲ نمره). لذا، برای محاسبه بهترین N که برای $n \geq N$، خطای تقریب S با S_n از 10^{-3} نابیشتر باشد، کافی است داشته باشیم $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{1000}$ و $\frac{1}{N+1} \geq \frac{1}{1001}$. درنتیجه، $N = 10^3$ **(۱ نمره)**.

ج) با استفاده از نامساوی قسمت (الف) داریم:

$$\left| S - \left(S_n + \frac{1}{2} \left(\int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \right) \right) \right| < \frac{1}{2} \left(\int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \right)$$
$$= \frac{1}{2n^2 + 2n}$$

(۱ نمره). لذا، برای این‌که خطای تقریب S با $S_n + \frac{1}{2} \left(\int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \right)$ از 10^{-3} نابیشتر باشد، کافی است داشته باشیم $\frac{1}{2n^2+2n} \leq 10^{-3}$، یعنی $n \geq 22$ **(۱ نمره)**.

پاسخ سوال ۵

آ) برای عدد صحیح مثبت n و هر $x \in (0, 1]$ داریم $\ln x \leq 0$ و $x^n > 0$. درنتیجه،

$$f(x) = |x^n \ln x| = -x^n \ln x, \quad \forall x \in (0, 1],$$

(۱ نمره). به این‌ترتیب، برای $x \in (0, 1)$ داریم:

$$f'(x) = -x^{n-1} \left(n \ln x + 1 \right),$$

(۱ نمره). درنتیجه، $x = e^{-1/n}$ تنها نقطه ایستای تابع f در بازه‌ی $(0, 1]$ است **(۱ نمره)**. با توجه به پیوستگی تابع نامنفی f روی بازه‌ی $(0, 1]$، و این‌که $f(1) = 0$ و $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$، می‌توان نتیجه گرفت که تنها نقطه ایستای تابع f در بازه‌ی $(0, 1]$، یعنی نقطه‌ی $x = e^{-1/n}$ ماکزیمم مطلق $|x^n \ln x|$ روی بازه‌ی $(0, 1]$ است. درنتیجه، مقدار ماکزیمم مطلق $f(x)$ روی بازه‌ی $(0, 1]$ برابر $f(e^{-1/n}) = 1/(ne)$ است **(۲ نمره)**. با استفاده از آزمون مشتق اول (تعیین علامت مشتق اول) یا آزمون مشتق دوم نیز می‌توان ماکزیمم مطلق بودن نقطه‌ی ایستای $x = e^{-1/n}$ را نشان داد.

ب) **راه‌حل اول:** با استفاده از قضیه تیلور برای تابع e^x حول نقطه‌ی $x = ۰$، داریم:

$$e^x - ۱ = \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^s}{(n+۱)!} x^{n+۱},$$

که در آن s نقطه‌ای بین ۰ و x است **(۱ نمره)**. درنتیجه،

$$\int_۰^۱ (e^x - ۱) \ln x \mathrm{d}x = \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x + \int_۰^۱ \frac{e^s}{(n+۱)!} x^{n+۱} \ln x \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_۰^۱ (e^x - ۱) \ln x \mathrm{d}x - \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x = \int_۰^۱ \frac{e^s}{(n+۱)!} x^{n+۱} \ln x \mathrm{d}x \qquad \text{(۲ نمره)}$$

$$\Rightarrow \left| \int_۰^۱ (e^x - ۱) \ln x \mathrm{d}x - \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x \right| \leq \int_۰^۱ \frac{|e^s|}{(n+۱)!} |x^{n+۱} \ln x| \mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{۱}{(n+۱)(n+۱)!} \qquad \text{(۲ نمره)}$$

که نامساوی آخر با استفاده از قسمت (الف) و این‌که $e^x \leq e$ برای هر $x \in [۰, ۱]$ حاصل شده است.

ج) **(۳ نمره)** برای این‌که خطای محاسبه‌ی $\int_۰^۱ (e^x - ۱) \ln x \mathrm{d}x$ با استفاده از $\int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x$ از $۱۰^{-۴}$ کم‌تر باشد، کافی است داشته باشیم:

$$\frac{۱}{(n+۱)(n+۱)!} \leq ۱۰^{-۴} \Rightarrow n \geq ۶. \qquad \text{(۱ نمره)}$$

بنابراین، تقریب مورد نظر برابر است با

$$\int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{۶} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x = \sum_{k=۱}^{۶} \frac{۱}{k!} \int_۰^۱ x^k \ln x \mathrm{d}x \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$= \sum_{k=۱}^{۶} \frac{۱}{(k+۱)(k+۱)!} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

که تساوی آخر از محاسبه‌ی $\int_۰^۱ x^k \ln x \mathrm{d}x$، با تکنیک انتگرال‌گیری جزء به جزء بدست آمده است.

اشتباه رایج: برخی با استفاده از بسط تیلور e^x حول نقطه‌ی $x = ۰$، خطای تخمین انتگرال در قسمت (ب) را به صورت

$$\int_۰^۱ (e^x - ۱) \ln x \mathrm{d}x - \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x = \int_۰^۱ \ln x \left(\sum_{k=n+۱}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \mathrm{d}x$$

سپس بدون ارائه دلیل کافی، سری را از انتگرال خارج کرده‌اند. باید توجه داشت که در حالت کلی نمی‌توان سری را از انتگرال خارج کرد. برای این اشتباه یک نمره کسر شده است.

پاسخ سوال ۶

با در نظر گرفتن افراز $x_k = \frac{k}{n}$، $k = 0, 1, \dots, n$ از بازه‌ی $[0,1]$ و برای تابع انتگرال‌پذیر ریمان $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(k/n\right). \tag{2.0}$$

درنتیجه،

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\mathrm{d}x && \textbf{(۸ نمره)}\\ &= \frac{1}{p+1}. && \textbf{(۲ نمره)}\end{aligned}$$

توجه: اگر فقط رابطه‌ی (۲.۰) نوشته شده باشد، ۳ نمره داده شده است.

پاسخ سوال ۷

(۱۰ نمره) تمامی اعداد مثبت p را چنان بیابید که انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ همگرا باشد (با شرح دقیق محاسبات). در ابتدا توجه داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin(x^p)}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^p}{\sin x^p} = 1.$$

لذا، مطابق تعریف حد برای $\varepsilon = \frac{1}{2}$، $\delta > 0$ چنان یافت می‌شود که

$$\frac{1}{2x^p} \leq \frac{1}{\sin(x^p)} \leq \frac{3}{2x^p}, \qquad \forall x \in (0,\delta).$$

درنتیجه، بنا به آزمون مقایسه، دو انتگرال $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ و $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند **(۵ نمره)**. می‌دانیم pــانتگرال $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ برای $0 < p < 1$ همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست. لذا، با توجه به استدلال بالا، $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ نیز برای $0 < p < 1$ همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست **(۵ نمره)**.
توجه: تعیین بازه‌های همگرایی و واگرایی باید با استدلال درست و کامل ارائه شده باشد. در صورت عدم ارائه استدلال لازم نمره کامل داده نشده است.
اشتباه رایج:

- اشتباه گرفتن $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ با $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$.

- استفاده از آزمون مقایسه بر مبنای نامساوی $\frac{1}{x^p} < \frac{1}{\sin(x^p)}$ برای xهای مثبت خیلی کوچک، تنها واگرایی انتگرال $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ برای $p \geq 1$ را نتیجه می‌دهد. لذا، برای افرادی که در کنار این استدلال، دلیل کافی برای همگرایی انتگرال برای $0 < p < 1$ ارائه ندادند، نمره ۷ داده شده است.

باسمه تعالی

بارم‌بندی آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

(بارم‌بندی‌ها بر مبنای راه‌حل‌های نوشته شده در صفحات بعدی این فایل است.)

سوال یک. (هم‌گرایی یا واگرایی سری $\sum \frac{1}{n^p+n}$.)

- ۵ نمره: همگرایی سری در حالت $p>1$.
- ۵ نمره: واگرایی سری در حالت $p\leq 1$.

○ در صورت اشتباه در واگرایی یا هم‌گرایی سری در حالت $p=1$ ۲ نمره از بخش دوم کسر می‌شود.

سوال دو. (انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.)

- ۵ نمره: محاسبه تابع اولیه $\frac{\ln x}{x^2}$.
- ۵ نمره: محاسبه حد $\frac{\ln R+1}{R}$ وقتی $R\to+\infty$ و محاسبه نهایی مقدار انتگرال

○ در صورت اثبات درست هم‌گرایی انتگرال بدون محاسبه مقدار، ۵ نمره تعلق می‌گیرد.

○ صرف اشاره به این که انتگرال هم‌گراست (بدون اثبات دقیق) نمره‌ای ندارد.

سوال سه. (تابع $\frac{x}{(1+x)^2}$، محاسبه انتگرال نامعین، انتگرال ناسره و سری تیلور)

هر بخش ۵ نمره دارد و در صورتی که جواب و راه حل درست ارائه شود به میزان درستی نمره تعلق می گیرد.

○ در بخش ب، صرف اشاره به واگرایی انتگرال (بدون اثبات) نمره‌ای ندارد.

○ در بخش پ، صرف اشاره به سری تیلور تابع $\frac{1}{1-x}$ بدون استفاده در محاسبه سری سایر توابع نمره‌ای، تعلق نمی‌گیرد.

○ در بخش پ، اگر صرفاً با محاسبه مشتق ضرایب چند جمله اول سری محاسبه شده باشد، در صورت درستی محاسبات حداکثر ۲ نمره تعلق می‌گیرد.

سوال چهار. (محاسبه حجم حاصل از دوران $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$.)

- ۲ نمره: نوشتن عبارت انتگرالی درست که حاصل آن حجم را می‌دهد.
- ۸ نمره: محاسبه تابع اولیه $\cos^2 x$ و محاسبه انتگرال معین و به دست آوردن مقدار درست حجم

سوال پنج. (تابع $\frac{2e^x}{1+x^2}$. اکیداً صعودی بودن، مشتق وارون و تحدب)

هر بخش ۵ نمره دارد و تنها درصورتی که کاملا درست نوشته شده باشد به میزان درستی نمره تعلق می گیرد.

باسمه تعالی

راه‌حل آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

---

۱. با ذکر دلیل تعیین کنید برای کدام مقادیر حقیقی مثبت p، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p+n}$ هم‌گرا و برای کدام مقادیر واگراست.

راه‌حل.
این سری برای هر $p>1$ هم‌گرا و برای هر $p \leq 1$ واگراست.

ابتدا برای حالتی که $p>1$، توجه کنید که برای هر n،

$$n^p < n^p+n \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^p+n} < \frac{1}{n^p}$$

چون سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p>1$ هم‌گراست، طبق آزمون مقایسه، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p+n}$ نیز در این حالت هم‌گراست.

در حالتی که $p \leq 1$، $n^p \leq n$ و بنابراین

$$n^p+n \leq 2n \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^p+n} \geq \frac{1}{2n}$$

در این حالت از آن‌جا که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، طبق آزمون مقایسه، نتیجه می‌گیریم سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p+n}$ نیز واگراست.

۲. نشان دهید انتگرال زیر هم‌گراست و مقدار آن را محاسبه کنید.

$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{۲}} \mathrm{d}x$$

راه‌حل.
به کمک روش جزء به جزء تابع اولیه $\frac{\ln x}{x^{۲}}$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور $u(x) = \ln x$ و $v(x) = \frac{-۱}{x}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\int \frac{\ln x}{x^{۲}} \mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{۱}{x^{۲}}\mathrm{d}x = \frac{-\ln x}{x} - \frac{۱}{x} + C$$

پس

$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{۲}} \mathrm{d}x = \Big(\lim_{R\to+\infty} \frac{-\ln R - ۱}{R}\Big) - \Big(\frac{-\ln ۱ - ۱}{۱}\Big) = \Big(\lim_{R\to+\infty} \frac{-\ln R - ۱}{R}\Big) + ۱$$

بنابراین برای محاسبه انتگرال باید حاصل حد $\lim_{R\to+\infty} \frac{-\ln R - ۱}{R}$ را بیابیم. اما توجه کنید که $\lim_{R\to\infty} \frac{۱}{R} = ۰$ و حد $\lim_{R\to+\infty} \frac{\ln R}{R}$ طبق قاعده هوپیتال (ابهام $\frac{\infty}{\infty}$) برابر حد زیر است

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\frac{۱}{R}}{۱} = ۰$$

کنار هم قرار دادن این محاسبات نتیجه می‌دهد انتگرال $\int_{۱}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{۲}}\mathrm{d}x$ هم‌گراست و مقدار آن برابر ۱ است.

توضیح. به عنوان یک راه حل جایگزین برای محاسبه تابع اولیه می‌توان با استفاده از تغییر متغیر (جانشانی) $x = e^{u}$ (معادلاً $u = \ln x$) انتگرال به فرم $\int ue^{-u}\mathrm{d}u$ تبدیل کرد و سپس در این فرم جدید به کمک روش جزء به جزء یا هر روش دیگری تابع اولیه را محاسبه کرد.

۳. تابع $f:\mathbb{R}-\{-۱\}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\frac{x}{(۱+x)^۲}$ را در نظر بگیرید.

الف) انتگرال نامعین $\int f(x)\mathrm{d}x$ را به دست آورید.

ب) آیا انتگرال $\int_{-۱}^{۱} f(x)\mathrm{d}x$ هم‌گراست؟ (در صورت هم‌گرایی نیازی به محاسبه مقدار انتگرال نیست.)

پ) سری تیلور تابع $f(x)$ حول $x=۰$ را به دست آورید.

راه‌حل.

الف) برای محاسبه انتگرال نامعین $f(x)$ را به صورت مجموع دو کسر با مخرج‌های $۱+x$ و $(۱+x)^۲$ می‌نویسیم که صورت‌های آن اعداد ثابت باشند.

$$\frac{x}{(۱+x)^۲}=\frac{A}{۱+x}+\frac{B}{(۱+x)^۲}=\frac{A(۱+x)+B}{(۱+x)^۲}=\frac{Ax+(A+B)}{(۱+x)^۲}$$

بنابراین ضریب x و ضریب ثابت در صورت کسر بالا باید با هم برابر باشند که نتیجه می‌دهد

$$A=۱,\ A+B=۰\ \Rightarrow\ A=۱,\ B=-۱$$

پس

$$\frac{x}{(۱+x)^۲}=\frac{۱}{۱+x}-\frac{۱}{(۱+x)^۲}$$

و در نتیجه

$$\int\frac{x}{(۱+x)^۲}\mathrm{d}x=\int\frac{۱}{۱+x}\mathrm{d}x-\int\frac{۱}{(۱+x)^۲}\mathrm{d}x=\ln|x+۱|+\frac{۱}{x+۱}+C$$

ب) طبق محاسبه بخش الف

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{x}{(۱+x)^۲}\mathrm{d}x=\Big(\ln|x+۱|+\frac{۱}{x+۱}\Big)\Big|_{-۱}^{۱}=(\ln ۲+\frac{۱}{۲})-\lim_{x\to-۱^+}\Big(\ln(x+۱)+\frac{۱}{x+۱}\Big)$$

بنابراین هم‌گرایی انتگرال معادل وجود حد $\lim_{x\to-۱^+}\Big(\ln(x+۱)+\frac{۱}{x+۱}\Big)$ است. در ادامه به محاسبه این حد می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to-۱^+}\ln(x+۱)+\frac{۱}{x+۱}=\lim_{x\to-۱^+}\frac{(x+۱)\ln(x+۱)+۱}{x+۱}$$

ابتدا حد صورت این کسر را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۱^+}(x+۱)\ln(x+۱)=\lim_{x\to-۱^+}\frac{\ln(x+۱)}{\frac{۱}{x+۱}}$$

که با استفاده از قاعده هوپیتال (ابهام $\frac{\infty}{\infty}$) مقدار حد بالا برابر حاصل حد زیر است.

$$\lim_{x\to-۱^+}\frac{\frac{۱}{x+۱}}{\frac{-۱}{(x+۱)^۲}}=-\lim_{x\to-۱^+}(x+۱)=۰$$

پس در مورد حد زیر صورت کسر به ۱ و مخرج کسر به ۰ میل می‌کند، پس کل کسر به بی‌نهایت میل می‌کند و بنابراین انتگرال هم‌گرا نیست. (در واقع با توجه به علامت صورت و مخرج کسر به $+\infty$ میل می‌کند.)

پ) سری تیلور تابع $\frac{1}{1-x}$ برابر

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

خواهد بود. دقت کنید

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

پس سری تیلور $\frac{1}{(1-x)^2}$ با مشتق‌گرفتن از سری تیلور $\frac{1}{1-x}$ قابل محاسبه است و برابر سری زیر خواهد بود

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

(این سری را می‌توان به صورت مستقیم با مشتق‌گرفتن از $\frac{1}{(1-x)^2}$ یا استفاده از قاعده حاصل‌ضرب سری‌ها هم محاسبه کرد.)

در ادامه با قرار دادن $-x$ به جای x در عبارت بالا به سری $\frac{1}{(1+x)^2}$ می‌رسیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{n-1}x^{n-1} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots$$

در نهایت برای رسیدن به سری تیلور تابع $\frac{x}{(1+x)^2}$ کافی است سری تیلور بالا را در x ضرب کنیم که برابر زیر خواهد بود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{n-1}x^{n} = x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 \cdots$$

توضیح. به عنوان راه‌حل دیگری برای بخش پ، می‌توان با استفاده از محاسبه قسمت الف که تابع اولیه f برابر $\frac{1}{1+x} + \ln(x+1)$ به دست آمده است، ابتدا سری $\frac{1}{1+x} + \ln(x+1)$ را محاسبه کرد و سپس با مشتق گرفتن به سری $f(x)$ رسید.

۴. ناحیه مسطح محدود به منحنی $y = \sqrt{۱ + \cos^۲ x}$ و محور x که بین خط‌های $x = \frac{-\pi}{۲}$ و $x = \frac{+\pi}{۲}$ واقع شده را حول محور x دوران می‌دهیم. حجم ناحیه حاصل چه قدر است؟

راه‌حل.
حجم مورد نظر برابر حاصل انتگرال زیر است.

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} \pi\left(\sqrt{۱ + \cos^۲ x}\right)^۲ \mathrm{d}x = \pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} (۱ + \cos^۲ x)\mathrm{d}x$$

برای محاسبه انتگرال $\cos^۲ x$ توجه کنید که $\cos(۲x) = ۲\cos^۲ x - ۱$ و بنابراین $\cos^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos(۲x))$.
پس

$$\int \cos^۲ x \, \mathrm{d}x = \int \frac{۳}{۲}\mathrm{d}x + \frac{۱}{۲}\int \cos(۲x)\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin(۲x) + C$$

و بنابراین

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} \cos^۲ x \, \mathrm{d}x = \left(\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin(۲x)\right)\Big|_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} = \left(\frac{۱}{۲}\pi + \frac{۱}{۴}(\sin\pi - \sin(-\pi)\right) = \frac{۱}{۲}\pi.$$

در نتیجه

$$\text{حجم مورد نظر} = \pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} (۱ + \cos^۲ x)\mathrm{d}x = \underbrace{\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} ۱\mathrm{d}x}_{\pi^۲} + \underbrace{\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} \cos^۲ x\mathrm{d}x}_{\frac{۱}{۲}\pi^۲} = \frac{۳}{۲}\pi^۲.$$

۵. الف) ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{۲e^x}{x^۲ + ۱}$ تابعی اکیداً صعودی است.
ب) شیب خط مماس به نمودار وارون این تابع در نقطه $(۲, ۰)$ را بیابید.
پ) ثابت کنید تابع $f(x)$ روی دامنه $x > ۱$ تابعی محدب تعریف می‌کند.

راه‌حل.
الف) برای بررسی اکیداً صعودی بودن تابع علامت مشتق اول آن را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{۲e^x(x^۲+۱) - ۲x(۲e^x)}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۲e^x(x^۲+۱-۲x)}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۲e^x(x-۱)^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

به وضوح برای هر مقدار حقیقی x، $f'(x) \geq ۰$ پس تابع صعودی است. برای بررسی اکیداً صعودی بودن تابع، توجه کنید که مشتق f روی بازه‌های $(-\infty, ۱)$ و $(۱, +\infty)$ اکیداً مثبت است. این نتیجه می‌دهد f روی بازه‌ها $(-\infty, ۱]$ و $[۱, +\infty)$ اکیداً صعودی است و بنابراین در کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

ب) اگر وارون تابع را با نماد $f^{-۱}$ نمایش دهیم، طبق قضیه مشتق تابع وارون داریم

$$(f^{-۱})'(۲) = (f^{-۱})'(f(۰)) = \frac{۱}{f'(۰)}$$

با توجه به محاسبه مشتق در بخش الف، $f'(۰) = ۲$ و لذا $(f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{۲}$. این نتیجه می‌دهد که شیب خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطه $x = ۲$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) کافی است نشان دهیم مشتق دوم تابع برای هر $x > ۱$ مثبت است.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{۲e^x\big((x-۱)^۲ + ۲(x-۱)\big)(x^۲+۱)^۲ - ۲ \times ۲x(x^۲+۱)۲e^x(x-۱)^۲}{(x^۲+۱)^۴} \\ &= \frac{۲e^x}{(x^۲+۱)^۳}\left(x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۴x - ۱\right) \end{aligned}$$

چون e^x و $x^۲+۱$ همیشه مثبت هستند، کافی است ثابت کنیم برای هر $x > ۱$، $x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۴x - ۱ > ۰$. برای سادگی ادامه محاسبات از نماد $g(x)$ برای این چندجمله‌ای درجه ۴ استفاده می‌کنیم.

$$g(x) = x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۴x - ۱.$$

به وضوح $g(۱) = ۰$. با محاسبه مشتق

$$\begin{aligned} g'(x) &= ۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۱۶x - ۴ \\ g''(x) &= ۱۲x^۲ - ۲۴x + ۱۶ = ۱۲(x-۱)^۲ + ۴ \end{aligned}$$

چون برای هر x، $g''(x) > ۰$ تابع $g'(x)$ خود تابعی اکیداً صعودی است و چون $g'(۱) = ۴$، برای هر $x > ۱$، $g'(x) > g(۱) > ۰$. این نتیجه می‌دهد g برای $x > ۱$ تابعی اکیداً صعودی است و لذا $g(x) > g(۱) = ۰$.

مثبت بودن $g(x)$ برای $x > ۱$ همان طور که در ابتدای راه‌حل اشاره کردیم نتیجه می‌دهد $f''(x) > ۰$ و بنابراین f روی دامنه $x > ۱$ تابعی محدب است.

توضیح. در بخش پ، می‌توان از روش‌های دیگری هم برای مثبت بودن $x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۴x - ۱$ در دامنه $x > ۱$ استفاده کرد، برای مثال، با توجه به تساوی زیر

$$g(x) = x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۴x - ۱ = (x - ۱)^۴ + ۲(x^۲ - ۱)$$

اگر $x > ۱$، $g(x)$ مجموع دو عبارت مثبت است و در نتیجه خود مثبت است.