

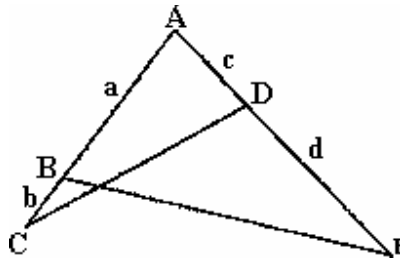
مرحله ی اول شانزدهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

بهمن ماه ۱۳۷۶

(۱) معادله ی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = d$ که a, b, c, d اعداد طبیعی هستند و $a < b < c$ ، چند جواب دارد؟

الف) جواب ندارد. (ب) ۱ (ج) ۳ (د) ۶ (ه) بی نهایت.

(۲) در شکل زیر زوایای $\angle CDE$ و $\angle CBE$ مساوی اند. اگر $AB=a, BC=b, AD=c, DE=d$ ، آن گاه داریم:



الف) $b(a+b)=d(c+d)$ (ج) $a(a+b)=c(c+d)$ (ب) $ab=cd$ (د) $ad=cb$ (ه) $c(a+b)=a(c+d)$

(۳) مجموعه ی A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۴) چند عدد اول کوچک تر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲ است؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) بیش از ۵

(۵) معادله ی $x^y + 1 = (x+1)^2$ روی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۵

(۶) فرض کنید که معادله ی $x^2 + ax + b = 0$ دو جواب صحیح داشته باشد. عبارت های زیر را در نظر بگیرید:

(۱) اگر هر دو جواب فرد باشند آن گاه a و b فرد هستند.

(۲) اگر هر دو جواب فرد باشند آن گاه a زوج و b فرد است.

(۳) اگر هر دو جواب فرد باشند آن گاه a فرد و b زوج است.

(۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آن گاه a فرد و b زوج است.

(۵) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آن گاه a زوج و b فرد است.

(۶) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آن گاه a و b زوج هستند.

کدام یک از عبارات های فوق درست است؟

الف) ۱ و ۴ (ب) ۲ و ۴ (ج) ۱ و ۵ (د) ۳ و ۵ (ه) ۲ و ۶

(۷) معادله $3^{n-1} + 3 = n!$ در مجموعه ی اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) یک (ب) دو (ج) سه (د) چهار (ه) بی نهایت

(۸) اگر ABC مثلثی باشد که $\angle A = 45^\circ$ و D نقطه ای روی امتداد BA باشد به قسمی که $BD = BA + AC$ و نقاط M و K به ترتیب روی AB و BC به گونه ای قرار داشته باشند که مساحت مثلث BDM مساوی مساحت مثلث BCK باشد آن گاه $\angle BKM <$ برابر است با:

الف) $22/5^\circ$ (ب) 30° (ج) 45° (د) 15° (ه) 20°

(۹) فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$. چند تابع $f: A \rightarrow A$ وجود دارد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم:
 $f(f(x)) = f(x)$

الف) ۱ (ب) ۴ (ج) ۷ (د) ۱۰ (ه) ۱۳

(۱۰) مثلث ABC را با اضلاعی با طول های صحیح a, b و c در نظر می گیریم و طول ارتفاع های آن را h_a, h_b و h_c می نامیم. فرض کنید $h_a = h_b + h_c$. در این صورت داریم:

الف) $a^2 + b^2 + c^2$ مربع کامل است.

(ب) $(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است.

(ج) $(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است.

(د) $b^2 + c^2 - a^2$ مربع کامل است.

(ه) $a^2 + b^2 - c^2$ مربع کامل است.

(۱۱) فرض کنید $a = 10^{2 \times 1376} - 10^{1376} + 1$. مقدار $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$ برابر است با:

الف) $2 \times 10^{1376} - 2$ (ب) $2 \times 10^{1376} - 1$ (ج) 2×10^{1376}

(د) $2 \times 10^{1376} + 1$ (ه) $2 \times 10^{1376} + 2$

(۱۲) مثلث ABC با زاویه های حاده مفروض است. نقاط D و E را به ترتیب روی AB و AC می گیریم به طوری که دایره ی محیطی مثلث ADE در نقطه ی X بر BC مماس باشد. اگر D و E را طوری انتخاب کنیم که DE مینیمم شود در این صورت داریم:

الف) AX میانه است.

ب) AX ارتفاع است.

ج) AX نیمساز است.

د) X بین پای نیمساز و پای میانه قرار دارد.

ه) X بین پای نیمساز و پای ارتفاع قرار دارد.

(۱۳) ۵ مهره ی سفید و ۱۰ مهره ی سیاه داریم. به چند طریق این مهره ها را می توانیم در یک ردیف از چپ به راست کنار هم بچینیم، به طوری که بلافاصله بعد از هر مهره ی سفید حداقل یک مهره ی سیاه قرار داشته باشد؟

الف) ۱۲۶ (ب) ۱۳۲ (ج) ۲۱۸ (د) ۲۵۲ (ه) ۳۱۲

(۱۴) فرض کنید برای هر $n \in \mathbf{N}$,

$A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ و } n \text{ بزرگتر از یک است.}\}$

عدد طبیعی $n < 1$ را «خوب» می نامیم هر گاه برای هر $x, y \in A_n$ داشته باشیم $x + y \in A_n$. چند عدد خوب زوج داریم که کوچک تر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند؟

- الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۹ ه) ۲۳

۱۵) نقطه ی M درون مثلث ABC قرار دارد. H_1, H_2, H_3 به ترتیب پای عمود های مرسوم از M بر BC, AC و AB می باشند. اگر حاصل ضرب MH_1, MH_2, MH_3 بیش ترین مقدار ممکن خود را اختیار کند آن گاه M کدام یک از نقطه های زیر است؟

الف) مرکز ارتفاعی

ب) مرکز دایره ی محاطی

ج) مرکز دایره ی محیطی

د) مرکز ثقل

ه) نقطه ای که از آن سه ضلع به یک زاویه دیده می شود.

۱۶) معادله ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1376}$ با شرط $(x \leq y)$ در مجموعه ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) جواب ندارد.

۱۷) چند تابع $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ داشته باشیم:

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$$

- الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه ه) بی نهایت

۱۸) چند عدد اول سه رقمی \overline{abc} وجود دارد که در آن داشته باشیم $b^2 - 4ac = 9$ ؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۹) در زیر مجموعه $\{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq 5, x, y \in \mathbb{Z}\}$ از نقاط صفحه حداکثر چند نقطه می توانیم انتخاب کنیم به طوری که فاصله ی دو به دو این نقاط متمایز باشد؟

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۲۰) تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ در شرایط زیر صدق می کند:

۱) به ازای هر $x, y \in \mathbb{N}$ داریم: $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$

۲) فقط به ازای تعداد متناهی x داریم: $f(x) = 1$

۳) $f(30) = 6$

مقدار $f(2)$ چقدر است؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۱) فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه هایی از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ باشند به طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه ی A_i و A_j حداقل ۲ عضو دارد. در این صورت بیش ترین مقدار n کدام یک از مقادیر زیر است؟

- الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴ ه) ۲۵

۲۲) تعداد مقسوم علیه های هر عدد طبیعی n را با $d(n)$ نشان می دهیم. عدد n را «جالب» گوییم هر گاه $d(d(d(n))) = d(d(n))$. کدام یک از احکام زیر نا درست است؟

الف) بی نهایت عدد جالب مضرب ۳ وجود دارد.

ب) بی نهایت عدد جالب زوج وجود دارد.

ج) بی نهایت عدد جالب فرد وجود دارد.

د) اگر n جالب باشد، n^3 نیز جالب است.

ه) اگر n جالب باشد، $d(n)$ نیز جالب است.

(۲۳) اعداد حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n روی تخته نوشته شده اند. در هر «گام» دو تا از آن ها مثل x و y را به دلخواه انتخاب کرده و آن ها را حذف می کنیم و به جای آن ها عدد $x+y+xy$ را می نویسیم. پس از $n-1$ گام عدد A روی تخته باقی مانده است. کدام یک از نتیجه گیری های زیر درست است؟

(الف) می توان مقادیر اولیه a_1, a_2, \dots, a_n را چنان تعیین کرد که با روش های مختلف $n!$ مقدار متمایز برای A حاصل شود.

(ب) مقدار A به طور منحصر به فرد توسط a_1, a_2, \dots, a_n تعیین می شود.

(ج) اگر $a_1=2$ ، در این صورت A حتما عددی زوج است.

(د) به تعداد متناهی مقادیر a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارد که برای آن ها A می تواند برابر ۱ شود.

(ه) تمام گزینه های بالا نادرست است.

(۲۴) ۱۳۷۶ لامپ داریم که همه در حالت اولیه خاموش هستند. این لامپ ها را از ۱ تا ۱۳۷۶ شماره گذاری می کنیم. برای هر عدد صحیح مثبت k ، سوئیچ P_k وضعیت خاموش و روشن لامپ هایی که شماره ی آن ها مضربی از k است را عوض می کند. سوئیچ های $P_1, P_2, \dots, P_{1376}$ را متوالیا می زنیم. در آخر چند لامپ روشن می ماند؟

الف) ۱۳۷۶ (ب) ۱۳۳۹ (ج) ۷۶ (د) ۳۹ (ه) ۳۷

(۲۵) از جدول زیر ۵ عدد انتخاب می کنیم به طوری که هیچ دو عددی در یک سطر یا ستون قرار نگیرند. کوچک ترین این اعداد را a می نامیم. a حداکثر چه مقداری می تواند باشد؟

۲۰	۲۲	۲۹	۲۱	۳۱
۱۴	۱۲	۱۵	۲۰	۷
۳	۹	۷	۱۳	۲۳
۲۳	۱۴	۱۱	۱۷	۳۱
۲۱	۲۶	۲	۴۱	۲۸

الف) ۱۴ (ب) ۱۵ (ج) ۱۶ (د) ۲۰ (ه) ۲۱

(۲۶) از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 1001\}$ زیرمجموعه ای مانند $S \subset A$ انتخاب می کنیم به طوری که اگر $x, y \in S$ ، آن گاه $x + y \notin S$. حداکثر تعداد اعضای S چقدر است؟

الف) ۴۹۹ (ب) ۵۰۰ (ج) ۵۰۱ (د) ۵۰۲ (ه) ۵۰۳

۲۷) برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می دهیم (مثلا $f(۱۳۷۶)=۱۷$). اگر $n=(۱۳)^{۷۶}$ کدام یک از اعداد زیر در دنباله ی

$n, f(n), f(f(n)), \dots, f(f(\dots f(n)\dots)), \dots$

وجود دارد؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) هیچ کدام

۲۸) مثلث ABC با اضلاع $AB=۴$ ، $AC=۵$ ، و $BC=۶$ مفروض است. نقاط A' ، B' و C' پای ارتفاع های نظیر رأس های A ، B و C هستند. A'' ، B'' و C'' را به ترتیب محل تلاقی امتداد این ارتفاع ها با دایره ی محیطی

مثلث ABC می گیریم. در این صورت $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'}$ برابر است با:

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) $۲\sqrt{۲}$ (د) $۲\sqrt{۳}$ (ه) $۲\sqrt{۳}-۱$

۲۹) در کدام یک از مجموعه های زیر عددی به صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{۵^m + ۵^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ (ب) $\{۲^m + ۲^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$

ج) $\{۹^m + ۹^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ (د) $\{۷^m + ۷^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$

ه) هیچ کدام

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1376}} = \frac{\overbrace{1+1+\dots+1}^{1376}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{1376}}$$

۳۰) معادله ی $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1376}} = \frac{1376}{a_1 + a_2 + \dots + a_{1376}}$ که در آن

$$1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{1376}$$

روی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) $۱۳۷۶!$ (د) بی نهایت (ه) $۲ \times (۱۳۷۶!)$