تابع نمایی در پایه a :

فرض کنید $a>0$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم :

$$\boxed{\exp_a x := \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}}$$

نماد دیگر : $\exp(\ln a^x) = a^x$

خواص :

الف) دامنه این تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد و برد آن $(0, +\infty)$ است. ← اعداد مثبت

ب) $a^0 = 1$

ج) $a^{-x} = e^{-x \ln a}$

د) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ و $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ه) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

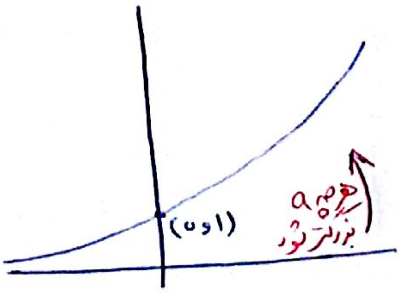
و) $(ab)^x = a^x b^x$

ز) اگر $a>1$ داریم :

$a^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$



(صعودی) و پیوسته

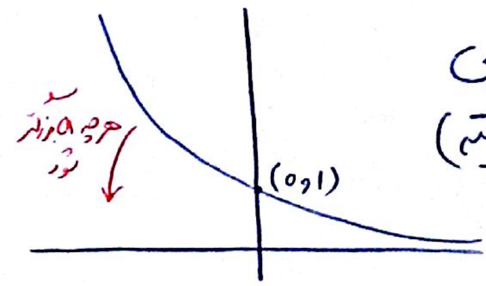
مانند 2^x و e^x

ح) اگر $0<a<1$ داریم :

$a^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

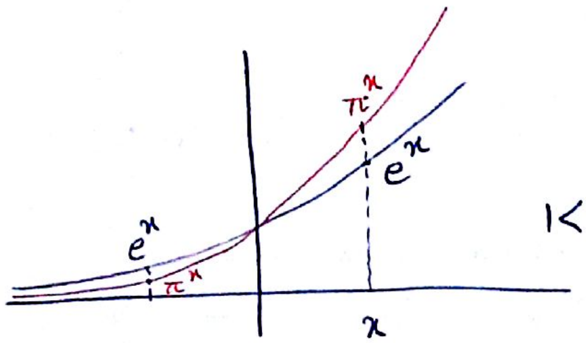
$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$



(نزولی) و پیوسته

مانند $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

مثال: نمودار π^x و e^x را تشخیص دهید:



$1<e<\pi$

لذا برای هر $x>0$، $e^x<\pi^x$

برای هر $x<0$، $\pi^x<e^x$

و برای $x=0$، $\pi^0=e^0=1$.

مشتق تابع نمایی:

$$\boxed{(a^u)'=a^u . \operatorname{Ln} a . u'}$$

مثال: مشتق بگیرید:

$$*\, y = x^3 . 5^x$$

$$y'=(3x^2)(5^x)+(x^3)(5^x \times \operatorname{Ln} 5)$$

$$*\, y=\operatorname{arc\,tg}(\pi^{x^2-\sqrt{x}})$$

$$y'=\frac{1}{1+(\pi^{x^2-\sqrt{x}})^2} \times \pi^{x^2-\sqrt{x}} \times \operatorname{Ln}\pi \times \left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

مثال: مشتق بگیرید:

$$y = \frac{e^{x^2+2x}}{2^x \ln x}$$

حل: از مشتق گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم:

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{e^{x^2+2x}}{2^x \ln x}\right| = \underbrace{\ln\left(e^{x^2+2x}\right)}_{x^2+2x} - \ln\left(2^x\right) - \ln(\ln x)$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\left(\frac{e^{x^2+2x}}{2^x \ln x}\right)}_{y}\left(2x+2 - \frac{\cancel{2^x}\ln 2}{\cancel{2^x}} - \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$$

مثال: حد بگیرید:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\mathrm{tg}\,x}-1}{\sin x} = \left(\frac{3^{\mathrm{tg}\,0}-1}{\sin 0} \to \frac{3^{0}-1}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

حل: برای رفع ابهام از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3^{\mathrm{tg}\,x} \times \ln 3 \times \sec^2 x}{\cos x} = \frac{3^0 \times \ln 3 \times \sec^2 0}{\cos 0}$$

$$= \ln 3$$

فرمول انتگرال:

$$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \;;\; a>0}$$

مثال: $\int \frac{2^x}{3^{x-1}}\,dx = \int \frac{2^x}{3^x 3^{-1}}\,dx = 3\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 3\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}}$ ■

لگاریتم :

اگر $a>0$ و $a\neq 1$ ، تابع $\log_a x$ (بخوانید لگاریتم x در پایه یا مبنای a) را معکوس تابع یک به یک a^x تعریف می‌کنیم.

$$\exp_a^x : a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \ \& \ 1\text{-}1 \Leftrightarrow \log_a x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$a^y = x \iff y = \log_a x$$

لذا :

$$\log_a(a^x) = x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad , \forall x > 0$$

$$2^3 = 8 \Rightarrow \square^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$ توجه : مجهول پایه : رادیکال

$$2^3 = 8 \Rightarrow 2^{\square} = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3$$ مجهول توان : لگاریتم

مهم : شرایط وجود برای لگاریتم یا شرایط دامنه برای :

$\log_a$(عبارت)

① $a > 0$

② $a \neq 1$

③ عبارت > 0

قرارداد: لگاریتم در پایه ۱۰ که از توان های ۱۰ منتج شده است پرکاربرد است، لذا آن را با لگاریتم بدون پایه نشان می‌دهیم:

$$\log x = \log_{10} x$$

$* \ \log_{2} 16 = ?$

$= 4$

$* \ \log_{10} 1000 = ?$

$= 3$

$* \ \log_{10} \frac{1}{100} = -2$

$* \ \log_{2} 1024 = 10$

$* \ \log_{5} \sqrt{5} = ?$

$= \frac{1}{2}$

قوانین لگاریتم: هرگاه $x,y>0$ ، $a,b>0$ و $a,b\neq 1$. آنگاه:

الف) $\log_a 1 = 0$ ، $\log_a a = 1$

ب) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

ج) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

د) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

هـ) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

و) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$\therefore$/ $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ & $\log_e x = \ln x$

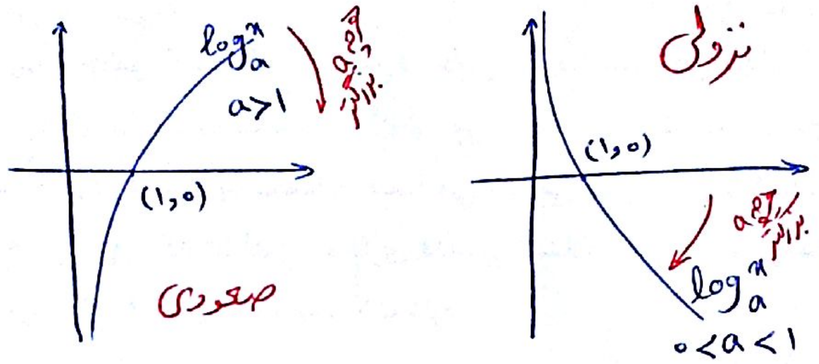
$\therefore$/ $\log_{a^y} x = \frac{1}{y} \log_a x$

$\therefore$/ $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

$\therefore$/ $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$

ز/ $a>1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\log_a^x=\infty \ , \ \lim_{x\to 0^+}\log_a^x=-\infty \ , \ \log_a^1=0$

ح/ $0<a<1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\log_a^x=-\infty \ , \ \lim_{x\to 0^+}\log_a^x=\infty \ , \ \log_a^1=0$



* مثال: دامنه تابع $f(x)=\log_{10}\left(1-\log_{10}(x^2-5x+16)\right)$ را بیابید.

الف/ $10>0 \ , \ 10\neq 1$ ✓

ب/ $1-\log_{10}(x^2-5x+16)>0 \Rightarrow \log(x^2-5x+16)<1=\log 10$

$\Longrightarrow$ ($\log_{10}^t$ صعودی ولذا 10^s صعودی است) $x^2-5x+16<10 \Rightarrow x^2-5x+6<0 \Rightarrow (x-2)(x-3)<0$; $x=2$, $x=3$

$\Rightarrow$

x		2		3	
x^2-5x+6	$+$	0	$-$	0	$+$
			ج		

$\Rightarrow x\in(2,3)$

ج/ $x^2-5x+16>0 \Rightarrow \Delta=25-4(1)(16)<0 \Rightarrow$ علامت عبارت همواره موافق علامت ضریب x^2 و مثبت است

$\Rightarrow$ همواره و برای هر x صادق است $\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

$D=$ اشتراک $=\boxed{(2,3)}$ □

مثال: دامنه تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_{\frac{1}{2}} 2x)}$$

حل:

برای رادیکال الف/ $0 \leq \arcsin(\log_{\frac{1}{2}} 2x) \xrightarrow[\text{ربع اول}]{\leq \frac{\pi}{2}} 0 \leq \log_{\frac{1}{2}} 2x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \log_{\frac{1}{2}} 2x \leq 1$ (I)

برای arc ب/ $-1 \leq \log_{\frac{1}{2}} 2x \leq 1$

لگاریتم ج/ $2x > 0 \Rightarrow x > 0$ (II)

$\frac{1}{2} \neq 1$ ✓

$\frac{1}{2} > 0$ ✓

ادامه (I): $0=\log_{\frac{1}{2}} 1 \leq \log_{\frac{1}{2}} 2x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow[\frac{1}{2}<1 \text{ نزولی است}]{\text{برداشتن } \log_{\frac{1}{2}}} 1 \geq 2x \geq \frac{1}{2}$

$\geq$ (تو دوم) $\geq$ (تو دوم)

$$\xRightarrow{\div 2} \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{(III)}$$

اشتراک II و III $\Rightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_f = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

مثال: معادله $2\log_3 x + \log_9 x = 10$ را حل نمایید.

حل: مرحله اول: بررسی دامنه: برای هر دو لگاریتم $x>0$ هستند دامنه‌ها باید اشتراک داشته باشند.

مرحله دوم:

$$2\log_3 x + \log_{3^2} x = 10 \Rightarrow 2\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = 10$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}\log_3 x = 10 \Rightarrow \log_3 x = \frac{20}{5} = 4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 3^4}} > 0 \checkmark \Rightarrow \text{ق ق}$$

در شرط دامنه

مثال: عبارات زیر را ساده نمایید.

$$* \log_2(\log_3(\log_4 64)) = ?$$

$$= \log_2(\log_3(\log_{2^2} 2^6)) = \log_2(\log_3(\underbrace{\tfrac{6}{2}\cancel{\log_2 2}^{\,1}}_{3}))$$

$$= \log_2(\log_3 3) = \log_2(1) = 0$$

$$* \log_\pi(1-\cos x) + \log_\pi(1+\cos x) - 2\log_\pi \sin x = ?$$

$$= \log_\pi \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \log_\pi \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \log_\pi \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \log_\pi 1 = 0$$

مشتق تابع لگاریتم:

$$(\log_a^x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

و در حالت کلی

$$(\log_a^u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

مثال: حد زیر.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_{۲}(1+x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{ه}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)\ln ۲}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{\ln ۲}. \quad \blacksquare$$