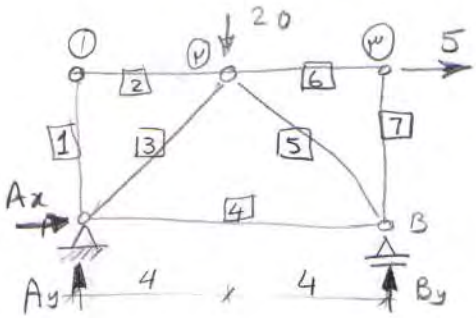
مطلوبیت تحلیل خرپای مقابل به روش گره.



حل: ابتدا عکس العمل تکیه گاه ها را به دست می آوریم.

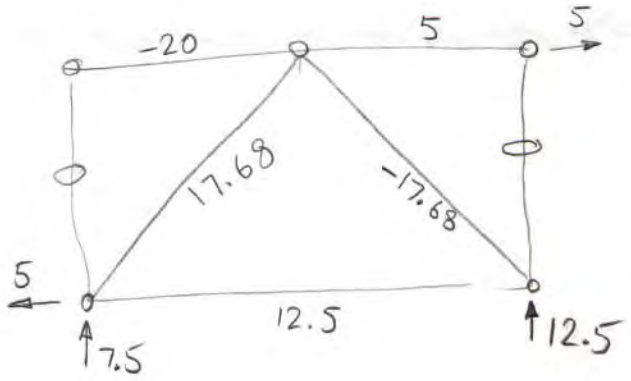
$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \quad 20\times 4 + 5\times 4 - B_y \times 8 = 0 \quad \boxed{B_y = 12.5}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = -5}$

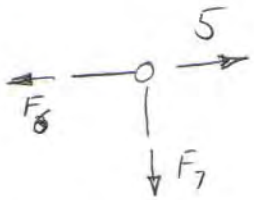
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -20 + A_y + 12.5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 7.5}$

در ادامه برای نامگذاری راحت تر گره ها و میله ها را شماره گذاری می کنیم. ○ برای گره ها و □ برای میله ها

در قسمت جداگانه شکل خرپا را ترسیم نموده و نتایج حاصل از تحلیل هر گره را به روی شکل منتقل می کنیم.



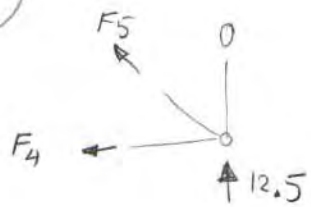
ابتدا از گره ③ شروع می کنیم.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_6 + 5 = 0 \quad \boxed{F_6 = 5}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_7 = 0$

(B)

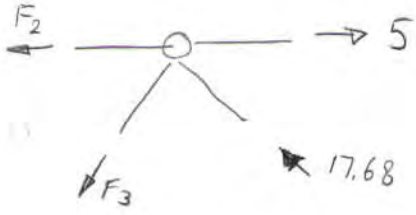


$\Sigma F_x = 0 \quad -F_5 \cos 45^\circ - F_4 = 0 \quad (a)$

$\Sigma F_y = 0 \quad 12.5 + F_5 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{F_5 = -\frac{12.5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -17.68}$

$(a) \rightarrow F_4 = -F_5 \cos 45^\circ = -(-17.6)\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{12.5}$

(۲)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_2 - F_3 \cos 45^\circ + 5 - 17.68 \cos 45^\circ = 0$

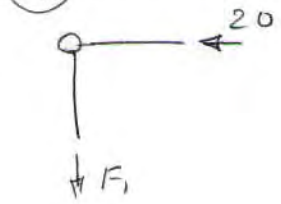
$-F_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_3 = 7.5 \quad (b)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 17.68 \cos 45 - F_3 \cos 45 = 0$

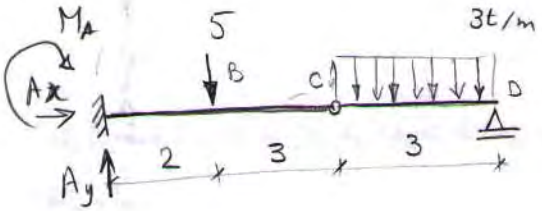
$\boxed{F_3 = 17.68}$

$(b) \rightarrow \boxed{F_2 = -20}$

(1)



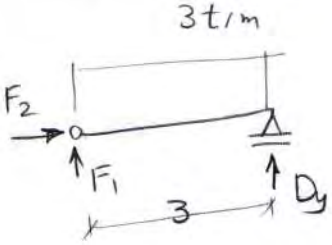
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 = 0$



مطلوبت تحلیل و ترسیم دیاگرام نیروهای برشی و خمشی تیر مرکب.

حل) با توجه به تعداد مجهولات 4 عدد (۳ مجهول در تکیه‌گاه گیردار و یک مجهول در تکیه‌گاه غلطکی) و عنایت به وجود مفصل تعداد معادلات نیز 4 عددی باشد لذا سازه قابل تحلیل است.

آرمستت راست مفصل را جدا کنیم و برای مفصل (C) معادله گشتاور بنویسیم



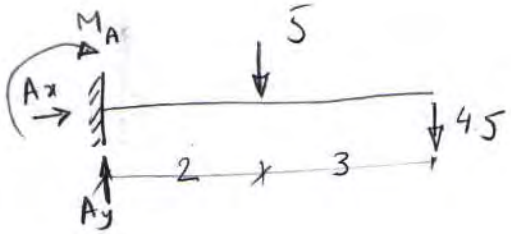
داریم:

$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 3 \times 3 \times \frac{3}{2} - 3D_y = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = 4.5}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_2 = 0}$

$\Sigma F_y = 0 \quad -3 \times 3 + F_1 + 4.5 = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 = 4.5}$

حال سمت چپ مفصل داریم

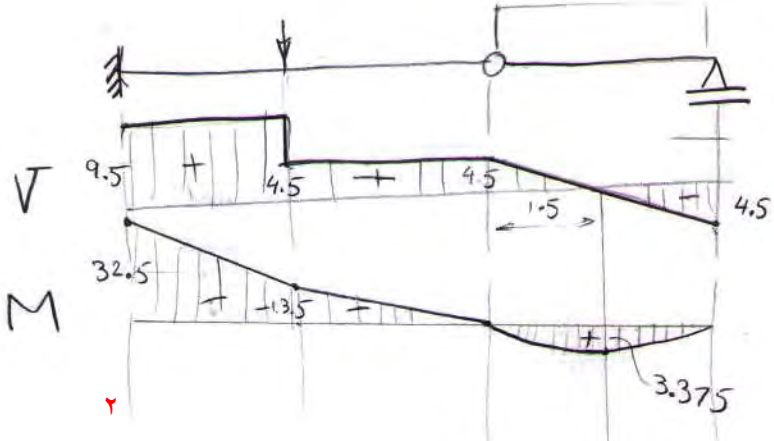


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$

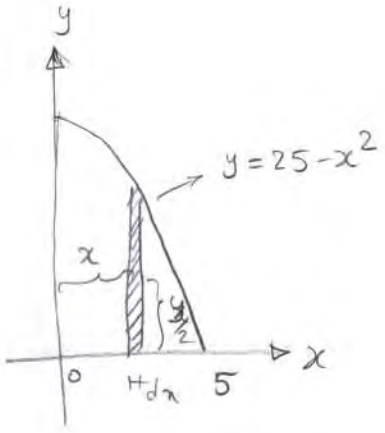
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5 - 4.5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 9.5}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + 5 \times 2 + 4.5 \times (2+3) = 0$

$\boxed{M_A = -32.5}$



مطلوبست محاسبه مرکز سطح شکل مقابل با استفاده از روش انتگرال گیری



حل) ابتدا مرکز سطح را با استفاده از نوارهای قائم محاسبه کنیم.

dS_x = ممان نوار = $\frac{y}{2} \times y \cdot dx$

$$S_x = \int_0^5 \frac{y^2}{2} dx = \int_0^5 \frac{1}{2}(25-x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^5 (25^2 - 50x^2 + x^4) dx$$

$$S_x = \frac{1}{2}\left[25^2 x - 50\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^5\right] = \frac{1}{2}\left[25^2 \times 5 - 50\frac{5^3}{3} + \frac{5^5}{5}\right] = \boxed{833.33}$$

$$A = \int_0^5 y\,dx = \int_0^5 (25-x^2)dx = \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5 = \boxed{83.33}$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{833.33}{83.33} = \boxed{10}$$

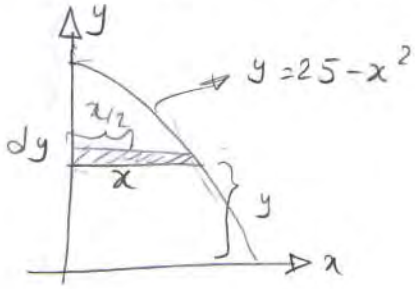
$$dS_y = x \cdot y \cdot dx = x(25-x^2)dx = (25x - x^3)dx$$

$$S_y = \int_0^5 (25x - x^3)dx = \left(\frac{25x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^5 = \boxed{156.25}$$

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{156.25}{83.33} = \boxed{1.875}$$

راه حل (دوم):

مسئله فوق را می‌توان با نوارهای افقی نیز حل نمود



dS_x = ممان نوار

$$dS_x = y \times x \times dy = (25-x^2)x\,dy \quad (1)$$

$$y = 25 - x^2 \Rightarrow dy = -2x\,dx \quad (2)$$

$$\begin{cases} y=0 \rightarrow x=5 \\ y=25 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$(1),(2) \rightarrow dS_x = (25x - x^3)(-2x\,dx) = -50x^2 + 2x^4\,dx$$

$$S_x = \int_5^0 (-50x^2 + 2x^4)dx = \left(-50\frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^5 = +833.33$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{+833.33}{83.33} = 10$$

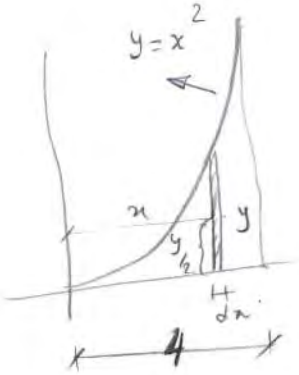
dS_y = مساحت المان $= \frac{x}{2} \times x \cdot dy = \frac{x^2}{2} dy$ ①

$y = 25 - x^2 \Rightarrow dy = -2x\,dx$ ②

$\begin{cases} y=0 \rightarrow x=5 \\ y=25 \rightarrow x=0 \end{cases}$

$$S_y = \int_0^{25} \frac{x^2}{2} dy = \int_5^0 \frac{x^2}{2}(-2x\,dx) = \int_0^5 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^5 = \boxed{156.25}$$

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{156.25}{83.33} = \boxed{1.875}$$



حل با نوارهای قائم داریم

dS_x = مساحت المان $= \frac{y}{2} \times y \times dx = \frac{y^2}{2} dx$

$$S_x = \int_0^4 \frac{1}{2}(x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^4 dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^4 = \boxed{102.4}$$

$$A = \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \boxed{21.33}$$

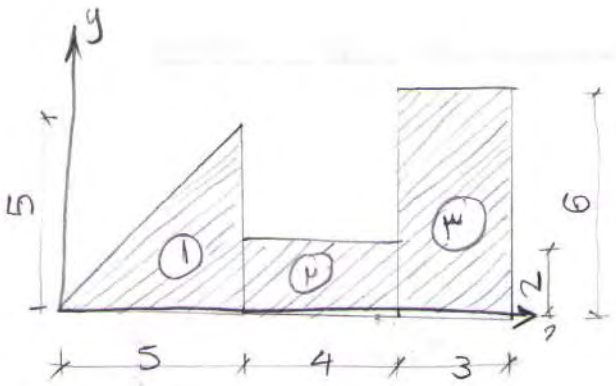
$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{102.4}{21.33} = \boxed{4.80}$$

dS_y = مساحت المان $= x \cdot y\,dx = x(x^2)dx = x^3 dx$

$$S_y = \int_0^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = \boxed{64}$$

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{64}{21.33} = \boxed{3}$$

مسئله را همچون مسئله قبل با نوارهای افقی نیز می‌توان حل کرد (به عهده دانشجو)



در شکل زیر مطلوب تعیین مرکز سطح $(\bar{y}, \bar{x})$

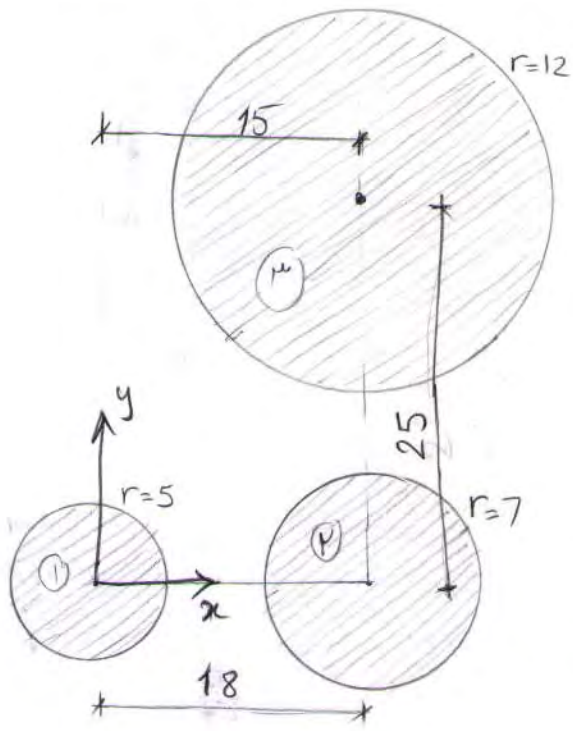
حل) ابتدا محورهای مختصاتی در شکل انتخاب می‌کنیم و شکل را به شکل‌های هندسی تجزیه می‌کنیم و هر مساحت را شماره گذاری می‌کنیم سپس جدول مطابق روبرو تشکیل می‌دهیم.

شکل i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
①	$5\times5/2$	$\frac{2}{3}\times5$	$\frac{1}{3}5$	41.67	20.83
②	4×2	$5+\frac{4}{2}$	$\frac{2}{2}$	56	8
③	3×6	$5+4+\frac{3}{2}$	$\frac{6}{2}$	189	54
	38.5			286.67	82.83

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{286.67}{38.5} = \boxed{7.45}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{82.83}{38.5} = \boxed{2.15}$$

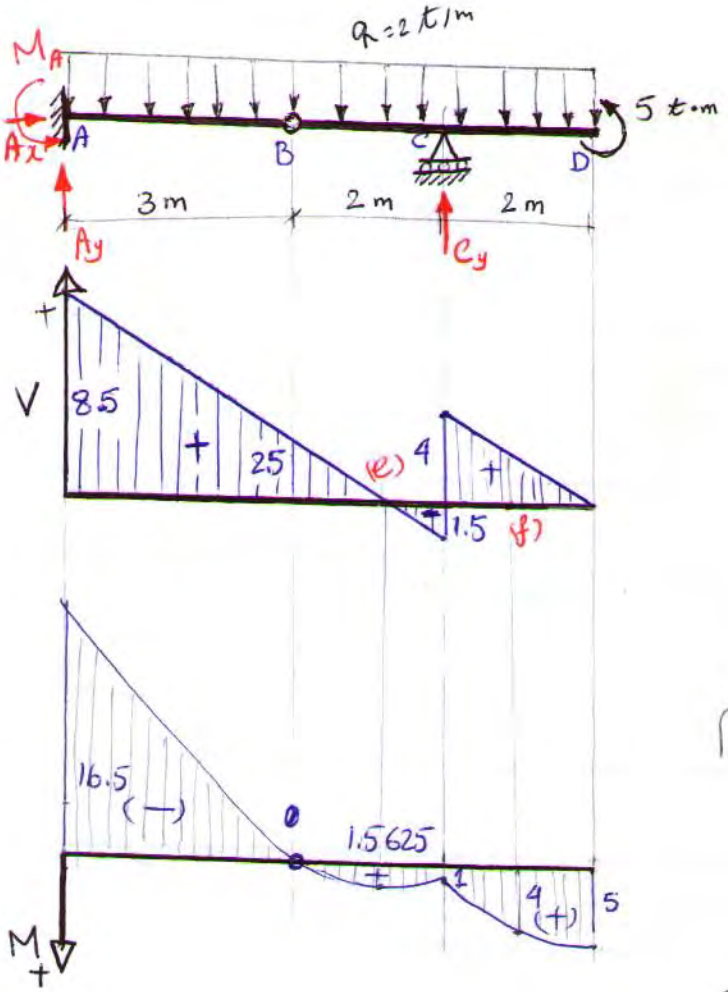
در شکل زیر مطلوب تعیین مرکز سطح



	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	78.54	0	0	0	0
2	153.9	18	0	2770.2	0
3	452	15	25	6780	11'300
	684.44			9'550.2	11'300

$$\bar{x} = \frac{9\,550.2}{684.44} = 13.95$$

$$\bar{y} = \frac{11'300}{684.44} = 16.51$$



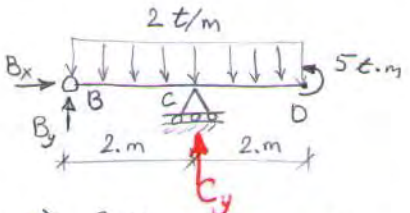
در تیر مقابل مطلوبست ترسیم دیاگرام برش و خمش

حل:

ابتدا عکس العملهای تیر را بدست می آوریم.

چون تعداد مجهولات 4 و با توجه به وجود مفصل در نقطه B تعداد معادلات نیز 4 می شود و سازه معین می باشد.

از محل مفصل مقطع می زنیم و سمت راست را نگاه می داریم



$\oplus \sum M_B = 0 \Rightarrow 2\times4\times2 - 2C_y - 5 = 0$

$$C_y = \frac{11}{2} = 5.5 \text{ ton}$$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -2\times7 + A_y + 5.5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 8.5 \text{ ton}}$

$\oplus \sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 2\times\frac{7^2}{2} - 5\times5.5 - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 16.5 \text{ t.m}}$

$V_A = A_y = 8.5$

$V_B = V_A - q.x_B = 8.5 - 2\times3 = 2.5 \text{ t}$

$V_C = V_A - q(x_{IC} - x_B) = 2.5 - 2(5-3) = -1.5 \text{ t}$

$V_c = V_c + C_y = -1.5 + 5.5 = 4.0 \text{ t}$

$x_m = 5\times\frac{8.5}{10} = 4.25$

$M_A = -16.5$

$M_B = -16.5 + \frac{8.5+2.5}{2}\times3 = 0$

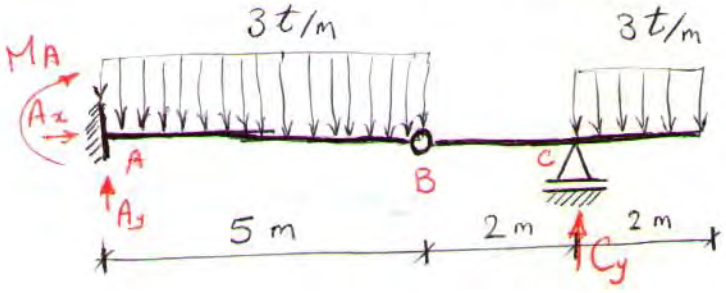
$M_e = -16.5 + \frac{8.5}{2}\times4.25 = 1.5625$

$M_c = 1.5625 - \frac{1.5}{2}(5-4.25) = 1$

$M_f = 1 + \frac{4+2}{2}\times1 = 4$

$M_D = 1 + \frac{4}{2}\times2 = 5$

۲- مطلوبت تحلیل تیر مقابل و بدست آوردن عکس العملهای آن.



حل) ابتدا معین و نامعینی و نیز پایداری سازه بررسی می شود.

تعداد مجهولات = تعداد مجهولات تکیه گاه گیردار + تکیه گاه غلطکی = 3 + 1 = 4

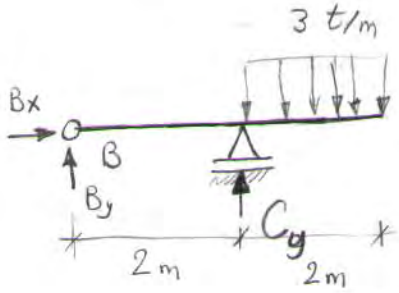
تعداد معادلات = معادلات تعادل + مخاطر مفصل = 3 + 1 = 4

$\Rightarrow x =$ تعداد معادلات − تعداد مجهولات = 4 − 4 = 0

معین و پایدار

پس از نامگذاری تکیه گاه ها و مجهولات از محل مفصل می توان قطع زد و قسمتی را حذف و قسمتی را نگه می داریم

در این حالت برای سادگی حل مسئله سمت چپ را حذف و سمت راست را نگه می داریم



$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow 3 \times 2 \times (2 + \frac{2}{2}) - C_y \times 2 = 0$

$C_y = \frac{18}{2} = 9 \ ton$

حال که عکس العمل C_y تعیین شده است می توان با استفاده از معادلات تعادل برای کل سازه به مجهول باقی مانده رابدست آورد.

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow M_A + 3 \times 5 \times \frac{5}{2} - \underbrace{C_y}_{9} \times \underbrace{(5+2)}_{7} + 3 \times 2 \times \underbrace{(5+2+\frac{2}{2})}_{8} = 0$

$M_A + 37.5 - 63 + 48 = 0$

$M_A + 10.5 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -22.5 \ t.m}$

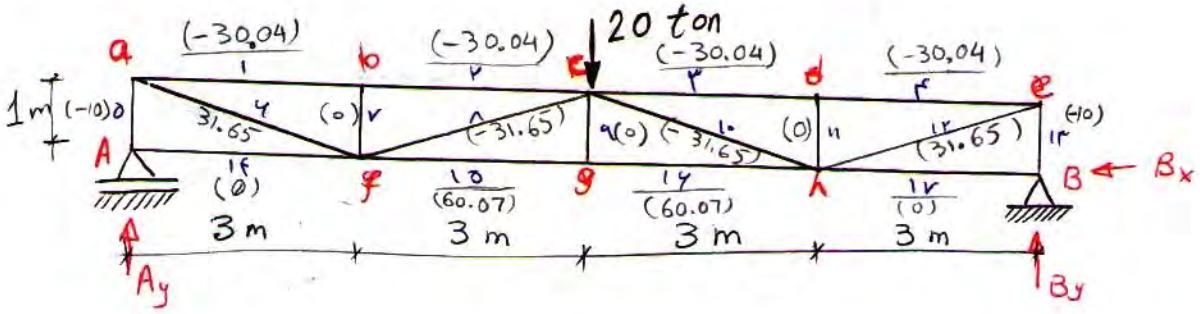
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 3\times 5 + \overset{9}{C_y} - 3\times 2 = 0 \Rightarrow A_y - 15 + 9 - 6 = 0$$

$$A_y - 12 = 0$$

$$\boxed{A_y = 12}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

تمرین: خرپا مقابل را تحلیل کنید.



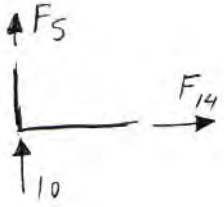
حل) ابتدا گره و اعضا را نام گذاری می کنیم و سپس مجهول نیروی اعضا را بدست می آوریم

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y(4\times 3) - 20\times(2\times 3) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{20\times 6}{12} = 10$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 10 - 20 + B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 10}$$

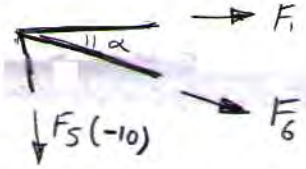
A) حال به روش گره و از گره A شروع به حل می کنیم



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{14} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_5 + 10 = 0 \quad \boxed{F_5 = -10}$$

a)



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 + \cos\alpha\, F_6 = 0$$

$$\boxed{F_1 = -0.949\, F_6} \quad (I)$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.316$$

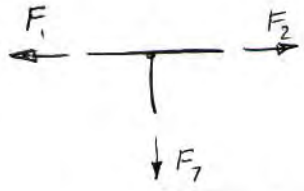
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = 0.949$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_5 - \sin\alpha\, F_6 = 0 \quad -(-10) - 0.316\, F_6 = 0$$

$$-0.316\, F_6 = -10 \Rightarrow F_6 = \frac{10}{0.316} = 31.65 \text{ ton}$$

(I) → $F_1 = -0.949 \times 31.65 = -30.04$ ton

b)



$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_7 = 0}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 + F_2 = 0 \quad \boxed{\Rightarrow F_2 = F_1 = -30.04}$

f)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 31.65 \times \sin\alpha + F_8 \sin\alpha = 0$

$\boxed{F_8 = -31.65}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -31.65 \cos\alpha + F_8 \cos\alpha + F_{15} = 0$

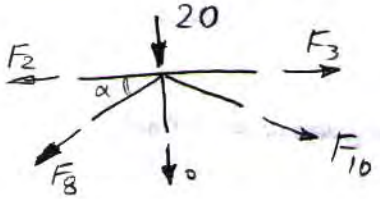
$-31.65 \times 0.949 + (-31.65) \times 0.949 + F_{15} = 0 \Rightarrow -60.07 + F_{15} = 0 \quad \boxed{F_{15} = 60.07}$

g)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_9 = 0}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{15} + F_{16} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{16} = F_{15} = 60.07}$

c)



$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_8 \sin\alpha - F_{10} \sin\alpha - 20 = 0$

$+10.00$

$-(-31.65) \times 0.316 - 0.316 F_{10} - 20 = 0$

$-0.316 F_{10} = 10 \Rightarrow \boxed{F_{10} = -31.65}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_2 - F_8 \cos\alpha + F_{10} \cos\alpha + F_3 = 0$

$-(-30.04) - (-31.65) \times 0.949 + (-31.65) \times 0.949 + F_3 = 0$

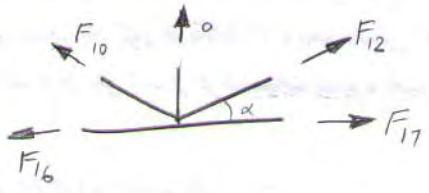
$30.04 + F_3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_3 = -30.04}$

d)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_{11} = 0}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_3 + F_4 = 0 \Rightarrow \boxed{F_4 = F_3 = -30.04}$

h)



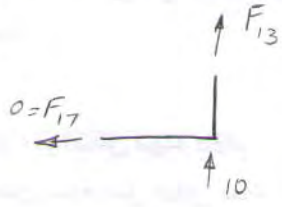
$\sum F_y = 0 \quad +F_{10}\sin\alpha + F_{12}\sin\alpha = 0$

$\boxed{F_{12} = -F_{10} = -(-31.65) = 31.65}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{16} - \cos\alpha F_{10} + \cos\alpha F_{12} + F_{17} = 0$

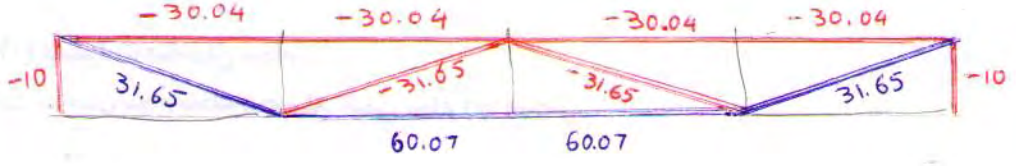
$-60.07 - (-31.65)\times 0.949 + 31.65 \times 0.949 + F_{17} = 0 \Rightarrow 0 + F_{17} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{17} = 0}$

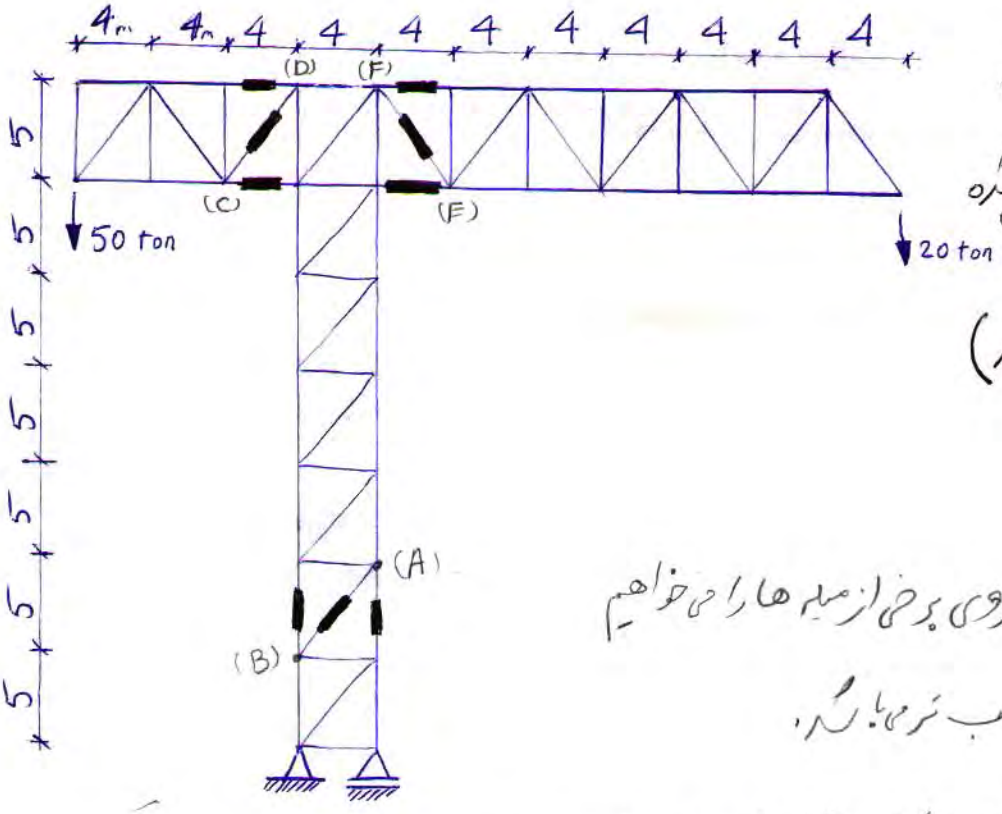
B)



$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{13} + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{13} = -10}$

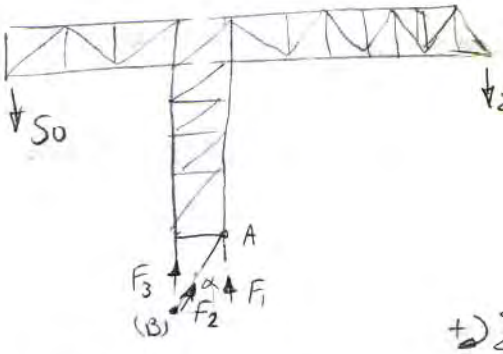
$\sum F_x = 0 \quad -F_{17} + B_x = 0 \Rightarrow \boxed{0 + 0 = 0}$





در خرپای مقابل مطلوبست
تعیین نیروهای اعضاء مشخص شده
(توضیح ابعاد همگی به متر هستند)

حل) برای حالاتی که نیروی برخی از میله ها را می خواهیم
استفاده از روش برش مناسب تر می باشد،
در مقابل میله های خواسته شده در سطوح مقطعی اعمال وضعیت بالانس حفظ وضعیت پایینی را خواهیم داشت.



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -50\times(4\times4)+20(7\times4)+4F_3=0$

$-800+560+4F_3=0$

$F_3=\frac{240}{4}=60$ ton

$+\circlearrowleft \sum M_B=0 \Rightarrow -50\times(3\times4)+20(8\times4)-4F_1=0$

$-600+640-4F_1=0$

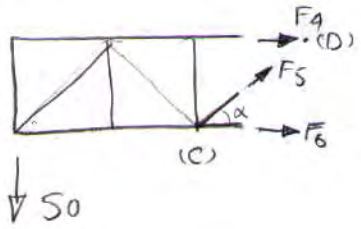
$-4F_1=-40 \quad F_1=+10$

$\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{5^2+4^2}}=0.781$

$\sum F_y=0 \Rightarrow -50-20+F_3+F_1+F_2\cdot\sin\alpha=0$

$-70+60+10+F_2\cdot\sin\alpha=0$

$0+F_2\cdot\sin\alpha=0 \quad F_2=0$



$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow -50(2\times4) + 5F_4 = 0$

$5F_4 = 400 \Rightarrow \boxed{F_4 = 80 \text{ ton}}$

$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow -50(3\times4) - 5F_6 = 0 \qquad F_6 = \frac{-600}{5}$

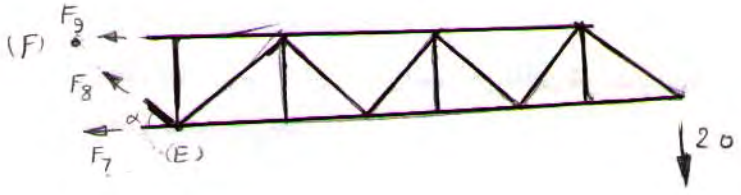
$\boxed{F_6 = -120 \text{ ton}}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_4 + F_6 + F_5 \cos\alpha = 0$

$80 - 120 + \frac{4}{\sqrt{5^2+4^2}} F_5 = 0 \Rightarrow -40 + 0.625 F_5 = 0$

$\boxed{F_5 = 64}$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{5^2+4^2}} = 0.625$



$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \Rightarrow -5F_9 + 20(6\times4) = 0$

$\boxed{F_9 = \frac{480}{5} = 96 \text{ ton}}$

$+\circlearrowleft \sum M_F = 0 \Rightarrow 5F_7 + 20(7\times4) = 0 \Rightarrow \boxed{F_7 = -\frac{560}{5} = -112 \text{ ton}}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_9 - F_7 - F_8 \cos\alpha = 0 \Rightarrow -96 - (-112) - 0.625 F_8 = 0$

$\boxed{F_8 = \frac{16}{0.625} = 25.6 \text{ ton}}$

دانشگاه آزاد خوراسگان

مسائل حل شده استاتیک

شماره صندلی شاهی

آموزشکده فنی شهید مهاجر اصفهان

اداره امور آموزشی

سئوالات امتحان درس : استاتیک

رشته : عمران نام مدرس : شاهی

تاریخ امتحان : 89/10/29 مدت امتحان : 90 دقیقه

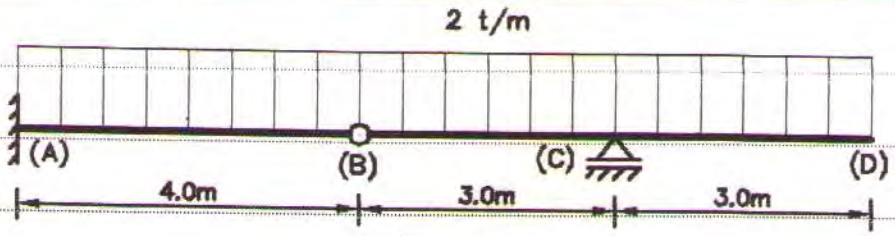
نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجوئی :

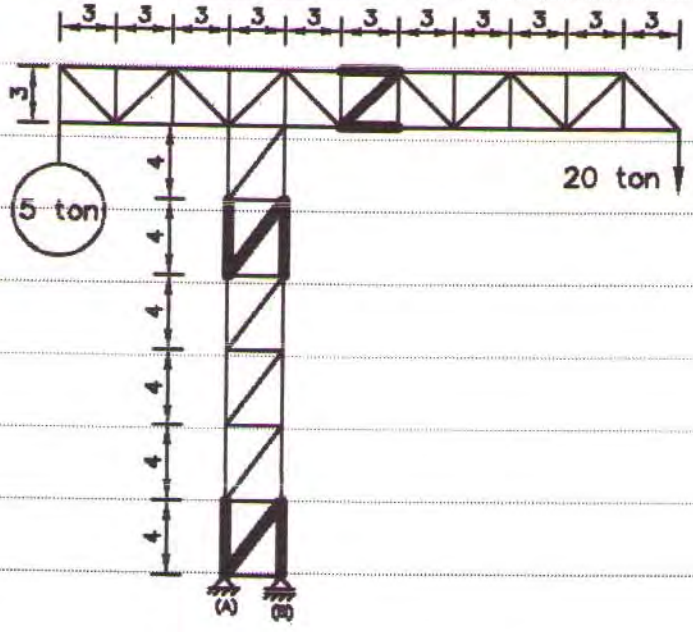
تاریخ اعلام نمرات برای دانشجویان :

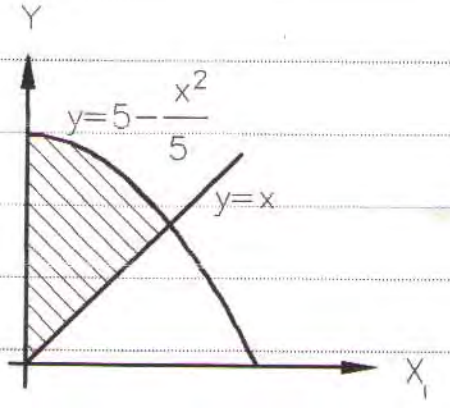
بارم | شماره

۴ | 1.تیر مقابل را تحلیل کرده و دیاگرام نیروهای برشی و خمشی را برای آن ترسیم کنید.



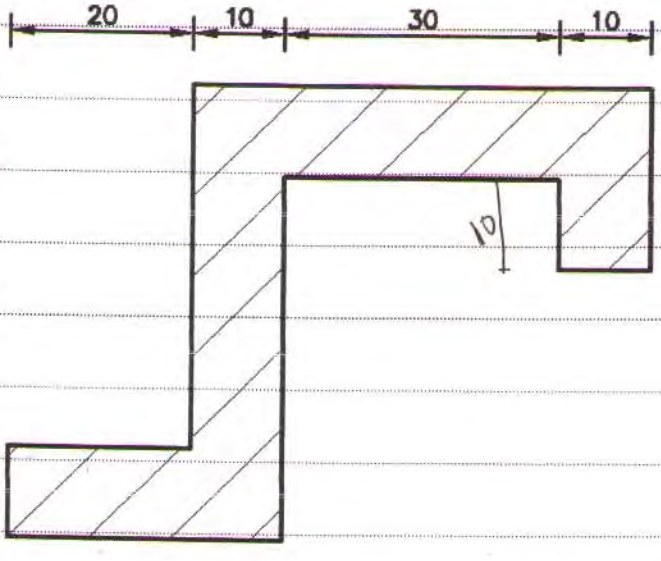
۴ | 2- در روبرو(جرثقیل) نیروی میله های پررنگتر نمایش داده شده را تعیین کنید.





۳ | 3- در شکل بالا(سمت راست) مطلوبست محاسبه مساحت و مختصات مرکز ثقل.

۴ | 4-در شکل مقابل که اندازه بر حسب سانتیمتر میباشد، مطلوبست:



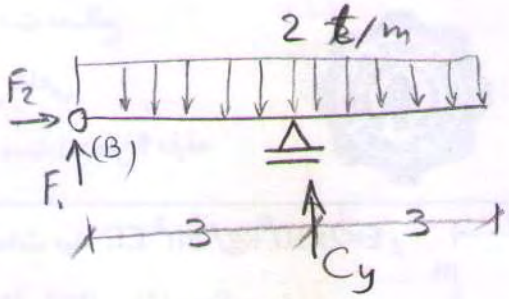
۷۵ | الف-محاسبه مختصات مرکز سطح

۱/۵ | ب- محاسبه ممان اینرسی نسبت به مرکز سطح برای محورهای X و Y و گریز از مرکز.

(۱) | ج- محاسبه زاویه محورهای اصلی اینرسی با محور X ها.

امضاء مدرس

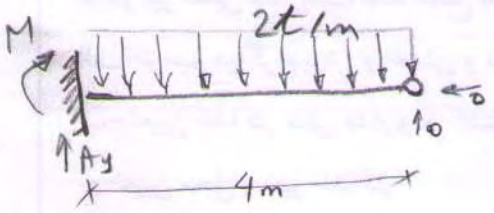
۱۱. حل ابتدا از متعلق بودن زده و قسمت راست را تحلیل می‌کنیم.



$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow 2\times6\times3 - 3C_y = 0 \Rightarrow \boxed{C_y = 12 \text{ ton}}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -2\times6 + F_1 + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 = 0}$

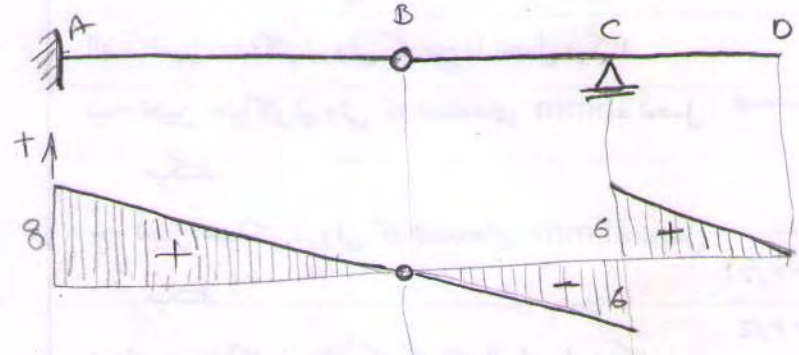
$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_2 = 0}$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2\times4 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 8}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 2\times4\times\frac{4}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -16}$



$M_B = -16 + \frac{8\times4}{2} = 0$

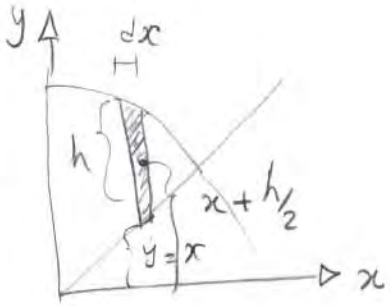
$M_C = 0 - \frac{6\times3}{2} = -9$

$M_D = -9 + \frac{6\times3}{2} = 0$

$$dS_x = x \cdot dA = x\left(5 - \frac{x^2}{5} - x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{5} - x^2 + 5x\right)dx$$

$$S_x = \int_0^{3.09} \left(-\frac{x^3}{5} - x^2 + 5x\right)dx = -\frac{x^4}{5\times 4} - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 \Big|_0^{3.09} = \boxed{9.48}$$

$$\bar{x} = \frac{S_x}{A} = \frac{9.48}{8.71} = \boxed{1.09}$$



$$dS_y = \left(x + \frac{h}{2}\right)dA = \left(x + 5 - \frac{x^2}{10} - \frac{x}{2}\right)\left(5 - \frac{x^2}{5} - x\right)dx$$

$$= \left(\frac{5}{2} - \frac{x^2}{10} + \frac{x}{2}\right)\left(5 - \frac{x^2}{5} - x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(5 - \frac{x^2}{5} + x\right)\left(5 - \frac{x^2}{5} + x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(5 - \frac{x^2}{5}\right)^2 - x^2\right]dx = \frac{1}{2}\left\{25 - 2x^2 + \frac{x^4}{25} - x^2\right\}dx$$

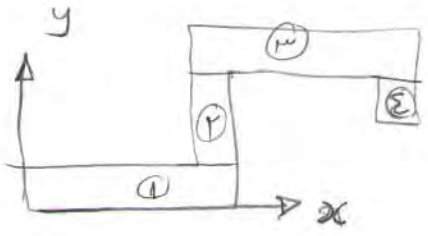
$$dS_y = \frac{1}{2}\left\{25 - 3x^3 + \frac{x^4}{25}\right\}dx$$

$$S_y = \int_0^{3.09} dS = \frac{1}{2}\int_0^{3.09} \left(25 - 3x^3 + \frac{x^4}{25}\right)dx = \frac{1}{2}\left\{25x - \frac{3}{4}x^4 + \frac{x^5}{5\times 25}\right\}\Big|_0^{3.09}$$

$$S_y = \boxed{11.13}$$

$$\bar{y} = \frac{S_y}{A} = \frac{11.13}{8.71} = \boxed{1.28}$$

- شکل را به چند شکل ساده تقسیم می‌کنیم.

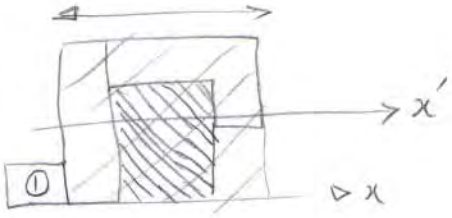


	A	x	y	Ax.	A.y	Ixy
1	10x30	15	5	4500	1'500	22'500
②	10x30	25	25	7500	7'500	187'500
3	10x50	45	45	22'500	22'500	1'012'500
4	10x10	65	35	6'500	3'500	227'500
Σ	1200			41'000	35'000	1'450'000

$$\bar{x} = \frac{A \cdot x}{A} = \frac{41'000}{1200} = \boxed{34.17}$$

$$\bar{y} = \frac{A \cdot y}{A} = \frac{35'000}{1200} = \boxed{29.17}$$

جواب الف)

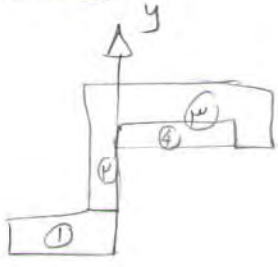


$$I_x = \frac{1}{3} \times 20 \times 10^3 + \frac{1}{3} 50 \times 50^3 - \left(\frac{1}{3} \times 30 \times 40^3 + \frac{1}{3} 10 \times 30^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[20'000 + 6'250'000 - (1'920'000 + 270'000)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4'080'000\right] = 1'360'000$$

$$I_{x'} = I_x - A \cdot d^2 = 1'360'000 - 1200 \times 29.17^2 = \boxed{338'933}$$



$$I_y = \frac{1}{3} \times 10 \times 30^3 + \frac{1}{3} 40 \times 10^3 + \frac{1}{3} \times 20 \times 40^3 - \frac{1}{3} \times 10 \times 30^3$$

$$= \frac{1}{3}(270'000 + 40'000 + 1'280'000 - 270'000)$$

$$I_y = \frac{1'320'000}{3} = \boxed{440'000}$$

$$I_{y'} = I_y - A \cdot d^2$$

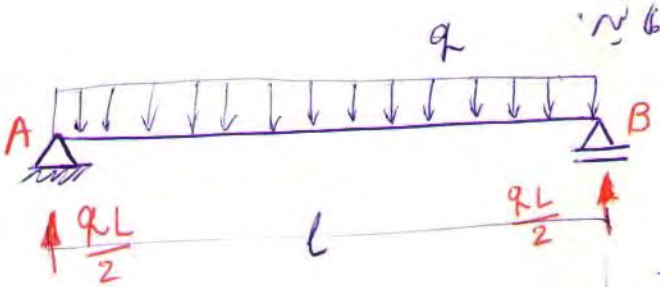
$$I_{y'} = 440'000 - 1200 \times (34.17 - 30)^2 = \boxed{419'133.0}$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} - A \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 1'450'000 - 1200 \times 34.17 \times 29.17 = \boxed{253'913}$$

$$2\theta = tg^{-1} \frac{2 I_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}} = tg^{-1} \frac{2 \times 253'913}{419'133 - 338'933} = \boxed{81.03^\circ}$$

$$\boxed{\theta = 40.51}$$

۱. در تیر مقابل دیاگرام جسم و برشی را ترسیم نمائید.



حل:

الف) ابتدا عکس العمل تکیه گاهها را بدست می آوریم

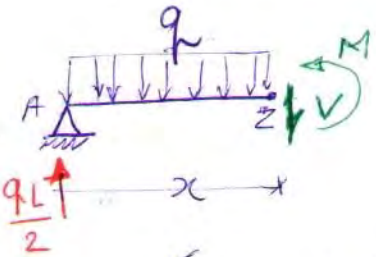
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow q \cdot L \times \frac{L}{2} - B_y \cdot L = 0$$

$$B_y = \frac{qL}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -q \cdot L + \frac{qL}{2} + A_y = 0$$

$$A_y = \frac{qL}{2}$$

ب) برای ترسیم دیاگرام برشی، محور x را در نقطه A انتخاب و جهت مثبت آن را به سمت B در نظر می گیریم و در فاصله x از مبداء (نقطه A) برشی در تیر می زنیم و قسمتی را حذف و قسمتی را نگه می داریم.



برای آنکه قسمت باقی مانده در حال تعادل باشد باید اثر قسمت حذف شده را بآن اضافه کنیم (M و V)

حال با نوشتن معادلات تعادل V و M را بدست می آوریم

$$+\circlearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + \frac{qL}{2}x - M = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{q}{2}(Lx - x^2)} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -q \cdot x + \frac{qL}{2} - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = q\left(\frac{L}{2} - x\right)} \quad (2)$$

همانطور که مشاهده می کنیم روابط (1) و (2) بصورت تابعی از x می باشند و با تغییر x مقدار آنها نیز تغییر می کند برای ترسیم دیاگرام گشتاور و برشی تغییرات (1) و (2) را برحسب x ترسیم می کنیم شکل بالا.

برای آنکه ترسیم بهتر و دقیق تر باشد در نقاط مهم تیر برش و خمش را محاسبه می کنیم و سپس منحنی ترسیم می شود.

برای این منظور در نقاط a و b و c در شکل سمت چپ صفحه قبل مقدار V و M را محاسبه می کنیم

a) $x=0 \Rightarrow V = q\left(\frac{L}{2}-0\right)=\frac{qL}{2}$

$x=0 \Rightarrow M=\frac{q}{2}(Lx0-0^2)=0$

b) $x=\frac{L}{2} \Rightarrow V=q\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\right)=qx0=0$

$M=\frac{q}{2}\left(Lx\frac{L}{2}-\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)=\frac{q}{2}\left(\frac{L^2}{2}-\frac{L^2}{4}\right)=\frac{q}{2}\left(\frac{2L^2-L^2}{4}\right)=\frac{q}{2}\left(\frac{L^2}{4}\right)=\frac{qL^2}{8}$

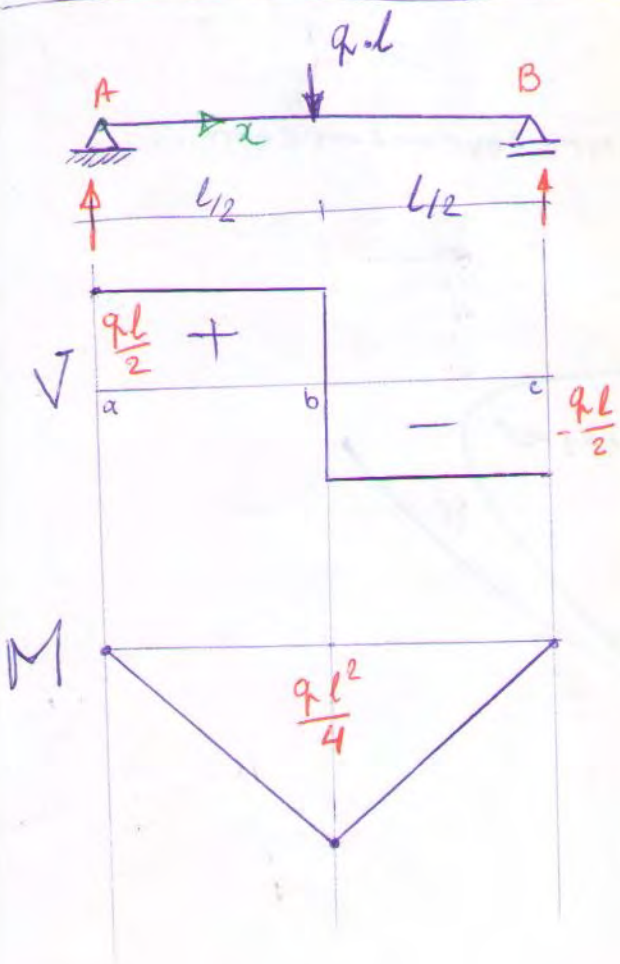
c) $x=L \Rightarrow V=q\left(\frac{L}{2}-L\right)=-\frac{qL}{2}$

$M=\frac{q}{2}(LxL-L^2)=\frac{q}{2}(L^2-L^2)=\frac{q}{2}(0)=0$

---

۲. مطلوبست رسم شکل مقابل

ترسیم دیاگرام خمش و برش:



حل):

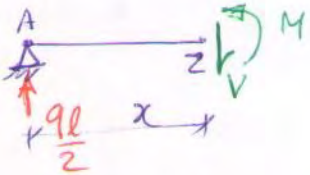
ابتدا عکس العمل تکیه گاه ها را بدست می آوریم.

$\sum M_A=0 \Rightarrow q.l.\frac{L}{2}-B_y(L)=0$

$B_y=\frac{ql}{2}$

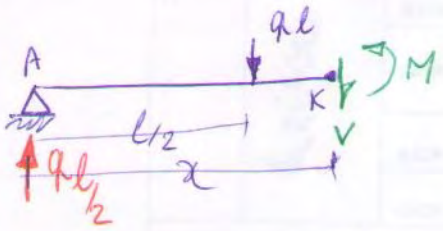
$\sum F_y=0 \Rightarrow -ql+ql/2+A_y \Rightarrow A_y=\frac{ql}{2}$

برای بدست آوردن معادلات برش یک برش در بین تیر وسط و تکیه گاه A میزنیم.



$+\circlearrowleft \sum M_2 = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2}\cdot x - M = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{ql}{2}x}$ (۱) $\quad 0 \le x \le l/2$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V + ql/2 = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{ql}{2}}$ (۲) $\quad 0 \le x \le l/2$



$+\circlearrowleft \sum M_k = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2}\cdot x - ql\left(x - \frac{l}{2}\right) + M = 0 \Rightarrow M = ql\left(\frac{x}{2} - x + \frac{l}{2}\right)$

$M = ql\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)$

(۳) $\boxed{M = \frac{ql}{2}(l-x)} \quad l/2 \le x \le l$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2} - ql - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\frac{ql}{2}}$ (۴) $\quad l/2 \le x \le l$

برای ترسیم دقیق‌تر در نقاط a و b و c مقدار V و M را محاسبه می‌کنیم.

a) $x = 0$ (۲) $\rightarrow V = \frac{ql}{2}$

(۱) $\rightarrow M = \frac{ql}{2}(0) = 0$

c) $x = l$ (۴) $\rightarrow V = -\frac{ql}{2}$

(۳) $\rightarrow M = \frac{ql}{2}(l-l) = \frac{ql}{2}(0) = 0$

b) $x = \frac{l}{2}$ (۱) $\rightarrow M = \frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{ql^2}{4}$

(۳) $\rightarrow M = \frac{ql}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{4}$

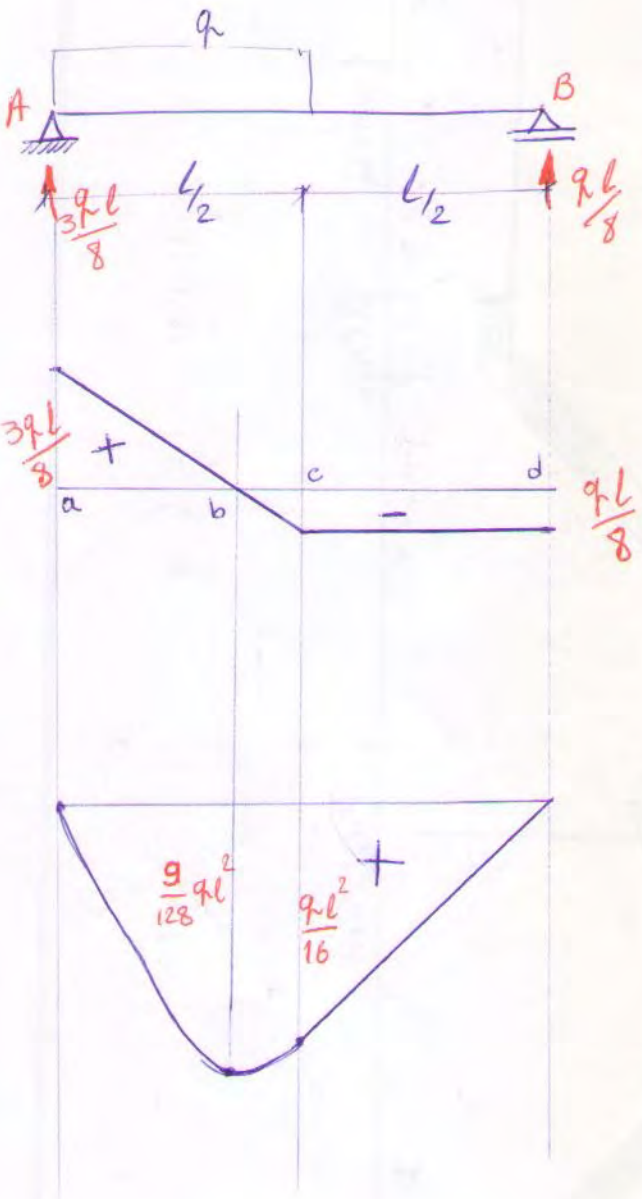
(۲) $\rightarrow V = \frac{ql}{2}$

(۴) $\rightarrow V = -\frac{ql}{2}$

از نتایج بررسی منحنی شکل در محل بار متمرکز برش دارای پرش است.

۳۰ مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروبرش

تیرمقابل :



حل)

الف) ابتدا عکس العمل تکیه گاهها را بدست می آوریم.

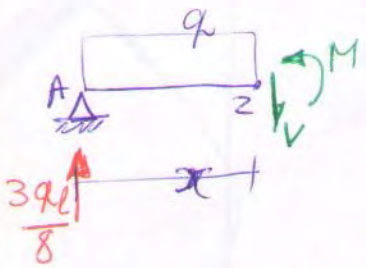
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow q \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{ql}{8}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{ql}{2} + A_y + \frac{ql}{8} = 0$$

$$A_y = \frac{4ql - ql}{8} = \frac{ql}{8}$$

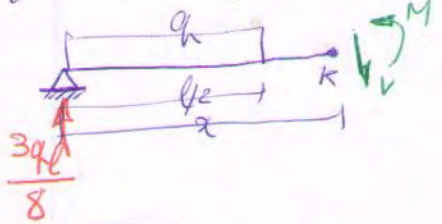
برای ترسیم دیاگرام برش محور x بر نقطه A منطبق و در طول $l/2$ مقطعی می زنیم و دست چپ و حفظ و دست راست را حذف می کنیم.



$$+\circlearrowleft \sum M_{\text{از}} = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8} \times x - q x \cdot \frac{x}{2} - M = 0 \Rightarrow \boxed{M = q\left(\frac{3l}{8}x - \frac{x^2}{2}\right)} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8} - qx + V = 0 \Rightarrow \boxed{V = q\left(\frac{3l}{8} - x\right)} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن مقطعی مابین $l/2$ و l و انتخاب دست چپ حفظ و دست راست حذف می نمود داریم.



$$+\circlearrowleft \sum M_k = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8}x - q\frac{l}{2}\left(x - \frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) - M = 0$$

$$M = \frac{q}{2}\left(\frac{3l}{4}x - lx + \frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}\right)$$

$$M = \frac{q}{2}\left(-\frac{l}{4}x + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{4} - \frac{x}{4}\right) = \boxed{\frac{ql}{8}(l - x)} \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8} - \frac{ql}{2} - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\frac{ql}{8}} \quad (4)$$

a) $x = 0 \Rightarrow^{(1)} M = q\left(\frac{3l}{8} \times 0 - \frac{0^2}{2}\right) = 0$

$(2) \Rightarrow V = q\left(\frac{3l}{8} - 0\right) = \frac{3ql}{8}$

b) $(2) \Rightarrow V = q\left(\frac{3l}{8} - x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{3l}{8}$

$(1) \Rightarrow M = q\left[\frac{3l}{8} \times \frac{3l}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{3l}{8}\right)^2\right] = q\left(\frac{9l^2}{64} - \frac{9l^2}{2 \times 64}\right)$

$M = q\left(\frac{18l^2 - 9l^2}{128}\right) = \frac{9}{128} ql^2$

c) $x = l/2 \quad (2) \Rightarrow V = q\left(\frac{3l}{8} - \frac{l}{2}\right) = q\frac{3l-4l}{8} = -\frac{ql}{8}$

$(4) \Rightarrow V = -\frac{ql}{8}$

$(1) \Rightarrow M = q\left[\frac{3l}{8} \times \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = q\left[\frac{3l^2}{16} - \frac{l^2}{8}\right] = q\left(\frac{3l^2 - 2l^2}{16}\right)$

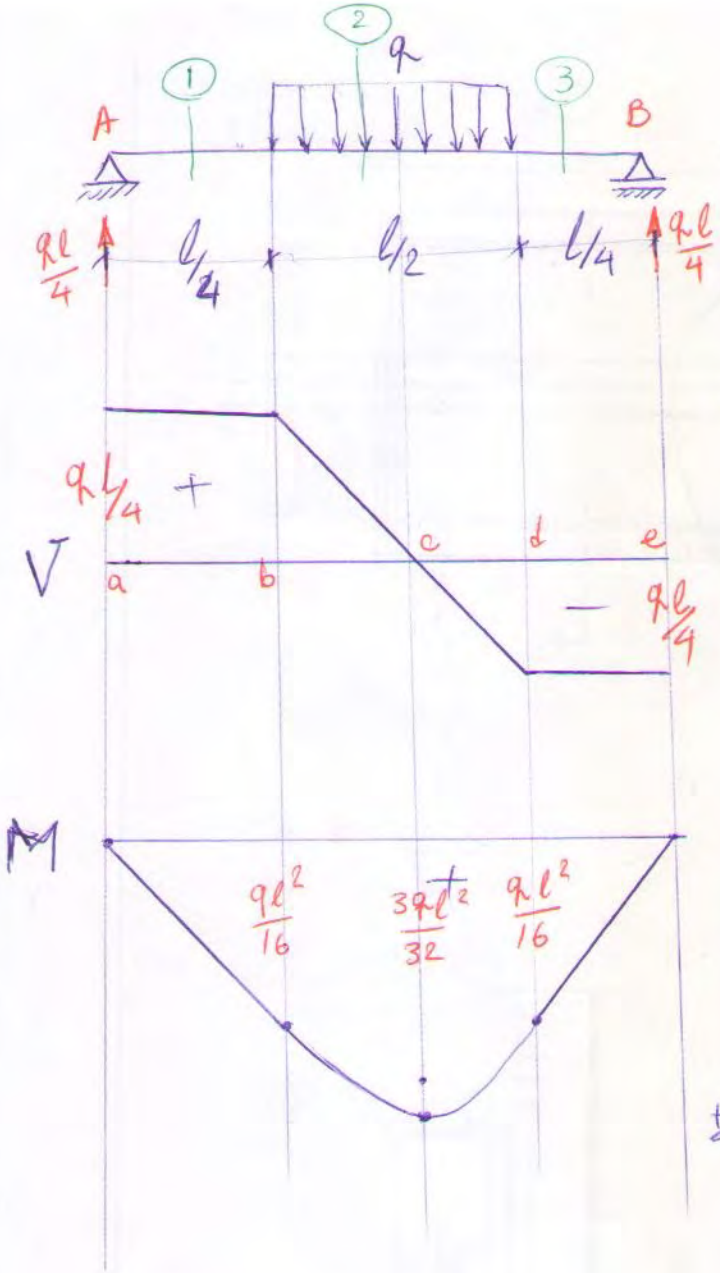
$M = q\frac{l^2}{16}$

$(3) \Rightarrow M = \frac{ql}{8}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{8}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{16}$

$x = l \quad (3) \Rightarrow M = ql/8\,(l - l) = 0$

$(4) \Rightarrow V = -\frac{ql}{8}$

4. مطلوبست ترسیم دیاگرام خمش و برش تیر



حل) ابتدا عکس العمل تکیه گاهها را بدست می آوریم

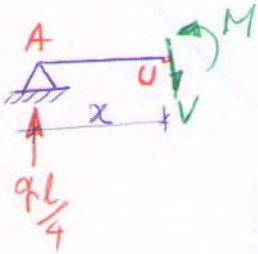
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow q\,l/2 \times \frac{l}{2} - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{ql}{4}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{ql}{2} + \frac{ql}{4} = 0$$

$$A_y = \frac{2ql - ql}{4} = \frac{ql}{4}$$

در محل ① مقطع می زنیم و سمت چپ را نگه می داریم.



$$0 \le x \le l/4$$

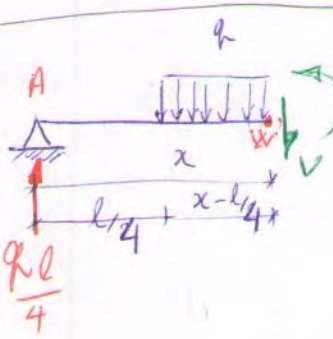
$$+\circlearrowleft \sum M_U = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} \cdot x - M = 0$$

$$\boxed{M = \frac{ql}{4}x} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{ql}{4}} \quad (2)$$

$$l/4 \le x \le 3l/4$$

در محل ② مقطع می زنیم و سمت چپ را حفظ می کنیم.



$$+\circlearrowleft \sum M_\omega = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} \cdot x - q(x - l/4)(x - l/4)/2 - M = 0$$

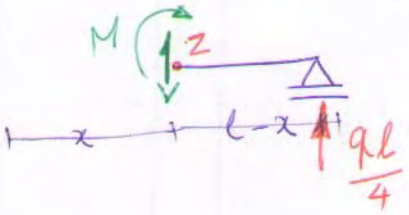
$$M = \frac{ql}{4}x - \frac{q}{2}(x - \frac{l}{4})^2 = \frac{q}{2}\left\{\frac{l}{2} \cdot x - x^2 + \frac{xl}{2} + \frac{l^2}{16}\right\}$$

$$\boxed{M = \frac{q}{2}\left\{lx - x^2 + \frac{l^2}{16}\right\}} \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} - (x-\frac{l}{4})q - V = 0 \Rightarrow V = q\left(\frac{l}{4} - x + \frac{l}{4}\right)$$

$$\boxed{V = q\left(\frac{1}{2}l - x\right)} \quad (4)$$

در حل ③ مقطع می‌زنیم و سمت راست را حفظ می‌کنیم. $\frac{3l}{4} \leq x \leq l$



$$+\circlearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow M - \frac{ql}{4}(l-x) = 0$$

$$\boxed{M = \frac{ql}{4}(l-x)} \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V + ql/4 = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\frac{ql}{4}} \quad (6)$$

a) $x = 0 \Rightarrow$ ① $\rightarrow M = \frac{ql}{4} x_0 = 0$

② $\rightarrow V = \frac{ql}{4}$

b) $x = l/4$ ① $\Rightarrow M = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql}{16}$

② $\Rightarrow V = \frac{ql}{4}$

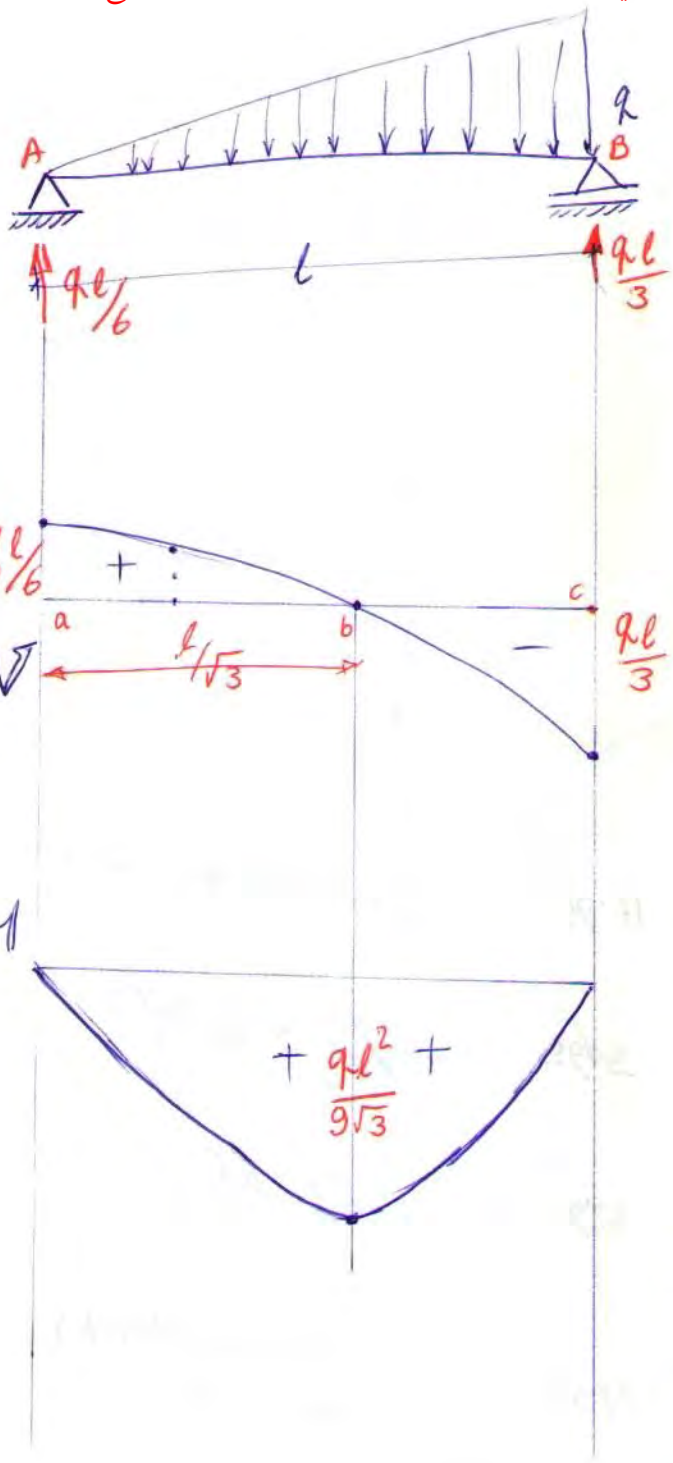
c) $V = 0$ ④ $\Rightarrow V = 0 = q\left(\frac{1}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{l}{2}$

③ $\Rightarrow M = \frac{q}{2}\left\{ l(\frac{l}{2}) - (\frac{l}{2})^2 + \frac{l^2}{16} \right\} = q/2 \left\{ \frac{1}{2}l^2 - \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{16} \right\}$

$$M = \frac{ql^2}{2}\left\{ \frac{8-4+1}{16} \right\} = \frac{ql^2}{2}\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{5}{32}ql^2$$

d) $V = -\frac{ql}{4}$, $M = \frac{ql}{16}$ این حالت مساوی با این بخش مثل بخش‌های بالایی است و به عنوان تمرین به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

e) $V = -\frac{ql}{4}$, $M = 0$



5. مطلوبست ترسیم نمودارهای برش و برش مقابل

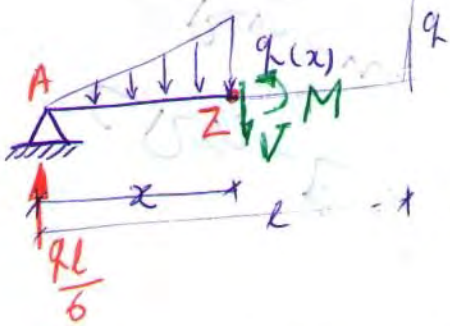
حل) ابتدا عکس العملها را محاسبه می کنیم.

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \quad \frac{q \cdot l}{2} \times \frac{2}{3}l - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{ql}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{ql}{2} + \frac{ql}{3} = 0$$

$$A_y = \frac{3ql - 2ql}{6} = \frac{ql}{6}$$



$$\frac{q(x)}{q} = \frac{x}{l}$$

$$q(x) = q\frac{x}{l}$$

$$\curvearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{q(x) \cdot x}{2} \times \frac{x}{3} - M = 0$$

$$M = \frac{ql}{6}x - q\frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = qx\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{6l}\right)$$

$$\boxed{M = \frac{qx}{6}\left(l - \frac{x^2}{l}\right)} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{6} - \frac{q(x) \cdot x}{2} - V = 0 \Rightarrow V = \frac{ql}{6} - q\frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2}$$

$$\boxed{V = q\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{2l}\right)} \quad (2)$$

a) $x = 0$ $\quad (1) \Rightarrow M = \frac{q}{6}(0)\left(l - \frac{0^2}{l}\right) = 0$

$$(2) \Rightarrow V = q\left(\frac{l}{6} - \frac{0}{2l}\right) = \frac{ql}{6}$$

b) $x=0$ ② $\rightarrow V=0=q\left(\frac{l}{6}-\frac{x^2}{2l}\right)=0 \Rightarrow \frac{l}{6}-\frac{x^2}{2l}=0$

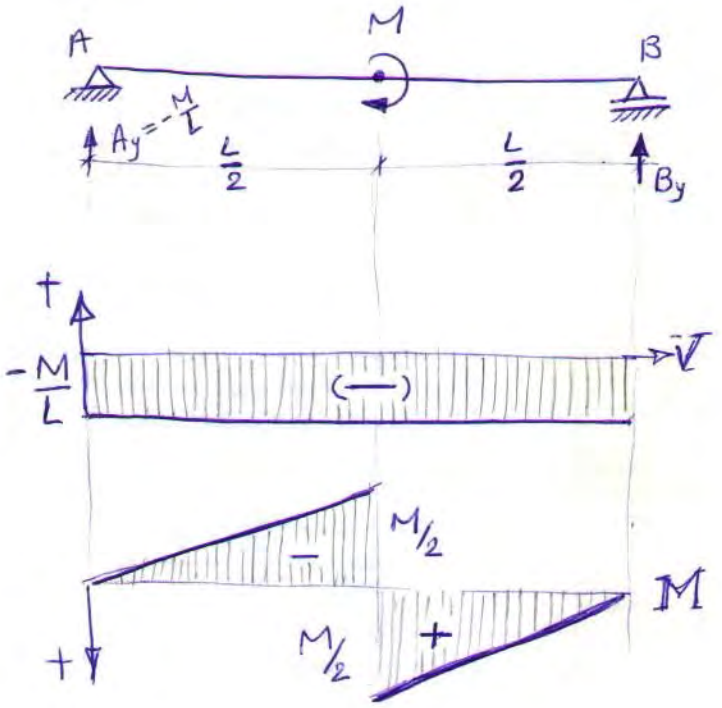
$$\frac{x^2}{2l}=\frac{l}{6} \Rightarrow x^2=\frac{l^2}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{l}{\sqrt{3}}$$

① $\xrightarrow{x=\frac{l}{\sqrt{3}}}$ $M=\frac{q\frac{l}{\sqrt{3}}}{6}\left(l-\frac{\frac{l^2}{3}}{l}\right)=\frac{ql}{6\sqrt{3}}\left(l-\frac{l^2}{3l}\right)=\frac{ql}{6\sqrt{3}}\left(\frac{3l^2-l^2}{3l}\right)$

$$M=\frac{ql}{6\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}l\right)=\frac{2ql^2}{18\sqrt{3}}=\frac{ql^2}{9\sqrt{3}}$$

۱- دیاگرام برش و خمش را برای تیر زیر رسم کنید

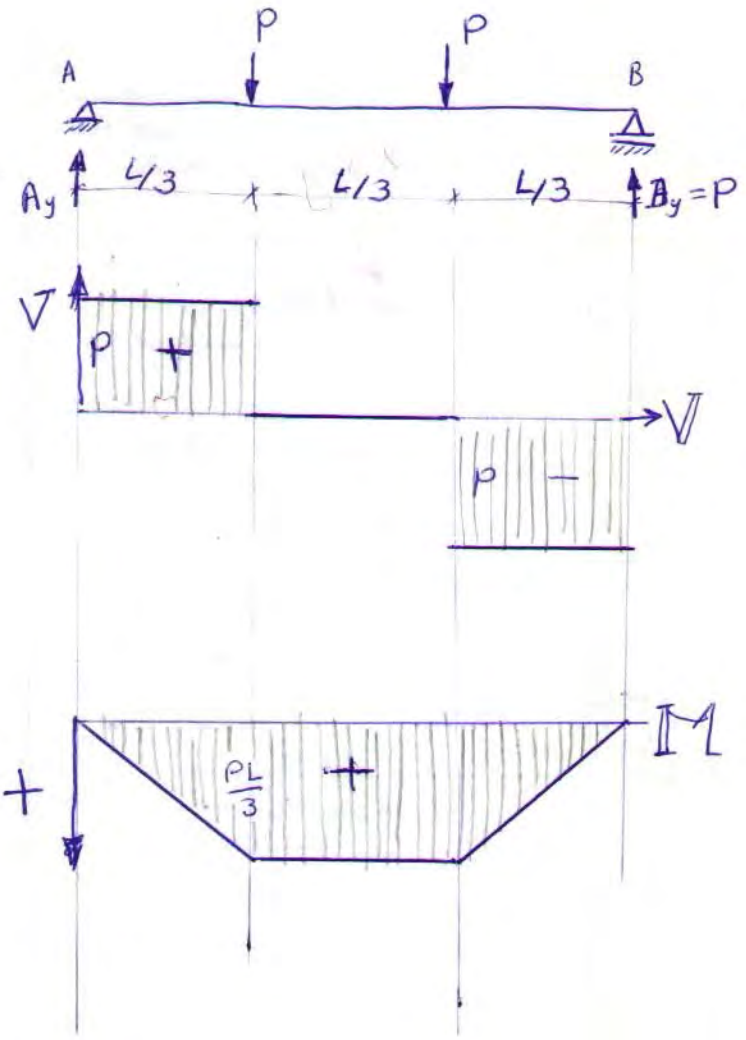


$\circlearrowleft \sum M_A=0$

$B_y \times L - M = 0 \Rightarrow B_y = M/L$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{M}{L} = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{M}{L}$

۲- دیاگرام برش و خمش تیر مقابل را رسم نمایید



$\circlearrowleft \sum M_A=0 \Rightarrow -P\frac{L}{3} - P\frac{2L}{3} + B_y \cdot L = 0$

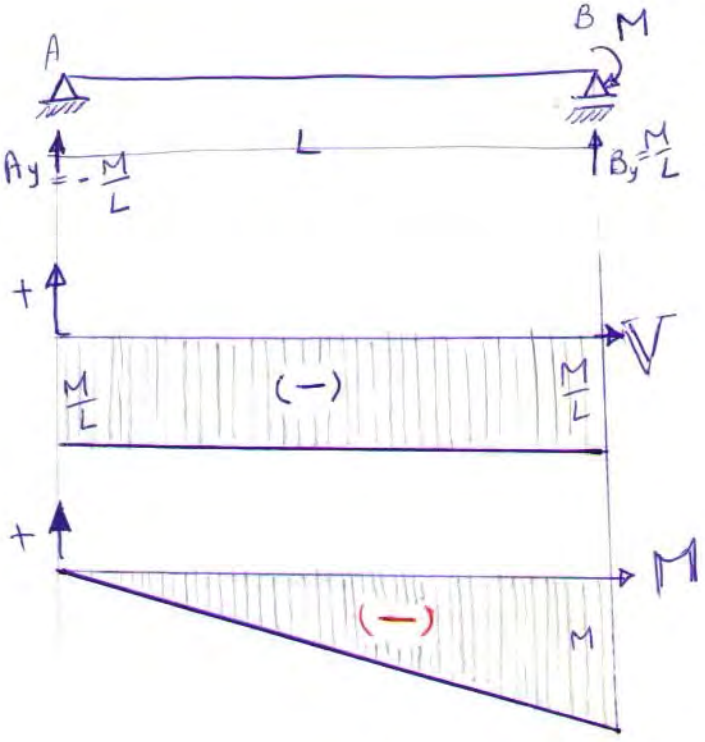
$L\,B_y = \frac{3L}{3} \cdot P$

$B_y = P$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P - P + P = 0$

$A_y = P$

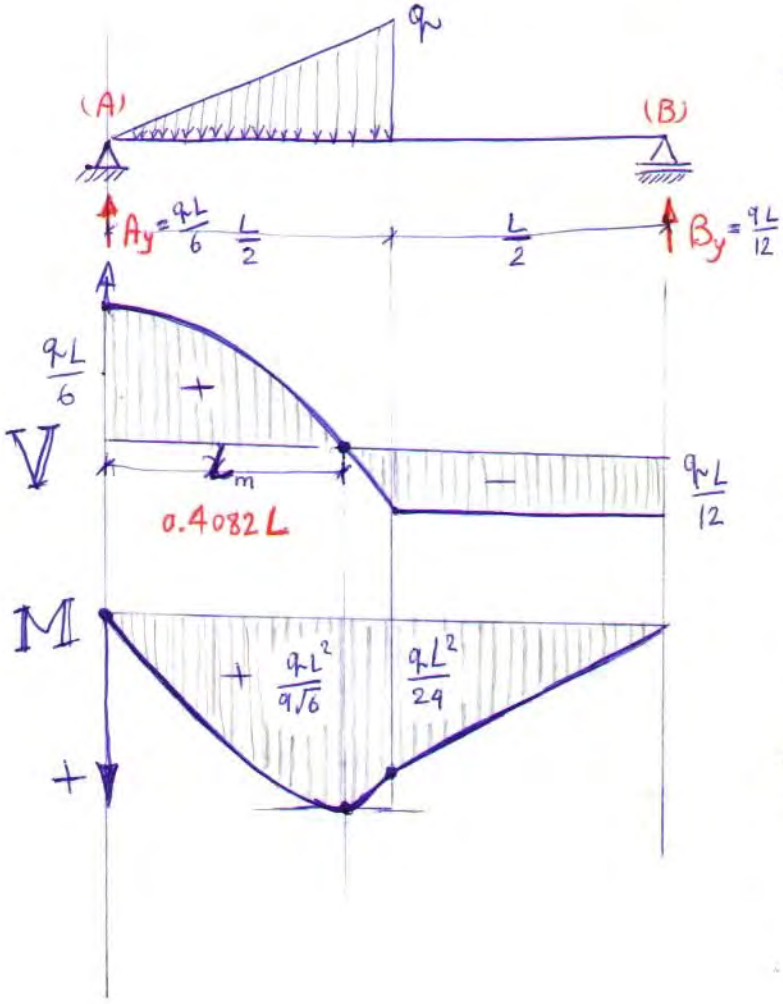
۳. دیاگرام برش و خمش تیر مقابل را رسم نمایید.



$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot L - M = 0 \Rightarrow B_y = \frac{M}{L}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{M}{L} = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{M}{L}$

۴. دیاگرام نیروهای برشی و خمشی تیر را رسم نمایید.



$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \left(-q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{L}{2}\right) + B_y \cdot L = 0$

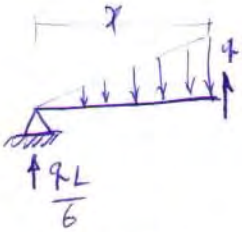
$B_y \cdot L = \frac{qL^2}{12} \Rightarrow B_y = \frac{qL}{12}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{4} + A_y + \frac{qL}{12} = 0$

$A_y = \frac{qL}{4} - \frac{qL}{12} = \frac{qL}{6}$

برای رسم دیاگرام لنگر از دو روش می‌توان استفاده کرد

الف) بدست آوردن معادله برش



$\frac{\frac{L}{2}}{x} \quad \frac{q}{q(x)} \quad q(x) = \frac{q \cdot x}{L/2} = \frac{2qx}{L}$

$V = \frac{qL}{6} - \frac{2x}{L} q \times \frac{x}{2} = \frac{qL}{6} - \frac{qx^2}{L}$

برای آنکه L_m را پیدا کنیم می‌بایست $V=0$ قرار دهیم

$V = 0 \Rightarrow \frac{qL}{6} - \frac{x^2 q}{L} = 0 \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{x^2}{L}$

$x^2 = \frac{L^2}{6} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{6}} = L_m$

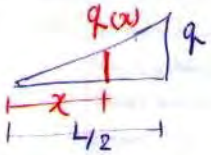
$M_m = \int_0^{L_m} V dx = \left(\frac{qL}{6}x - \frac{qx^3}{3L}\right)\Big|_0^{L/\sqrt{6}} = \frac{qL^2}{6\sqrt{6}} - \frac{qL^3}{18\sqrt{6}L}$

$M_m = \frac{qL^2}{6\sqrt{6}} - \frac{qL^2}{18\sqrt{6}} = \frac{3qL^2 - qL^2}{18\sqrt{6}} = \frac{2qL^2}{18\sqrt{6}} = \frac{qL^2}{9\sqrt{6}}$

$M_m = 0.0454\, qL^2$

$$M_{L/2}=\int_0^{L/2} V\,dx=\left(\frac{qL}{6}x-\frac{qx^3}{3L}\right)\Big|_0^{L/2}=\frac{qL^2}{12}-\frac{qL^3}{3\times 8L}=$$

$$M_{L/2}=\frac{qL^2}{12}-\frac{qL^2}{24}=\frac{qL^2}{24}$$



$$\frac{q}{L/2}=\frac{q(x)}{x}\Rightarrow q(x)=\frac{2xq}{L}$$

$$M_{L/2}=0.0416\,qL^2$$

ب) برای بدست آوردن معادله برشی با استفاده از انتگرال ازیابد.

$$V=\int q\,dx=\int -\frac{2xq}{L}dx=-\frac{2q}{L}\int x\,dx=-\frac{2q}{L}\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\begin{cases} x=0 \\ V=A_y=\frac{qL}{6}\end{cases}\Rightarrow C_1=\frac{qL}{6}\Rightarrow V=-\frac{qx^2}{L}+\frac{qL}{6}$$

$$V=0\Rightarrow -\frac{qx^2}{L}+\frac{qL}{6}=0\qquad \frac{qx^2}{L}=\frac{qL}{6}\Rightarrow x^2=\frac{L^2}{6}\qquad x=\frac{L}{\sqrt{6}}$$

برای بدست آوردن معادله گشتاور می‌توان از روی انتگرال استفاده کرد

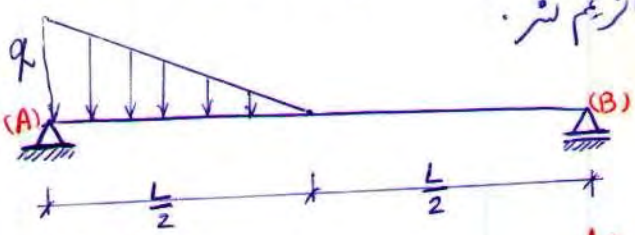
$$M=\int V\,dx=\int\left(-\frac{qx^2}{L}+\frac{qL}{6}\right)dx=-\frac{q}{L}\frac{x^3}{3}+\frac{qL}{6}x+C_2$$

$$\begin{cases} x=0 \\ M=0\end{cases}\Rightarrow -\frac{q}{L}\frac{(0)^3}{3}+\frac{qL}{6}(0)+C_2=0\Rightarrow C_2=0\Rightarrow M=-\frac{qx^3}{3L}+\frac{qLx}{6}$$

$$x=L_m=\frac{L}{\sqrt{6}}\Rightarrow M_{L_m}=\frac{-qL^3}{3(\sqrt{6})^3L}+\frac{qL\cdot L}{6\sqrt{6}}=\frac{-qL^2}{3\times 6\sqrt{6}}+\frac{qL^2}{6\sqrt{6}}=\frac{-qL^2+3qL^2}{18\sqrt{6}}=\frac{2qL^2}{18\sqrt{6}}=\frac{qL^2}{9\sqrt{6}}=0.0454qL^2$$

$$x=\frac{L}{2}\Rightarrow M_{L/2}=-\frac{qL^3}{3\times 8L}+\frac{qL^2}{6\times 2}=\frac{-qL^2}{24}+\frac{qL^2}{12}=\frac{-qL^2+2qL^2}{24}=\frac{qL^2}{24}=0.0417\,qL^2$$

ج) مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروی برشی و خمشی تیر مقابل و تعیین ماکزیمم گشتاور.



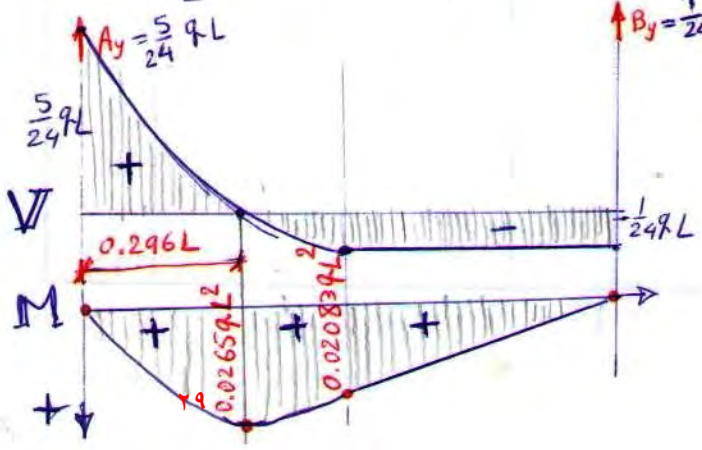
$$+\circlearrowleft\sum M_B=0\Rightarrow -\frac{qL}{2}\times\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}\frac{L}{2}\right)+A_y\cdot L=0$$

$$A_y\cdot L=\frac{qL}{4}\left(\frac{3L+2L}{6}\right)=\frac{qL}{4}\left(\frac{5}{6}L\right)=\frac{5qL^2}{24}$$

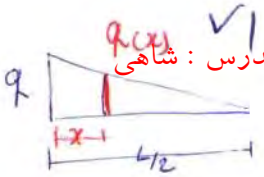
$$A_y=\frac{5qL}{24}$$

$$\sum F_y=0\Rightarrow -\frac{q}{2}\cdot\frac{L}{2}+B_y+\frac{5qL}{24}=0$$

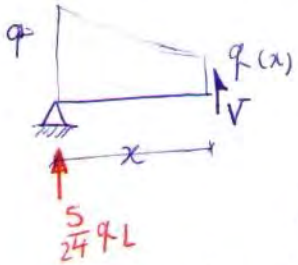
$$B_y=\frac{qL}{4}-\frac{5qL}{24}=\frac{qL}{24}$$



برای ترسیم منحنی برشی می‌توان از روش مقطع استفاده کرد.



$$\frac{q(x)}{L/2-x}=\frac{q}{L/2} \Rightarrow q(x)=q\frac{\frac{L}{2}-x}{\frac{L}{2}}=q\frac{L-2x}{L}$$



$$V=\frac{5}{24}q\cdot L-\frac{q+q\frac{L-2x}{L}}{2}\times x=\frac{5}{24}qL-q\frac{\frac{L+L-2x}{L}}{2}=\frac{5}{24}qL-q\frac{2L-2x}{2L}x$$

$$\boxed{V=q\left(\frac{5L}{24}-\frac{L-x}{L}x\right)=q\left(\frac{5L}{24}-x+\frac{x^2}{L}\right)}$$

برای گشتاور ماکزیمم $V=0 \rightarrow q\left(\frac{5L}{24}-\frac{L-x}{L}x\right)=0 \Rightarrow \frac{5L}{24}-\frac{xL-x^2}{L}=0$ طرفین $\times L \Rightarrow$

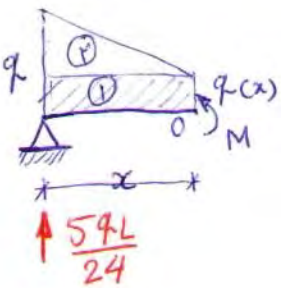
$$\frac{5L^2}{24}-xL+x^2=0$$

$$\Delta=(-L)^2-4(1)\left(\frac{5L^2}{24}\right)=L^2-\frac{5L^2}{6}=\frac{L^2}{6}$$

$$x_m=\frac{-(-L)\pm\sqrt{\Delta}}{2(1)}=\frac{L\pm\frac{L}{\sqrt{6}}}{2}=\frac{L}{2}\pm\frac{L}{2\sqrt{6}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L=0.296L & \text{محل گشتاور ماکزیمم}\\ \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}}L & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

علامت مثبت بیرون از $x(\frac{L}{2})$ است

برای معادله لنگر می‌توان هم از V انتگرال گرفت و هم با استفاده از جسم آزاد بدست آورد. در مثال قبل از V انتگرال گرفتیم در این مثال از جسم آزاد استفاده می‌کنیم



$$+\circlearrowleft\sum M_0=0 \Rightarrow q(x)\cdot x\cdot\frac{x}{2}+\frac{q-q(x)}{2}\times x\times\frac{2}{3}x-\frac{5qL}{24}x+M=0$$

$$M=-q(x)\frac{x^2}{2}-\frac{q-q(x)}{3}x^2+\frac{5qL}{24}x=x^2\left(\frac{-3q(x)-2q+2q(x)}{6}\right)+\frac{5qL}{24}x$$

$$M=\frac{x^2}{6}\left(-2q-q(x)\right)+\frac{5qL}{24}x=\frac{x^2}{6}\left(-2q-q\frac{L-2x}{L}\right)+\frac{5qL}{24}x$$

$$M=\frac{x^2q}{6}\left(-2-1+\frac{2x}{L}\right)+\frac{5qL}{24}x=q\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}+\frac{5L}{24}x\right)$$

$$\boxed{M=q\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}+\frac{5L}{24}x\right)}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L \Rightarrow M_m=q\left(-\frac{6-2\sqrt{6}+1}{24\times2}L^2+\frac{6\sqrt{6}-3\times6\times1+3\sqrt{6}-1}{3\times8\times6\sqrt{6}}\frac{L^3}{L}+\frac{5L}{24}\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L\right)$$

$$M_m=qL^2\left(\frac{-21\sqrt{6}+36+9\sqrt{6}-19+15\sqrt{6}-15}{144\sqrt{6}}\right)=qL^2\left(\frac{3\sqrt{6}+2}{144\sqrt{6}}\right)=0.0265\,qL^2$$

$$x=\frac{L}{2} \Rightarrow M_{L/2}=q\left(-\frac{L^2}{4\times2}+\frac{L^3}{3\times8L}+\frac{5L^2}{24\times2}\right)=qL^2\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{5}{48}\right)=\frac{qL^2}{48}=0.0283\,qL^2$$

دانشگاه آزاد خوراسگان
برای بدست آوردن ممان از انتگرال برسائل حل شده استاتیک این روش را نیز آن می دهیم. مدرس : شاهی

$$M=\int V dx=\int q\left(\frac{5L}{24}-x+\frac{x^2}{L}\right)dx=q\left(\frac{5L}{24}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}\right)+C$$

$$x=0 \Rightarrow M=0 \Rightarrow q\left(\frac{5L}{24}(0)-\frac{(0)^2}{2}+\frac{(0)^3}{3L}\right)+C=0 \Rightarrow C=0$$

$$\boxed{M=q\left(\frac{x^3}{3L}-\frac{x^2}{2}+\frac{5L}{24}x\right)}$$

برای بدست آوردن میزان لنگر در وسط دهانه و نیز در نقطه ماکزیمم ممان باجایگذاری مقدار را دیکالی آن و ساده سازی آنرا حل کرد و نیز ممان باجایگذاری مقدار تقریبی اعشاری آن محاسبه کرد برای آسان دادن این روش در این قسمت باجایگذاری اعشاری یعنی در حل و بدست آوردن مقادیر لنگر عمل میکنیم.

$$x=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L=0.296L$$

$$M_m=q\left(\frac{(0.296L)^3}{3L}-\frac{(0.296L)^2}{2}+\frac{5L}{24}(0.296L)\right)=qL^2(0.00864-0.04381+0.06167)$$

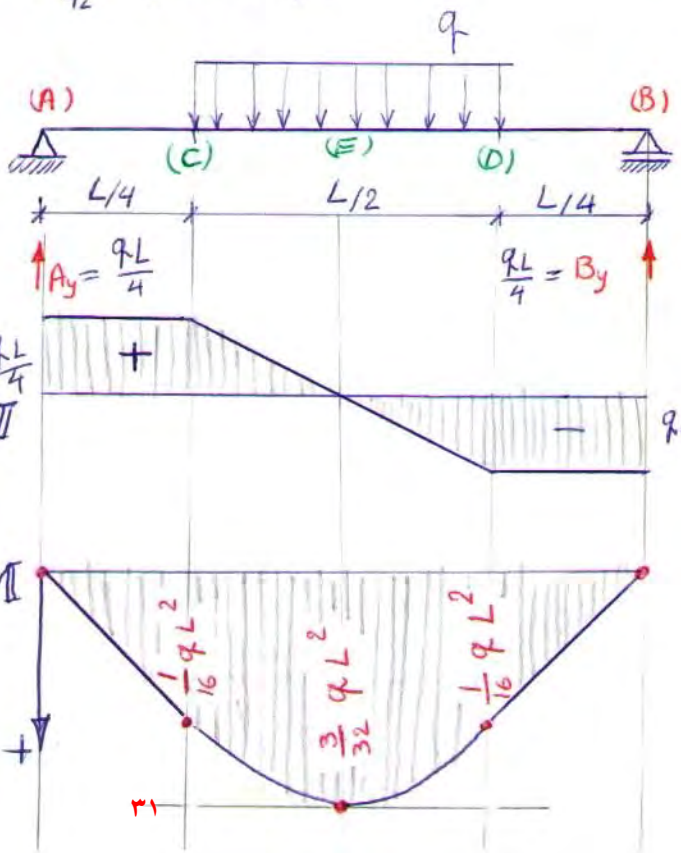
$$M_m=0.02650\,qL^2$$

$$x=\frac{L}{2}=0.5L$$

$$M_{L/2}=q\left(\frac{(0.5L)^3}{3L}-\frac{(0.5L)^2}{2}+\frac{5L}{24}(0.5L)\right)=qL^2(0.04167-0.12500+0.10417)$$

$$M_{L/2}=0.02083\,qL^2$$

۶. مطلوبیت تریسم دیاگرام برش و ممان تیر متقابل و تعیین لنگر ماکزیمم



$$\curvearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow -q\cdot\frac{L}{2}\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{2}\times\frac{1}{2}\right)+B_y\cdot L=0$$

$$B_y\cdot L=\frac{qL}{2}\left(\frac{2L}{4}\right) \Rightarrow B_y=\frac{qL}{4}$$

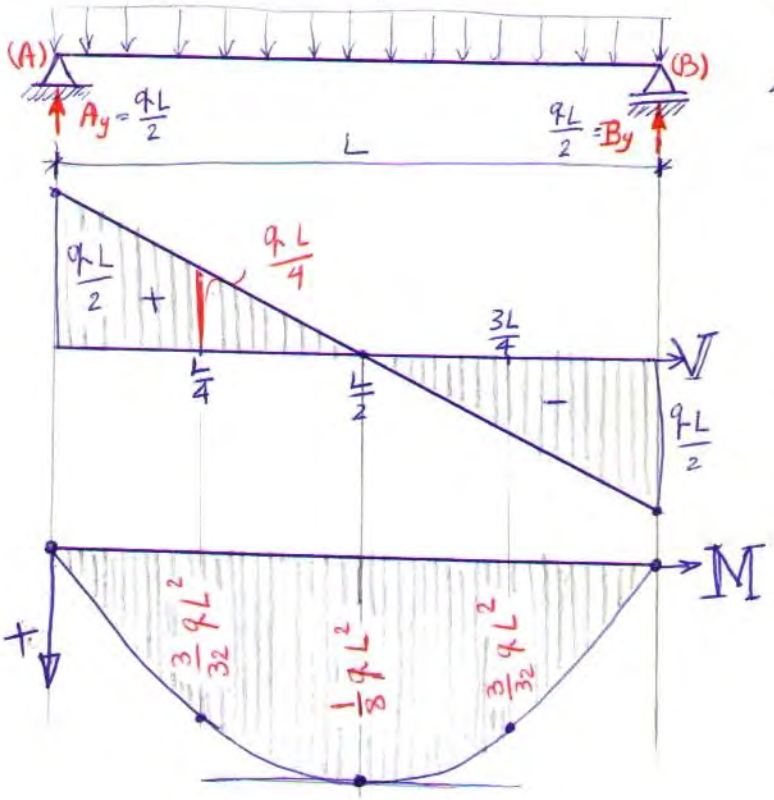
$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -\frac{q\cdot L}{2}+\frac{qL}{4}+A_y \Rightarrow A_y=\frac{qL}{4}$$

$$M_A=0$$

$$M_D=M_C=\frac{qL}{4}\times\frac{L}{4}=\frac{qL^2}{16}$$

$$M_E=\frac{qL}{4}\times\frac{L}{4}+\frac{1}{2}\frac{qL}{4}\times\frac{L}{4}=\frac{qL^2}{16}+\frac{qL^2}{32}=\frac{3}{32}qL^2$$

۷. مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مقابل



$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \quad -q \cdot L \times \frac{L}{2} + B_y \cdot L \Rightarrow B_y = \frac{qL}{2}$

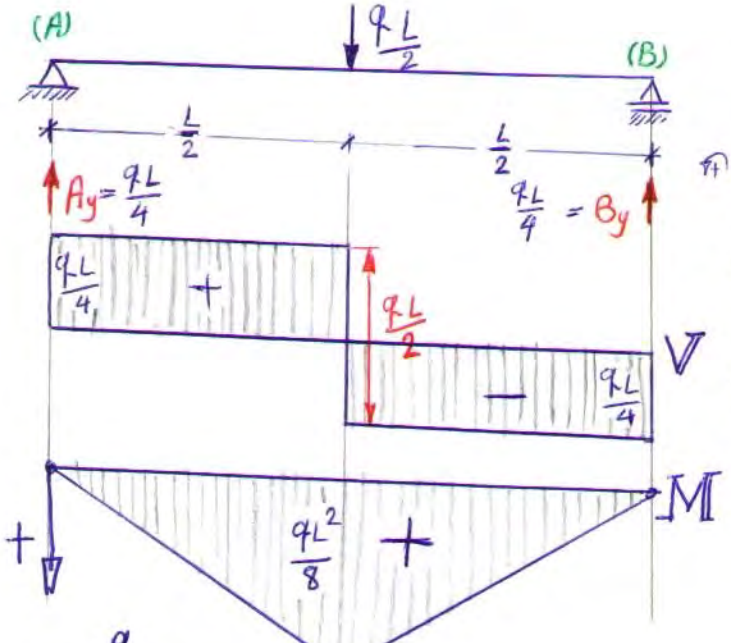
$\sum F_y = 0 \quad -q \cdot L + A_y + \frac{qL}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{qL}{2}$

$V = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$

$M_{L/2} = M_{max} = \frac{qL}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{qL^2}{8} = 0.125qL^2$

$M_{L/4} = M_{B/4L} = \left(\frac{qL}{2} + \frac{qL}{4}\right) \frac{1}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{3}{32} qL^2 = 0.09375qL^2$

۸. مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مقابل

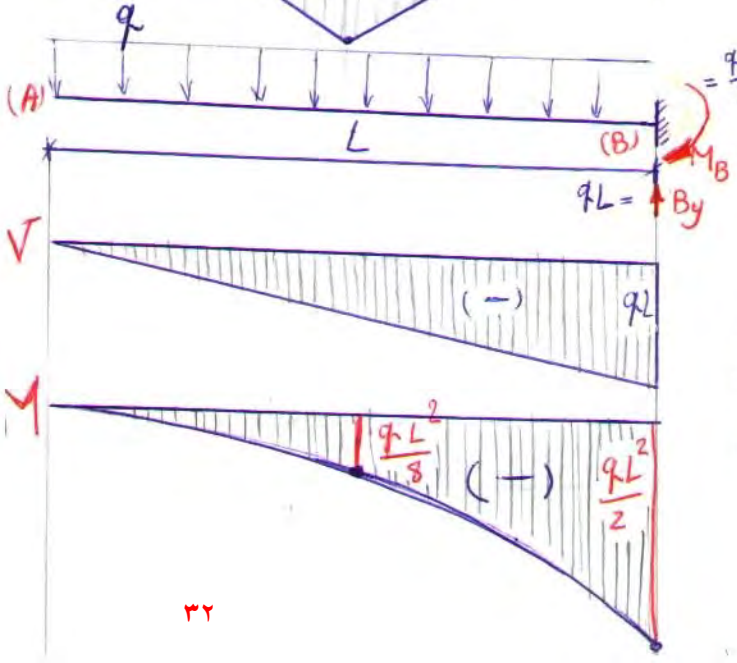


$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \quad -\frac{qL}{2} \times \frac{L}{2} + B_y \cdot L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{qL}{4}$

$\sum F_y = 0 \quad -\frac{qL}{2} + \frac{qL}{4} + A_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{qL}{4}$

$M_{max} = \frac{qL}{4} \times \frac{L}{2} = \frac{qL^2}{8}$

۹. مطلوبست رسم دیاگرام برشی و لنگر تیر مقابل



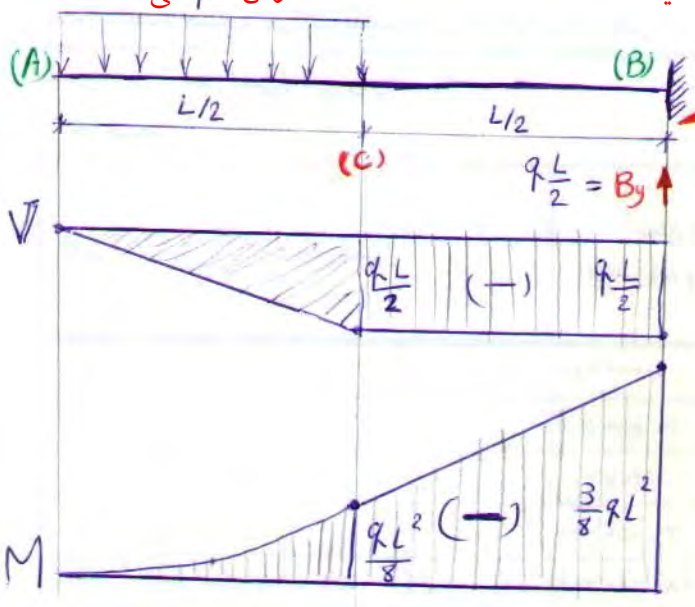
$\curvearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow qL \times \frac{L}{2} - M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{qL^2}{2}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -qL + B_y = 0 \Rightarrow B_y = qL$

$M = \frac{qx^2}{2}$

$M_{L/2} = \frac{q}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{qL^2}{8}$

۱۰- معلوبت تریم دیاگرام برشی و لنز خمشی تیر مقابل



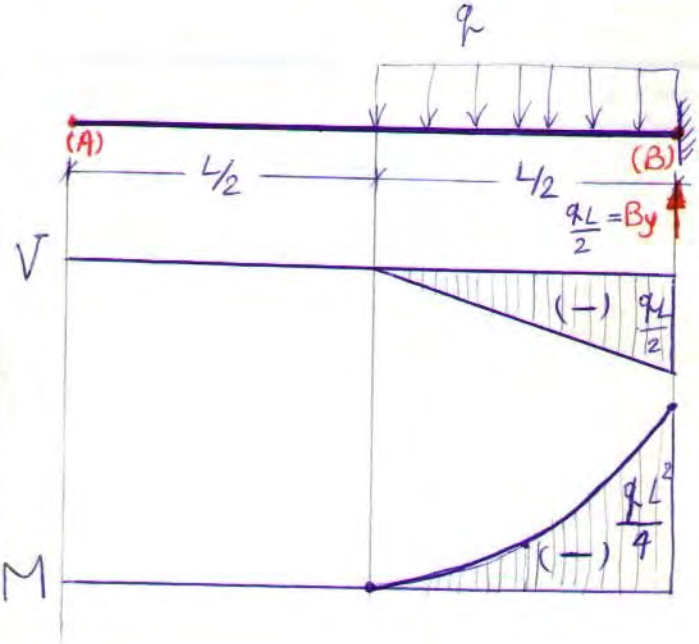
$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow q\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right) - M_B = 0$

$M_B = \frac{3}{8}qL^2$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -q\times\frac{L}{2} + B_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{qL}{2}$

$M_C = \frac{qL}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{L}{2} = \frac{qL^2}{8}$

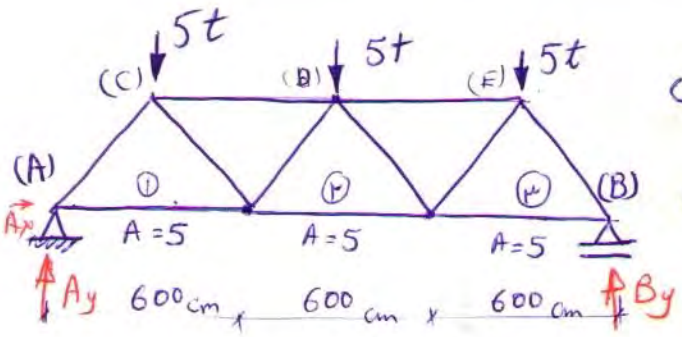
۱۱- معلوبت تریم دیاگرام برشی و خمشی تیر مقابل



$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2}\times\frac{L}{2} - M_B \Rightarrow M_B = \frac{qL^2}{4}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2} + B_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{qL}{2}$

۴۰ در خرپای مقابل مطلوبست تعیین تغییر طول میله های ① و ② و ③ و نیز تعیین تغییر فاصله دو تکیه گاه A و B . ($E=2.1\times10^6\ kg/cm^2$)



حل) ابتدا عکس العملهای A و B را به دست می آوریم،

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 5\times3+5\times(3+6)+5\times(3+6+6)-B_y\times(3\times6)=0$$

$$15+45+75=18B_y$$

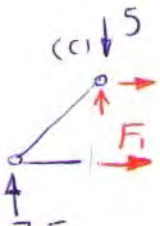
$$\boxed{B_y = 7.5\ ton}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -5\times3-5\times(3+6)-5(3+6+6)+A_y(3\times6)=0$$

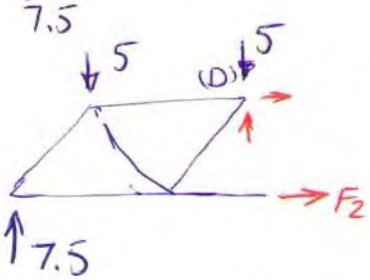
$$\boxed{A_y = 7.5\ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

برای تعیین نیروی میله های ① و ② و ③ از روش مقاطع استفاده می کنیم

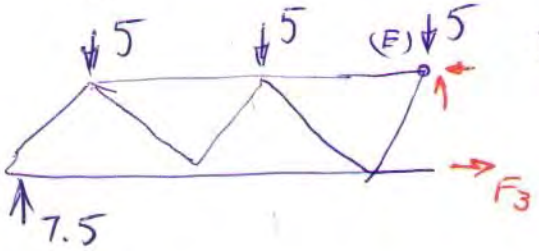


$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow 7.5\times3-3\times F_1=0 \Rightarrow \boxed{F_1 = 7.5\ ton}$$ کششی



$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 7.5\times(3+6)-5\times6-F_2\times3=0$$

$$3F_2 = 37.5 \Rightarrow \boxed{F_2 = 12.5\ ton}$$ کششی



$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0 \Rightarrow 7.5\times(3+2\times6)-5\times6-5\times(2\times6)-F_3\times3=0$$

$$3F_3 = 22.5$$

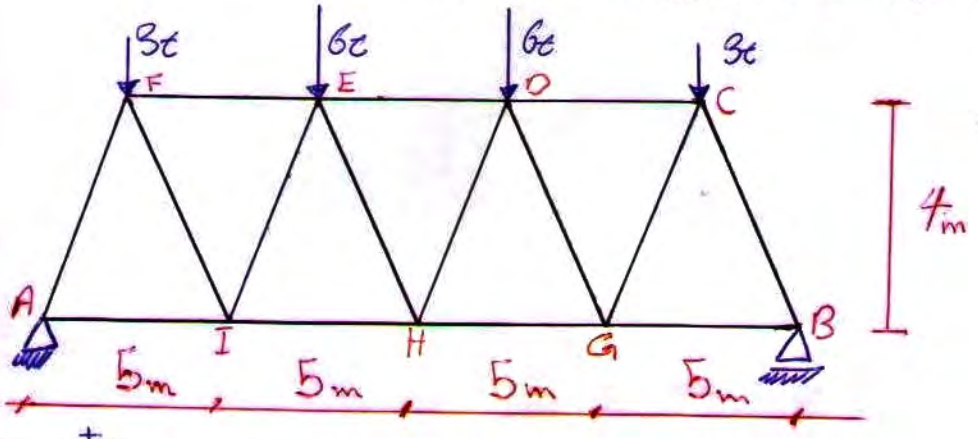
$$\boxed{F_3 = 7.5}$$ کششی

خرپای زیر مفروض است

الف) نیروی داخلی تمام اعضا را بدست آورید (روش گره)

ب) با روش آزاد مقطع دید سیده نیروی داخلی میله‌ی IH را محاسبه کنید.

ج) با روش از سه مقطع نیروی داخلی اعضای FD ، EH و IH را محاسبه کنید.



$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x = 0 \rightarrow RA_x = 0$

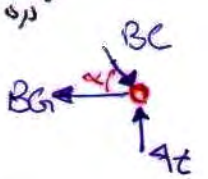
$\uparrow^{+}\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow RA_y + RB_y = 18t$

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma MA = 0 \rightarrow (3\times 2.5)+(6\times 7.5)+(9\times 12.5)+(3\times 17.5)-By\times 20 = 0$

$By = 9t \rightarrow Ay = 9t$

الف)

گره B



$r = \sqrt{4^2+2.5^2} = \sqrt{22.25}$

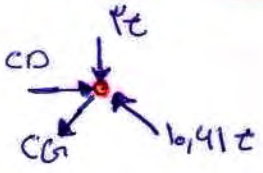
$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{22.25}}$ $\quad \cos\alpha = \frac{2.5}{\sqrt{22.25}}$

$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x = 0 \rightarrow BC\frac{2.5}{\sqrt{22.25}} = BG$

$\uparrow^{+}\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow BC\frac{4}{\sqrt{22.25}} = 9 \rightarrow BC = 10.91t$

$BG = 8.485t$

گره C

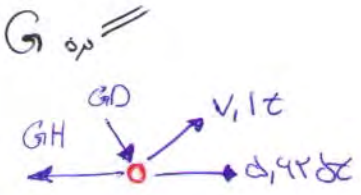


$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x = 0 \rightarrow CD = 10.91\times\frac{2.5}{\sqrt{22.25}} + CG\frac{2.5}{\sqrt{22.25}}$

$\uparrow^{+}\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow 4 + CG\frac{4}{\sqrt{22.25}} = 10.91\times\frac{4}{\sqrt{22.25}}$

$CG = 7.1t$

$CD = 9.375t$

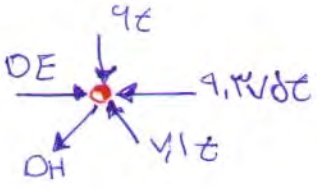


$\Sigma F_x = 0 \rightarrow d,۴۲۵ + V,۱ \frac{۲,۵}{\sqrt{۲۲,۲۵}} + GD \frac{۲,۵}{\sqrt{۲۲,۲۵}} = GH$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V,۱ \frac{۴}{\sqrt{۲۲,۲۵}} = GD \frac{۴}{\sqrt{۲۲,۲۵}}$

$GD = V,۱ t$

$GH = ۱۳,۱۲۵ t$



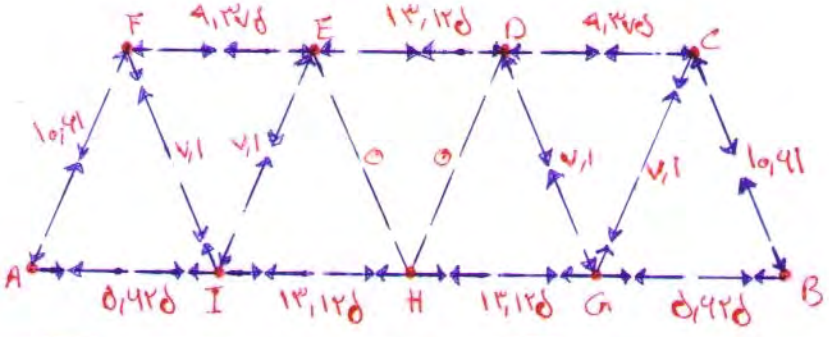
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow DE = ۹,۳۷۵ + V,۱ \frac{۲,۵}{\sqrt{۲۲,۲۵}} + DH \frac{۲,۵}{\sqrt{۲۲,۲۵}}$

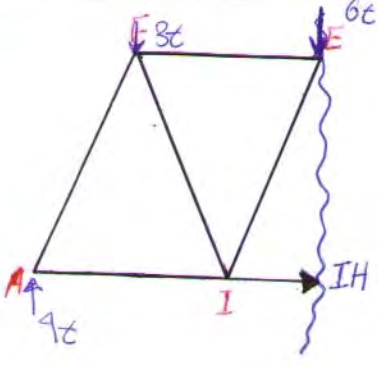
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow ۹ + DH \frac{۴}{\sqrt{۲۲,۲۵}} = V,۱ \frac{۴}{\sqrt{۲۲,۲۵}}$

$DH = ۰ t$

$DE = ۱۳,۱۲۵ t$

به علت تقارن در شکل میله و بارگذاری تقارن در نیروهای داخلی اعضای سازه داریم.



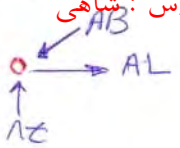


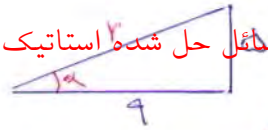
$\Sigma M_E = 0$

$۹ \times V,۵ - ۳ \times ۵ - IH \times ۴ = ۰$

$IH = ۱۳,۱۲۵ t$

A عکس





$r = \sqrt{1+\delta^2} = \sqrt{1.9}$

$\sin\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{1.9}}$ $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{1.9}}$

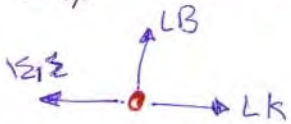
$\Sigma F_{ox} = 0$ $AL = AB\frac{9}{\sqrt{1.9}}$

$\Sigma F_y = 0$ $\Lambda = AB\frac{\delta}{\sqrt{1.9}}$

$AB = 14,\Sigma V\,t$

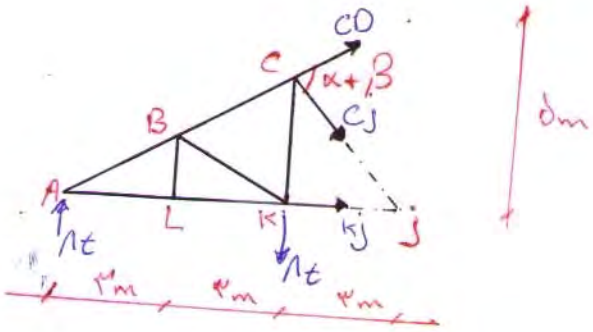
$AL = 1\Sigma,\Sigma\,t$

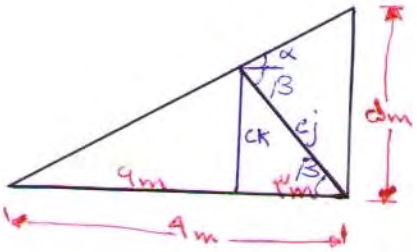
L عکس



$\Sigma F_{ox} = 0$ $LK = 1\Sigma,\Sigma +$

$\Sigma F_{yc} = 0$ $BL = 0\,t$





$\Sigma M_j = 0$ (+↻)

$\Lambda \times 9 - \Lambda \times 4 + CD\sin(\alpha+\beta)\,\Sigma,\Sigma\Lambda = 0$

$\Sigma\Lambda + CD\sin(49.0\delta + \Sigma\Lambda,1) = 0$

$\Sigma\Lambda = -CD\sin(VV,9)$

$CD = -10,9\Lambda\ t$

$CD = 10,A\Lambda\ t$

$\frac{CD}{CK} = \frac{9}{9}$

$CK = \frac{10}{4}m$

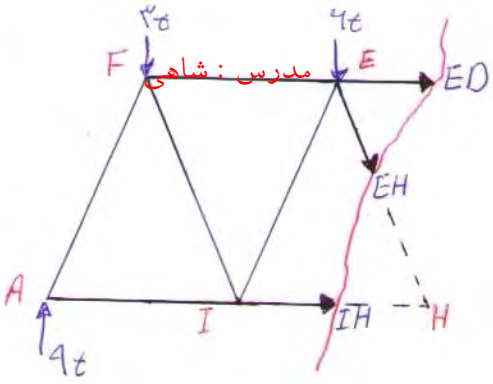
$tg\beta = \frac{1/4}{4/1} = 1/9$

$\text{Arc}tg\ \frac{1}{9} = \beta$

$\beta = \Sigma\Lambda^\circ\ 0'\ \Sigma9,0\Sigma''$

$Cj = \sqrt{(\frac{10}{4})^2 + 4^2}$

$Cj = \Sigma,\Sigma\Lambda m$



$\sum M_H = 0$ (+)

$4 \times 10 - 4 \times 7,5 - 4 \times 2,5 + ED \times 5 = 0$

$ED = 12,125t$

$\sum F_y = 0$ (+↑) $\quad 4 - 4 - 4 - EH \frac{4}{\sqrt{22,25}} = 0$

$EH = 0\ t$

$\sum F_x = 0$ (+→) $\quad IH + 12,125 = 0$

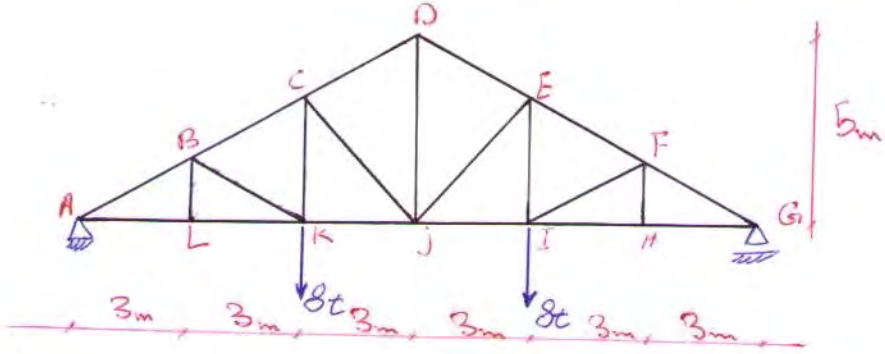
$IH = -12,125\ t$

$IH = 12,125t$ ←

خرپاهای زیر محدودی است، مطلوب است:

الف) تعیین نیروهای داخلی AB، AL و BL (به روش گره)

ب) تعیین نیروهای داخلی CD، Cj و Kj (به روش برش)



$\sum F_x = 0$ (+→) $\quad RA_x = 0$

$\sum F_y = 0$ (+↑) $\quad RA_y + RG_y = 16t$

$\sum M_A = 0$ (+) $\quad 8 \times 4 + 8 \times 12 - Gy \times 18 = 0$

$Gy = 8t$

$Ay = 8t$

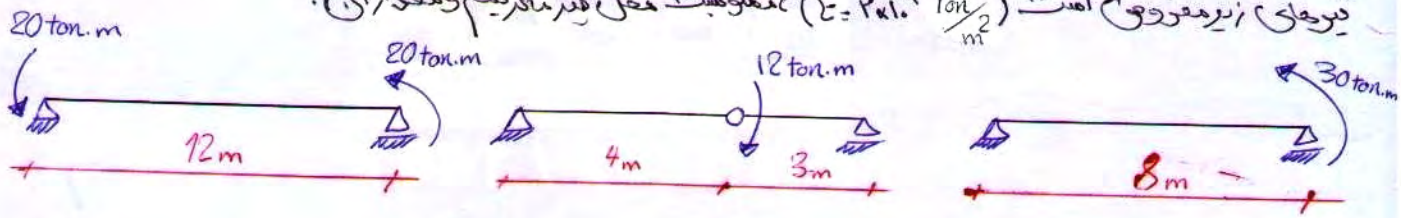
$$\Sigma F_{y=0}^{\uparrow+} \rightarrow A - A + 1.49A\frac{d}{\sqrt{1.9}} - Cj\,Sin\,\Sigma A_{1.01} = 0$$

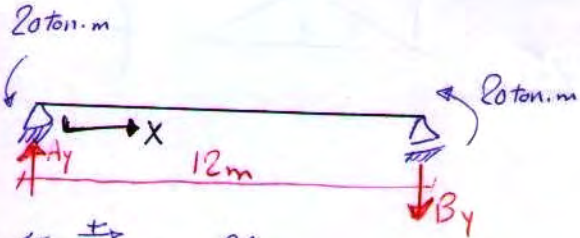
$$Cj = V,1V\delta t$$

$$\Sigma F_{x=0}^{\xrightarrow{+}} \rightarrow 1.49A\frac{4}{\sqrt{1.9}} = V,1V\delta\,Cos\,\Sigma A_{1.01} + kj$$

$$kj = \Sigma,A\,t$$

تیرهای زیرمفروض است (معلوبست محل فیزیکی سیم ومقدار آن. $E = 2\times10^4\ ton/m^2$)





$$\Sigma F_{x=0}^{\xrightarrow{+}} \rightarrow RA_x = 0$$

$$\Sigma F_{y=0}^{\uparrow+} \rightarrow RA_y - R_{By} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0\ \circlearrowleft+ \rightarrow -20 - 20 + B_y \times 12 = 0 \rightarrow B_y = 10/3\,t \Rightarrow A_y = 10/3\,t$$

$$M_x^{+} = 10/3\,x - 20$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = 10/3\,x - 20 \xrightarrow{\int} EI\frac{dy}{dx} = 5/3\,x^2 - 20x + C$$

$$\xrightarrow{\int} EIy = \frac{5}{9}x^3 - 10x^2 + Cx + D$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow D=0 \quad , \quad \begin{cases} x=12 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow 0 = 5/9(12)^3 - 10(12)^2 + C(12) \rightarrow C = 80$$

$EI\theta = \frac{d}{6}x^3 - 12x^2 + 40x$ $\qquad$ $EI\delta = \frac{d}{6}x^3 - 20x^2 + 40x$

IF $\theta = 0 \rightarrow \delta_{max}$

$\frac{d}{2}x^2 - 20x + 40 = 0 \rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(\frac{d}{2})(40)}}{2(\frac{d}{2})}$ $\begin{cases} 9{,}54 & \text{قبول} \\ 21{,}54 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$

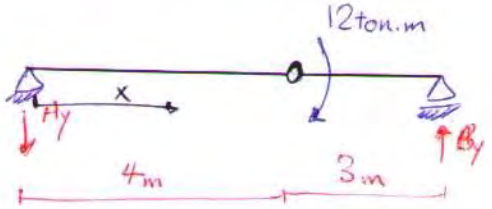
$\delta_{max} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x = 9{,}54 \\ x = 21{,}54 \end{bmatrix}$

$EI\delta_{x=9{,}54} = \frac{d}{6}(9{,}54)^3 - 10(9{,}54)^2 + 40(9{,}54) = -54{,}18$

$\delta_{x=9{,}54} = -54{,}18 \div \left[2 \times 10^4 \times \frac{0{,}5 \times 0{,}3^3}{12} \right] = -0{,}0014\,m \times 10^3 = -1{,}414\,mm$

$EI\delta_{x=21{,}54} = \frac{d}{6}(21{,}54)^3 - 10(21{,}54)^2 + 40(21{,}54) = 54{,}18$

$\delta_{x=21{,}54} = 54{,}18 \div \left[2 \times 10^4 \times \frac{0{,}5 \times 0{,}3^3}{12} \right] = 0{,}0014\,m \times 10^3 = 1{,}414\,mm$



$\sum F_x = 0 \rightarrow RA_x = 0$ $\quad (+\rightarrow)$

$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y - A_y = 0$ $\quad (+\uparrow)$

$\sum M_A = 0 \rightarrow 12 - B_y \times 7 = 0 \rightarrow B_y = 12/7 = A_y$ $\quad (+\circlearrowleft)$

$M_x = 12 - \frac{12}{7}x$ $\quad (+\circlearrowright)$

$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 12 - \frac{12}{7}x \xrightarrow{\int} EI\frac{dy}{dx} = 12x - \frac{6}{7}x^2 + C$

$\xrightarrow{\int} EIy = 6x^2 - \frac{2}{7}x^3 + Cx + D$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x=V \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{1}{6}(V)^3 - \frac{7}{12}(V)^2 + C(V) \rightarrow C = -28$

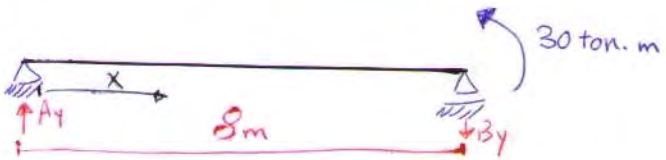
$EI\theta = 12x - \frac{7}{6}x^2 - 28$ $\qquad$ $EI\delta = 6x^2 - \frac{7}{12}x^3 - 28x$

$I.F\ \theta = 0 \iff \delta_{max}$

$12x - \frac{7}{6}x^2 - 28 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-\frac{7}{6})(-28)}}{2(-\frac{7}{6})}$ $\begin{cases} 2,94\ m \\ 11,04\ m \end{cases}$

$EI\delta_{max} = 6(2,94)^2 - \frac{7}{12}(2,94)^3 - 28(2,94) = -37,72$

$\delta_{max} = -37,72 \div \left[2 \times 10^6 \times \frac{0,05 \times 0,3^3}{12}\right] = -0,0012\ m \times 10^3 = -1,32\ mm$



$\Sigma F_x \overset{+\rightarrow}{=} 0 \rightarrow RA_x = 0$

$\Sigma F_y \overset{+\uparrow}{=} 0 \rightarrow A_y - B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \ (+) \rightarrow -30 + B_y \times 8 = 0$ $\qquad B_y = 3,75\ ton = A_y$

$M_x \overset{(+)}{=} 3,75x$

$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 3,75x \xrightarrow{\int} EI\frac{dy}{dx} = \frac{3,75}{2}x^2 + C$

$\xrightarrow{\int} EIy = \frac{3,75}{6}x^3 + Cx + D$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow D=0$ $\qquad$ $\begin{cases} x=8 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{3,75}{6}(8)^3 + C(8) \rightarrow C = -40$

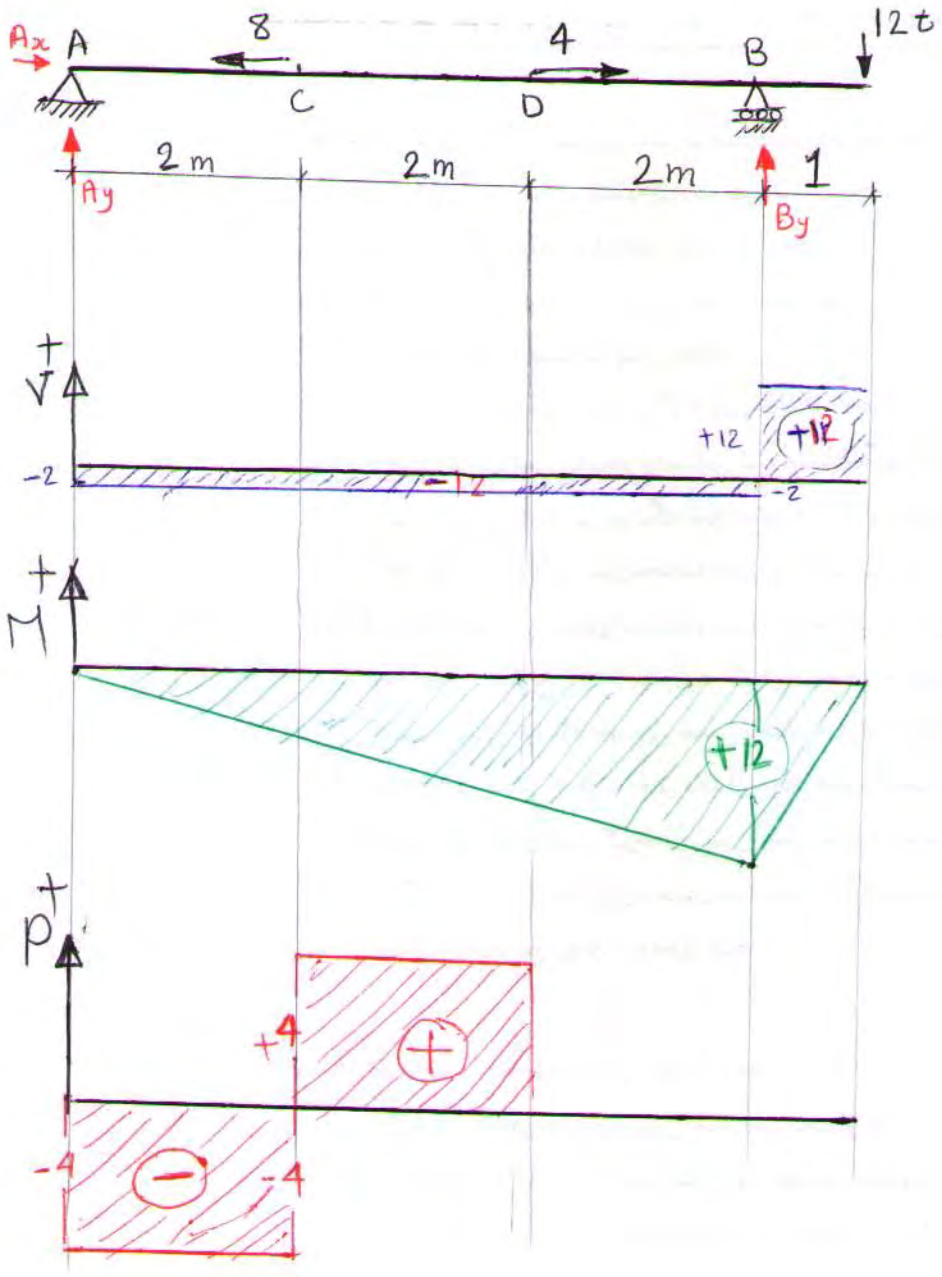
$EI\theta = 1,\Lambda V\Delta x^{2} - ۴۰$ $\qquad EI\delta = ,۹۲\Delta x^{۳} - ٤۰x$

IF $\theta_{z} = 0 \iff \delta_{max}$

$1,\Lambda V\Delta x^{2} - ٤۰ = 0 \qquad x = ٤,۹۲m$

$\delta_{max} = ,۹۲\Delta(٤,۹۲)^{۳} - ٤۰(٤,۹۲) \div \left[۲\times 1۰^{۹} \times \frac{۰,\Delta\times ۰,V^{۳}}{۱۲} \right]$

$\delta_{max} = -,۰۰٤۳m = -٤,۳۱mm$



$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_A = 0$

$-6B_y + 12\times 7 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{84}{6}$

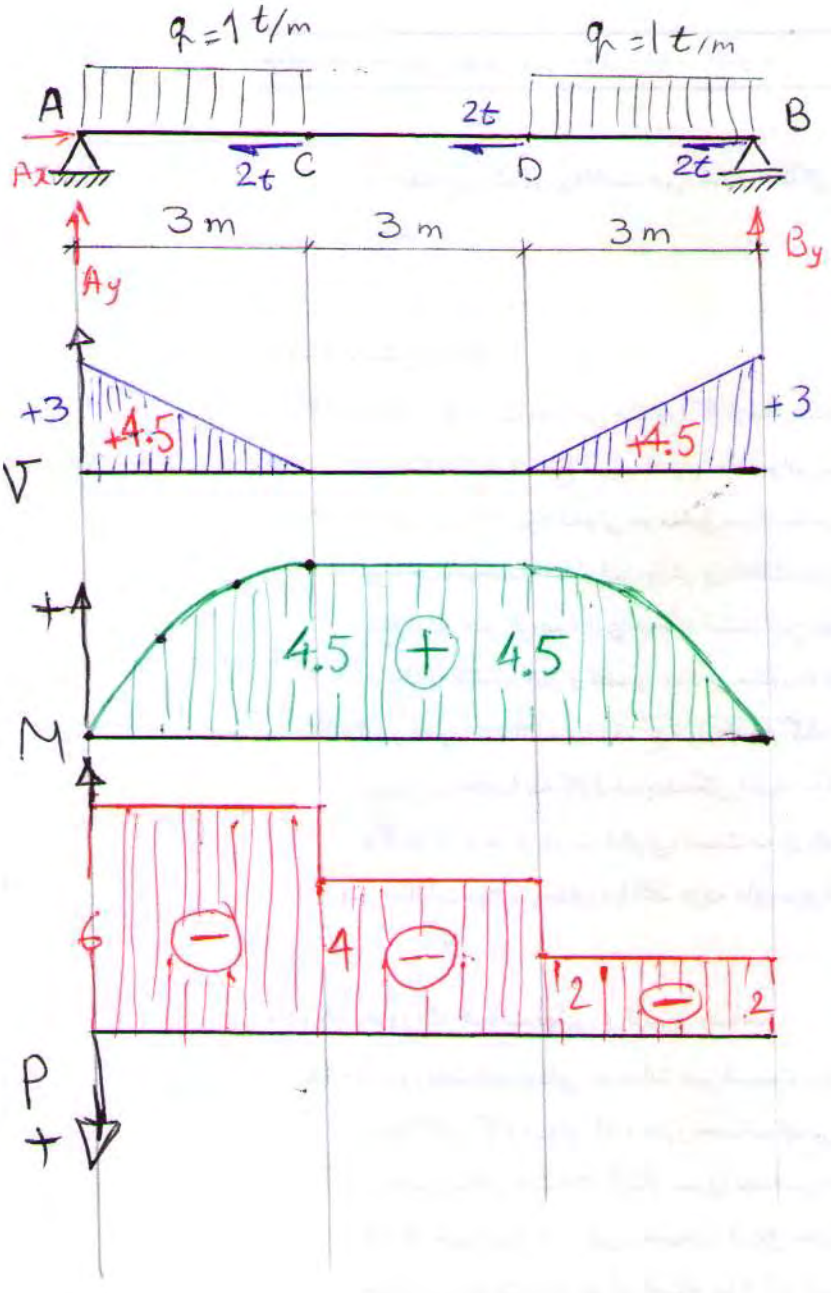
$\boxed{B_y = 14}$

$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0$

$A_y + 14 - 12 = 0$ $\boxed{A_y = -2}$

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0$

$A_x - 8 + 4 = 0$ $\boxed{A_x = 4}$



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$

$1 \times 3 \times \frac{3}{2} + 1 \times 3 \left(6 + \frac{3}{2}\right) - 9B_y = 0$

$9B_y = \frac{9}{2} + 3\left(\frac{12+3}{2}\right) = 27$

$B_y = \frac{27}{9} = 3$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$A_y - 3\times1 - 3\times1 + B_y = 0$

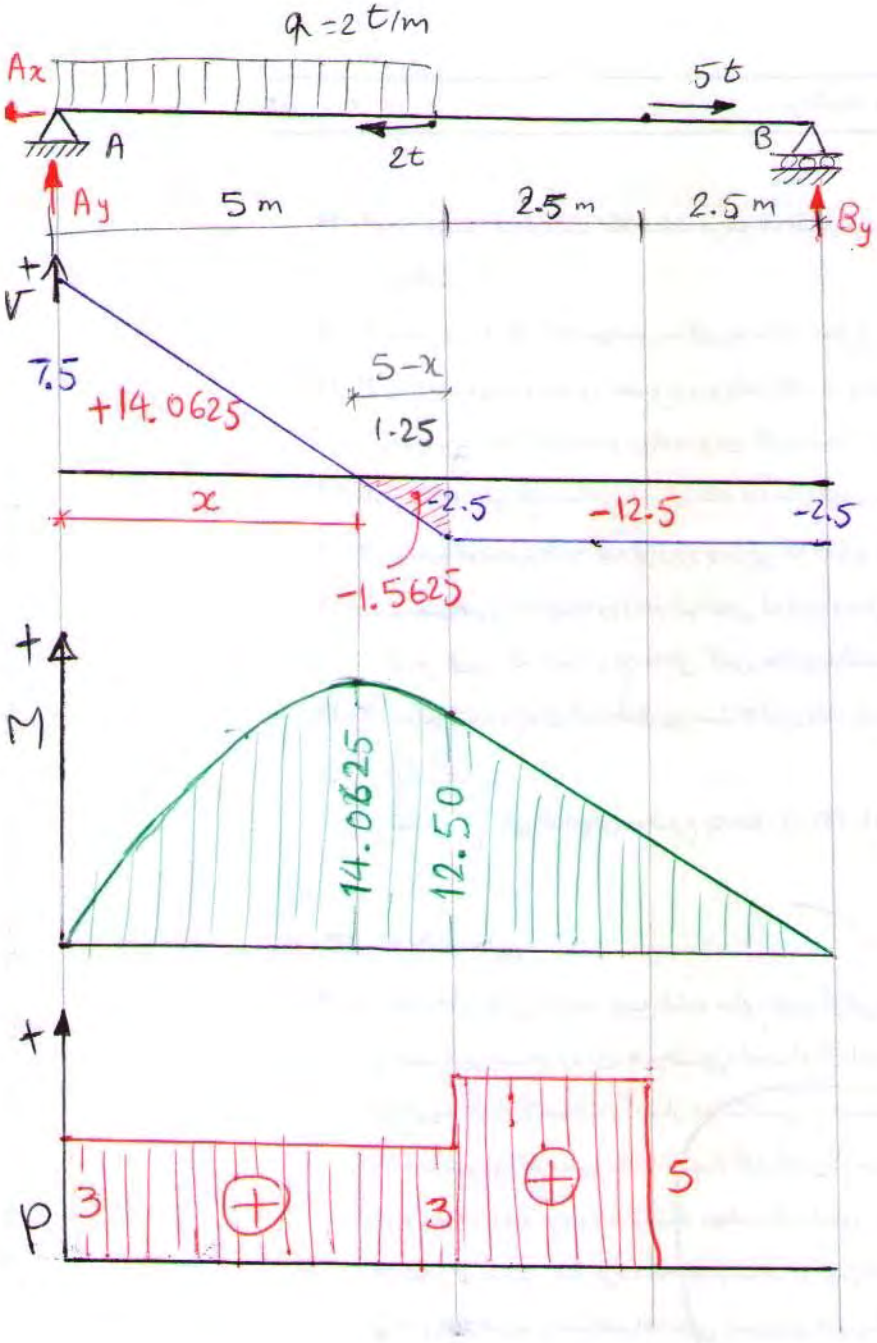
$A_y - 6 + 3 = 0$

$A_y = 6 - 3 = 3$

$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$

$A_x - 2 - 2 - 2 = 0$

$A_x = 6$



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$

$2 \times 5 \times \frac{5}{2} - 10\,B_y = 0$

$10 B_y = 25$

$B_y = \frac{25}{10} = 2.5$

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$

$-A_x - 2 + 5 = 0$

$A_x = 3$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$A_y - 2 \times 5 + B_y = 0$

$A_y = 10 - B_y = 10 - 2.5 = 7.5$

$\frac{x}{7.5} = \frac{5}{10}$

$x = \frac{5 \times 7.5}{10} = 3.75$