مرحله ی اول هجدهمین دوره ی المپیاد ریاضی ایران

بهمن ماه ۱۳۷۸

۱) چند عدد صحیح x که $۹<x<۱۵$ وجود دارد که دنباله ی متناهی $۱،۲،۶،۷،۹,x,۱۵،۱۸،۲۰$ مشتمل بر هیچ سه جمله ای نباشد که تشکیل یک تصاعد عددی بدهند؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

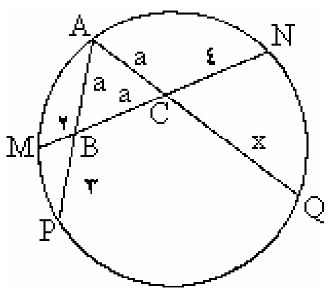
۲) دنباله ی $a_۱,a_۲,a_۳,...$ « برگشتی خطی» نامیده می شود اگر و فقط اگر اعداد صحیح p و q موجود باشند که $a_{n+۲}=pa_{n+۱}+qa_n$. دو جمله ی بعدی در دنباله ی $۲،۵،۱۴،۴۱,...$ کدام یک از دو عدد زیر است با این شرط که این دنباله « برگشتی خطی » باشد؟

الف) ۲۸ و ۸۲ ب) ۲۸ و ۱۲۳ ج) ۱۳۶ و ۳۲۸ د) ۱۲۲ و ۳۶۵
ه) ۲۴۴ و ۴۸۷

۳) عدد a طبیعی بوده و b و c صحیح اند. اگر معادله ی $P(x)=ax^۲+bx+c$ دو ریشه ی متمایز در فاصله ی باز (۰،۱) داشته باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ ه) ۷

۴) دایره ی Ω به شعاع r و مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع a درون آن مفروض است اگر A روی محیط دایره باشد و ضلع BC دایره را در نقاط N و M، و AB و AC دایره را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند و $BP=۳$، $MB=۲$، و $CN=۴$، آن گاه مقدار CQ کدام است؟



الف) ۴ ب) ۴/۵ ج) ۵

د) ۵/۵ ه) با این اطلاعات مسئله نمی توان آن را به دست آورد.

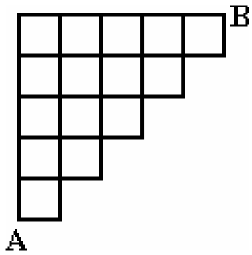
۵) عدد های طبیعی a_1، a_2، a_3، و ... به این صورت تعریف شده اند که $a_1=1$ و $a_{n+1}=2a_n+5$. کدام یک از عدد های زیر می تواند در بین a_i ها ظاهر شود؟

الف) ۵۶۲۳۰۱ ب) ۷۸۶۴۲۷ ج) ۱۶۴۸۵

د) ۳۱۲۳ ه) ۵۱۵۱۹

۶) تعداد مسیر های از نقطه ی A به B را بیابید در صورتی که بدانیم در هر مرحله می توان فقط یک گام به راست یا یک گام به سمت بالا برداشت.

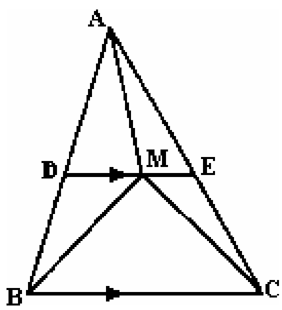
الف) ۶۱ ب) ۱۳۲ ج) ۱۲۶ د) ۱۲۷ ه) ۶۲



۷) چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم علیه حداقل یکی از اعداد 12^{50}، 45^{20} و 50^{100} باشد؟

الف) ۱ ب) ۲۶۳۱۲ ج) ۲۶۳۱۳ د) ۲۶۱۵۱ ه) ۲۶۱۵۰

۸) نقطه ی M درون مثلث غیر متساوی الساقین ABC مفروض است. کدام جمله ی زیر در مورد مقدار MA+MB+MC درست است؟



الف) همیشه از بزرگ ترین ضلع مثلث، کوچک تر است.

ب) همیشه از جمع دو ضلع بزرگ تر مثلث، کوچکتر است.

ج) همیشه از جمع دو ضلع کوچک تر مثلث، بزرگ تر است.

د) همیشه از ۳ برابر شعاع دایره ی محیطی، بزرگ تر است.

ه) از جمع دو ارتفاع بزرگ تر، کوچک تر است.

۹) از روی عدد a می توانیم به برسیم، اگر $\frac{[a,b]}{(a,b)}$ عددی اول باشد و می نویسیم $a \to b$. کدام یک از گزینه های زیر غلط است؟

الف) با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$ با زنجیره ای مثل $a \to b \to c \to \ldots \to k$ می توان به هر $k \in \mathbb{N}$ ای رسید.

ب) با هر $a \in \mathbb{N}$ و اعداد $b_1, b_2, \ldots, b_m$ که داده شده اند، زنجیره ای با آغاز از a وجود دارد که همه ی b_i ها در آن ظاهر شوند و هر کدام یک بار.

ج) با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، زنجیره ای وجود دارد که تنها شامل مضارب a باشد و همه ی مضارب a در آن ظاهر شوند. (زنجیره ای نامتناهی)

د) با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، می توان زنجیره ای یافت که همه ی اعداد مربع کامل در آن آمده باشند. (زنجیره ای نامتناهی)

ه) با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، می توان زنجیره ای یافت که همه ی اعداد آن کمتر از b باشند و همه ی اعداد کم تر از b در آن آمده باشند، هر یک دقیقا یک بار ($b>a$ عددی داده شده است).

۱۰) فرض کنیم $a_1, a_2, \ldots, a_{1379}$ همان اعداد ۱،۲،...،۱۳۷۹ هستند که با یک ترتیب دل خواه ظاهر شده اند. تعریف می کنیم: $f_i = |a_i - i|$ و قرار می دهیم: $L = f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_{1379}$. با در نظر گرفتن تمام ترتیب ها، L مساوی چند تا از اعداد ۱ تا ۱۰ می تواند باشد؟

الف) هیچ مقدار　　ب) ۳　　ج) ۵　　د) ۷　　ه) تمام مقادیر

۱۱) فرض کنید a_1 عددی طبیعی باشد و a_{n+1} را برابر بزرگ ترین عامل اول در a_n+1 تعریف کنیم. a_1 را خوب می نامیم اگر دنباله ی $\{a_n\}$ متناظر با آن، سرانجام متناوب باشد. کدام حکم درست است؟

الف) تعداد اعداد خوب، متناهی است.

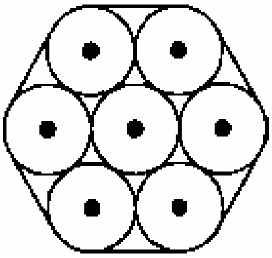
ب) تعداد اعداد غیر خوب، نامتناهی است.

ج) همه ی اعداد خوب هستند.

د) همه ی اعداد غیر خوب هستند.

ه) اعداد غیر خوب وجود دارند و تعداد آن ها متناهی است.

۱۲) هفت مداد مشابه را مطابق شکل با کش بسته ایم. اگر شعاع مداد ها برابر ۱ واحد باشد طول کش برابر است با:



الف) ۶π   ب) ۱۸   ج) ۱۲+π

د) ۱۲+۲π   ه) ۱۸+۲π

۱۳) در یکی از اقمار سیاره ی مریخ مردم برای انتخاب رئیس این گونه عمل می کنند که اگر n نفر نامزد باشند، هر فرد به هنگام رأی دادن بر حسب علاقه ی خود امتیاز های متفاوتی از بین۱ تا n به هر کدام از نامزد ها نسبت می دهد. سپس امتیاز های هر کدام از نامزد ها را جمع می زنند و کسی که بیش ترین امتیاز را بیاورد رئیس می شود. در این دوره سه نفر A، B و C نامزد شده اند. کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

الف) اگر بیش تر مردم (بیش از نصف) A را بر B ترجیح دهند و بیش تر مردم B را بر C ترجیح دهند، آن گاه بیش تر مردم A را بر C ترجیح می دهند.

ب) اگر بیش تر مردم A را بر B ترجیح دهند و بیش تر مردم A را بر C ترجیح دهند، A رئیس می شود.

ج) اگر کم تر از نصف مردم A را هم بر B و هم بر C ترجیح دهند، ممکن است A رئیس شود.

د) اگر همه ی کسانی که A را بر B ترجیح می دهند، C را بر A ترجیح دهند، ممکن است B رئیس شود.

ه) اگر ابتدا بین هر سه و سپس بین دو نفری که بیش ترین امتیاز ها را کسب کرده اند، انتخابات برگزار شود (انتخابات دو مرحله ای)، ممکن است نتایج آن با نتایج انتخابات یک مرحله ای متفاوت باشد.

۱۴) تعداد جواب های معادله ی $a^2+b^2=c^2+3$ در اعداد طبیعی چند تاست؟

الف) صفر   ب) ۲   ج) ۴   د) ۸   ه) بی نهایت

۱۵) فرض کنید صفحه ی شطرنجی $2n\times 2n$ را بخواهیم با یک عدد موزاییک ۲×۲ و n^2-1 تا موزاییک ۴×۱ بپوشانیم. کدام یک از احکام زیر، درست است؟

الف) به ازای همه ی n ها، می توان این کار را کرد.

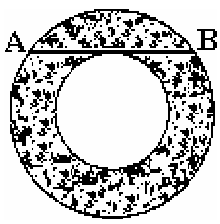
ب) به جز برای متناهی تا n، می توان این کار را کرد.

ج) به جز برای متناهی تا n، هرگز نمی توان این کار را کرد.

د) فقط برای n های فرد، می توان این کار را کرد.

ه) برای n های مربع کامل، می توان این کار را کرد.

۱۶) در شکل مقابل می دانیم طول پاره خط AB برابر ۱۴ واحد است. اگر مساحت قسمت هاشور خورده را S بنامیم، در مورد S قویترین حکم کدام است؟



الف) $49\pi\leq S\leq 98\pi$ ب) $14\pi\leq S\leq 49\pi$ ج) $S=49\pi$

د) $S\geq 14\pi$ ه) $S\leq 98\pi$

۱۷) بین ۱۰۰ دانش آموز ۷ آزمون برگزار کرده ایم، و در هیچ یک از آزمون ها هیچ دو دانش آموزی نمره ی مساوی نگرفته اند. هر دانش آموزی که حداقل در یکی از امتحانات نفر اول شده باشد و یا حداقل در ۴ آزمون بین ۶ نفر اول باشد جایزه می گیرد. همچنین این شرط را نیز داریم که هر دانش آموزی حداکثر یک جایزه می گیرد. حداکثر چند دانش آموز می توانند جایزه بگیرند؟

الف) ۱۵ نفر   ب) ۱۴ نفر   ج) ۱۳ نفر   د) ۱۲ نفر   ه) ۷ نفر

۱۸) فرض کنید $a,b,c>0$ و داشته باشیم $a+b=c$. حداقل مقدار عبارت $A=\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2}$ کدام است؟

الف) ۹   ب) ۱۵   ج) ۱۸   د) ۲۱   ه) ۳

۱۹) برای هر $m\in\mathbb{N}$، f_m را به این صورت تعریف می کنیم:

$f_m = \underbrace{111\cdots1}_{m \text{ بار}}$ مثلا ... $f_1=1, f_2=11, f_3=111, \ldots$

چند تا از f_m ها را می توان به صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی غیر صفر نوشت؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی نهایت

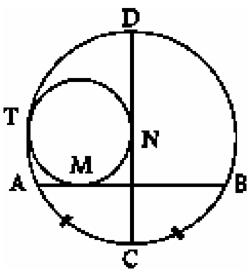
۲۰) اعداد ۱،۲،۳،...,۶۱ را طوری در یک ردیف نوشته این که هر عدد مجموع اعداد قبل از خودش را می شمارد. اگر عدد اول در این ردیف ۶۱ و عدد دوم ۱ باشد، عدد سوم کدام یک از اعداد زیر است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۳۰ د) ۳۱ ه) نمی توان پیدا کرد.

۲۱) دایره ی C روی صفحه مفروض است. چهار نقطه ی A,B,C,D طوری روی دایره ی C قرار دارند که داریم:

$$\widehat{AB} = \widehat{BD} = 60^\circ = 2\widehat{AC}$$

دایره ی 'C بر AB و CD در نقاط M و N و بر دایره ی C در نقطه ی T مماس داخلی است. مقدار زاویه ی MTN> کدام است؟



الف) 15° ب) 20° ج) $22/5^\circ$ د) $27/5^\circ$ ه) 30°

۲۲) داشت عباس قلی خان پسری پسر بی ادب و بی هنری

اسم او بود علی مردان خان اهل منزل ز دستش به امان

علی مردان خان از دست عباس قلی خان گریخته و داخل حوضی به شعاع ۱ پریده. عباس قلی خان از آن رو که به فن شنا آشنا نیست، در لبه ی حوض ایستاده. سرعت دویدن او چهار برابر سرعت شنا کردن علی مردان خان است، اما بیرون از حوض علی مردان خان سریع تر از او می دود. حداقل فاصله ی آن دو چقدر باشد تا علی مردان خان بتواند خود را به لبه ی حوض رسانده و فرار کند؟

الف) ۱ ب) $\frac{2-\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) خوشبختانه هیچ گاه نمی تواند فرار کند.

ه) متاسفانه همیشه می تواند فرار کند.

۲۳) دو نفر مشغول خوردن تخمه از یک ظرف هستند. قرار است که به نوبت از ان ظرف تخمـه بردارنـد. هـر نفـر مجاز به برداشتن ۱، ۲ یا ۵ تخمه در نوبت خودش است. هر کس که آخرین تخمه (یا تخمـه هـا) را بـردارد، برنـده است. کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

الف) در صورتی که تعداد تخمه ها در شروع تخمه خوری ۱۳۷۷ باشد، نفر دوم برنده است.

ب) در صورتی که تعداد تخمه ها در شروع تخمه خوری ۱۳۷۸ باشد، نفر دوم برنده است.

ج) در صورتی که تعداد تخمه در شروع تخمه خوری ۱۳۷۹ باشد، نفر دوم برنده است.

د) در صورتی که تعداد تخمه ها در شروع تخمه خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر اول برنده است.

ه) در صورتی که تعداد تخمه ها در شروع تخمه خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر دوم برنده است.

۲۴) برای اعداد حقیقی و مثبت x، y، و z داریم $xyz(x+y+z)=1$. حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)$ کدام یک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ د) ۲ ه) $\frac{5}{2}$

۲۵) فرض کنید شخصی یک عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ را انتخاب کرده باشد. می توانیم هر بـار بـه او یـک عـدد بدهیم و او بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این عدد و عدد اولیه را به ما بگوید. با چند مرحله حتما می توانیم عدد او را بیابیم؟

الف) ۱۰۰ ب) $\binom{100}{2}$ ج) به تعداد اعداد اول کوچک تر از ۱۰۰

د) به تعداد اعداد مرکب کوچک تر از ۱۰۰ ه) هیچ کدام

۲۶) در یک کارخانه هر کارگر با تعدادی از کارگر ها دوست است و به اندازه ی میانگین حقوق همـه ی دوسـتانش، حقوق می گیرد. کدام گزینه درست است؟

الف) کارگری وجود دارد که به اندازه ی میانگین بقیه ی کارگر ها حقوق می گیرد.

ب) حقوق هیچ کارگری بیش تر از دو برابر حقوق عباس قلی جوش کار (عباس قلی خان!) نیست.

ج) حقوق همه ی کارگر ها برابر است.

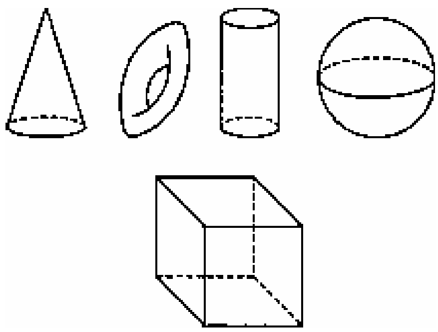
د) حقوق هر دو دوست برابر است، ولی حقوق همه لزوما برابر نیست.

ه) هیچ کدام

سوال های ۲۷ تا ۳۰ با توجه به توضیحاتی که قبل از آن ها آمده است، حل می شوند. پیش از خواندن صورت سئوال ها، ابتدا متنی که به هر قسمت مربوط می شود را با دقت کافی مطالعه کنید. این سؤال ها به گونه ای طراحی شده اند که یک موضوع جدید را با بیان ساده معرفی می کنند و توانایی درک مفاهیم را می سنجند. توجه داشته باشید که نمره ی مثبت و منفی ای که برای هر یک از این سؤال ها در نظر گرفته می شود دو برابر سؤال عادی است.

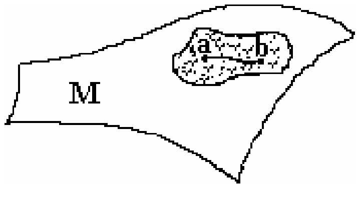
با توجه به توضیحات زیر به دو سوال ۲۷ و ۲۸ پاسخ دهید.

منظور از یک « رویه » شکلی است که در آن حول و حوش هر نقطه، شبیه صفحه ای احتمالا کج و کوله است، مثل یک مکعب، کره، استوانه، چنبره (تیوپ ماشین) و یا یک مخروط.



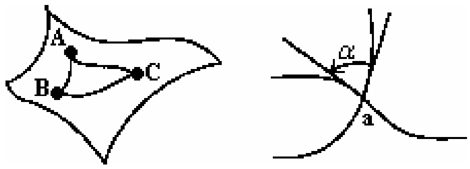
یک « رویه » را « هموار » می گوییم اگر در هیچ نقطه ای شکستگی یا تیزی نداشته باشد. همه ی مثال های بالا غیر از مکعب و مخروط هموار هستند.

می توان ثابت کرد که اگر a نقطه ای روی « رویه ی هموار » M باشد، ناحیه ای کوچک اطراف a وجود دارد که اگر b نقطه ای از این ناحیه باشد، آن گاه a و b را می توان با یک خم داخل رویه طوری به هم وصل کرد که طول این خم کم ترین مقدار ممکن باشد.



با کنار هم گذاشتن این هم های کوچک، به طوری که شکستگی به وجود نیاید، خم های بلند تری ساخته می شود که به نوعی نقش خط ها را بازی می کنند. (به این خم ها « شبه خط » می گوییم.) می توان نشان داد که « شـبه خـط » های کره همان دایره های عظیمه اند.

منظور از یک « هم هموار » مسیر حرکت یک متحرک است که تیزی ندارد. یعنی در هر نقطه می توان مماسـی بـر آن رسم کرد. فرض کنید دو خم هموار در نقطه ی a هم دیگر را قطع کرده باشند. منظور از زاویـه ی بـین ممـاس های آن ها است.



اگر سه نقطه ی روی یک « رویه ی هموار » را دو به دو با شبه خط ها به هم وصل کنیم یک « مثلث » به وجود می آید. مجموع سه زاویه ی یک « مثلث » می تواند ۱۸۰^{o} نباشد!

۲۷) کدام گزینه درست است؟

الف) از هر دو نقطه ی کره حداکثر ۲ شبه خط می گذرد.

ب) مجموع زوایای یک « مثلث » روی کره به شعاع یک مقداری ثابت و بیش تر از ۱۸۰^{o} است.

ج) مجموع زوایای یک « مثلث » روی کره عددی بین ۱۸۰^{o} و ۹۰۰^{o} است.

د) مجموع زوایای یک « مثلث » روی کره به شعاع یک، متناسب با مساحت داخل مثلث است.

ه) الف و ج

۲۸) کدام گزینه درست است؟

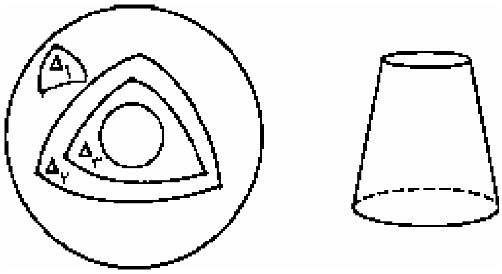
فرض کنید M یک مخروط ناقص باشد (یعنی مخروطی که سر آن را بریده اند). اگر $\Delta_۱$، $\Delta_۲$، و $\Delta_۳$ « مثلث هـایی » به شکل زیر روی M باشند، کدام درست است؟ (تصویر از بالا است.)

۱) مجموع زوایای $\Delta_۱$، ۱۸۰^{o} است.

۲) مجموع زوایای $\Delta_۲$ و $\Delta_۳$ برابر است.

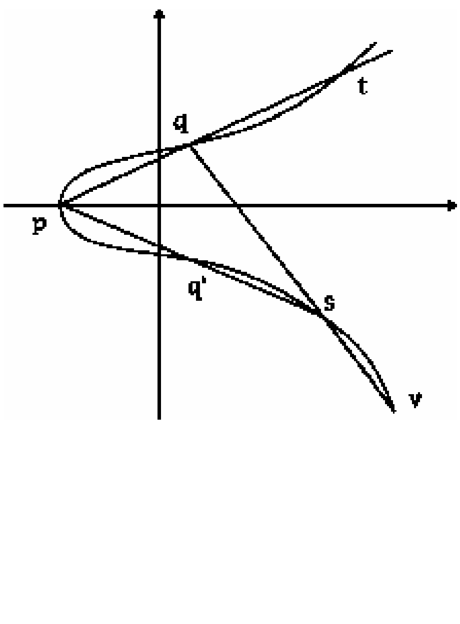
۳) مجموع زوایای $\Delta_۲$ از دوتای دیگر بیش تر است.

الف) ۱ و ۳ ب) ۱ و ۲ ج) ۲ د) ۳ ه) هیچ کدام



با توجه به توضیحات زیر به دو سوال ۲۹ و ۳۰ پاسخ دهید.

منحنی $y^۲=x^۳+۱$ را در صفحه در نظر بگیرید. به طور نمادین یک موجود به نام ∞ را در نظر میگیـریم و قـرار داد می کنیم که ∞ روی هر خط موازی با محور y ها ، و فقط روی همین خط ها، قرار دارد! به این ترتیب ایـن خـط هـا دیگر موازی نیستند و همدیگر را دقیقا در یک نقطه (∞) قطع می کنند. علاوه بر این دیگر بـه کـار بـردن شـهود در مورد ∞ ممکن نیست، چون ∞ هم در بالای صفحه است و هم در پایین! مجموعه ی نقاط منحنی به همـراه ∞ را M می نامیم. برای دو نقطه ی A و B در M، خط گذرنده از A و B را در نظر می گیـریم. اگـر ایـن خـط از نقطـه ی سومی از M گذشت، قرینه ی آن نقطه نسبت به محور x ها را با $A*B$ نشان می دهیم. اگر روی خـط مـورد نظـر نقطه ی دیگری از M نبود ولی در یکی از نقاط A و B خط بر منحنی مماس بود، نقطـه ی برخـورد سـوم را همـان محل تماس فرض کنید. در ضمن تعریف می کنیم $\infty*\infty=\infty$. می توان نشان داد که $A*B$ همواره تعریف می شـود و در تعریف آن ابهامی نیست (یعنی هیچ خطی M را در ۴ نقطه قطع نمی کند). به علاوه مـی تـوان نـشان داد کـه $A*(B*C)=(A*B)*C$. توجه کنید که وصل کردن A به A با یک خط، یعنی رسم مماس بر منحنی در نقطـه ی A . همچنین تعریف می کنیم که $A^n = \underbrace{A * A * \cdots * A}_{n}$.



۲۹) کدام گزینه غلط است؟

الف) عضو $E \in M$ وجود دارد به قسمی که برای هر $A \in M$ داریم $A*E=A$.

ب) برای هر $A,B \in M$، $X \in M$ وجود دارد که $A*X=B$.

ج) اگر $A*X=A*Y$ آن گاه $X=Y$.

د) معادله ی $X*X=\infty$ به جز ∞، دقیقا یک جواب دیگر دارد.

ه) هیچ کدام

۳۰) فرض کنید $U=Q*S$ و $N=V*P$ که $P=(-۱،۰)$. کدام گزینه غلط است؟

الف) NS بر منحنی مماس است.

ب) مماس بر منحنی در Q از $U*P$ می گذرد.

ج) $S=(U*P)*T$.

د) تنها یک خط عمودی مماس بر منحنی وجود دارد.

ه) اگر $A^{۷}=A^{۱۱}$ و $A^{۱۵}=A^{۲۰}$، آن گاه $A=\infty$.