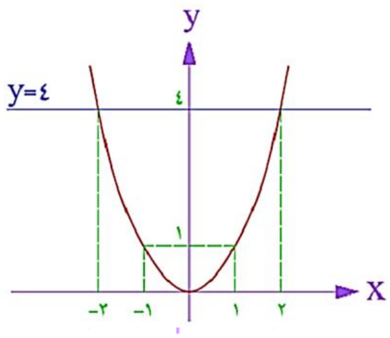
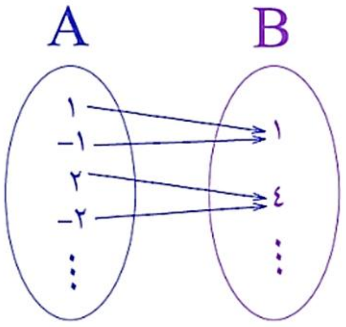
تابع یک به یک





تابع $\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = x^{۲} \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم

و مختصات چند نقطه از نمودار تابع

را بصورت زوج مرتب مشخص کرده

و آنرا رسم می‌کنیم $f = \{(-۱,۱),(۱,۱),(-۲,۴),(۲,۴),...\}$

ملاحظه می شود که **زوجهای مرتب متمایزی یافت می شوند که مؤلفه دوم آنها به هم مساویند.**

و **هر خط موازی محور x ها (مانند y=4) نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کرده است.**

تعریف: تابع f را یک به یک گوئیم هر گاه در زوجهای مرتب متمایز، مؤلفه های دوم هیچکدام با هم برابر نباشند.

به زبان ریاضی می توان نوشت: $(f(x_۱) = f(x_۲) \to x_۱ = x_۲)$ یا $(x_۱ \neq x_۲ \to f(x_۱) \neq f(x_۲))$

مثال 1) یک به یک بودن تابع $f(x) = \sqrt{۲x^۳ + ۵}$ را بررسی کنید.

مثال 2) اگر تابع $g = \{(۲m,a),(-۴,۲),(m,۳),(-۲,۳)\}$ یک به یک باشد، مقدار a را بیابید.

09144101130

تابع معکوس (وارون)

اگر در تابع f جای مولفه های اول و دوم زوج مرتب ها را عوض کنیم، رابطه جدیدی بوجود می آید

که به آن وارون تابع f گویند و با نماد f^{-1} نشان می دهند. یعنی: $(a,b)\in f \rightarrow (b,a)\in f^{-1}$

به زبان ریاضی می توان نوشت: $f=\{(x,y)\mid y=f(x)\} \Leftrightarrow f^{-1}=\{(y,x)\mid x=f^{-1}(y)\}$

نکته1: هر گاه وارون f خودش یک تابع باشد گوئیم f وارون پذیر است.

نکته2: شرط لازم و کافی برای اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد.

(وارون پذیر ⇔ یک به یک)

نکته3: اگر f و g دو تابع وارون پذیر باشند همواره داریم: $(fog)^{-1}=g^{-1}o\,f^{-1}$

مثال 1) آیا تابع $f=\{(۲,۴),(۳,۱),(۰,۲),(۵,۱)\}$ وارون پذیر است؟

تعریف: توابع f و g معکوس یکدیگر ند هر گاه دو شرط زیر برقرار باشند.

الف) $\forall x\in D_g : f(g(x)=x$

ب) $\forall x\in D_f : g(f(x)=x$

مثال 2) نشان دهید که توابع حقیقی f و g با ضابطه های زیر معکوس یکدیگرند.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

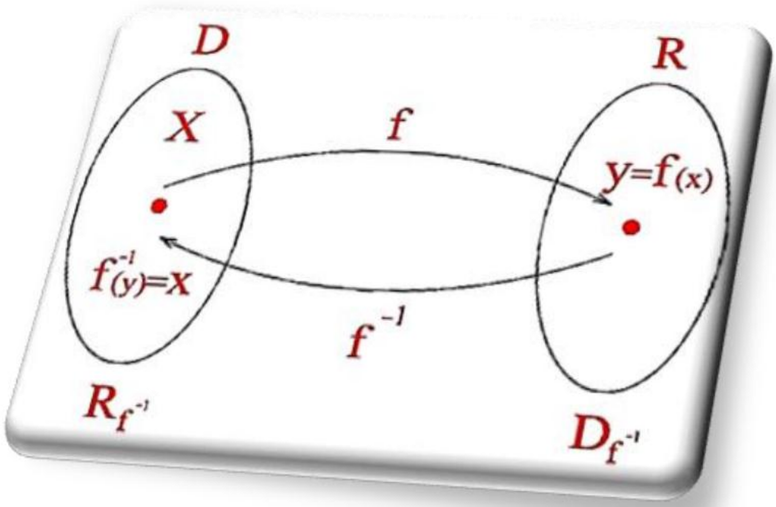
$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

مثال3) یک به یک بودن تابع $y=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ را بررسی کنید و در صورت وجود، ضابطه معکوس آن

را بنویسید.

نتیجه 1: دامنه f برابر است با برد f^{-1} و برد f برابر است با دامنهٔ f^{-1}

$$\begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \\ R_f = D_{f^{-1}} \end{cases}$$

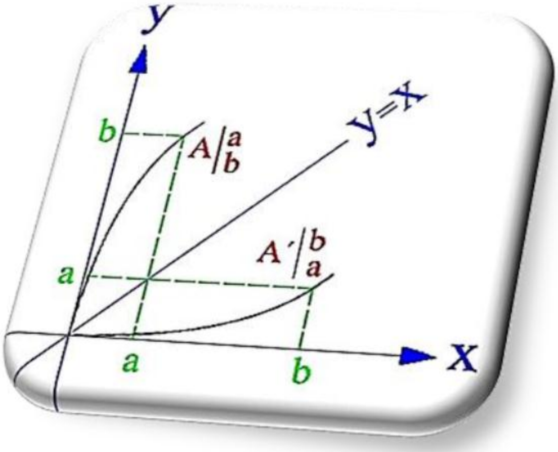


نتیجه 2: چون وارون تابع f (یعنی f^{-1}) با عوض کردن جای x و y حاصل می شود پس نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط y=x (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه یکدیگرند.

یعنی اگر A(a,b) روی نمودار f باشد

آنگاه $A'(b,a)$ روی نمودار f^{-1} خواهد بود

و **نقاط A',A نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند.**



روش بدست آوردن معکوس تابع

تابع $y=f(x)$ را در نظر گرفته و فرض می کنیم که f یک به یک باشد ابتدا x را نسبت به y محاسبه کرده، سپس در ضابطه جای x و y را عوض می کنیم و ضابطه تابع معکوس بدست می آید.

مثال 1) ثابت کنید $۰ \le x \le ۳$, $f(x)=\frac{۲}{۳}\sqrt{۹-x^{۲}}$ معکوس پذیر است و سپس ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

مثال2) یک به یک بودن تابع $y=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ را بررسی کنید و در صورت وجود، ضابطه معکوس آن را بنویسید.

مثال 3) ثابت کنید $۰\le x\le ۳$, $f(x)=\frac{۲}{۳}\sqrt{۹-x^۲}$ معکوس پذیر است و سپس ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

مثال 4) ثابت کنید تابع $f(x)=(x-۲)^۲$ ، $x\ge ۲$ یک به یک است. سپس ضابطه تابع معکوس تابع f را بنویسید.

مثال 5) در تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x+a}$ مقدار a را طوری بیابید که: $f=f^{-1}$

مثال 6) تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ مفروض است. اولاً: ثابت کنید تابع f معکوس پذیر است.

ثانیاً: ضابطه ی تابع معکوس تابع f ,$(f^{-۱})$ را بنویسید. ثالثاً: آیا دو تابع $f^{-۱}of, fof^{-۱}$ مساویند؟ چرا؟

مثال 7) ثابت کنید تابع $f(x)=x^۲+۱$ در بازه ی $(-\infty,۰]$ یک به یک است. سپس ضابطه ی تابع معکوس تابع f را تعیین کنید.