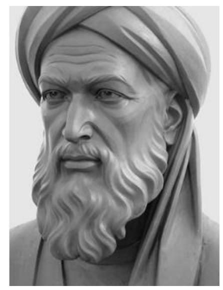
Contents

اهداف

پس از اینکه این فصل را به دقت بخوانی انتظار می‌رود:

-
- گویا بودن یا گنگ بودن یک عدد حقیقی را با توجه به نمایش اعشاری تشخیص دهید.
- گویا بودن یا گنگ بودن حاصل ترکیب اعداد حقیقی را با چهار عمل اصلی تشخیص دهید.
- قدر مطلق یک عدد حقیقی را بشناسید و کاربرد آن را بدانید.

مقدمه



(۲۲۹-۱۵۹ شمسی) محمد پسر موسی معروف به خوارزمی

"وقتی به آنچه که مردم را به حساب و کتاب می‌اندازد خوب می‌نگرم، در می‌یابم همیشه پای یک عدد در میان است"

بشر از وقتی به **شمردن** روی آورد در واقع با ساده‌ترین اعداد آشنا بوده است. این اعداد مجموعه‌ای است که کوچکترین عضو آن عدد یک است و **یکی بیشتر از هر عضوش** نیز در این مجموعه قرار دارد. این مجموعه را **مجموعه اعداد طبیعی** می‌نامند:

$$\mathbb{N} = \{۱, ۱+۱, ۱+۱+۱, ...\} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$$

با پیچیده‌تر شدن روابط تجاری و پیشرفت علوم، بشر نیاز پیدا کرد که **یکی کمتر از هر عددی** را نیز نشان دهد. به همین دلیل عدد **صفر** و **اعداد منفی** را به اعدادی که می‌شناخت اضافه کرد و به **مجموعه اعداد صحیح** رسید:

$$\mathbb{Z} = \{..., -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$$

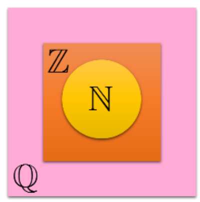
نیازهای روزمره انسان در زندگی مدرن او را وادار کرد تا به غیر از شمارش، کمیت‌هایی مانند طول، وزن و زمان را **اندازه‌گیری** کند. امّا برای اندازه‌گیری این کمیت‌ها، اعداد صحیح کافی نبودند و برای همین به **کسرها** روی آورد. مثلاً به ندرت پیش می‌آید وقتی طولی را اندازه می‌گیریم دقیقاً مساوی با عددی صحیح بر حسب واحد اندازه‌گیری باشد. به طور مثال برای اندازه‌گیری طول یک پارچه ممکن است مجبور شویم واحد را نصف کنیم تا با کنار هم قرار دادن ۳ تا از این نصفه‌ها طول پارچه کامل شود:

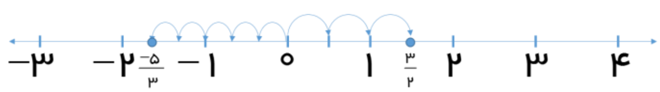
$$۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

در واقع اگر واحد را به b قسمت مساوی تقسیم کنیم و a تا از این قسمت‌ها را کنار هم بگذاریم به طولی با اندازهٔ $\frac{a}{b}$ می‌رسیم:

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{۱}{b}$$

همهٔ این اعداد و قرینه‌هایشان مجموعهٔ بزرگتری از اعداد را تشکیل می‌دهند که به آن مجموعه **اعداد گویا** می‌گویند.





اعداد گویا

در زندگی روزمره با اعداد صحیحی سر و کار داریم که برای مقایسهٔ آنها **اختلاف** یا **نسبت** دو عدد را درنظر می‌گیریم. مثلاً برای اینکه دمای هوای دو شهر را در یک روز مقایسه کنیم اختلاف این دو عدد را محاسبه می‌کنیم. ولی در یک مسابقهٔ تیراندازی اگر بهرام در ۳۰ بار شلیک ۱۲ بار به هدف بزند و هومان در ۲۰ بار شلیک ۹ بار به هدف بزند چگونه مهارت این دو نفر را مقایسه می‌کنیم؟ بهرام ۳ بار بیشتر به هدف زده است امّا هومان ماهرتر است. زیرا نسبت $\frac{۹}{۲۰}$ بزرگتر از نسبت $\frac{۱۲}{۳۰}$ است.

نکته

مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم که از ابتدای کلمهٔ Quotient به معنای **خارج قسمت** یک تقسیم گرفته شده است.
مجموعه اعداد گویا برابر با نسبت هر دو عدد صحیح است به شرط آنکه مخرج صفر نباشد:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\right\}$$

مثال

کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با مجموعه اعداد گویا <u>نیست</u>؟

۱) $\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{-a}{b}\,\middle|\,a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}\right\}$

۳) $\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\right\}$ ۴) همهٔ گزینه‌ها

پاسخ:

اگر مخرج یک عدد گویا، منفی باشد می‌توانیم با قرینه کردن صورت و مخرج به عدد گویای برابری برسیم که مخرج آن مثبت است. مثلاً:

$$\frac{۲}{-۵}=\frac{(-۱)\times ۲}{(-۱)\times -۵}=\frac{-۲}{۵}$$

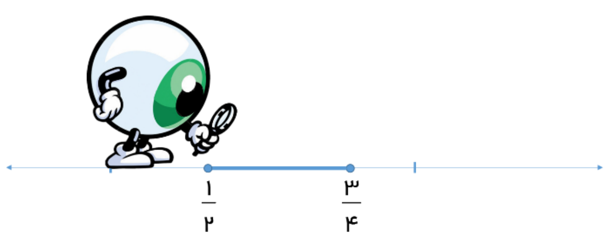
و چون مخرج یک عدد گویا صفر نیست، پس مخرج هر عدد گویا را می‌توان همیشه مثبت فرض کرد که عضو $\mathbb{N}$ است. پس گزینهٔ (۱) برابر با مجموعه اعداد گویا است. از طرفی قرینهٔ هر عدد صحیح نیز عددی صحیح است. پس گزینهٔ (۲) نیز مساوی با مجموعه اعداد گویا است. امّا در گزینهٔ (۳) مقدار a که صورت یک کسر را نشان می‌دهد عضو $\mathbb{N}$ است و نمی‌تواند صفر باشد. پس هیچ کسری در گزینهٔ (۳) مساوی با صفر نیست؛ در حالیکه صفر عضو اعداد گویا است. پس گزینهٔ (۳) زیرمجموعه‌ای از اعداد گویا است که با آن برابر نیست. گزینهٔ (۳) درست است.

ریاضیدانان از همان ابتدا یکی از ویژگی‌های اعداد گویا را کشف کرده بودند که نکتهٔ مهمی به شمار می‌آید.

نکته

بین هر دو عدد گویای مختلف تعداد بی‌پایانی عدد گویای دیگر وجود دارد.

به طور مثال نشان می‌دهیم که بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۴}$ تعداد بی‌پایانی عدد گویای مختلف وجود دارد.

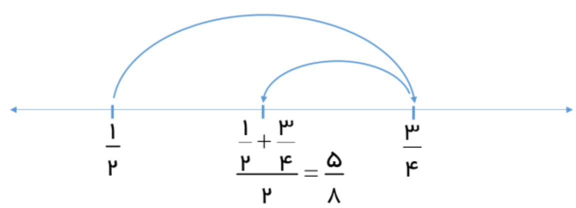


روش اول: این دو عدد گویا را با یک مخرج مشترک نمایش می‌دهیم. ۴ یک مخرج مشترک است و $\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$. امّا چون صورت دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۴}$ اعدادی متوالی هستند، پس کسری با صورت صحیح و مخرج ۴ بین این دو کسر نمی‌توان پیدا کرد. ولی جای نگرانی نیست؛ چون می‌توان این دو کسر را با مخرج مشترک بزرگتر یعنی مضارب دیگر ۴ نوشت. مثلاً اگر این دو کسر را با مخرج ۸ بنویسیم می‌توانیم کسر $\frac{۵}{۸}$ را پیدا کنیم:

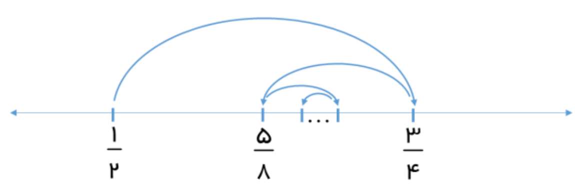
$$\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{۸}<\boxed{\frac{۵}{۸}}<\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

و با مخرج ۱۲ اعداد $\frac{۶}{۱۲}<\boxed{\frac{۷}{۱۲},\frac{۸}{۱۲}}<\frac{۹}{۱۲}$ و با مخرج ۱۶ اعداد $\frac{۸}{۱۶}<\boxed{\frac{۹}{۱۶},\frac{۱۰}{۱۶},\frac{۱۱}{۱۶}}<\frac{۱۲}{۱۶}$ را پیدا می‌کنیم. پس با بزرگتر شدن مخرج مشترک کسرهای بیشتری را پیدا خواهیم کرد که نشان می‌دهد تعداد این کسرها بی‌پایان است.

روش دوم: می‌دانیم میانگین هر دو عدد مختلف عددی است که بین آن دو عدد قرار دارد و خوشبختانه میانگین هر دو عدد گویا همیشه عددی گویا است.



حالا میانگین $\frac{۵}{۸}$ و $\frac{۳}{۴}$ کسر گویای دیگری است که بین این دو عدد قرار دارد و در نتیجه بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۴}$ نیز هست. پس با همین الگو می‌توانیم بیشتر از هر تعداد دلخواهی عدد گویای مختلف پیدا کنیم.

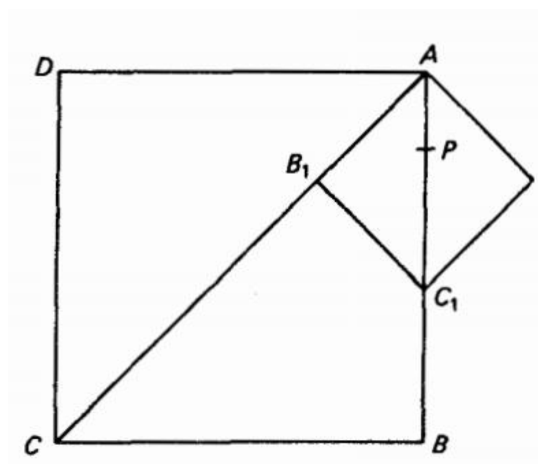


امّا کشف این حقیقت که بین هر دو عدد گویای مختلف بی‌نهایت عدد گویای دیگر وجود دارد، ریاضیدانان اولیه را به اشتباه انداخت. چون تعداد نقاط روی یک پاره خط نیز همانند تعداد اعداد گویا بی‌پایان است، آنها خیال کردند پس هر نقطه باید عددی گویا باشد و در نتیجه به همهٔ اعداد دست یافته‌اند.

تا اینکه یونانی‌ها حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد حضرت مسیح کشف کردند که اعداد گویا برای هدف‌های علم هندسه کافی نیست. آنها به یک کشف تکان دهنده دست پیدا کرده بودند. ریاضیدانان یونانی با شگفتی و نومیدی دریافتند که اگر واحد اندازه گیری را هر اندازهٔ دلخواهی درنظر بگیرند امکان ندارد هم ضلع و هم قطر یک مربع عددی گویا بر حسب آن واحد باشد. کشف چنین طول‌هایی موجب شد تا بیشتر به مطالعهٔ ویژگی‌های اعداد گویا پرداخته شود و نقاط بسیار دیگری روی محور اعداد کشف شوند که گویا نیستند.

بیشتر بدانیم

برهان دیگری از گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را به شیوهٔ هندسی و با نشان دادن اینکه ضلع و قطر هرمربع نامتوافق‌اند، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. فـرض کنید خلاف این مطلب درست باشد. در این صورت، مطابق این فرض، قطعه خطی مانند AP وجود دارد (نگاه کنید به شکل ۱۵) به طوری که هم‌قطـر AC و هم ضلع AB از مربع $ABCD$ مضارب صحیحی از APاند؛ یعنی AC و AB نسبت به AP متوافق‌اند. روی AC، $CB_1 = AB$ را جدا کرده و B_1C_1 را عمود بر CA رسم کنید. می‌توان به آسانی ثابت کرد که $AB_1 = C_1B_1 = C_1B$. در این صورت $AC_1 = AB - AB_1$ و AB_1 نسبت به AP متوافق‌اند. اما AC_1 و AB_1 قطر و ضلع مربعی با ابعادی کوچکتر از نصف ابعاد مربع اصلـی‌اند. نتیجه می‌شود که با تکرار این عمل می‌توانیم مربعی به‌دست آوریم که قطر آن، AC_n، و ضلع آن AB_n نسبت به AP متوافق‌اند، $AC_n < AP$. این امر محال، قضیه را ثابت می‌کند.



روی اعداد گویا قدم بزنیم!

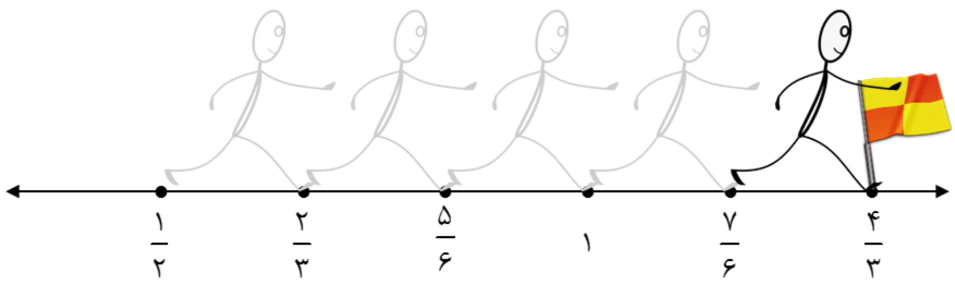
فرض کنید روی عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ ایستاده‌اید و می‌خواهید با گام‌هایی برابر روی محور اعداد قدم بزنید تا به عدد $\frac{۴}{۳}$ برسید.

اندازهٔ هر گام چقدر باید باشد تا گام پنجم روی عدد $\frac{۴}{۳}$ قرار بگیرد؟ فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ تا $\frac{۴}{۳}$ برابر با حاصل تفاضل $\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۲}=\frac{۸-۳}{۶}=\frac{۵}{۶}$ است. حالا با تقسیم $\frac{۵}{۶}$ بر ۵ اندازهٔ هر گام بدست می‌آید:

$$\frac{۵}{۶}\div ۵=\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۶}$$

پس ردّ پای شما روی اعداد زیر قرار می‌گیرد:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۴}{۶}=\boxed{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{۴}{۶}+\frac{۱}{۶}=\boxed{\frac{۵}{۶}} \Rightarrow \frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۶}=\boxed{۱} \Rightarrow ۱+\frac{۱}{۶}=\boxed{\frac{۷}{۶}} \Rightarrow \frac{۷}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۸}{۶}=\boxed{\frac{۴}{۳}}$$



نکته

- اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویا باشند آنگاه $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ و $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ و $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$.
- اگر $\frac{c}{d}\neq ۰$ آنگاه $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}\in\mathbb{Q}$.
- اگر $a\in\mathbb{Z}$ آنگاه $a=\frac{a}{۱}\in\mathbb{Q}$. پس $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$.

مثال

کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $\frac{x}{y}$ عددی گویا باشد حتماً x و y دو عدد صحیح هستند.

ب) اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ آنگاه $a\times d < b\times c$ و برعکس.

پاسخ:

گزارهٔ (الف) نادرست است. مثلاً با فرض اینکه $x = \frac{۴}{۳}$ و $y = \frac{۲}{۵}$ آنگاه این دو عدد غیر صحیح هستند؛ در حالیکه:

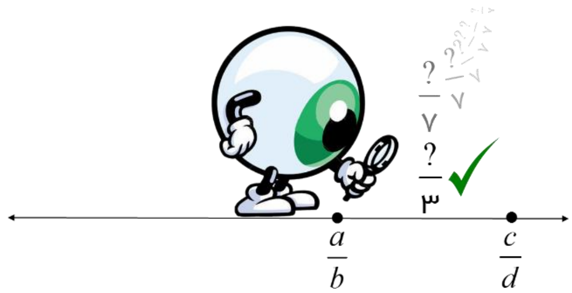
$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۲}{۵}} = \frac{۴}{۳}\times\frac{۵}{۲} = \frac{۲۰}{۶} \in \mathbb{Q}$$

گزارهٔ (ب) نیز نادرست است. مثلاً $\frac{۴}{۳} < \frac{۱}{-۲}$ ؛ درحالیکه $۴\times -۲ < ۳\times ۱$ نتیجهٔ نادرستی است. این مثال نقض نشان می‌دهد برای مقایسهٔ دو کسر، طرفین وسطین کردن همیشه درست نیست. شرط استفاده از طرفین وسطین این است که هر عدد گویا را برابر با کسری بنویسیم که مخرج آن مثبت باشد. حالا با دانستن اینکه $\frac{-۱}{۲} = \frac{۱}{-۲}$ آنگاه $\frac{۴}{۳} < \frac{-۱}{۲}$ به درستی $-۱\times ۳ < ۲\times ۴$ را نتیجه می‌دهد.

مهران و مهدی در حال قدم زدن روی اعداد گویا هستند. اگر هر عدد گویا را برابر با کسری در نظر بگیریم که صورت و مخرج آن عددی صحیح است، مهران روی اعداد گویا با مخرج ۷ و مهدی روی اعداد گویا با مخرج ۳ قدم می‌زنند. گام‌های کدامیک از این دو نفر بزرگتر است؟

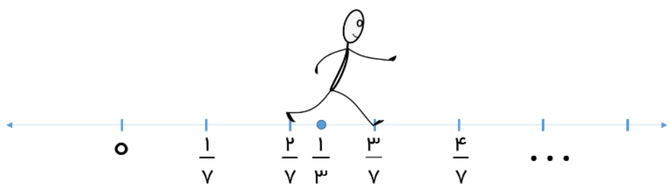
مهران روی اعداد گویا به شکل $\frac{a}{۷}$ (مثلاً $\frac{۴}{۷}$) قدم می‌زند. با دانستن اینکه $\frac{a}{۷} = a\times\frac{۱}{۷}$ ($\frac{۴}{۷} = ۴\times\frac{۱}{۷}$) پس اندازهٔ هر گام مهران $\frac{۱}{۷}$ است. با همین استدلال اندازهٔ هر گام مهدی $\frac{۱}{۳}$ است. پس گام‌های مهدی بزرگتر از گام‌های مهران است. همین واقعیت ساده نشان می‌دهد بین هر دو عدد گویا با صورت صحیح و مخرج ۳ (بین دو ردّ پای مهدی) حداقل یک عدد گویا با صورت صحیح و مخرج ۷ (یک ردّ پای مهران) وجود دارد.

آیا می‌توان دو عدد گویا پیدا کرد که بین آنها ردّ پایی از مهدی وجود داشته باشد؛ امّا هیچ ردّ پایی از مهران بین آن دو عدد وجود نداشته باشد؟



بدیهی است بین دو ردّ پای متوالی مهران هیچ کسر دیگری با صورت صحیح و مخرج ۷ وجود ندارد. پس گام‌های خود مهران می‌تواند گزینهٔ خوبی برای پاسخ مسئله باشد. مثلاً بین $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۳}{۷}$ هیچ ردّ پای دیگری از مهران وجود ندارد ولی عدد گویایی با صورت صحیح و مخرج ۳ وجود دارد:

$$\frac{۲}{۷} < \frac{۱}{۳} < \frac{۳}{۷}$$



تست

کسرهای زیر با هم مساوی هستند. چند تا از این جاهای خالی برابر با یک عدد صحیح هستند؟

$$\frac{\square}{۵۱} = \frac{\square}{۵۲} = \frac{\square}{۵۳} = \frac{۴۵}{۵۴} = \frac{\square}{۵۵} = \frac{\square}{۵۶} = \frac{\square}{۵۷} = \cdots = \frac{\square}{۱۰۰}$$

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۷

نمایش اعشاری اعداد گویا

اعداد اعشاری مختوم (پایان دار)

هر عدد گویا برابر با نسبت دو عدد صحیح است. با تقسیم اعشاری صورت بر مخرج می‌توانیم نمایش اعشاری یک کسر گویا را بدست آوریم. مثلاً نمایش اعشاری عدد گویای $\frac{۱۳}{۴}$ از تقسیم اعشاری ۱۳ بر ۴ بدست می‌آید:

۱۳ | ۴

-۱۲ ۳/۲۵ $\Rightarrow \quad \frac{۱۳}{۴} = ۳/۲۵$

۱۰

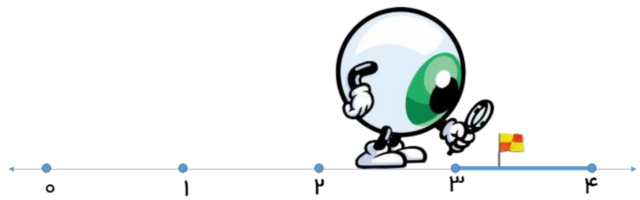
-۸

۲۰

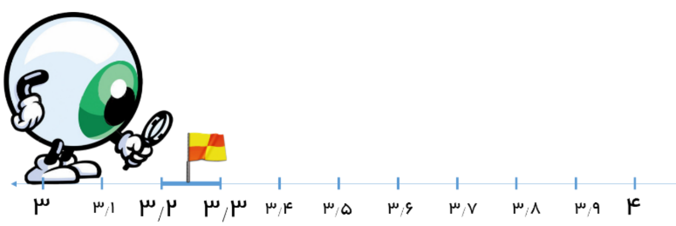
-۲۰

۰

نمایش اعشاری ۳/۲۵ در حقیقت یک آدرس برای رسیدن به $\frac{۱۳}{۴}$ است. مقدار صحیح این عدد که مساوی با ۳ است به ما نشان می‌دهد که نقطهٔ ۳/۲۵ روی پاره خط واصل ۳ و ۴ قرار دارد:



فاصلهٔ بین ۳ تا ۴ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که به این مرحله **ده پارهٔ اول** می‌گوییم. یعنی اندازهٔ هر قسمت در ده پارهٔ اول برابر با $\frac{۱}{۱۰}$ است. رقم اول قسمت اعشاری در عدد ۳/۲۵ که برابر با ۲ است به ما نشان می‌دهد برای رسیدن به عدد مورد نظر باید ۲ قسمت از ده پارهٔ اول را پشت سر بگذاریم.



در مرحلهٔ دوم، فاصلهٔ بین ۳/۲ و ۳/۳ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که به آن **ده پارهٔ دوم** می‌گوییم. بنابراین اندازهٔ هر قسمت در ده پارهٔ دوم مساوی با $\frac{۱}{۱۰} \div ۱۰ = \frac{۱}{۱۰۰}$ است. رقم دوم قسمت اعشاری عدد ۳/۲۵ که برابر با ۵ است به ما نشان می‌دهد برای رسیدن به مقصد باید ۵ قسمت از ده پارهٔ دوم را پشت سر بگذاریم. چون رقم سوم اعشار به بعد همگی صفر هستند پس به مقصد یا همان عدد ۳/۲۵ رسیده‌ایم:

اگر در قسمت اعشاری یک عدد رقمی وجود داشته باشد که همهٔ ارقام بعد از آن صفر باشند، آن را عدد اعشاری مختوم (پایان دار) می‌گویند. مثلاً:

- ارقام اعشاری عدد ۱۴۰۰ که برابر با ...۱۴۰۰٫۰۰۰۰ است از رقم اول به بعد همگی صفر هستند.
- ارقام اعشاری عدد ۲۰٫۲ که برابر با ...۲۰٫۲۰۰۰۰ است از رقم دوم به بعد همگی صفر هستند.
- ارقام اعشاری عدد ۱٫۰۷۸ از رقم چهارم به بعد همگی صفر هستند.

نکته

هر عدد اعشاری مختوم عددی گویا است. برای پیدا کردن نمایش کسری آن کافی است ممیّز را حذف کنیم و عدد حاصل را در صورت کسر بنویسیم. سپس به تعداد رقم‌های اعشار، عدد ۱۰ را در مخرج ضرب کنیم.

مثال

نمایش کسری اعداد ۴۷ ، ۱۲٫۴ ، ۰٫۰۳۲۰۰ ، ۰٫۷۷۵− را پیدا کنید.

پاسخ:

۱) $۴۷ = \frac{۴۷}{۱۰^{۰}} = \frac{۴۷}{۱}$

۲) $۱۲٫۴ = \frac{۱۲۴}{۱۰} = \frac{۶۲}{۵}$

۳) $۰٫۰۳۲۰۰ = ۰٫۰۳۲ = \frac{۳۲}{۱۰\times۱۰\times۱۰} = \frac{۴}{۱۲۵}$

۴) $-۰٫۷۷۵ = -\frac{۷۷۵}{۱۰^{۳}} = -\frac{۳۱}{۴۰}$

فهمیدیم یک عدد اعشاری مختوم با کسری برابر است که صورت آن صحیح و مخرج آن توانی از ۱۰ است که فقط بر اعداد اول ۲ و ۵ قابل قسمت است. بنابراین پس از ساده کردن، مخرج این کسر به عدد اولی غیر از ۲ و ۵ قابل قسمت نخواهد بود.

نکته

فرض کنید x و A دو عدد صحیح باشند که کسر گویای $\frac{x}{A}$ ساده شدنی نیست. فقط وقتی نمایش اعشاری عدد گویای $\frac{x}{A}$ مختوم است که A به غیر از ۲ یا ۵ به عدد اول دیگری قابل قسمت نباشد.

مثال

الف) نمایش اعشاری $\frac{۳۱۵}{۳۰۰}$ مختوم است. زیرا با ساده کردن صورت و مخرج می‌فهمیم $\frac{۱۰۵}{۱۰۰}=\frac{۳۱۵}{۳۰۰}$ که مخرج شمارندهٔ اولی غیر از ۲ و ۵ ندارد. در واقع $۱/۰۵=\frac{۳۱۵}{۳۰۰}$.

ب) نمایش اعشاری $\frac{۵۱}{۱۲۰}$ مختوم است. زیرا $\frac{۱۷}{۴۰}=\frac{۵۱}{۱۲۰}$ و عدد ۴۰ شمارندهٔ اولی غیر از ۲ و ۵ ندارد. اگر عدد $۴۰=۲^{۳}\times ۵^{۱}$ را در $۵^{۲}$ ضرب کنیم حاصل برابر با $۱۰^{۳}=۵^{۳}\times ۲^{۳}$ می‌شود که توانی از ۱۰ است. پس صورت و مخرج را در ۲۵ ضرب می‌کنیم: $\frac{۴۲۵}{۱۰۰۰}=\frac{۱۷\times ۲۵}{۴۰\times ۲۵}$ که نشان می‌دهد $۰/۴۲۵=\frac{۵۱}{۱۲۰}$.

اعداد اعشاری متناوب

عدد گویای $\frac{۴۱}{۲۲}$ ساده شدنی نیست و مخرج آن به غیر از ۲ و ۵ به عدد اول ۱۱ بخش پذیر است. پس نمایش اعشاری $\frac{۴۱}{۲۲}$ نمی‌تواند مختوم باشد ولی جالب اینجاست که با ادامهٔ تقسیم رقم‌های اعشاری به طور متناوب تکرار می‌شوند.

$$\begin{array}{r|l} ۴۱ & ۲۲ \\ \hline \underline{۲۲} & ۱/۸۶۳۶۳۶۳۶۳... \\ \vdots & \end{array}$$

وقتی تقسیم به قسمت اعشاری می‌رسد، در هر مرحله باقیمانده باید کمتر از مقسوم علیه یا همان ۲۲ باشد. یعنی برای پیدا کردن هر رقم در خارج قسمت، باقیمانده یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ... و یا ۲۱ است. چون $\frac{۴۱}{۲۲}$ مختوم نیست باقیمانده در هیچ مرحله‌ای نمی‌تواند صفر باشد. در نتیجه باقیمانده یکی از اعداد ۱، ۲، ... و یا ۲۱ است که اگر در هر مرحله از تقسیم باقیمانده‌ها را یادداشت کنیم حداکثر ۲۱ باقیماندهٔ مختلف می‌بینیم. پس حداکثر در تقسیم ۲۲اُم باقیمانده باید تکراری باشد. البته ممکن است زودتر به یک باقیماندهٔ تکراری برسیم. از طرفی هر رقم اعشار متناظر با باقیمانده‌ای است که در هر مرحله بدست می‌آید. پس بعد از چند مرحله از تقسیم ارقام قسمت اعشاری نیز باید تکرار شوند:

$$\begin{array}{r|l} ۴۱ & ۲۲ \\ \cline{2-2} \underline{۲۲} & ۱٫۸۶۳ \\ ۱۹۰ & \\ \underline{۱۷۶} & \\ ۱۴۰ & \\ \underline{۱۳۲} & \\ ۸۰ & \\ \underline{۶۶} & \\ ۱۴ & \end{array}$$

در تقسیم بالا چون باقیماندهٔ ۱۴ تکرار شده است پس خارج قسمت نیز باید به رقم‌های اعشاری تکراری برسد. در این نمایش اعشاری، رقم‌های تکراری را زیر یک پاره خط می‌نویسیم و به آن دورهٔ تناوب می‌گوییم:

$$\frac{۴۱}{۲۲} = ۱٫۸۶۳۶۳۶۳... = ۱٫۸\overline{۶۳}$$

نکته

فرض کنید صورت و مخرج کسر $\frac{x}{B}$ دو عدد صحیح است که ساده شدنی نیست. اگر B به عدد اولی به غیر از ۲ و ۵ بخش پذیر باشد، آنگاه نمایش اعشاری $\frac{x}{B}$ نامختوم (بی پایان) است و **دورهٔ تناوب** دارد. به نمایش اعشاری این اعداد، **متناوب** می‌گوییم.

مثال

الف) $\frac{۵}{۲۷} = ۰٫۱۸۵۱۸۵۱۸۵۱۸۵... = ۰٫\overline{۱۸۵}$

ب) $\frac{۵}{۲۴} = ۰٫۲۰۸۳۳۳۳۳... = ۰٫۲۰۸\overline{۳}$

نکته

نمایش اعشاری یک عدد گویا مختوم (پایان‌دار) است یا نامختوم و دارای تناوب است.

می‌خواهیم عدد اعشاری $x = ۱٫\overline{۶}$ را روی محور اعداد پیدا کنیم. دقت کنید که $۱٫\overline{۶}$ بزرگتر از ۱٫۶ است. زیرا هر رقم اعشار در عدد $۱٫\overline{۶}$ مساوی با ۶ است؛ درحالیکه در ۱٫۶ قسمت اعشاری از رقم دوم به بعد همگی صفرند. در واقع:

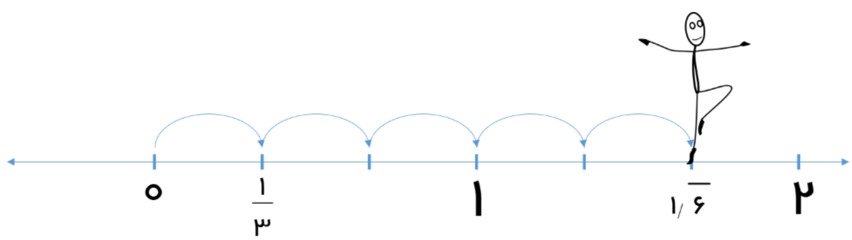
$$۱٫۶۰۰۰۰... < ۱٫۶۶۶۶۶۶۶.....$$

هرگز نمی‌توان از روش «ده پاره‌ها» برای نمایش $۱/\overline{۶}$ استفاده کرد. زیرا نمایش اعشاری این عدد نامختوم است و مراحل ده‌پاره‌ها تمام نمی‌شود که به مقصد برسیم. امّا نکتهٔ جالب و خبر خوش این است که هر عدد اعشاری متناوب برابر با یک کسر گویا است که برای پیدا کردن آن روی محور کار را ساده می‌کند. در ادامه روش پیدا کردن این کسر را می‌بینید.

می‌دانیم $۱۰x = ۱۰\times ۱/\overline{۶} = ۱۶/\overline{۶}$. دو عدد $x = ۱/\overline{۶}$ و $۱۰x = ۱۶/\overline{۶}$ قسمت اعشاری برابر دارند. بنابراین بدون اینکه لازم باشد عملیات تفریق را از سمت راست‌ترین رقم اعشار شروع کنیم، قسمت اعشاری آنها در عمل تفریق با هم ساده می‌شوند:

$$۱۰x - x = ۱۶/\overline{۶} - ۱/\overline{۶} = ۱۶ - ۱ = ۱۵$$
$$\Rightarrow ۹x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳}$$

بنابراین برای پیدا کردن $۱/\overline{۶}$ کافی است از مبدأ شروع به قدم زدن با گام‌هایی به طول $\frac{۱}{۳}$ کنیم. گام ۵اُم روی عدد $۱/\overline{۶} = \frac{۵}{۳}$ قرار می‌گیرد:



مثال

نمایش کسری عدد گویای $y = ۱/۳\overline{۱۲}$ را پیدا کنید.

گام یک. عدد y را در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و یا ... ضرب می‌کنیم تا قسمت اعشاری فقط شامل رقم‌های تکراری باشد:

$$۱۰y = ۱۳/\overline{۱۲}$$

این گام ممکن است برای بعضی از اعداد اعشاری متناوب لازم نباشد. زیرا ممکن است دورهٔ تناوب بلافاصله بعد از ممیّز قرار گرفته باشد.

گام دو. خروجی گام قبل را طوری در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و یا ... ضرب می‌کنیم که قسمت اعشاری عدد حاصل با قسمت اعشاری عدد گام قبل یکسان شود:

$$۱۰y \times ۱۰۰ = ۱۳۱۲/\overline{۱۲}$$

گام سه. خروجی گام یک را از خروجی گام دو کم می‌کنیم:

$$۱۰۰۰y - ۱۰y = ۱۳۱۲/\overline{۱۲} - ۱۳/\overline{۱۲} = ۱۲۹۹$$

گام چهار. با حل کردن معادلهٔ گام سه، کسر گویایی برای y بدست می‌آید:

$$۹۹۰y = ۱۲۹۹ \Rightarrow y = \frac{۱۲۹۹}{۹۹۰} = \frac{۴۳۳}{۳۳۰}$$

فعالیت

نمایش کسری اعداد گویای زیر را پیدا کنید.

الف) $۲/\overline{۳}$ ب) $۳/۱\overline{۲۰}$ پ) $۱/\overline{۹}$

تست

کدام یک از جملات زیر درست است؟

الف) حاصلضرب هر دو عدد اعشاری متناوب، یک عدد اعشاری متناوب است.

ب) حاصلجمع هر دو عدد اعشاری متناوب، یک عدد اعشاری متناوب است.

ج) معکوس یک عدد اعشاری متناوب، یک عدد اعشاری متناوب است.

۱) الف و ب ۲) الف و ج ۳) ب و ج ۴) هیچکدام

پاسخ:

جملهٔ (الف) نادرست است. مثلاً نمایش اعشاری $\frac{۷}{۳}$ و $\frac{۳}{۷}$ که هر دو متناوب هستند؛ ولی حاصلضرب آنها مساوی با عدد مختوم ...۱/۰۰۰ است.

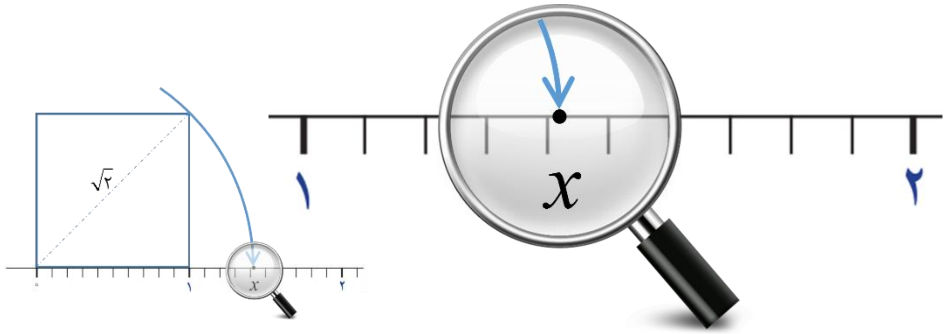
جملهٔ (ب) نادرست است. مثلاً نمایش اعشاری $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۳}$ هر دو متناوب هستند؛ ولی حاصلجمع آنها مساوی با عدد مختوم ۱ است.

جملهٔ (ج) نادرست است. مثلاً نمایش اعشاری $\frac{۲}{۳}$ متناوب است؛ ولی معکوس آن مساوی با عدد مختوم $۱/۵ = \frac{۳}{۲}$ است.

پس گزینهٔ ۴ درست است.

اعداد گنگ

در شکل زیر یک مربع به ضلع واحد می‌بینید که یک رأس آن روی عدد صفر و رأس مجاور آن روی عدد ۱ قرار دارد. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ قطر این مربع باز می‌کنیم و سوزن پرگار را روی عدد ۰ قرار می‌دهیم. کمان رسم شده قسمت مثبت محور اعداد را در نقطه‌ای به نام x قطع می‌کند.



با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می‌دانیم اندازهٔ قطر این مربع مساوی با $\sqrt{۲}$ است. پس $x=\sqrt{۲}$. آیا نقطهٔ x نمایش عددی گویا است؟ در ادامه ثابت خواهیم کرد که چنین نیست و $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست:

(**برهان خُلف**) فرض کنیم این درست است که $\sqrt{۲}$ عددی گویا است. بنابراین $\sqrt{۲}$ برابر با نسبت دو عدد صحیح است که بعد از ساده کردنِ صورت و مخرج، برابر با $\frac{a}{b}$ شده است. یعنی a و b دو عدد صحیح هستند که در تجزیه به اعداد اول هیچ عامل مشترکی ندارند. اگر طرفین تساوی زیر را به توان ۲ برسانیم:

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b} \Rightarrow \left(\sqrt{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{a}{b}\right)^{۲} \Rightarrow ۲=\frac{a^{۲}}{b^{۲}} \Rightarrow \boxed{۲b^{۲}=a^{۲}}$$

$۲b^{۲}$ مضرب ۲ است. پس با توجه به تساوی اخیر $a^{۲}$ نیز باید مضرب ۲ باشد. بنابراین حاصلضرب عدد a در خودش باید زوج باشد. پس خود عدد a باید زوج باشد.

نتیجهٔ شمارهٔ یک: a مضرب ۲ است.

حالا با دانستن اینکه $a=۲n$ نتیجه می‌گیریم:

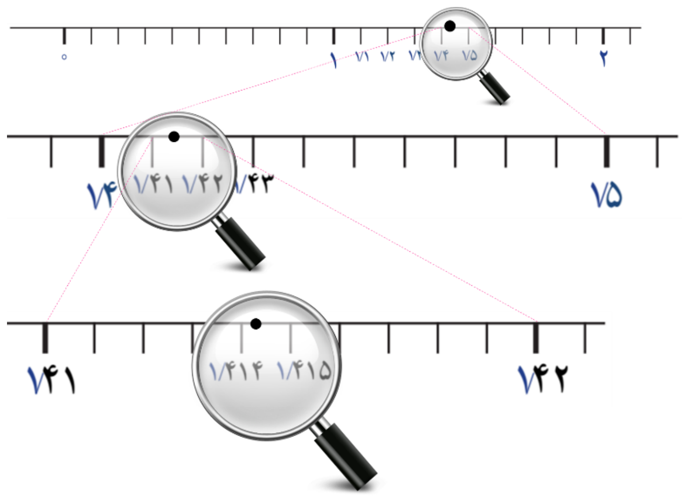
$$۲b^{۲}=a\times a=۲n\times ۲n=۴n^{۲} \quad \Rightarrow \quad b^{۲}=۲n^{۲}$$

که همانند قبل نشان می‌دهد b زوج است.

نتیجهٔ شمارهٔ دو: b مضرب ۲ است.

نتیجهٔ شمارهٔ یک و دو ما را با یک تناقض روبرو کرده است؛ زیرا از ابتدا فرض کرده بودیم که a و b عامل مشترکی ندارند. پس فرض اول ما در مورد گویا بودن $\sqrt{۲}$ اشتباه است.

هر نقطه روی محور اعداد متناظر با یک عدد است که نمایشی اعشاری دارد. $\sqrt{۲}$ نیز یک نمایش اعشاری دارد که این نمایش اعشاری را می‌توان به روش «ده پاره‌ها» پیدا کرد. مثلاً با توجه به شکل زیر نمایش اعشاری $\sqrt{۲}$ تا سه رقم اعشار برابر با ۱٫۴۱۴ است:



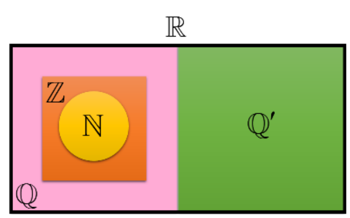
با ادامه دادن «ده پاره‌ها» می‌توان هر رقم اعشار را برای این عدد پیدا کرد. نمایش اعشاری $\sqrt{۲}$ نمی‌تواند مانند اعداد گویا مختوم یا متناوب باشد. بنابراین نمایش اعشاری $\sqrt{۲}$ باید غیرمتناوب باشد:

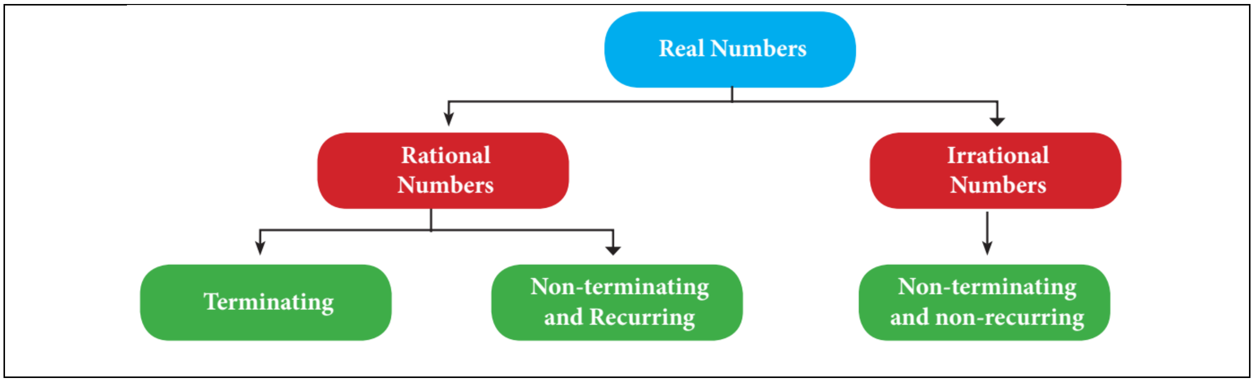
$$\sqrt{۲}=\text{۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۰۹۵۰۴۸۸۰۱۶۸۸۷۲۴۲۰۹۶۹۸۰۷۸۵۶۹۶۷۱۸۷۵۳۷۶۹۴۸۰۷...}$$

نکته

به هر نقطه روی محور اعداد که متناظر با عدد گویایی نباشد، عددی **گنگ** می‌گوییم. مجموعهٔ اعداد گنگ را با $\mathbb{Q}'$ (بخوانید کیو پریم) نشان می‌دهیم. به اجتماع همهٔ اعداد گویا و همهٔ اعداد گنگ که همهٔ نقاط روی محور اعداد را تشکیل می‌دهند، مجموعه اعداد **حقیقی** می‌گوییم و با $\mathbb{R}$ (اختصاری از کلمهٔ Real به معنی حقیقی) نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$$





نکته

اگر $n \in \mathbb{N}$ مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است.

مثال

الف) عدد π که برابر با نسبت اندازهٔ محیط دایره به قطر آن است عددی گنگ است. اثبات گنگ بودن π از محدودهٔ دانش این کتاب خارج است. نکتهٔ مهم این است که دنبالهٔ $\pi^۲$، $\pi^۳$، $\pi^۴$، ... نیز همگی گنگ هستند.

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰۵...$$

پ) عدد x با الگویی که در قسمت اعشاری آن می‌بینید یک عدد حقیقی است:

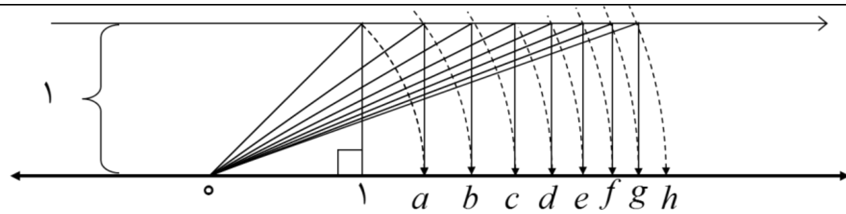
$$x = ۱/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰۰۰۲۰۰۰۰۰۲...$$

با این حال که قسمت اعشاری الگو دارد ولی این الگو متناوب نیست و رقم‌ها تکرار نمی‌شوند. پس x یک عدد گنگ است.

د) $\sqrt{۱/۴۴}$ عددی گویا است. زیرا $\sqrt{۱/۴۴} = \sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{۱۴۴}}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{۱۲}{۱۰} = ۱/۲$.

فعالیت

در شکل زیر خطی موازی با فاصلهٔ ۱ واحد از محور اعداد رسم کرده‌ایم. نقاط a، b، c، d، e، f و g چه اعدادی را نشان می‌دهند؟ کدم یک گویا و کدام گنگ هستند؟



فعالیت

اگر $x\in\mathbb{Q}$ ، $y\in\mathbb{Q}'$ و $z\in\mathbb{Q}'$ کدام یک از جملات زیر درست است؟

الف) $y+z\in\mathbb{Q}'$

ب) $x\times y\in\mathbb{Q}'$

ج) $\frac{y}{x}\in\mathbb{Q}'$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینهٔ ۴

فرض کنیم $y=\sqrt{۲}$. نمایش اعشاری $-y$ نیز مانند نمایش اعشاری y است. پس $z=-\sqrt{۲}$ نیر گنگ است. امّا $y+z=۰$ و صفر عددی گویا است. این مثال نقض نشان می‌دهد که الف غلط است. مثال نقض دیگر برای الف: هر دو عدد زیر گنگ هستند زیرا نامختوم و غیر متناوب هستند.

$$y=۱/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱...$$
$$z=۰/۱۰۱۱۰۱۱۱۰۱۱۱۱۰...$$

در حالیکه $y+z=۱/۱۱۱۱۱۱...=۱/\overline{۱}$ است که عددی گویا است. اگر $x=۰$ باشد آنگاه $x\times y=۰$ که نشان می‌دهد ب نیز غلط است.

امّا در عبارت $\frac{y}{x}$ مخرج نمی‌تواند صفر باشد. زیرا در غیر اینصورت $\frac{y}{x}$ تعریف شده نیست. $\frac{y}{x}$ عددی گنگ است زیرا اگر گویا باشد آنگاه حاصلضرب دو عدد گویای x و $\frac{y}{x}$ که برابر با $\frac{y}{x}\times x=y$ است نیز باید گویا باشد که نیست! پس جملهٔ ج درست است. پس گزینهٔ ۱ درست است.

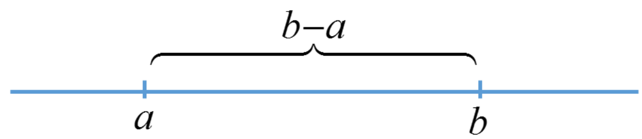
بیشتر بدانیم

بین هر دو عدد گنگ مختلف، بی‌نهایت عدد گنگ دیگر وجود دارد.

اثبات: فرض کنید a و b دو عدد گنگ باشند که $a<b$. فاصلهٔ a تا b از تفریق $b-a$ بدست می‌آید که دو حالت دارد:

۱) $b-a\in\mathbb{Q}$. مثلاً فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ تا $\sqrt{۲}+۱$ برابر با ۱ است که گویاست.

۲) $b-a\in\mathbb{Q}'$. مثلاً فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ تا $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ برابر با $\sqrt{۳}$ است که گنگ است.



در حالت (۱) می‌دانیم $\frac{b-a}{۲}$ نیز عددی گویا است و اگر با a جمع کنیم به عدد $a+\frac{b-a}{۲}$ می‌رسیم که هم گنگ است (چون مجموع گنگ و گویا، عددی گنگ است) و هم بین a و b قرار دارد. پس با همین روش می‌توانیم بی نهایت عدد گنگ دیگر پیدا کنیم.

در حالت (۲) $b-a$ عددی گنگ است که یک بسط اعشاری نامختوم و غیر متناوب مانند $X/x_۱x_۲x_۳\ldots$ دارد. در این بسط اعشاری X مقدار صحیح و x_iها ارقام اعشاری آن است. چون $b-a$ گنگ است، پس عدد صحیح نیست. پس نمی‌تواند همهٔ x_iها صفر باشند. پس اولین x_i که ناصفر است را در نظر بگیرید. عدد مختوم $T=X/x_۱\ldots x_i$ گویاست و از $b-a$ کوچکتر است، زیرا ارقام اعشاری بعد از رقم iاُم همگی صفر هستند. پس $a+T$ عددی گنگ است که از a بزرگتر و از b کوچکتر است. با همین روش می‌توانیم بی‌نهایت عدد گنگ دیگر بسازیم.

با فرض اینکه $a<b$ همهٔ اعداد حقیقی بین a و b برابر با مجموعهٔ زیر است:

$$L=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ a<x<b\right\}$$

از آنجا که هر نقطه روی محور اعداد نمایش یک عدد حقیقی است، پس همهٔ نقاط بین a و b به مجموعهٔ L تعلق دارند؛ امّا خود a و b عضو L نیستند. به همین دلیل این مجموعه را با یک پاره خط نمایش می‌دهیم که دو سر آن دو نقطهٔ توخالی است.

مثال

مجموعهٔ $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ -۱\le x<۲\right\}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید و مشخص کنید کدام یک از اعداد زیر عضو A هستند و کدام نیستند؟

الف) $۱/۹$ ب) $۱/\overline{۹}$ پ) $\sqrt{\pi}$

پاسخ:

مجموعهٔ A شامل همهٔ اعداد حقیقی بین ۱− و ۲ است که ۱− را نیز دارد. به همین دلیل نقطهٔ ۱− را توپُر و نقطهٔ ۲ را توخالی نمایش می‌دهیم.

الف) $-۱ \leq ۱/۹ < ۲$ پس $۱/۹ \in A$.

ب) $۱/\overline{۹} = ۲$. پس $۱/\overline{۹} \notin A$.

پ) $\pi < ۴$ پس $\sqrt{\pi} < \sqrt{۴} = ۲$. از طرفی چون $-۱ \leq \sqrt{\pi}$ پس $\sqrt{\pi} \in A$.

مثال

اگر A برابر با مجموعه نقاط شکل زیر باشد و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq x\}$ آنگاه $A - B$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \leq x < ۱\}$ ۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \leq x \leq ۰\}$

۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۳ \leq x < +۱\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۳ < x \leq ۱\}$

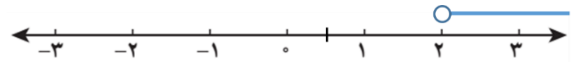
پاسخ: مجموعهٔ B برابر با مجموعه نقاط نیم خط شکل زیر است.

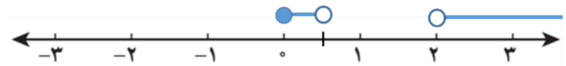
اعضای $A - B$ همهٔ اعدادی روی پاره خط متناظر با A هستند که روی نیم خط بالا قرار ندارند. پس $A - B$ متناظر با نقاط شکل زیر است:

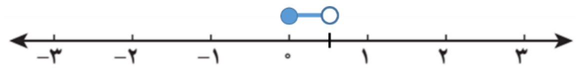
که برابر با مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \leq x < ۱\}$ است. پس گزینهٔ ۱ درست است.

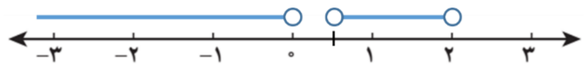
فعالیت

اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le ۲\}$ و $B=\left\{\dfrac{۱}{x} \mid x\in A\right\}$ آنگاه $A-B$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

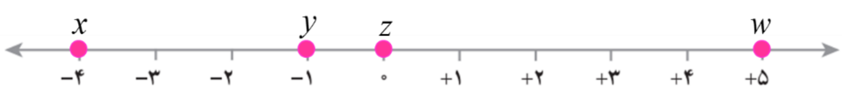
۴) 

قدر مطلق

هر نقطه روی محور اعداد نمایش یک عدد حقیقی است و به غیر از نقطهٔ صفر، همگی دارای علامت هستند. اعدادی که سمت راست صفر قرار دارند دارای علامت مثبت و اعدادی که سمت چپ صفر واقعند دارای علامت منفی هستند. امّا **فاصلهٔ دو نقطه** کمیتی است که هیچوقت نمی‌تواند منفی باشد.

مثال

با توجه به شکل زیر:



الف) $-x$ چه علامتی دارد؟

ب) فاصلهٔ x و y چقدر است و چه علامتی دارد؟

پ) $z^{۲}$ چه علامتی دارد؟

ت) آیا نقطهٔ دیگری به غیر از w وجود دارد که فاصلهٔ آن تا صفر برابر با ۵ باشد؟

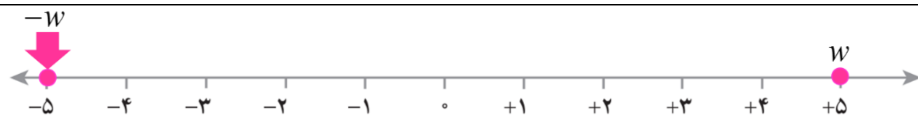
پاسخ:

الف) $-x=-(-۴)=۴$. پس $-x$ عددی با علامت مثبت است.

ب) فاصلهٔ x و y برابر با ۳ است که عددی مثبت است.

پ) $z^{۲}=۰^{۲}=۰$. عدد صفر نه مثبت است و نه منفی. زیرا صفر نه از خودش بزرگتر و نه از خودش کوچکتر است.

ت) بله. قرینهٔ w که برابر با -۵ است عددی است که فاصلهٔ آن تا صفر نیز برابر با ۵ است.



نکته

فاصلهٔ عدد حقیقی a تا نقطهٔ صفر را **قدر مطلق** a می‌گوییم و با نماد $|a|$ (بخوانید قدرمطلقِ a) نشان می‌دهیم.

۱) اگر $a=۰$ آنگاه $|a|=۰$ است. زیرا فاصلهٔ عدد ۰ تا خودش برابر با صفر است.

۲) اگر $a>۰$ باشد آنگاه $|a|=a$.

۳) اگر $a<۰$ باشد، آنگاه $|a|=-a$.

مثال

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $|-۳|-|+۵|-|-\sqrt{۲}|$ ب) $\big|\,۲-|-۳|-۵\,\big|$ پ) $|۲\sqrt{۶}-۵|-|۶-\sqrt{۲۴}|$

پاسخ:

الف) $|-۳|-|+۵|+|-\sqrt{۲}|=۳-۵+\sqrt{۲}$

ب) $\big|\,۲-|-۳|-۵\,\big|=|۲-۳-۵|=|-۶|=۶$

پ) برای اینکه حاصل $|۲\sqrt{۶}-۵|$ را بدست آوریم باید ببینیم $۲\sqrt{۶}-۵$ عددی مثبت است یا منفی. برای پاسخ به این سؤال باید $۲\sqrt{۶}$ و ۵ را با هم مقایسه کنیم. به جای مقایسهٔ این دو عدد می‌توانیم مربع این دو عدد را مقایسه کنیم:

$$\left(۲\sqrt{۶}\right)^{۲}=۲^{۲}\times ۶=۲۴<۲۵=\left(۵\right)^{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{۶}<۵$$

پس $۲\sqrt{۶}-۵<۰$ و در نتیجه $|۲\sqrt{۶}-۵|=۵-۲\sqrt{۶}$. مشابه همین استدلال چون $۲۴<۳۶$ پس $\sqrt{۲۴}<۶$. بنابراین $۶-\sqrt{۲۴}>۰$ و درنتیجه $|۶-\sqrt{۲۴}|=۶-\sqrt{۲۴}$. پس:

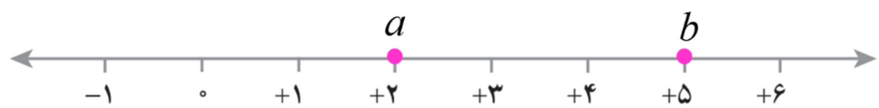
$$|۲\sqrt{۶}-۵|-|۶-\sqrt{۲۴}|=۵-۲\sqrt{۶}-\left(۶-\sqrt{۲۴}\right)=-۱$$

فعالیت

با بررسی حالت‌های مختلف در مورد علامت دو عدد a و b درستی روابط زیر را ثابت کنید.

۱. $|a| = |-a|$ ۲. $|ab| = |a| \times |b|$ ۳. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ۴. $\sqrt{a^{۲}} = |a|$

فاصلهٔ دو نقطهٔ متمایز از یکدیگر کمیتی با علامت مثبت است. اگر a و b دو نقطهٔ متمایز روی محور اعداد حقیقی باشند فاصلهٔ آنها از تفاضل این دو عدد بدست می‌آید. مثلاً در شکل زیر:



فاصلهٔ a و b برابر با ۳ واحد است که از تفاضل $b-a=۵-۲$ بدست می‌آید؛ درحالیکه $a-b=۲-۵=-۳$ عددی منفی است. در مورد دو عدد حقیقی متمایز x و y نیز فقط یکی از تفاضل‌های $x-y$ یا $y-x$ عددی مثبت است و دیگری منفی است؛ درحالیکه $|x-y|$ و $|y-x|$ هر دو مثبت هستند.

نکته

فاصلهٔ دو نقطهٔ x و y روی خط اعداد حقیقی برابر با $|x-y|$ است که با $|y-x|$ نیز مساوی است.