باسمه تعالی

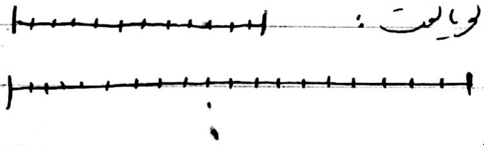
استاد شهشهانی — ریاضیات عمومی ۱

اعداد: ابتدا اعداد طبیعی برای شمارش ۰، ۱، ۲، ...

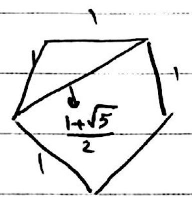
$\frac{m}{n}$ ← عدد صحیح — عدد گویا ، $\frac{1}{n}$ ← یک قسمت را به n قسمت تقسیم کردم

به نظر می‌آمد همه چیز و همه طول را می‌شود با گویا گفت:

با کوچک کردن واحدها



اولین مثال:



1 و $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ← این دو را می‌شود یک جزء درونش پیدا کرد که هر دو یک اندازه باشد.

* اعدادی که نتوان به صورت $\frac{m}{n}$ (عدد صحیح) نوشت: اعداد ناگویا

* این اعداد ناگویا در مبنای ۱۰ تقریباً کاملاً مشخص اند.

$\frac{m}{n}$: $m \mid n$, $0/\dots$

مختومه: $a_0/a_1a_2\dots a_k$

: پس از مدتی جدا متناوب می‌شود

* بنابراین اگر چیزی بنویسید که نه مختومه باشد نه متناوب اون ناگویا می‌شود.

مثال: $0/1010010001000010\dots$ → نه مختومه نه تا لاً متناوب

بنابراین به صورت $\frac{m}{n}$ قابل نمایش نیست.

* سؤال: از کجا معلوم این عدد است؟ از عدد π می‌شود دید که واقعاً این طول است!

← یکی از مهم‌ترین اهداف اکتشافات بشر اعداد پیوسته است

مثلاً: فرض می‌کنیم گسست‌های پیوسته وجود دارد:

هدف: اگر یک پاره‌خط واحد داشته باشیم باید بتوانیم تمام پاره‌خط‌ها را بیان کنیم:

اصل تمامیت: هر $a_0/a_1a_2a_3\ldots$ که در آن a_0 یک عدد صحیح و سایر a_nها بین ۰ تا ۹ هستند یک عدد هست.

اصلاً این عدد $a_0/a_1a_2\ldots$ یعنی چی؟

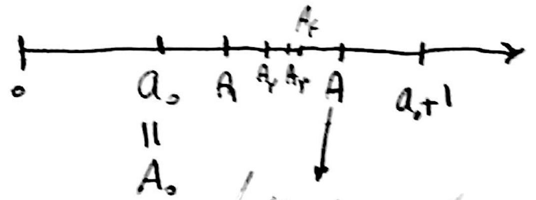
$$A = a_0/a_1\ldots$$

در نظر: $A_n = a_0/a_1\ldots a_n 0 \rightarrow$

$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

$$\boxed{A_n \le A \le A_n + \frac{1}{10^n} \quad *} \ \forall n$$

اصل تمامیت به زبان دیگر: برای هر انتخاب $a_0/a_1\ldots$ باشد فوق عددی هست که در همه‌ی نامساوی‌های * صدق می‌کند. این به معنای نداشتن خطا هست!



اینجا که دنبالش می‌گردیم همان A است!

A: عددی است که A_nها به آن نزدیک می‌شوند یا هر چه تا آن نزدیک می‌شود.

* لزوماً منحصر به فرد است A

* توجه: عدد A در اصل تمامیت وجود آن را حکم می‌کند منحصر به فرد است.

اثبات: فرض کنید B هم همین خاصیت را داشته باشد:

$$\text{برای هر } n \begin{cases} A_n \le A \le A_n + \frac{1}{10^n} \\ A_n \le B \le A_n + \frac{1}{10^n} \end{cases} \qquad |A-B| \le \frac{1}{10^n} \Rightarrow A = B$$

الگوریتم اقلیدسی :

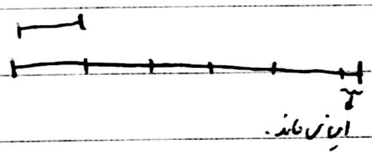
a_0, a_1 دو کمیت : آیا واحدی وجود دارد که هر دو را بشمارد؟ مثلاً U :

اگر الگوریتم به انتها برسد یعنی آن واحد برای این دو هست. اگر نشود یعنی وجود ندارد.

فرض : $a_0 \geq a_1$ $\quad a_0 = n a_1 + a_2 , \quad 0 \leq a_2 < a_1 , n_1 \in \mathbb{N}$

$a_0 = MU , a_1 = NU$

$a_2 = a_0 - n_1 a_1 = U$ مضرب



$$a_0 = n_1 a_1 + a_2 , \quad 0 \leq a_2 < a_1$$

$$a_1 = n_2 a_2 + a_3 , \quad 0 \leq a_3 < a_2$$

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4 , \quad 0 \leq a_4 < a_3$$

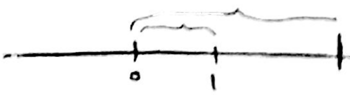
اگر تموم شد آخرین عددی که باشد بزرگترین مقسوم علیه است.

اگر نشد این دو نسبتشان گویا نیست.

← اگر واحد مشترک U وجود داشته باشد این فرآیند خاتمه می‌یابد [در تعداد متناهی].

اعداد مختلط :

مقدمه :



اعداد حقیقی — پیوستگی

$$x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

معادلات درجه سوم :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

* خیام روش هندسی پیدا کرد * اگر فرض کنید : $x = t - \frac{a}{3}$

$$= t^3 + pt + q = 0$$

فرض ۱ : $t = u + v \Leftarrow$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + [3uv + p](u+v) + q = 0 \\ 3vu + p = 0 \end{cases}$$

فرض ۲ : $3vu + p = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{درجه ۲}]{\text{معادله}} x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} \qquad q^2 + \frac{4}{27}p^3 \to \Delta$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}} \longrightarrow \boxed{\text{فرمول کاردانو}}$$

مثال : $t^3 - 3t + \sqrt{2} = 0 \Leftarrow$

$$p = -3, \quad q = \sqrt{2} \qquad t = \sqrt{2},$$

$$\Delta = 2 - \frac{4}{27} \cdot 27 = -2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{-2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{-2}}{2}}$$

سوال : پس کو ریشه $t = \sqrt{2}$ ؟

$$t^3 - 3t + \sqrt{2} = (t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t - 1)$$

$$t = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

فرض کنید : $\sqrt{-1}$ معنی دارد و از قانون های معمول جبری تبعیت می کند :

$$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}$$

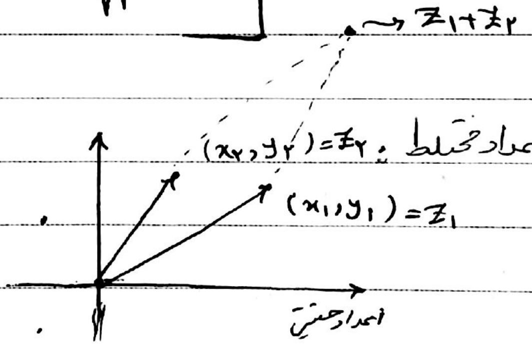
$$\Longrightarrow \quad t=\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} \quad *$$

فرض : $\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^{3}=\frac{1+3\sqrt{-1}-3-\sqrt{-1}}{2\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{-1}-1)}{2\sqrt{2}}=\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

فرض : $\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^{3}=\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

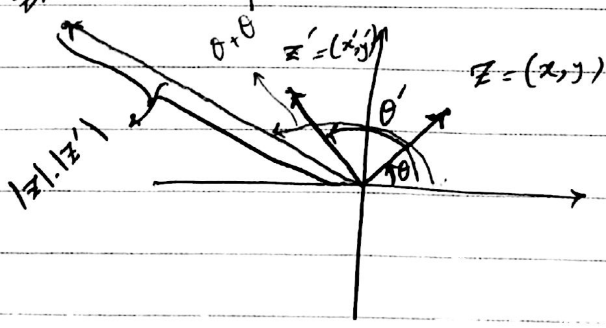
$$\overset{*}{\Longrightarrow} \quad \boxed{t=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}}$$

تعریف اعداد مختلط :



جمع اعداد مختلط : $z_1+z_2=(x_1+x_2\,,\,y_1+y_2)$

خواص :
- جابجایی ✓ : $z_1+z_2=z_2+z_1$
- شرکت پذیری ✓ : $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$
- عضو خنثی 0 ✓ : $z+0=0+z=z$
- عضو قرینه $-z$ ✓ : $-z=(-x,-y) \Longrightarrow z-z=0\,,\,(-z)+(z)=0$



راه حل برای تعریف ضرب :

$zz'=?$

(فاصله z و z' از مبدأ : حاصل ضرب = فاصله

مثال ۱: $(x,y)\cdot(x',0) = (xx',0)$ ✓

حالت ۱: $x,x' \geq 0$ ، $\theta,\theta'=0$ ، $\theta+\theta'=0$ ، $(x,0)(x',0)=(xx',0)$ ✓

حالت ۲: $x\geq 0$, $x'\leq 0$;

$\theta=0$ ، $\theta'=\pi$ ، $\theta+\theta'=\pi$ ، $(x,0)(x',0)=(xx',0)$ ✓

حالت ۳: ✓

حالت ۴: ✓

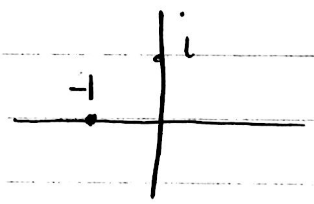
اگر محور x را همان مجموعه اعداد حقیقی فرض کنید ضرب همان ضرب سابق است و همچنین جمع نیز!

مثال ۲: $(0,1)\cdot(x,0) = (0,x)$ ، $\theta'=\pi/2$ ، $\theta=0$

$(0,1) = i$

$\theta+\theta'=\pi/2$ ، فاصله از مبدا $= x\cdot 1 = x$

مثال ۳: $i\cdot i = (-1,0)$



$\theta=\pi/2$ ، $\theta=\pi/2$ ، فاصله از مبدا: 1

$\theta+\theta=\pi$

* i: جذر -1 *

$(-i)\cdot(-i) = (0,-1)\cdot(0,-1) = (-1,0)$

$\theta=3\frac{\pi}{2}$ ، $\theta=3\frac{\pi}{2}$

$\theta+\theta=3\pi$

* $\{i,-i\}$ جذر -1 هستند! *

خواص ضرب:

(۱) $Z\cdot Z' = Z'\cdot Z$

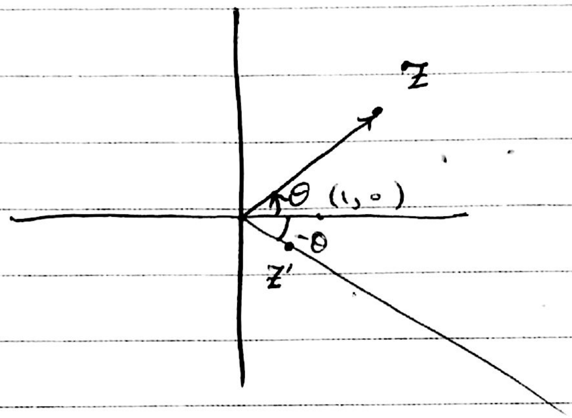
(۲) $Z\cdot(Z'\cdot Z'') = (Z\cdot Z')\cdot Z''$

(۳) $(1,0)\cdot Z = Z$

(۴) $0\cdot Z = 0$ ⟵ برای صفر زاویه مطرح نیست!

$ZZ' = (1,0)$ معکوس ضربی چیست؟ ✓ برای Z آیا عددی مانند Z' هست که:

به جز $Z \neq 0$



اگر $Z \neq 0$ باشد ⟸ نقطه منحصر به فردی وجود دارد

خاصیت پخش: $Z.(Z'+Z'') = (Z.Z') + (Z.Z'')$

جبری و هندسی به دست می‌آید!

[حرکت مادر اعداد مختلط] ← توسعه اعداد است.

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} \qquad \overline{Z+Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$$

$$\bar{Z}.\bar{Z'} = \overline{Z.Z'}$$

$$\Downarrow$$

$$Z^{-1} = \left(\frac{x}{|Z|^2}, \frac{-y}{|Z|^2}\right),$$

$$|Z+Z'| \leq |Z| + |Z'|$$

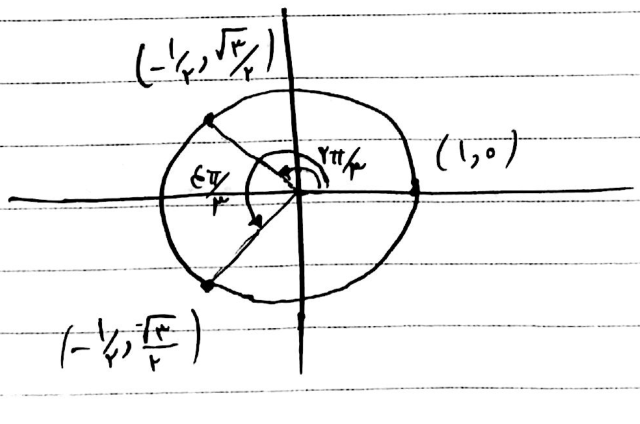
قدر مطلق: فاصله از O = $|Z|$

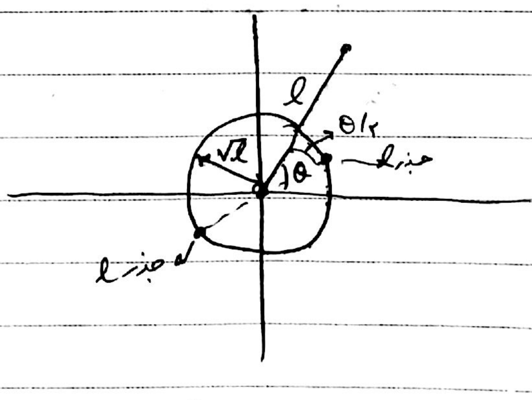
مزدوج Z: $\bar{Z}$

$\bar{Z} = (x,-y) \Leftarrow Z = (x,y)$

$Z\bar{Z} = |Z|^2$

پیش درآمدی بر جلسه بعد: ریشه‌های مختلط ۱ را در ریشه ۳ پیدا کنید:

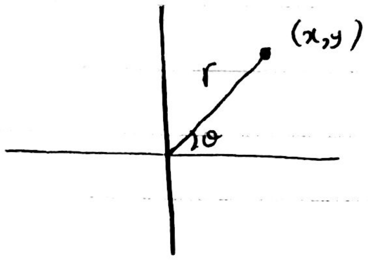




به ازای ریشه n ام هر عدد جز صفر n تا ریشه داریم.

مختصات قطبی : r: فاصله از O

θ : زاویه از نیم مثبت محور x به نیم خط حامل



* برای $(0,0)$ فقط $r=0$ داریم *

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$Z=(x,y)$ با مختصات قطبی (r,θ)

$Z'=(x',y')$ « « (r',θ')

$Z.Z'$ دارای مختصات $(rr',\theta+\theta')$

$Z.Z'=(x'',y'') \Leftarrow$

$$x'' = rr'\cos(\theta+\theta') = rr'\left[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right]$$
$$= (r\cos\theta)(r'\cos\theta') - (r\sin\theta)(r'\sin\theta') = xx'-yy'$$

$$y'' = rr'\sin(\theta'+\theta) = (r\sin\theta)(r'\cos\theta') + (r\cos\theta)(r'\sin\theta') = x'y + xy'$$

$$\Rightarrow \boxed{(x,y)(x',y') = (xx'-yy',\ x'y+xy')} \leftarrow$$ تعریف ضرب

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |Z|$$

$$Z = (x,y)\ ,\ \bar{Z} = (x,-y)$$

$$(x,0) \leftrightarrow x$$

نمایش متعارف اعداد مختلط

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)\overset{i}{(0,1)}$$
$$= x + i.y$$

$$\boxed{(x+iy) \longleftrightarrow (x,y)}$$

$\Leftarrow$ قوانین جمع و ضرب و پخش مانند اعداد حقیقی حاکم است.

$\leftarrow$ در اعداد مختلط n ریشه‌ی n ام مختلف داریم برای هر عدد غیر صفر $\longrightarrow$

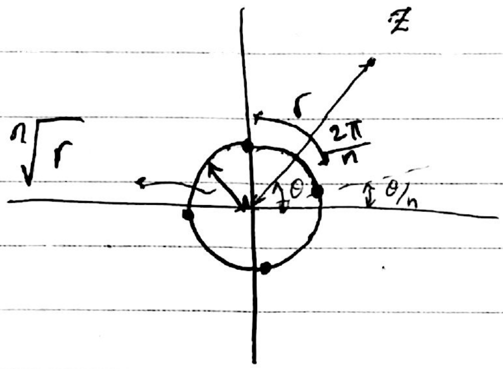
ریشه n ام عدد Z :

(r,θ)

$Z=0$ تنها ریشه‌ی n ام 0 $\leftarrow$ چون تنها عددی که n بار ضرب شود و صفر شود صفر است. [اثبات اش]

$0 \neq Z \to (r,\theta)$

ω : ریشه n ام با مختصات قطبی (ρ, φ)



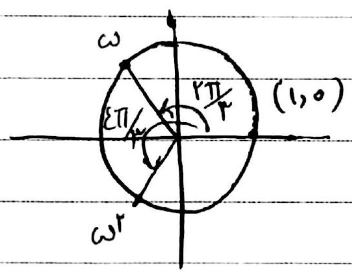
$\Leftarrow \quad \rho^n = r$

$n\varphi = \theta + 2k\pi \,,\quad k \in \mathbb{Z}$

$\varphi = \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$

مختصات ریشه‌های n ام :

$\sqrt[n]{r}\, \cos\left(\theta/_n + \frac{k2\pi}{n}\right) + \sqrt[n]{r} \cdot i \cdot \sin\left(\theta/_n + \frac{2k\pi}{n}\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$



ریشه‌های سوم 1 : $1, \omega, \omega^2$: ریشه‌های سوم واحد

$\omega = -1/_2 + i\sqrt{3}/_2$

$\omega^2 = -1/_2 - i\sqrt{3}/_2$

$t^3 + pt + q = 0$

$t = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4/_{27}p^3}}{2}}}_{u} + \underbrace{\sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4/_{27}p^3}}{2}}}_{v} \Rightarrow uv = -\frac{p}{3}$: فرض

* این هم دو تا جواب دارد که یکی منفی دیگری است و ما در یک ... اعداد همه چیز درست است

فرض کنید u_1 و v_1 جواب باشد $t = u_1 + v_1$

u_1 یک ریشه است و ωu_1 و $\omega^2 u_1$ نیز یک جواب دیگر است.

را به دنبال هر دو ریشه می‌گیریم منفی درست است و هم داریم که مثبت را می‌خواهیم!

بنابراین جواب‌ها این می‌شود : $\omega u_1 \,,\, \omega^2 v_1 \;\Big|\; \omega^2 u_1 \,,\, \omega v_1$

$t^3 - 3t + \sqrt{2} = 0$

$u_1 = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \,,\; v_1 = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

$u_1 + v_1 = \sqrt{2}$

ریشه‌های دیگر : $\omega u_1 \,,\, \omega^2 v_1$

$= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

و بعدی =

$z = (x, y) \longleftrightarrow x + iy$

$Re(z) = x$ قسمت حقیقی z

$Re(z) = x$ ،

$Im(z) = y$ قسمت موهومی z

r, θ مختصات قطبی

فاصله از مبدا ↑ ؛ $\theta \Leftarrow$ زاویه

اگر منفی شد OK!

iy عدد موهومی :

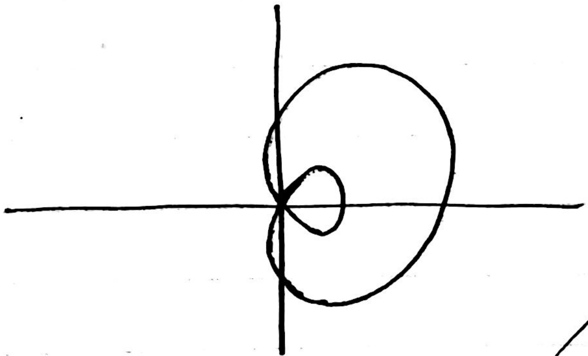
$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

مثال: $r = 1 - 2\cos\theta$ رسم کنید

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$3\pi/2$
r	1	$\sqrt{3}-1$	0	-1	-2	-3	-2	-1

اصل تمامیت :



اصل تمامیت [صورت دوم] : برای این به وجود آمد که وابسته به مبنا نباشد تعریفمان ؛

اگر مجموعه‌ای از بالا بسته باشد [کران داشته باشد] کوچکترین کران بالا دارد.