توابع معکوس مثلثاتی

توابع مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و ... همه توابعی متناوب می‌باشند و نمودار آنها، تکرار نمودار یک دوره تناوب آنها است؛ لذا یک به یک و معکوس پذیر نمی‌باشند.

برای محاسبه معکوس توابع مثلثاتی با تکنیکی که قبلاً توضیح داریم (مراجعه کنید به صفحه ___ و مثال $y = x^2$)، از تحدید توابع مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

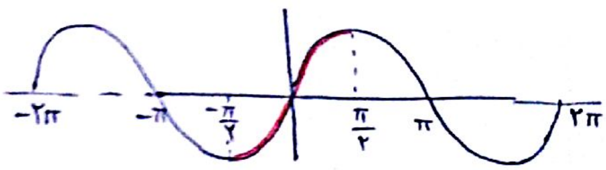
دو شرط تحدید تابع:
① کوچک کردن دامنه برای یک به یک شدن آن
② تغییر نکردن برد تابع

الف) تابع معکوس سینوس:

$Sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \Rightarrow$ یک به یک نیست

تحدید (یک حالت استاندارد)

بدون تغییر ماندن برد

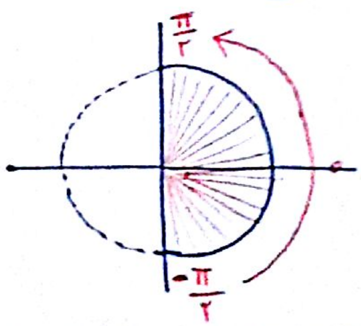


$$\boxed{Sin_T : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]}$$ ← سینوس تحدید شده

لذا به جای تابع سینوس اصلی از سینوس تحدید شده (Sin_T) استفاده می‌کنیم.

در نمادگذاری به جای Sin_T از همان نماد Sin استفاده می‌کنیم و فقط در ذهن خود مراقب دامنه و برد آن هستیم:

توجه:
(دامنه تابع سینوس تحدید شده از دیدگاه دایره مثلثاتی)



پس :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$

$$\sin a = b$$

معکوس دارد $\Downarrow$ $(\sin x)' = \cos x \xRightarrow{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cos x \geq 0 \Rightarrow$ یکنوا $\Rightarrow$ 1-1

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin^{-1} b = a$$

به صورت خلاصه :

$$\boxed{\underset{[-1,1]}{\arcsin x} = \underset{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{y} \iff \sin \underset{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{y} = \underset{[-1,1]}{x}}$$

مثال :

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(tg\, \frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$$

$$\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\arcsin 1) = 1$$

یادآوری جدول مثلثاتی برای سینوس:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0

مهم

همواره : $\sin(\arcsin x) = x$

$\arcsin(\sin x) \neq x$

$x \in \mathbb{R}$ دامنه سینوس — برد $\arcsin$: باید $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بلکه

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

* $tg(arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2})=?$

طبق جدول‌های مثلثاتی: $= tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

* $tg(\underbrace{arc\sin\frac{2}{5}}_{\alpha})=? = tg\,\alpha=?$

توضیح: $\frac{2}{5}$ در جدول‌های مثلثاتی معمول موجود نیست لذا با روش زیر به حل اقدام می‌کنیم:

حل:
$$arc\sin\frac{2}{5}=\alpha \quad \& \quad -\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$$
برد

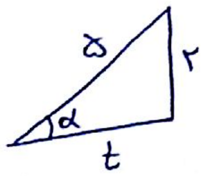
$$\Downarrow$$
$$\sin\alpha=\frac{2}{5}$$

توضیح: برای محاسبه $tg\alpha$ دو راه وجود دارد:

الف) فرمول‌های مثلثاتی (بر عهده شما: مقدار $\cos\alpha$ را بیابید و علامت آن را مشخص کنید و $tg\alpha$ را بیابید).

ب) با کمک شکل مثلث قائم‌الزاویه و تعریف نسبتها (راحت‌تر):

ادامه →
$$\sin\alpha=\frac{2}{5} \xRightarrow{\text{مقابل}/\text{وتر}}$$



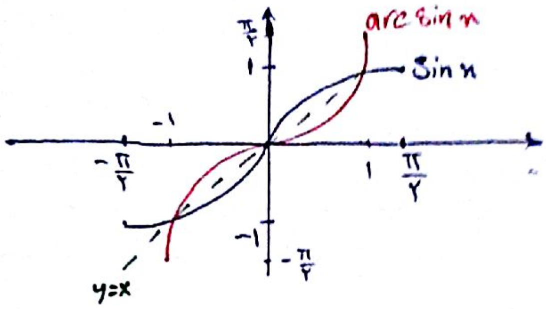
$$\Rightarrow t^2=5^2-2^2=21 \Rightarrow t=\sqrt{21}$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=+\frac{2}{\sqrt{21}}$$

توجه کنید که α در نیمدایره سمت راست دایره مثلثاتی قرار دارد (ربع اول یا ربع چهارم) و چون سینوس مثبت است α در ربع اول خواهد بود که علامت تانژانت نیز مثبت است.

□

مثال ۲: نمودار $\sin x$ و $\arcsin x$ توجه کنید:



* تابع $\sin x$ پیوسته است ولذا $\arcsin x$ بر دامنه خود پیوسته است.

* تابع $\sin x$ بر بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است ولذا $\arcsin x$ نیز صعودی است.

* همانطور که در تعریف مشخص بود و در شکل نیز پیداست:

$$D_{\arcsin x} = [-1, 1]$$

$$R_{\arcsin x} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

* $\arcsin x$ تابعی فرد است؛ یعنی

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

مشتق تابع $y=\arcsin x$:

$$\boxed{y=\arcsin x \Rightarrow \sin y = x}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad -1<x<1$$

لذا فرمولهای زیر برقرار می‌باشند :

$$* \ (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$* \ (\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

مثال :

$$y=\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\underbrace{9}_{3^2}-x^2}}$$

$$y=\arcsin(\cos x) \Rightarrow y'=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{-\sin x}{|\sin x|}=-\operatorname{sgn}(\sin x)$$

$$y=\cos(\arcsin x) \Rightarrow y'=-\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

نکته : براساس مثال اول می‌توان نوشت :

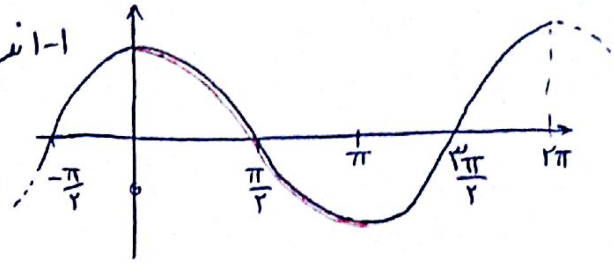
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

ب) تابع معکوس کسینوس:

با همان ترتیب می‌توان برای تابع کسینوس عمل تحدید را انجام داد و تابع معکوس را نوشت:

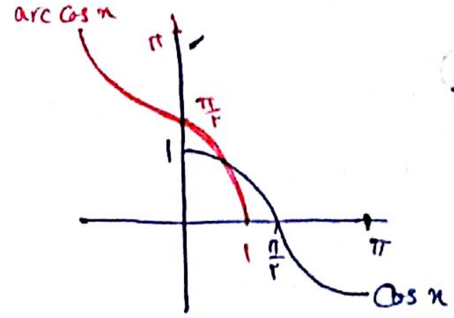
تابع اصلی $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \Rightarrow$ ۱-۱ نیست

تابع تحدید شده $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \Rightarrow$ ۱-۱ ✓



$\Downarrow$ معکوس

$$\boxed{\begin{array}{c} \arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\[2ex] \underbrace{y}_{[0,\pi]} = \arccos \underbrace{x}_{[-1,1]} \Leftrightarrow \cos \underbrace{y}_{[0,\pi]} = \underbrace{x}_{[-1,1]} \end{array}}$$



مثال:

$$\arccos 0 = \cancel{-\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2} ✓, \cancel{\frac{3\pi}{2}}, \cancel{\dots}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

برخی نتایج که از اثبات هندسی یا جبری آنها اجتناب می‌کنیم:

$$\arccos x = -\arcsin x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

مشتق تابع معکوس کسینوس:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad |x|<1$$

انتگرال مبتنی بر مشتق فوق:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right)$$

اینهم نقطه ناپیوستگی دارد

ج) تابع معکوس تانژانت :

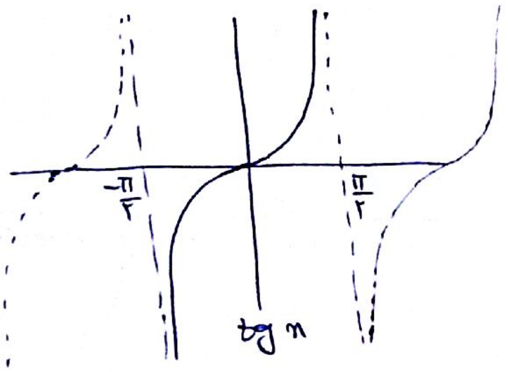
برای مابقی توابع مثلثاتی نیز بهمین روال است ؛ لذا به صورت خلاصه :

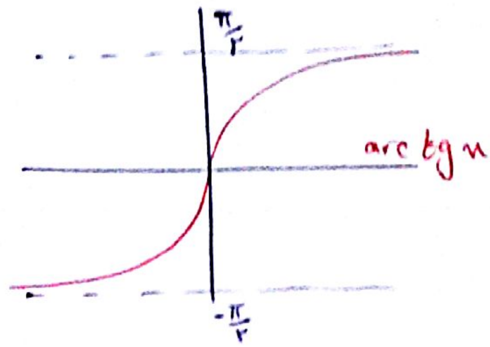
$$tg : R \longrightarrow R \Rightarrow 1\text{-}1 \text{ نیست}$$

$\downarrow$ تحدید

$$tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow R \Rightarrow arc\,tg : R \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = tg\,x \Rightarrow x = arc\,tg\,y$$





$$\boxed{\frac{d}{dx}(arc\,tg\,x) = \frac{1}{1+x^2}}$$ مشتق

یا

$$\left(arc\,tg\,\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{x^2+a^2}$$

&

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,arc\,tg\,\frac{x}{a}}$$ انتگرال

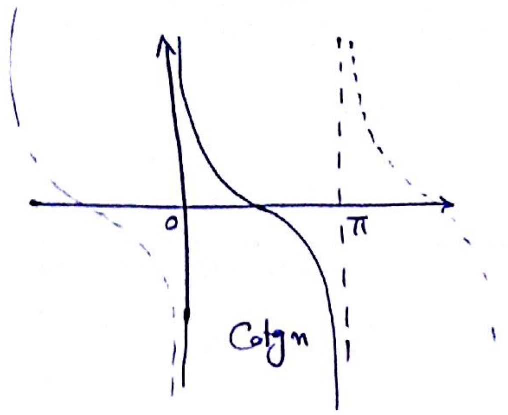
د) تابع معکوس کتانژانت :

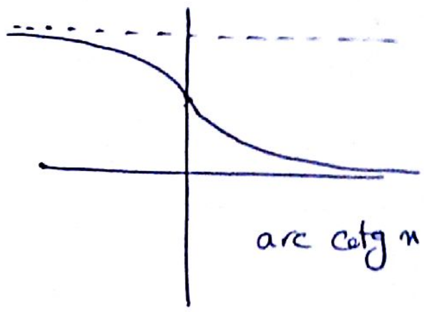
$$\text{Cotg} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow 1\text{-}1 \text{ نیست}$$

$\downarrow$ تحدید

$$\text{Cotg} : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \text{arc cotg} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$$

$$y = \text{Cotg}\, x \Rightarrow x = \text{arc cotg}\, y$$





مشتق :
$$(\text{arc cotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

انتگرال :
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{-1}{a} \text{arc cotg} \frac{x}{a}$$

رابطه بین معکوس‌های تانژانت و کتانژانت :

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc cotg}\, x = \frac{\pi}{2}$$

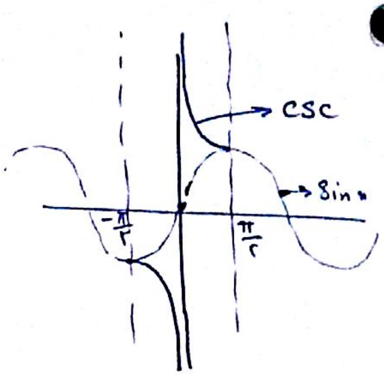
هـ - و) تابع معکوس برای سکانت و کسکانت :

$\frac{1}{\sin} = \csc : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \longrightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

تحدید $\downarrow$

$\csc : [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow I$

$\text{arccsc} : I \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$



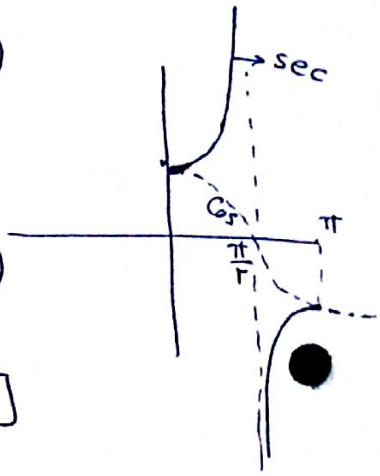
مشتق : $(\text{arccsc}\, x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; $|x| > 1$

$\frac{1}{\cos} = \sec : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \longrightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

تحدید $\downarrow$

$\sec : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$\text{arcsec} : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$



$(\text{arcsec}\, x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; $|x| > 1$ مشتق