

# انتگرال معین

انتگرال با قید مشتق تابع معکوس

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

## توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت [AvaEducation16.blog.ir](http://AvaEducation16.blog.ir) در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [ ] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [ ] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
  - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
  - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
  - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

## ۱ مسئله

اگر در بازه  $0 \leq x \leq 1$  رابطه  $f(f(x)) = x$  با مقدار اولیه  $f(0) = 1$  وجود داشته باشد، مقدار انتگرال زیر را تعیین کنید. ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\int_0^1 (x - f(x))^{2n} dx$$

## ۲ روش حل مسئله

پاسخ: این تابع با وارون آن برابر است. 🤔

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

پس باید مشتقات آن‌ها هم با یکدیگر برابر باشند.  
به نکته زیر در مورد مشتق تابع معکوس توجه شود.

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{💡}}$$

در این مسئله

$$f' = \frac{1}{f'}, \quad \Rightarrow \quad f' = \pm 1$$

دو فرض برای تابع  $f$  به صورت جداگانه بررسی می‌شود. در فرض اول

$$f' = 1, \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + c, \quad \xrightarrow{f(0)=1} \quad f(x) = x + 1$$

این تابع با شرط  $f(f(x)) = x$  سازگار نیست. پس فرض اول رد می‌شود. در فرض دوم

$$f' = -1, \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x + c, \quad \xrightarrow{f(0)=1} \quad f(x) = -x + 1$$

که با شرط داده شده سازگار است. می‌توان این تابع را در انتگرال جایگذاری کرد:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - f(x))^{2n} dx &= \int_0^1 (x - (-x + 1))^{2n} dx \\ &= \int_0^1 (2x - 1)^{2n} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2(2n+1)} (2x - 1)^{2n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

اگر باور کنی کارها درست پیش  
می‌روند، فقط فرصت‌ها را خواهی دید.  
اگر باور کنی کارها درست پیش  
نمی‌روند، فقط موانع را خواهی دید.

Wayne Dyer



 [AvaEducation16.blog.ir](https://AvaEducation16.blog.ir)

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 [AvaEducation16@gmail.com](mailto:AvaEducation16@gmail.com)