فصل ۳

مشتق

۳–۱ قضایا و فرمول‌های مشتق

تعریف. اگر تابع f در همسایگی نقطه $x_\circ$ تعریف شود، حد زیر را درصورت وجود(و متناهی بودن)، **مشتق تابع f** در نقطه $x_\circ$ نامیده و آنرا با $f'(x_\circ)$ نمایش داده و f را در $x_\circ$ **مشتق‌پذیر** می‌نامیم.

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

اگر در تعریف بالا $h\to\circ^+$، تعریف مشتق راست به‌دست می‌آید که آن را با نماد $f'_+(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم و اگر $h\to\circ^-$، تعریف مشتق چپ در نقطه $x_\circ$ به‌دست می‌آید که آن را با نماد $f'_-(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر۱. تعریف مشتق را به‌صورت $\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ نیز می‌توان نوشت.

نکته ۱. f در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر $f'_+(x_\circ)=f'_-(x_\circ)$.

مثال ۱. آیا تابع $f(x)=x[\sin x]$ در $x=\circ$ مشتق‌پذیر است؟

کسر مشتق به‌صورت $\dfrac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\dfrac{x[\sin x]}{x}=[\sin x]$ خواهد بود حال اگر $x\to\circ^+$ آنگاه x در ربع اول است و لذا $[\sin x]\to[\circ^+]=\circ$ پس $f'_+(\circ)=\circ$. اگر $x\to\circ^-$ آنگاه x در ربع چهارم است ولذا $[\sin x]\to[\circ^-]=-۱$ پس $f'_-(\circ)=-۱$ پس f در $x=\circ$ فاقد مشتق است.

قضیه ۱. اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، در این نقطه پیوسته خواهد بود.

نتیجه ۲. اگر f در نقطه‌ای ناپیوسته باشد، فاقد مشتق است.

تذکر۲. وجود $f'_+(x_\circ)$، پیوستگی راست f در $x_\circ$ و وجود $f'_-(x_\circ)$ پیوستگی چپ f در $x_\circ$ را نتیجه می‌دهد.

اگر مشتق تابع f را در نقاط مختلف $x\in D_f$ محاسبه کنیم، تابع جدیدی به‌دست می‌آید که آنرا **تابع مشتق** $f(x)$ می‌نامیم و با $f'(x)$ یا $\dfrac{df}{dx}$ یا D_xf نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳. فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند.

۱) $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$.

۲) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

۳) اگر $g(x)\neq\circ$ آنگاه $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^۲(x)}$.

۴) **قاعده مشتق زنجیره‌ای** $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

تذکر۳. قاعده مشتق زنجیره‌ای (مشتق ترکیب توابع) را به‌صورت زیر هم می‌توان بیان کرد:

اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد آنگاه $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

تذکر۴. قاعده مشتق حاصل‌جمع، حاصل‌ضرب و ترکیب توابع قابل تعمیم به بیش از دو تابع نیز هست.

با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای به سادگی می‌توان ثابت کرد:

نکته ۲. مشتق هر تابع زوج، تابعی فرد و مشتق هر تابع فرد، تابعی زوج است.

اگر u تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، فرمول‌های مشتق‌گیری توابع مقدماتی به‌صورت زیر است.

۱) $\dfrac{d}{dx}(k) = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{R}$

۲) $\dfrac{d}{dx}(|u|) = \dfrac{u'u}{|u|} \quad , \quad u \neq 0$

۳) $\dfrac{d}{dx}u^n = nu'u^{n-1} \quad , \quad n \neq 0$

۴) $\dfrac{d}{dx}\sin u = u'\cos u$

۵) $\dfrac{d}{dx}\cos u = -u'\sin u$

۶) $\dfrac{d}{dx}\tan u = u'\sec^2 u = u'(1+\tan^2 u) \quad , \quad u \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

۷) $\dfrac{d}{dx}\cot u = -u'\csc^2 u = -u'(1+\cot^2 u) \quad , \quad u \neq k\pi$

۸) $\dfrac{d}{dx}\sec u = u'\sec u\tan u \quad , \quad u \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

۹) $\dfrac{d}{dx}\csc u = -u'\csc u\cot u \quad , \quad u \neq k\pi$

۱۰) $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} u = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad |u| < 1$

۱۱) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad |u| < 1$

۱۲) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} u = \dfrac{u'}{1+u^2}$

۱۳) $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} u = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

۱۴) $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} u = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \quad , \quad |u| > 1$

۱۵) $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1} u = -\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \quad , \quad |u| > 1$

۱۶) $\dfrac{d}{dx}a^u = u'a^u\ln a \implies \dfrac{d}{dx}e^u = u'e^u$

۱۷) $\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{u'}{u\ln a} \implies \dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{u'}{u} \quad , \quad u > 0$

۱۸) $\frac{d}{dx}\sinh u = u'\cosh u$

۱۹) $\frac{d}{dx}\cosh u = u'\sinh u$

۲۰) $\frac{d}{dx}\tanh u = u'\text{sech}^{۲} u = u'(۱-\tanh^{۲} u)$

۲۱) $\frac{d}{dx}\coth u = -u'\text{csch}^{۲} u = u'(۱-\coth^{۲} u) \quad , \quad u \neq ۰$

۲۲) $\frac{d}{dx}\text{sech} u = -u'\text{sech} u \tanh u$

۲۳) $\frac{d}{dx}\text{csch} u = -u'\text{csch} u \coth u \quad , \quad u \neq ۰$

۲۴) $\frac{d}{dx}\sinh^{-۱} u = \frac{u'}{\sqrt{۱+u^{۲}}}$

۲۵) $\frac{d}{dx}\cosh^{-۱} u = \frac{u'}{\sqrt{u^{۲}-۱}} \quad , \quad u > ۱$

۲۶) $\frac{d}{dx}\tanh^{-۱} u = \frac{u'}{۱-u^{۲}} \quad , \quad |u| < ۱$

۲۷) $\frac{d}{dx}\coth^{-۱} u = \frac{u'}{۱-u^{۲}} \quad , \quad |u| > ۱$

۲۸) $\frac{d}{dx}\text{sech}^{-۱} u = -\frac{u'}{u\sqrt{۱-u^{۲}}} \quad , \quad ۰ < u < ۱$

۲۹) $\frac{d}{dx}\text{csch}^{-۱} u = -\frac{u'}{|u|\sqrt{۱+u^{۲}}} \quad , \quad u \neq ۰$

قضیه ۴. اگر f در یک همسایگی $x_۰$ از راست پیوسته و در همسایگی محذوف $x_۰$ از راست مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to x_۰^+} f'(x) = L \in [-\infty, +\infty]$ آنگاه $f'_+(x_۰) = L$.

این قضیه برای محاسبه $f'_-(x_۰)$ و $f'(x_۰)$ نیز قابل استفاده است و داریم:

نکته ۳. f در یک همسایگی $x_۰$ پیوسته و در همسایگی محذوف $x_۰$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to x_۰} f'(x) = L \in [-\infty, +\infty]$ در اینصورت داریم $f'(x_۰) = L$.

تذکر۵. L می‌تواند عددی حقیقی یا $\pm\infty$ باشد. توجه کنید که اگر مشتق، بینهایت شود، مشتق در $x_۰$ موجود نیست اما اگر f در $x_۰$ پیوسته باشد، بی‌نهایت شدن مشتق تعبیر هندسی دارد. (نکته ۱۳ در صفحه ۱۳۶ را ملاحظه کنید.)

تذکر۶. از قضیه بالا برای محاسبه مشتق توابع چندضابطه‌ای در نقطه‌ای که ضابطه عوض می‌شود استفاده می‌شود.

تذکر۷. با چه روشی مشتق تابع f را در نقطه $x_۰$ محاسبه نماییم؟

مرحله اول: پیوستگی f را در آن بررسی می‌کنیم. اگر f در $x_۰$ ناپیوسته باشد، مشتق‌پذیر نخواهد بود.

مرحله دوم: در صورت پیوستگی f، با استفاده از قواعد و فرمول‌های مشتق، تابع $f'(x)$ را محاسبه و سپس $x_۰$ را در آن جایگذاری می‌کنیم. اگر با جایگذاری $x_۰$ به حالت مبهم (مثلاً $\frac{۰}{۰}$) برخورد کنیم، $\lim_{x\to x_۰} f'(x)$ در صورت موجود بودن برابر $f'(x_۰)$ است.

مرحله سوم: اگر حد تابع مشتق موجود نباشد، باید از تعریف مشتق استفاده نماییم.

نکته ۴. **بهتر است برای محاسبه مشتق تابع در نقاطی که ضابطه عوض می‌شود یا در نقاطی که تقسیم بر صفر رخ می‌دهد، از تعریف مشتق استفاده نماییم.**

نکته ۵. g **تابعی مشتق‌پذیر و** $f(x) = |g(x)|$ **است.**

الف) **اگر** $g(x_\circ) \neq \circ$ **آنگاه تابع** f **در** $x_\circ$ **مشتق‌پذیر است.**

ب) **اگر** $g(x_\circ) = \circ$ **ولی** $g'(x_\circ) \neq \circ$**، تابع** f **در** $x_\circ$ **فاقد مشتق است. (مشتق راست و چپ آن** $\pm g'(x_\circ)$ **هستند. در این صورت** $x_\circ$ **نقطه زاویه‌دار است.)**

ج) **اگر** $g(x_\circ) = g'(x_\circ) = \circ$ **آنگاه** $f'(x_\circ) = \circ$.

تذکر۸. با توجه به نکته بالا اگر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه تابع $f(x) = |(x - x_\circ)^n|$ در نقطه $x = x_\circ$ برای $n = ۱$ فاقد مشتق (زاویه دار) است ولی برای $n > ۱$ دارای مشتقی برابر صفر است.

تذکر۹. برای محاسبه مشتق از توابع شامل قدرمطلق در یک نقطه خاص، به جای استفاده از فرمول ۲ در صفحه ۱۲۶ بهتر است با توجه به علامت عبارت موجود در قدرمطلق، قدرمطلق را حذف کرده و سپس مشتق بگیریم. (مثال ۳ در صفحه بعد را ملاحظه کنید.)

نکته ۶. **تابع** $y = [f(x)]$ **در هر نقطه که پیوسته باشد، مشتق پذیر بوده و مشتق آن برابر صفر است.**

نکته ۷. **اگر در نقطه** $x_\circ$ **تابع** $f(x)$ **پیوسته بوده و** $f(x_\circ) = \circ$ **و داشته باشیم** $f(x) \sim g(x)$ **آنگاه** $f'(x_\circ) = g'(x_\circ)$.

نکته ۸. **اگر** $f(x_\circ) = \circ$ **برای محاسبه** $f'(x_\circ)$ **کافی است از عامل صفرکنندهٔ** f**، مشتق بگیریم و در حد عبارت باقیمانده در نقطه** $x_\circ$ **ضرب کنیم.**

نکته ۹. **(مشتق‌گیری لگاریتمی) در موارد زیر، برای محاسبه مشتق تابع** $y = f(x)$**، ابتدا از تابع** $\ln$ **گرفته و سپس مشتق را محاسبه می‌کنیم.**

الف) **اگر** f **از ضرب و تقسیم چند عبارت به‌دست آمده باشد.**

ب) $f(x)$ **به‌صورت** $u(x)^{v(x)}$ **باشد.**

مثال ۲

فرض کنید a و c اعداد حقیقی دلخواه بوده و $c > \circ$ و تابع حقیقی f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-c}) & x > \circ \\ \circ & x \leq \circ \end{cases}$ تعریف شود. شرایطی را تعیین کنید که:

الف) f در همه نقاط پیوسته باشد.

ب) f در همه نقاط مشتق‌پذیر باشد.

ج) $f'(x)$ در اطراف $x = \circ$ کراندار باشد.

د) $f'(x)$ در همه نقاط پیوسته باشد.

برای $x \neq 0$ تابع f پیوسته و مشتق پذیر است پس وضعیت آنرا در $x = 0$ بررسی می‌کنیم.

الف) برای بررسی پیوستگی توجه کنید که حد چپ و مقدار برابر صفر است. حد راست برابر $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a \sin\left(\frac{1}{x^c}\right)$ می‌باشد که فقط برای $a > 0$ صفر می‌شود و لذا اگر $a > 0$ تابع f پیوسته است.

ب) با توجه به اینکه در $x = 0$ تقسیم بر صفر (در ضابطه $x > 0$) رخ می‌دهد برای بررسی مشتق‌پذیری در این نقطه بهتر است از تعریف مشتق استفاده نماییم.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x^{a-1} \sin\left(\frac{1}{x^c}\right)$$

چون $\sin \frac{1}{x^c}$ در $x = 0$ فاقد حد ولی کراندار است، پس حد بالا فقط برای $a > 1$ موجود و برابر صفر است. ولی $f'_-(0) = 0$ و لذا تابع f برای $a > 1$ مشتق‌پذیر است.

ج) توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} ax^{a-1}\sin(x^{-c}) - cx^{a-1-c}\cos(x^{-c}) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به کراندار بودن $\sin \frac{1}{x^c}$ و $\cos \frac{1}{x^c}$ شرط کرانداری تابع بالا در $x = 0$ آن است که x^{a-1} و x^{a-1-c} در اطراف $x = 0$ کراندار باشد و لذا باید $a - 1 \geq 0$ و $a - 1 - c \geq 0$ و به طور خلاصه $a \geq 1 + c$.

د) برای پیوستگی f' باید $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ و لذا اولاً باید $a > 1$(شرط مشتق پذیری) برقرار باشد و ثانیاً $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 = f'_+(0)$ که شرط اخیر فقط برای $a > 1 + c$ برقرار می‌شود. بنابراین برای $a > 1 + c$ تابع f' پیوسته است.

تذکر ۱۰. در مثال قبل در حالت $1 < a \leq 1 + c$ اگر برای محاسبه $f'(0)$ تابع $f'(x)$ را تشکیل داده و $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ را محاسبه کنیم ، حاصل حد وجود ندارد است و لذا نمی‌توان گفت تابع در $x = 0$ مشتق ندارد، بلکه باید با کمک تعریف $f'(0)$ را محاسبه نماییم که برابر صفر خواهد شد.

مثال ۳. اگر $f(x) = |x^2 - 4x| + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ مقادیر $f'(2)$ و $f'_+(-1)$ و $f'_-(4)$ را محاسبه کنید.

توجه کنید که $f(x) = |x^2 - 4x| + \sqrt{(x+1)^2} = |x^2 - 4x| + |x + 1|$. عبارات داخل قدرمطلق‌ها را جداگانه تعیین علامت می‌کنیم. ریشه‌های داخل قدرمطلق $x = -1, 0, 4$ است.

x		-1		0		4	
$x^2 - 4x$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$

با توجه به جدول بالا در $x = 2$ عبارت داخل اولین قدرمطلق منفی و برای دومین قدرمطلق مثبت است.

$$f(x) = -(x^2 - 4x) + (x + 1) = -x^2 + 5x + 1 \implies f'(x) = -2x + 5 \implies f'(2) = 1$$

به همین ترتیب برای $(-1)^+$ و 4^- داریم:

$$x = (-1)^+ \implies f(x) = (x^2 - 4x) + (x + 1) = x^2 - 3x + 1 \implies f'(x) = 2x - 3 \implies f'_+(-1) = -5$$

$$x = 4^- \implies f(x) = -(x^2 - 4x) + (x + 1) = -x^2 + 5x + 1 \implies f'(x) = -2x + 5 \implies f'_-(4) = -3$$

مثال ۴. اگر $f(x)=(x^۲-۳)\mathrm{Arctan}\dfrac{x}{\sqrt{۳}}$، مقدار $f'(\sqrt{۳})$ را بیابید.

چون $g(x)=x^۲-۳$ در نقطه $\sqrt{۳}$ صفر می‌شود پس از نکته ۸ در صفحه ۱۲۸:

$$f'(\sqrt{۳}) = \text{مشتق عامل صفر شونده} \times \text{حد عبارت باقیمانده} = g'(\sqrt{۳})\mathrm{Arctan}\,۱ = \frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۵. مشتق تابع $f(x)=x^{\tan\frac{\pi x}{۴}}$ را در $x=۱$ به‌دست آورید.

$$y=x^{\tan\frac{\pi x}{۴}} \Longrightarrow \ln y=\tan\frac{\pi x}{۴}\ln x \Longrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\pi}{۴}\sec^۲\frac{\pi x}{۴}\ln x+\frac{\tan\frac{\pi x}{۴}}{x}$$

$$\xrightarrow{x=۱}\frac{y'(۱)}{y(۱)}=۰+۱=۱ \Longrightarrow y'(۱)=۱$$

تست ۱ تابع $f(x)=\begin{cases} x[\frac{۱}{x}] & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰\end{cases}$ **از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=۰$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟**

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر ۲) ناپیوسته و مشتق‌پذیر ۳) ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر ۴) پیوسته و مشتق‌ناپذیر

حل: گزینه ۴ درست است. برای محاسبه حد تابع f در $x=۰$ چون $\frac{۱}{x}\to\pm\infty$ پس $\frac{۱}{x}\sim\left[\frac{۱}{x}\right]$.

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}x\cdot\frac{۱}{x}=۱=f(۰)$$

پس f در $x=۰$ پیوسته است. برای بررسی مشتق‌پذیری داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x[\frac{۱}{x}]-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\left[\frac{۱}{x}\right]-\frac{۱}{x}\right)$$

عبارت $\left[\frac{۱}{x}\right]-\frac{۱}{x}$ قرینه جزاعشاری $\frac{۱}{x}$ و لذا بین -۱ و ۰ نوسان کرده و لذا حد بالا موجود نیست. پس f در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

تست ۲ $g(x)$ **تابعی است با مشتقات پیوسته از هر مرتبه دلخواه که $g(۰)=g'(۰)=۰$ و $g''(۰)=-۲$ و** $f(x)=\begin{cases} g(x)\cos\frac{۱}{x^۳} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰\end{cases}$، **کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟**

۱) $f'(۰)=-۲$ ۲) $f'(۰)=-۱$

۳) $f'(۰)=۰$ ۴) ممکن است $f'(۰)$ موجود نباشد.

حل: گزینه ۳ درست است. از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)\cos\frac{۱}{x^۳}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{x}\cos\frac{۱}{x^۳}$$

حال $\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-۰}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=g'(۰)=۰$ و لذا حد بالا به صورت حاصلضرب صفر در کراندار و برابر صفر است.

تست ۳ **اگر برای $|x|<۱$، $x\le f(x)\le x+x^۲$، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟** (آمار ۷۶)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: گزینه ۳ درست است. ابتدا برای محاسبه $f(۰)$ مقدار $x=۰$ را در نابرابریها قرار می‌دهیم.

$$۰\le f(۰)\le ۰+۰^۲ \Longrightarrow ۰\le f(۰)\le ۰ \Longrightarrow f(۰)=۰$$

حال کسر مشتق یعنی $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ را تشکیل می‌دهیم. اگر $x > 0$ داریم:

$$x \le f(x) \le x + x^2 \implies 1 \le \frac{f(x)}{x} \le 1 + x$$

وقتی $x \to 0^+$ دو طرف نابرابری به یک میل می‌کند و لذا بنا به قضیه فشردگی $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$.

به‌طوری مشابه برای $x < 0$ داریم $1 + x \le \frac{f(x)}{x} \le 1$ و لذا بنابه قضیه فشردگی $f'_-(0) = 1$ پس $f'(0) = 1$.

تست ۴ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ گویا} \\ 0 & x \text{ اصم} \end{cases}$ در چه نقاطی مشتق‌پذیر است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) در تمام اعداد گویا
۲) در تمام اعداد اصم
۳) فقط در یک نقطه
۴) در تمام مجموعه اعداد حقیقی

حل: گزینه ۳ درست است. نقاط پیوستگی f از تساوی دو ضابطه به‌دست می‌آید پس f فقط در $x = 0$ پیوسته است و لذا فقط در $x = 0$ ممکن است دارای مشتق باشد. (با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینهٔ صحیح، (۳) است و نیازی به انجام محاسبات زیر نیست.)

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} - \{0\} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \implies \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = f'(0)$$

پس f در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

تست بالا را با توجه به نکته زیر نیز می‌توان حل نمود.

نکته ۱۰. اگر $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ **در نقطه x_0 پیوسته باشد، f در x_0 مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر** $f'_1(x_0) = f'_2(x_0)$.

تست ۵ فرض کنید f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ برابر است با

(معدن ۷۶، MBA ۸۱)

۱) 0
۲) $2f'(x_0)$
۳) $f'(x_0)$
۴) $\frac{1}{2}f'(x_0)$

حل: گزینه ۲ درست است. با اضافه و کم کردن $f(x_0)$ در صورت کسر داده شده، تعریف مشتق را ایجاد می‌کنیم.

$$\text{حد} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right) = f'(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$
$$= f'(x_0) + f'(x_0) = 2f'(x_0)$$

نکته ۱۱. اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد و $m, n \in \mathbb{R}$ دلخواه باشند:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h} = (m-n)f'(x_0)$$

تذکر ۱۱. وجود حد بالا، مشتق‌پذیری f در x_0 را نتیجه نمی‌دهد.

تست ۶ اگر $f(x) = \sinh^{-1}(\tan x)$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) -2
۲) -1
۳) 1
۴) 2

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به فرمولهای ۶ و ۲۴ در صفحه ۱۲۶ و ۱۲۷:

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \sqrt{1 + \tan^2 x} \implies f'(0) = 1$$

تست ۷ مشتق تابع $y = \sin^2\left(\frac{1}{2}\text{Arccos } x^2\right)$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ برابر است با: (آمار ـ آزاد ۸۲)

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) 2

حل: گزینه ۳ درست است. می‌توانیم از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده کنیم. اما با فرض $\alpha = \frac{1}{2}\text{Arccos } x^2$ داریم:

$$y = \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\text{Arccos}x^2)) = \frac{1}{2}(1 - x^2) \implies y' = -x \overset{x=\frac{1}{2}}{=\!=} -\frac{1}{2}$$

تست ۸ اگر f مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \sqrt{x}$ مقدار مشتق $f(\frac{1}{x})$ به ازای $x = 1$ کدام است؟ (سیستم ۷۹)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به تست ۵ در صفحه قبل، حد داده شده $2f'(x)$ است پس $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

$$\text{قاعده مشتق زنجیره‌ای} \implies \frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x=1} \text{مشتق} = -\frac{1}{2}$$

تست ۹ در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$ اگر $f'(1)$ موجود باشد b کدام است؟

(صنایع غذایی، مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

حل: گزینه ۲ درست است. f باید در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b \xrightarrow{\text{پیوستگی}} a + b = -1$$

و شرط مشتق‌پذیری، تساوی مشتق چپ و راست است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 1 \\ a & x < 1 \end{cases} \implies a = f'_-(1) \text{ و } f'_+(1) = 0 \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

تست ۱۰ اگر $g(x) = [x]\sin x$، $g'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟ (ریاضی ۷۶)

۱) ∞ ۲) 0 ۳) 1 ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است. تابع $[x]$ در هر بازه‌ای که شامل عدد صحیح نباشد، تابع ثابت است. پس بازه‌ای حول $x_0 = \frac{\pi}{2}$ و مثلاً $1 < x < 2$ را در نظر می‌گیریم.

$$[x] = 1 \implies g(x) = \sin x \implies g'(x) = \cos x \implies g'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

تست ۱۱ مقدار مشتق تابع $g(x) = [x^2 + 4x]$ در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ به ترتیب کدام است؟

۱) صفر، صفر ۲) صفر، وجود ندارد

۳) وجود ندارد، صفر ۴) وجود ندارد، وجود ندارد

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $f(x) = x^2 + 4x$ آنگاه $f(1) = 5$ عددی صحیح است و لذا این نقطه کاندیدای ناپیوستگی است. با توجه به نکته ۳۰ در صفحه ۸۶ باید بررسی کنیم که آیا این نقطه می‌نیمم است. چون $f'(1) = 6 \neq 0$ پس این نقطه می‌نیمم نیست و لذا g در آن ناپیوسته و فاقد مشتق است. اما $f(-2) = -4$ و به

راحتی می‌توان بررسی کرد که این نقطه می‌نیمم نسبی است و لذا g پیوسته است. حال با توجه به نکته ۶ در صفحه ۱۲۸ داریم $g'(-2) = 0$.

تست ۱۲ اگر $f(x) = |\sin x|$، $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟ (ریاضی ۸۱)

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) موجود نیست.

حل: گزینه ۱ درست است. حول $x = \frac{\pi}{2}$ داریم $\sin x > 0$ و لذا قدرمطلق را حذف می‌کنیم.

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x \Longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

تست ۱۳ تابع $f(x) = \text{Arccos}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ که $n \in \mathbb{N}$ مفروض است. مقدار $f'(0)$ برابر است با:

۱) 2 ۲) -2

۳) 0 ۴) ممکن است موجود نباشد.

حل: گزینه ۴ درست است. f در $x = 0$ پیوسته است.

$$f'(x) = -\frac{\frac{2(2nx^{2n-1})}{(x^{2n}+1)^2}}{\sqrt{1-(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})^2}} = -\frac{4nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2\sqrt{\frac{(x^{2n}+1)^2-(x^{2n}-1)^2}{(x^{2n}+1)^2}}} = -\frac{4nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)\sqrt{4x^{2n}}}$$

$$= -\frac{4nx^{2n-1}}{2|x|^n(x^{2n}+1)} = -\frac{4n|x|^{2n}}{2x|x|^n(x^{2n}+1)} = -\frac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}$$

با جایگذاری $x = 0$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم و باید حد $f'(x)$ را جایگذاری کنیم.

$$n = 1 \Longrightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2 \\ f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$ f در $x = 0$ فاقد مشتق است.

$$n > 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0$$

تست ۱۴ مشتق تابع $y = x^x$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۷۹)

۱) $x^{x-1}\ln x$ ۲) $(1+\ln x)x^x$ ۳) $x^x \ln x$ ۴) x^x

حل: گزینه ۲ درست است. باید از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده کنیم.

$$\ln y = \ln x^x = x\ln x \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{y'}{y} = 1 + \ln x \Longrightarrow y' = x^x(1+\ln x)$$

تست ۱۵ اگر $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+4)^{\frac{1}{2}}(x+8)^{\frac{1}{3}}}$، $f'(0)$ کدام است؟ (ریاضی ۷۴)

۱) -5 ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{20}{3}$

حل: گزینه ۴ درست است. از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$\ln y = 2\ln(x+1) + 3\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4) - \frac{1}{3}\ln(x+8)$$

$$\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{3(x+8)}$$

$$x = 0 \Longrightarrow \frac{y'(0)}{y(0)} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{10}{3} \xrightarrow{y(0)=2} y'(0) = \frac{20}{3}$$

۳-۲ مشتق تابع معکوس، ضمنی و پارامتری

با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای می‌توان قواعد زیر را برای مشتق‌گیری به دست آورد.

۱) مشتق تابع وارون

اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه‌ای واقع بر نمودار تابع پیوسته f باشد و $f'(x_\circ) \neq \circ$ آنگاه $(f^{-1})'(y_\circ) = \dfrac{1}{f'(x_\circ)}$

تذکر۱۲. با جایگذاری $y_\circ = f(x_\circ)$ یا $x_\circ = f^{-1}(y_\circ)$ در رابطه بالا می‌توان روابط زیر را به دست آورد.

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'} \quad \text{و} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

تذکر۱۳. قاعده مشتق تابع معکوس را به صورت $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ نیز می‌توان نوشت.

۲) مشتق تابع ضمنی

اگر رابطه $F(x,y) = \circ$، y را به‌عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x معرفی کند، می‌توانیم y' را با مشتق‌گیری مستقیم از فرمول $F(x,y) = \circ$ به دست آوریم یا از رابطه $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ استفاده کنیم.

در این فرمول F'_x یعنی از F با فرض اینکه y عددی ثابت است نسبت به x مشتق بگیریم و F'_y یعنی اینکه با فرض ثابت بودن x از رابطه نسبت به y مشتق بگیریم.

۳) مشتق پارامتری

اگر رابطه‌ای به صورت پارامتری $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ بیان شود آنگاه $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

تذکر۱۴. اگر پارامتر t بین x و y حذف شود، معادله دکارتی منحنی توصیف شده توسط روابط پارامتری به دست می‌آید. از نظر فیزیکی اگر t زمان باشد، معادلات بالا مکان نقطه متحرک M را نمایش می‌دهد و با حذف t در صورت امکان، معادله مسیر حرکت به دست می‌آید.

نکته ۱۲. اگر در نقطه $t_\circ$ حالت مبهم رخ دهد و $\lim\limits_{t \to t_\circ} \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ موجود باشد، مقدار آن برابر $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=t_\circ}$ است.

۴) مشتق تابع $f(x)$ نسبت به $g(x)$

اگر $y = f(x)$ و $u = g(x)$، مشتق f نسبت به g یعنی $\dfrac{dy}{du}$ برابر است با $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

تست ۱۶ اگر $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq \circ \\ 1 - x^3 & x < \circ \end{cases}$، $(f^{-1})'(-1)$ کدام است؟ (آمار ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$ ۴) $-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

حل: گزینه ۱ درست است. اگر $f(x) = -1$ از ضابطه اول داریم $-x^2 = -1$ که $x = \pm 1$ و فقط $x = 1$ در ضابطه صدق می‌کند. اگر ضابطه دوم را برابر -1 قرار دهیم، $x = \sqrt[3]{2}$ به دست می‌آید که در $x < \circ$ صدق نمی‌کند. پس ضابطه $f(x)$ در اطراف $x = 1$ به صورت $f(x) = -x^2$ است و لذا:

$$f'(x) = -2x \implies f'(1) = -2 \implies (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2}$$

تست ۱۷ اگر داشته باشیم $\ln(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\frac{x}{y} = 0$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (آمار ۸۰)

۱) $\frac{x+y}{x-y}$ ۲) $\frac{2y}{x}$ ۳) $\frac{x+y}{x-1}$ ۴) $x+y$

حل: گزینه ۱ درست است. از فرمول مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم. رابطه را F می‌نامیم.

$$F'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{\frac{2}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{2x+2y}{x^2+y^2} \quad \text{و} \quad F'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{-\frac{2x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{2y-2x}{x^2+y^2}$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x+2y}{2y-2x} = \frac{x+y}{x-y}$$

تست ۱۸ در رابطه $x^n y^m = (x+y)^{n+m}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟ (شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{y}{x}$ ۲) $-\frac{y}{x}$ ۳) $(\frac{y}{x})^{m+n-2}$ ۴) $(\frac{y}{x})^{m-n-2}$

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا از رابطه لگاریتم می‌گیریم.

$$n\ln x + m\ln y = (n+m)\ln(x+y) \implies F = n\ln x + m\ln y - (n+m)\ln(x+y) = 0$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{n}{x} - \frac{n+m}{x+y}}{\frac{m}{y} - \frac{n+m}{x+y}}$$

صورت و مخرج عبارت بالا را در $xy(x+y)$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ny(x+y) - (n+m)xy}{mx(x+y) - (n+m)xy} = -\frac{y(ny-mx)}{x(mx-ny)} = \frac{y}{x}$$

تست ۱۹ اگر $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \cdots}}}$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\cos x}{2y-1}$ ۲) $\frac{\cos x}{2y-1}$ ۳) $-\frac{\cos x}{2y+1}$ ۴) $\frac{\cos x}{2y+1}$

حل: گزینه ۲ درست است. قسمتی از عبارت زیر رادیکال یعنی $\sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \cdots}}$ برابر y است.

$$y = \sqrt{\sin x + y} \implies y^2 = \sin x + y \implies y^2 - \sin x - y = 0 \implies y' = -\frac{-\cos x}{2y-1} = \frac{\cos x}{2y-1}$$

۳ــ۳ تعبیرهای مشتق

۱) تعبیر هندسی مشتق

اگر تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، $f'(x_0)$ شیب **خط مماس** بر نمودار f در نقطه $(x_0, f(x_0))$ است و خطی که بر مماس در این نقطه عمود باشد، **خط قائم** نامیده می‌شود. بنابراین معادله خطوط مماس و قائم در نقطه (x_0, y_0) واقع بر نمودار f عبارت است از:

معادله خط مماس $\qquad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

معادله خط قائم $\qquad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

اگر در فرمول خط مماس از $f'_-(x_0)$ یا $f'_+(x_0)$ استفاده کنیم، معادله نیم‌خط‌های مماس از راست و چپ بر نمودار f به دست می‌آید و شرط وجود خط مماس آن است که دو نیم‌خط مماس با هم زاویه 180° بسازند و تشکیل یک

خط دهند.

نکته ۱۳. اگر f در $x_\circ$ پیوسته و حد کسر مشتق برابر بی‌نهایت شود، تابع f در $x_\circ$ دارای مماس عمودی به معادله $x = x_\circ$ است.

نکته ۱۴. برای نوشتن معادله خط مماس بر نمودار f از نقطه $A(x_\setminus, y_\setminus)$ خارج نمودار می‌توانیم از یکی از دو روش زیر استفاده نماییم.

۱) معادله خط مماس را در نقطه دلخواه $(x_\circ, y_\circ)$ واقع بر نمودار f می‌نویسیم. سپس $x_\circ$ را طوری تعیین می‌کنیم که A در معادله صدق کند.

۲) معادله دسته خطوط گذرنده از A یعنی $y - y_\setminus = m(x - x_\setminus)$ را نوشته و آنرا با نمودار منحنی تلاقی می‌دهیم. این معادله باید دارای ریشه با مرتبه تکرار بیشتر از یک (مثلاً ریشه مضاعف) باشد.

تذکر۱۵. روش اول اشاره شده را می‌توانیم برای نوشتن معادله خط قائم بر نمودار f از نقطه خارج نمودار هم استفاده کنیم.

نکته ۱۵. زاویه بین نمودارهای f و g در نقطه برخورد، زاویه بین مماس‌های آنها است.

اگر شیب مماس هر دو یکسان باشد می‌گوییم دو منحنی بر هم مماس و اگر حاصلضرب شیبهای آنها برابر ۱− باشد، می‌گوییم بر هم عمود هستند.

تذکر۱۶. اگر دوخط دارای شیبهای $m_\setminus$ و m_Υ باشند و زاویه حاده یا قائمه آنها در نقطه برخورد را θ فرض کنیم آنگاه $\tan\theta = \left|\dfrac{m_\setminus - m_\Upsilon}{\setminus + m_\setminus m_\Upsilon}\right|$.

مثال ٦. از مبدأ چند خط می‌توان بر دایره $x^\Upsilon + y^\Upsilon - \text{۴}x + \text{۳} = \circ$ مماس کرد؟

چون مبدأ خارج دایره است به‌طور هندسی واضح است که دو خط می‌توان مماس کرد. برای بررسی این مطلب به‌طور جبری کافی‌است معادله دسته خطوط گذرنده از مبدأ را بنویسیم و آن را با دایره تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} y = mx & \text{معادله دسته خطوط} \\ x^\Upsilon + y^\Upsilon - \text{۴}x + \text{۳} = \circ \end{cases} \Longrightarrow (\setminus + m^\Upsilon)x^\Upsilon - \text{۴}x + \text{۳} = \circ \qquad (*)$$

شرط مماس شدن، وجود ریشه مضاعف است.

$$\circ = \Delta = \text{۱٦} - \text{۱۲}(\setminus + m^\Upsilon) = -\text{۱۲}m^\Upsilon + \text{۴} \Longrightarrow m = \pm\frac{\setminus}{\sqrt{\text{۳}}}$$

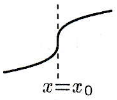
چون دو مقدار برای m به دست آمد پس دو مماس می‌توان رسم کرد. ضمناً طول نقطه تماس ریشه مضاعف معادله $(*)$ یعنی $x = \dfrac{\text{۴}}{\Upsilon(\setminus + m^\Upsilon)} = \dfrac{\text{۳}}{\Upsilon}$ است.

تذکر۱۷. دسته‌بندی نقاطی که تابع در آنها فاقد مشتق است.

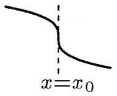
۱) نقاطی که تابع f در آنها ناپیوسته باشد. در این نقاط خط مماس وجود ندارد.

۲) اگر f در $x_\circ$ پیوسته باشد، یکی از چهار حالت زیر رخ می‌دهد.

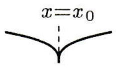
الف) مشتق چپ و راست در $x_\circ$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند.



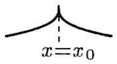
در این حالت دو نیم مماس عمودی به معادله $x = x_\circ$ داریم که با هم زاویه 180° می‌سازند و تشکیل خط مماس می‌دهند که از نمودار f عبور می‌کند. در این صورت نمودار f حول نقطه $x_\circ$ به یکی از دو شکل روبرو است و $x_\circ$ نقطه **عطف قائم** نامیده می‌شود.



ب) یکی از دو مشتق $+\infty$ و دیگری $-\infty$ است.



در این حالت دو نیم مماس $x = x_\circ$ بر هم منطبق شده و زاویه صفر با هم می‌سازند و لذا خط مماس وجود ندارد. نمودار f حول نقطه $x_\circ$ به یکی از دو شکل روبرو است و $x_\circ$ نقطه **بازگشت** نامیده می‌شود. ضمناً $x_\circ$ نقطه اکسترمم نسبی برای f است.



ج) یکی از دو مشتق عدد حقیقی و دیگری عدد حقیقی یا بینهایت شود.

در این حالت دو نیم مماس زاویه‌ای بین 0° و 180° می‌سازند و لذا خط مماس وجود ندارد. نقطه $x_\circ$ را نقطه **زاویه‌دار** می‌نامند.

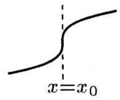
د) حداقل یکی از دو مشتق عدد یا بینهایت نشود.

در این حالت حداقل یکی از دو نیم مماس و بنابراین خط مماس وجود ندارد.

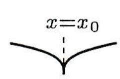
نکته ۱۶. در حالتی که $x_\circ$ نقطه زاویه‌دار است، برای به دست آوردن زاویه بین دو نیم مماس قرار می‌دهیم $m_1 = f'_+(x_\circ)$ و $m_2 = f'_-(x_\circ)$. از رابطه $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ زاویه حاده یا قائمه را محاسبه می‌کنیم. زاویه واقعی θ یا $\pi - \theta$ است که در هر مورد با توجه به هندسه مسأله باید تشخیص داده شود زاویه واقعی حاده (یعنی θ) یا منفرجه (یعنی $\pi - \theta$) است.

نکته ۱۷. اگر $g'(x_\circ) \neq 0$ و $g(x_\circ) = 0$ نقطه $x = x_\circ$ برای تابع $f(x) = |g(x)|$ نقطه زاویه‌دار است.

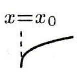
نکته ۱۸. فرض کنید $f(x) = \sqrt[n]{(x - x_\circ)^m}$ که $m < n$:



الف) اگر n و m هر دو فرد باشند، $x_\circ$ عطف قائم و نمودار آن در اطراف این نقطه مطابق شکل است.



ب) اگر m زوج باشد، $x_\circ$ نقطه بازگشت و نمودار آن در اطراف این نقطه مطابق شکل است.



ج) اگر m فرد و n زوج باشد، فقط نیم مماس از راست به معادله $x = x_\circ$ موجود است و نمودار آن در اطراف این نقطه مطابق شکل است.

مثال ۷. وضعیت نقطه $x = \circ$ را برای هر یک از توابع زیر بررسی نمایید.

الف) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ب) $f(x) = \sqrt[3]{x^{2}}$

ج) $f(x) = |\sin x|$ د) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$

الف) اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در این صورت f در $x = \circ$ پیوسته است.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}} \implies f'_{+}(\circ) = f'_{-}(\circ) = +\infty \implies$$ $x = \circ$ نقطه عطف قائم است.

ب) تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^{2}}$ در $x = \circ$ پیوسته است.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \implies f'_{+}(\circ) = +\infty \text{ و } f'_{-}(\circ) = -\infty \implies$$ $x = \circ$ بازگشت است.

ج) تابع $f(x) = |\sin x|$ در $x = \circ$ پیوسته است.

$$f'(x) = \cos x \frac{\sin x}{|\sin x|} \implies f'_{+}(\circ) = 1 \text{ و } f'_{-}(\circ) = -1 \implies$$ $x = \circ$ زاویه‌دار است.

د) تابع در $x = \circ$ پیوسته است.

$$f'(\circ) = \lim_{x \to \circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \to \circ} \left(\sin \frac{1}{x}\right)$$

و چون حد چپ و راست موجود نیست، نیم مماس چپ و راست در مبدأ وجود ندارد.

۲) تعبیر فیزیکی مشتق

کسر مشتق یعنی $\dfrac{f(x_{\circ} + h) - f(x_{\circ})}{h}$ **آهنگ متوسط** تغییر تابع f در نقطه $x_{\circ}$ در فاصله $x_{\circ}$ و $x_{\circ} + h$ نامیده می‌شود و حد آن یعنی مشتق f در $x_{\circ}$ را **آهنگ لحظه‌ای** f در $x_{\circ}$ می‌نامند. در حالت خاصی که $x = t$ نشان دهنده زمان و $f(t)$ مکان متحرکی باشد که روی محور حقیقی حرکت می‌کند، آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر همان سرعت متوسط و لحظه‌ای متحرک است. آهنگ لحظه‌ای تغییرات سرعت لحظه‌ای نسبت به زمان، **شتاب حرکت** نامیده می‌شود.

۳) تعبیر اقتصادی مشتق

اقتصاددانها آهنگ لحظه‌ای را با واژه **نهایی** بیان می‌کنند.

سه تابع مهم $R(x)$ و $C(x)$ و $P(x)$ به ترتیب **درآمد** حاصل از فروش، **هزینه** تولید و **سود** حاصل از فروش x کالا است. در این صورت $P(x) = R(x) - C(x)$.

درآمد متوسط، هزینه متوسط و سود متوسط برای x کالا به ترتیب $\dfrac{R(x)}{x}$ و $\dfrac{C(x)}{x}$ و $\dfrac{P(x)}{x}$ هستند و $R'(x)$ و $C'(x)$ و $P'(x)$ به ترتیب درآمد نهایی، هزینه نهایی و سود نهایی برای x کالا هستند.

با توجه به اینکه $R'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to \circ} \dfrac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x}$، با قرار دادن $\Delta x = 1$ داریم:

$$R(x + 1) - R(x) \simeq R'(x)$$

یعنی درآمد حاصل از فروش کالای $(x + 1)$ ام تقریباً با درآمد نهایی حاصل از فروش x کالا برابر است.

مثال ۸. هزینه تولید x قلم از یک کالا $C(x) = ۵۰۰ + x + \sqrt{x}$ است. هزینه متوسط تولید صد کالا و هزینه (تقریبی) تولید کالای صدویکم را به دست آورید.

$$\text{هزینه متوسط} = \frac{C(۱۰۰)}{۱۰۰} = \frac{۵۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰}{۱۰۰} = ۶/۱$$

$$\text{هزینه تولید کالای } ۱۰۱ \ (x = ۱۰۱) = C(۱۰۱) - C(۱۰۰) \simeq C'(۱۰۰)$$

$$C'(x) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \implies \text{هزینه} \simeq ۱ + \frac{۱}{۲۰} = ۱/۰۵$$

$\boxed{\text{تست ۲۰}}$ **f تابعی زوج است که از نقطه $(۱, ۲)$ می‌گذرد و $f'(۱) = ۳$. معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه به طول -۱ کدام است؟**

۱) $y + ۳x + ۵ = ۰$ ۲) $y + ۳x + ۱ = ۰$

۳) $y = ۳x + ۱$ ۴) اطلاعات داده شده کافی نیست.

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. معادله خط مماس بر نمودار f در $x = ۱$ به صورت $y = ۳x - ۱$ است. چون f زوج است نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن است پس مماس بر آن در $x = -۱$، قرینه مماس بر f در $x = ۱$ نسبت به محور y هاست. پس کافی است $x \to -x$ تبدیل شود و بنابراین:

$$y = -۳x - ۱ \implies y + ۳x + ۱ = ۰$$

روش دوم. چون f زوج است با توجه به نکته ۲ در صفحه ۱۲۶، f' فرد است و لذا $f'(-۱) = -f'(۱) = -۳$. از طرفی نقطه به طول -۱ برابر $(-۱, ۲)$ بوده و لذا معادله خط مماس برابر است با:

$$y - ۲ = -۳(x + ۱) \implies y + ۳x + ۱ = ۰$$

$\boxed{\text{تست ۲۱}}$ **معادله خط مماس بر نمودار معکوس $f(x) = x^۳ + ۳x$ در نقطه‌ای با عرض یک روی نمودار $f^{-۱}$ کدام است؟**

۱) $y = ۶x - ۲$ ۲) $y = \frac{۱}{۶}x + \frac{۱}{۳}$ ۳) $۶y = x + ۲۳$ ۴) $y = ۶x - ۲۳$

حل: گزینه ۲ درست است. نقطه با عرض ۱ روی $f^{-۱}$، نقطه با طول ۱ روی نمودار f است و $f(۱) = ۴$.

روش اول. باید معادله خط با شیب $(f^{-۱})'(۴)$ و گذرنده از نقطه $(۴, ۱)$ را نوشت.

$$(f^{-۱})'(۴) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۳ + ۳} = \frac{۱}{۶} \implies y - ۱ = \frac{۱}{۶}(x - ۴) \implies y = \frac{۱}{۶}x + \frac{۱}{۳}$$

روش دوم. معادله مماس بر f در $(۱, ۴)$ با شیب $f'(۱) = ۶$ را به صورت $y = ۶x - ۲$ را می‌نویسیم. چون نمودار $f^{-۱}$ قرینه نمودار f نسبت به خط $y = x$ است، پس کافی است خط مماس بر نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم و در واقع از تبدیل $y \to x$ و $x \to y$ استفاده نماییم که $x = ۶y - ۲$ یا $y = \frac{۱}{۶}x + \frac{۱}{۳}$ حاصل می‌شود.

$\boxed{\text{تست ۲۲}}$ **کلیه نقاطی از منحنی $x^۲ + ۲xy + ۳y^۲ = ۳$ را که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $x + y = ۱$ عمود شود را پیدا کنید.** (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $(\pm۲, \mp۱)$ ۲) $(\pm\sqrt{۳}, ۰)$ ۳) $(۰, \pm۱)$ ۴) $(\pm۱, \pm\sqrt{۲})$

حل: گزینه ۱ درست است. چون شیب خط $x + y = ۱$ برابر -۱ است، باید نقاطی از منحنی که شیب آنها عکس

و قرینه ۱− یعنی ۱ است را بیابیم.

$$y' = -\frac{۲x+۲y}{۲x+۶y} = ۱ \implies -۲x-۲y = ۲x+۶y \implies x = -۲y$$
$$\xrightarrow{\text{معادله منحنی}} ۴y^۲ - ۴y^۲ + ۳y^۲ = ۳ \implies y = \pm ۱ \implies x = \mp ۲ \implies (\pm ۲, \mp ۱)$$

تست ۲۳ خط مماس از مبدأ بر نمودار تابع $y = \ln\sqrt{x}$ در نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ بر منحنی مماس است، $y_\circ$ کدام است؟
(ژئوفیزیک، سیستم هسته‌ای و نفت ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

حل: گزینه ۲ درست است. مبدأ خارج نمودار است پس خط مماس در $(x_\circ, y_\circ)$ باید از مبدأ عبور کند.

$$y = \frac{۱}{۲}\ln x \implies y' = \frac{۱}{۲x} \implies m = \frac{۱}{۲x_\circ} \quad : \quad y - y_\circ = \frac{۱}{۲x_\circ}(x - x_\circ)$$
$$x = y = \circ \implies -y_\circ = \frac{۱}{۲x_\circ}(-x_\circ) \implies y_\circ = \frac{۱}{۲}$$

تست ۲۴ از مبدأ مختصات دو خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۲+a}{x+۴}$ طوری رسم می‌کنیم که بر هم عمود باشند. a برابر است با:

۱) ۴− ۲) ۲− ۳) ۲ ۴) ۴

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به نکته ۱۴ در صفحه ۱۳۶ ابتدا معادله دسته خطوط گذرنده از مبدأ را به صورت $y = mx$ نوشته و آنرا با نمودار تلاقی می‌دهیم.

$$mx = \frac{x^۲+a}{x+۴} \implies (m-۱)x^۲ + ۴mx - a = \circ$$

برای آنکه خطوط فوق بر منحنی مماس باشند، معادله بالا باید دارای ریشه مضاعف باشد و لذا $\Delta = ۱۶m^۲ + ۴ma - ۴a = \circ$ با توجه به اینکه ریشه‌های این معادله برابر شیب خطوط مماس است و شرط عمود بودن دو خط بر هم آن است که حاصلضرب شیبهای آنها برابر ۱− باشد، پس باید ضرب ریشه‌های این معادله یعنی $\frac{-۴a}{۱۶}$ برابر ۱− باشد و لذا $a = ۴$.

تست ۲۵ کدام گزینه در مورد تعداد قائم‌هایی که بر نمودار $x = y^۲$ از نقطه $(\alpha, \circ)$ می‌توان رسم کرد، درست است؟
(۸۱ MBA)

۱) اگر $\alpha < \frac{۱}{۲}$ قائمی نمی‌توان رسم کرد. ۲) اگر $\alpha \geq \frac{۱}{۲}$ حداقل سه قائم می‌توان رسم‌کرد.
۳) برای $\circ < \alpha < \frac{۱}{۲}$ حداقل دو قائم می‌توان رسم کرد. ۴) برای $\alpha > \frac{۱}{۲}$ دقیقاً سه قائم می‌توان رسم کرد.

حل: گزینه ۴ درست است. معادله قائم در نقطه دلخواه $(x_\circ, y_\circ)$ واقع بر منحنی را می‌نویسیم.

$$۱ = ۲yy' \implies m = \frac{۱}{۲y_\circ} \implies m' = -۲y_\circ \implies y - y_\circ = -۲y_\circ(x - x_\circ)$$

این خط باید از $(\alpha, \circ)$ عبور کند و ضمناً چون $(x_\circ, y_\circ)$ روی منحنی است پس $x_\circ = y_\circ^۲$:

$$-y_\circ = -۲y_\circ(\alpha - y_\circ^۲) \implies ۲y_\circ(\alpha - y_\circ^۲ - \frac{۱}{۲}) = \circ \implies y_\circ = \circ \quad \text{و} \quad y_\circ^۲ = \alpha - \frac{۱}{۲} \qquad (*)$$

هر جواب از معادلات (*) متناظر یک قائم است. پس باید تعداد جوابهای (*) را بدست آوریم.

- اگر $\alpha < \frac{۱}{۲}$ معادله $y_۰^۲ = \alpha - \frac{۱}{۲}$ فاقد جواب و لذا معادلات (*) یک جواب دارند.
- اگر $\alpha = \frac{۱}{۲}$ معادله $y_۰^۲ = \alpha - \frac{۱}{۲}$ فقط جواب $y_۰ = ۰$ را دارد پس معادلات (*) یک جواب دارند.
- اگر $\alpha > \frac{۱}{۲}$ معادله $y_۰^۲ = \alpha - \frac{۱}{۲}$ دو جواب متمایز و غیر صفر دارد و لذا معادلات (*) سه جواب دارند.

بنابراین برای $\alpha > \frac{۱}{۲}$ دقیقاً سه قائم می‌توان رسم کرد.

تست ۲۶ هر گاه نمودار تابع $f(x) = \frac{(۲\sin \pi x + a)(۹x^۲ - ۱)}{x}$ بر محور طول‌ها مماس باشد، چند مقدار برای a بدست می‌آید؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

حل: گزینه ۲ درست است. اگر نمودار $f(x)$ در $x = b$ بر محور x ها مماس باشد باید $f(b) = ۰$ و $f'(b) = ۰$ و لذا $x = b$ ریشه با مرتبه تکرار حداقل ۲ برای f است پس باید ریشه‌های f را بیابیم. توجه کنید که از نکته ۱۰ در صفحه ۲۶ پاسخ معادله $\sin x = c$ برای $c \neq \pm ۱$ ریشه ساده است و برای $c = \pm ۱$ ریشه با مرتبه تکرار دو یعنی ریشه مضاعف است. پس مقدار a برای آنکه ریشه با مرتبه تکرار بیش از یک حاصل شود، دارای دو حالت زیر است:

- ریشه‌های معادله $۹x^۲ - ۱ = ۰$ یعنی $x = \pm\frac{۱}{۳}$ که ریشه‌های ساده هستند، ریشه‌های معادله $۲\sin \pi x + a = ۰$ نیز باشند و لذا $a = -\sqrt{۳}$ و $a = \sqrt{۳}$ خواهد بود.
- ریشه‌های مضاعف معادله $۲\sin \pi x + a = ۰$ که با توجه به بحث بالا وقتی رخ می‌دهد که $\sin \pi x = \pm ۱$ و لذا $a = \pm ۲$.

پس در کل ۴ مقدار برای a حاصل می‌شود.

تست ۲۷ منحنی نمایش‌های توابع $y^۲ = ۴x + ۴$ و $y^۲ = ۴ - ۴x$ تحت کدام زوایای زیر همدیگر را قطع می‌کنند؟ (معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) ۴۵ درجه ۲) قائم ۳) ۳۰ درجه ۴) ۶۰ درجه

حل: گزینه ۲ درست است. باید زاویه بین مماس‌های دو نمودار را در نقطه برخورد محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} y^۲ = ۴ - ۴x \\ y^۲ = ۴x + ۴ \end{cases} \Longrightarrow ۴ - ۴x = ۴x + ۴ \Longrightarrow x = ۰ \ , \ y = \pm ۲$$

$$\begin{cases} y^۲ = ۴x + ۴ \Longrightarrow ۲yy' = ۴ \Longrightarrow y_۱' = \frac{۴}{۲y} \\ y^۲ = ۴ - ۴x \Longrightarrow ۲yy' = -۴ \Longrightarrow y_۲' = -\frac{۴}{۲y} \end{cases} \Longrightarrow y_۱'y_۲' = -\frac{۴}{y^۲} = -\frac{۴}{(\pm ۲)^۲} = -۱ \Longrightarrow$$ بر هم عمودند.

تست ۲۸ زاویه بین نیم مماس چپ و راست برای تابع $f(x) = \begin{cases} \tan x & x \geq ۰ \\ \frac{x}{\sqrt{۳}} \cos x & x < ۰ \end{cases}$ در مبدأ برابر است با: (MBA ۸۱)

۱) $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا شیب نیم مماسها را محاسبه می‌کنیم.

$$m_1 = f'_+(0) = 1 \quad \text{و} \quad m_2 = f'_-(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

اگر زاویه نیم مماس راست و چپ با محور x ها را به‌ترتیب α_1 و α_2 بگیریم:

$$\tan\alpha_1 = 1 \quad \text{و} \quad \tan\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} \quad \text{و} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{7\pi}{6}$$

برای مشخص شدن زاویه باید ربعی‌که f در آن واقع است مشخص شود، چون برای $x > 0$ داریم $f(x) > 0$ پس نیمه راست شکل در ربع اول است و $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$. چون برای $x < 0$ داریم $f(x) < 0$ پس نیمه چپ شکل در ربع سوم است و لذا $\alpha_2 = \frac{7\pi}{6}$ پس $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{11\pi}{12}$.

۳–۴ مشتقات مراتب بالاتر

تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ مفروض است. چنانچه از $f'(x)$ مشتق بگیریم، تابع جدیدی به دست می‌آید که آنرا مشتق مرتبه دوم f می‌نامیم و با نماد $f''(x)$ یا $\frac{d^2y}{dx^2}$ نمایش می‌دهیم. اگر فرایند مشتق گرفتن را ادامه دهیم، پس از n بار مشتق گرفتن از f، مشتق n ام f به دست می‌آید که آن را با نماد $f^{(n)}(x)$ یا $\frac{d^ny}{dx^n}$ نمایش می‌دهیم.

گاهی پس ازچند بار مشتق گرفتن از یک تابع می‌توان قاعده‌ای را برای مشتق n ام آن حدس زد که برای اثبات درستی حدس باید از استقرا استفاده کرد.(مثال ۱۰ در صفحه ۱۴۴ را ملاحظه کنید.)

نکته ۱۹. اگر g وارون تابع f باشد، دیدیم که $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ و با مشتق گرفتن از رابطه اخیر، مشتق دوم تابع وارون به صورت $g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$ به دست می‌آید.

نکته ۲۰. مشتق منحنی پارامتری $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ به صورت $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ به دست می‌آید. اگر از تابع حاصل نسبت به x مشتق بگیریم.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$$

نکته ۲۱. برای محاسبه $f^{(k)}(x_0)$ کافی است بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه x_0 را تا توان k نوشته و آنرا $g(x)$ بنامیم. در اینصورت $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$.

در نکته بالا توجه کنید که چون مشتق جملاتی که توان آنها از k کمتر است، صفر می‌شود پس کافی است فقط از جمله دارای توان k در $g(x)$ مشتق گرفته شود. حال چون $\frac{d^k}{dx^k}(x - x_0)^k = k!$ پس:

نکته ۲۲. برای محاسبه $f^{(k)}(x_0)$ کافی است جمله $(x - x_0)^k$ در بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه x_0 را بدست آوریم. در این صورت :

$$f^{(k)}(x_0) = \text{در بسط تیلور } (x - x_0)^k \text{ ضریب } \times k!$$

تذکر۱۸. اگر بسط تیلور $f(x)$ حول x_0 تا توان k نوشته شود آنگاه برای هر n که $n \leq k$ داریم $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$. اما برای $n > k$ نباید از این رابطه استفاده نمود.

نکته ۲۳. (فرمول لایپ‌نیتز) اگر $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق‌پذیر از x باشند، مشتق n ام تابع uv از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{k=\circ}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

که در این رابطه $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ و $u'' = u^{(۲)}$ و $u' = u^{(۱)}$ و $u = u^{(\circ)}$.

تذکر۱۹. دقت کنید که رابطه بالا شبیه بسط دوجمله‌ای $(u+v)^{(n)}$ در صفحه ۳۸ است و توان‌های ظاهر شده در بسط اخیر مرتبه مشتق‌گرفتن را مشخص می‌کند.

تذکر۲۰. برای محاسبه مشتقات مراتب بالا از تابع ضمنی $F(x,y) = \circ$ معمولاً بهتر است از فرمول $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ استفاده نشود و از رابطه ضمنی به طور مستقیم و به تعداد مورد نیاز و با توجه به اینکه y تابع x است، مشتق بگیریم.

مثال ۹

فرض کنید a و c اعداد حقیقی دلخواه بوده و $c > \circ$ و تابع حقیقی f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-c}) & x > \circ \\ \circ & x \leq \circ \end{cases}$ تعریف شود. شرایطی را تعیین کنید که:

الف) مشتق دوم f در همه نقاط موجود باشد.

ب) مشتق دوم $f(x)$ در اطراف $x = \circ$ کراندار باشد.

ج) $f''(x)$ در همه نقاط پیوسته باشد.

با توجه به ضابطه f کافی است شرایط را فقط در $x = \circ$ بررسی کنیم.

الف) با توجه به اینکه در $x = \circ$ تقسیم بر صفر رخ داده است، برای محاسبه $f''(\circ)$ از تعریف استفاده می‌کنیم. به توجه به محاسبات مثال ۲ در صفحه ۱۲۸ برای $a > ۱$ داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} ax^{a-۱}\sin(x^{-c}) - cx^{a-۱-c}\cos(x^{-c}) & x > \circ \\ \circ & x \leq \circ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f''_+(\circ) = \lim_{x\to\circ^+} \frac{f'(x) - f'(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x\to\circ^+} \left(ax^{a-۲}\sin(x^{-c}) - cx^{a-۲-c}\cos(x^{-c})\right)$$

چون $\sin(x^{-c})$ و $\cos(x^{-c})$ کراندار هستند، حد بالا فقط برای $a > ۲ + c$ موجود و برابر صفر است. به راحتی بررسی می‌شود که $f''_-(\circ) = \circ$ پس $f''(\circ)$ موجود و برابر صفر است هرگاه $a > ۲ + c$.

ب) ضابطه f'' را برای $x \neq \circ$ تعیین می‌کنیم. توجه کنید که برای $x < \circ$ داریم $f''(x) = \circ$ و برای $x > \circ$:

$$f''(x) = a(a-۱)x^{a-۲}\sin x^{-c} + ax^{a-۱}\cdot(-cx^{-c-۱})\cos x^{-c} - c(a-۱-c)x^{a-۱-c-۱}\cos x^{-c}$$
$$- cx^{a-۱-c}\cdot(-cx^{-c-۱})(-\sin x^{-c})$$

$$\Longrightarrow f''(x) = a(a-۱)x^{a-۲}\sin x^{-c} - c(۲a-c-۱)x^{a-c-۲}\cos x^{-c} - c^۲x^{a-۲-۲c}\sin x^{-c}$$

با توجه به کراندار بودن سینوس و کسینوس، شرط کرانداری عبارت فوق در $x = \circ$ آن است که توان x نامنفی باشد و لذا $a - ۲c - ۲ \geq \circ$ و $a - c - ۲ \geq \circ$ و $a - ۲ \geq \circ$ و به طور خلاصه $a \geq ۲ + ۲c$.

ج) واضح است که $\lim_{x\to\circ^+} f''(x)$ وقتی $a - ۲c - ۲ > \circ$ و $a - c - ۲ > \circ$ و $a - ۲ > \circ$ و به طور خلاصه

$2 + 2c > a$ موجود و حد آن صفر می‌شود و چون $\lim_{x\to 0^-} f''(x) = 0$ پس با شرط $a > 2 + 2c$ داریم $\lim_{x\to 0} f''(x) = 0$ و بنابراین $f''(x)$ پیوسته است.

نتایج این مثال و مثال ۲ در صفحه ۱۲۸ را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

نکته ۲۴. فرض کنید a و c اعداد حقیقی دلخواه بوده و $c > 0$ و $f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-c}) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ یا $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(|x|^{-c}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

۱) شرط لازم و کافی برای پیوستگی f آن است که $a > 0$.

۲) شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیری f آن است که $a > 1$.

۳) شرط لازم و کافی برای کرانداری f' در اطراف $x = 0$ آن است که $a \geq 1 + c$.

۴) شرط لازم و کافی برای پیوستگی f' آن است که $a > 1 + c$.

۵) شرط لازم و کافی برای وجود f'' آن است که $a > 2 + c$.

٦) شرط لازم و کافی برای کرانداری f'' در اطراف $x = 0$ آن است که $a \geq 2 + 2c$.

۴) شرط لازم و کافی برای پیوستگی f'' آن است که $a > 2 + 2c$.

تذکر ۲۱. علامت قدرمطلق در ضابطه f برای آن است که تابع برای $x < 0$ و همه مقادیر a, c تعریف شده باشد. بنابراین اگر a, c طوری باشد که $f(x)$ برای $x < 0$ تعریف شده باشد (مثلاً a, c عدد صحیح مثبت باشد)، می‌توان قدرمطلق را حذف نمود. ضمناً همین احکام با جایگذاری کسینوس به جای سینوس همچنان برقرار است.

مثال ۱۰. فرمولی برای مشتق n ام تابع هموگرافیک $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ به دست آورید.

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} \quad \text{و} \quad f''(x) = \frac{-2c(ad - bc)}{(cx + d)^3} \quad \text{و} \quad f'''(x) = \frac{(-2c)(-3c)(ad - bc)}{(cx + d)^4}$$

و بنابراین برای $n \geq 1$ فرمول زیر به دست می‌آید.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-c)^{n-1} n!(ad - bc)}{(cx + d)^{n+1}}$$

مثال ۱۱. فرمولی برای مشتق n ام تابع $y = \sin(ax + b)$ به دست آورید.

با مشتق گرفتن از y داریم $y' = a\cos(ax + b) = a\sin(ax + b + \frac{\pi}{2})$ یعنی با مشتق گرفتن از سینوس، به زاویه آن $\frac{\pi}{2}$ اضافه می‌شود بنابراین پس از n بار مشتق گرفتن به زاویه $\frac{n\pi}{2}$ اضافه می‌شود، ضمناً هر بار مشتق‌گرفتن، تابع را در ضریب a ضرب می‌کند پس $y^{(n)} = a^n \sin(ax + b + \frac{n\pi}{2})$.

نکته ۲۵. با محاسبه مشابه می‌توان ثابت کرد:

$$y = \cos(ax + b) \implies y^{(n)} = a^n \cos(ax + b + \frac{n\pi}{2})$$

تذکر ۲۲. در واقع برای محاسبه مشتق n ام تابع $y=\sin x$ یا $y=\cos x$ کافی است ابتدا باقیمانده n را بر ۴ به دست آورده و به تعداد عدد حاصل از y مشتق بگیریم. مثلاً برای محاسبه $y^{(14)}$ چون باقیمانده ۱۴ بر ۴ برابر ۲ است، کافی است y'' را محاسبه نماییم.

مثال ۱۲. تابع $f(x)=x^2\ln(1+x^3)$ مفروض است. مشتق یازدهم این تابع را در $x=0$ محاسبه نمایید.
با توجه به نکته ۲۱ در صفحه ۱۴۲ کافی است، بسط مک‌لورن f را تا جمله x^{11} بنویسیم.

$$f(x)=x^2\left(x^3-\frac{1}{2}(x^3)^2+\frac{1}{3}(x^3)^3+\cdots\right)=x^5-\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{3}x^{11}+\cdots$$

$$\Longrightarrow g(x)=x^5-\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{3}x^{11} \Longrightarrow f^{(11)}(0)=g^{(11)}(0)=0-0+\frac{1}{3}(11!)=\frac{11!}{3}$$

مثال ۱۳. مشتق دوازدهم تابع $y=(x^2+x)\sinh x$ را محاسبه کنید.

اگر $u=x^2+x$ و $v=\sinh x$ از نکته ۲۳ در صفحه ۱۴۳ داریم $y^{(12)}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}u^{(k)}v^{(12-k)}$ و چون:

$$u'=2x+1 \quad \text{و} \quad u''=2 \quad \text{و} \quad u^{(k)}=0 \quad , \quad k\geq 3$$

پس فرمول به صورت $y^{(12)}=\sum_{k=0}^{2}\binom{12}{k}u^{(k)}v^{(12-k)}$ تبدیل می‌شود. با توجه به اینکه مشتقات مراتب زوج v برابر v و مشتقات مرتبه فرد آن برابر $\cosh x$ هستند.

$$\begin{aligned} y^{(12)} &= \binom{12}{0}u^{(0)}v^{(12)}+\binom{12}{1}u^{(1)}v^{(11)}+\binom{12}{2}u^{(2)}v^{(10)} \\ &= (x^2+x)\sinh x+12(2x+1)\cosh x+132\sinh x \end{aligned}$$

تست ۲۹ اگر $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ آنگاه .... (مکانیک ۷۷)

۱) $f'(0)\neq 0\neq f''(0)$ ۲) $f'(0)=0\neq f''(0)$ ۳) $f'(0)=0=f''(0)$ ۴) $f'(0)\neq 0=f''(0)$

حل: گزینه ۳ درست است. به دلیل تقسیم بر صفر در ضابطه، $f'(0)$ را با تعریف به‌دست می‌آوریم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim_{t\to\pm\infty}te^{-t^2}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{\text{قوانین رشد}}{=\!=\!=}0$$

برای محاسبه $f''(0)$ ابتدا تابع $f'(x)$ را برای $x\neq 0$ به صورت $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ به دست می‌آوریم و سپس با تعریف $f''(0)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=0$$

نکته ۲۶. اگر $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $f^{(n)}(0)=0$.

تست ۳۰ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x^3+x$ باشد، $g''(2)$ برابر است با:

۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{32}$ ۳) $-\frac{3}{32}$ ۴) $\frac{3}{8}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به نکته ۱۹ در صفحه ۱۴۲:

$$x^3 + x = 2 \Longrightarrow x = 1 \ : \ g''(2) = -\frac{f''(1)}{\left(f'(1)\right)^3} = -\frac{6}{4^3} = -\frac{3}{32}$$

تست ۳۱ در تابع پارامتری $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^2 + t \end{cases}$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ به ازای $t = 0$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

حل: گزینه ۴ درست است. از مشتق پارامتری استفاده می‌کنیم.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+1}{2t-1} \Longrightarrow y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-4}{(2t-1)^2}}{2t-1} = \frac{-4}{(2t-1)^3} \overset{t=0}{=\!=} 4$$

تست ۳۲ اگر $x^n + y^n = a^n$ آنگاه $\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) $-\frac{(n-1)a^n x^{n-2}}{y^{2n-1}}$ ۲) $\frac{n!x^n}{y^{2n}}$ ۳) $\frac{(n-1)a^n x^{n-2}}{y^{2n-1}}$ ۴) $-\frac{n!x^n}{y^{2n}}$

حل: گزینه ۱ درست است. از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$nx^{n-1} + ny^{n-1}y' = 0 \Longrightarrow x^{n-1} + y^{n-1}y' = 0 \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} (n-1)x^{n-2} + (n-1)y^{n-2}y'^2 + y^{n-1}y'' = 0$$

$$\Longrightarrow y' = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} \Longrightarrow (n-1)(x^{n-2} + \frac{x^{2n-2}}{y^n}) + y^{n-1}y'' = 0$$

$$\overset{\times y^n}{\Longrightarrow} (n-1)x^{n-2}(y^n + x^n) + y^{2n-1}y'' = 0 \Longrightarrow y'' = -\frac{(n-1)a^n x^{n-2}}{y^{2n-1}}$$

تست ۳۳ از معادله $x = y^3 + y$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) $-\frac{3}{32}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{32}$ ۴) $\frac{3}{8}$

حل: گزینه ۱ درست است. در نقطه $x = 2$ داریم $y^3 + y = 2$ و لذا $y = 1$.

$$(3y^2 + 1)y' = 1 \text{ و } x = 2 , y = 1 \Longrightarrow y' = \frac{1}{4}$$

$$6yy'^2 + (3y^2+1)y'' = 0 \Longrightarrow 6 \times 1 \times (\frac{1}{4})^2 + 4y'' = 0 \Longrightarrow y'' = -\frac{3}{32}$$

تست ۳۴ اندازه مشتق دهم تابع $y = \frac{x}{1+x}$ در نقطه $x = 1$ چقدر است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $-10!(\frac{1}{2})^{11}$ ۲) $9!(\frac{1}{2})^{10}$ ۳) $-11!(\frac{1}{2})^{10}$ ۴) $-10!(\frac{1}{2})^{10}$

حل: گزینه ۱ درست است. داریم $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$ ، $y'' = \frac{-2}{(x+1)^3}$ ، $y''' = \frac{3!}{(x+1)^4}$ پس به استقرا:

$$y^{(10)} = \frac{-10!}{(x+1)^{11}} \Longrightarrow y^{(10)}(1) = -10!(\frac{1}{2})^{11}$$

تست ۳۵ اگر $f(x) = x^3 - x^2 \sin x$ مقدار $f^{(4)}(0)$ برابر است با:

۱) 2 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 0

حل: گزینه ۴ درست است. بسط مک لورن f را تا x^4 می‌نویسیم.

$$f(x) = x^2(x - \sin x) \sim \frac{x^5}{6} = g(x)$$

عبارت بالا فاقد x^4 است. بنا به نکته ۲۱ در صفحه ۱۴۲ داریم $f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = 0$.

تست ۳۶ مشتق مرتبه دوازدهم $f(x) = x\sin x$ به ازای $x = \pi$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ۷۶)

۱) -۱۲ ۲) ۱۲ ۳) $\pi - ۱۲$ ۴) $\pi + ۱۲$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. اگر $u = x$ و $v = \sin x$ برای $k \geq ۲$ داریم $u^{(k)} = ۰$ پس

$$f^{(۱۲)}(x) = \sum_{k=۰}^{۱۲} \binom{۱۲}{k} u^{(k)} v^{(۱۲-k)} = \sum_{k=۰}^{۱} \binom{۱۲}{k} u^{(k)} v^{(۱۲-k)} = \binom{۱۲}{۰} x\sin x + \binom{۱۲}{۱}(۱)(-\cos x)$$

$$\Longrightarrow \ f^{(۱۲)}(\pi) = ۱۲ \times ۱ = ۱۲$$

روش دوم. با تغییر متغیر $x = \pi + t$ کافی است مشتق دوازدهم

$$g(t) = f(t+\pi) = (t+\pi)\sin(t+\pi) = -(t+\pi)\sin t$$

در $t = ۰$ محاسبه گردد. پس باید ضریب $t^{۱۲}$ را در بسط مک‌لورن $g(t)$ محاسبه نماییم.

$$g(t) = -(t+\pi)(t - \frac{۱}{۳!}t^{۳} + \cdots - \frac{۱}{۱۱!}t^{۱۱} + \cdots) \ \Longrightarrow \ t^{۱۲} \text{ ضریب} = \frac{۱}{۱۱!}$$

$$\Longrightarrow \ g^{(۱۲)}(۰) = (\frac{۱}{۱۱!}) \times (۱۲)! = ۱۲$$

۳–۵ کاربردهای مشتق

۳–۵–۱ اکسترمم‌های نسبی

قضیه ۵. فرض کنید f بر بازه باز I مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر برای هر $x \in I$، $f'(x) > ۰$، f بر I صعودی اکید است.

ب) اگر برای هر $x \in I$، $f'(x) < ۰$، f بر I نزولی اکید است.

ج) اگر برای هر $x \in I$، $f'(x) = ۰$، f بر I تابع ثابت است.

تذکر۲۳. در قسمت الف و ب، اگر $f'(x)$ به‌ازای شمارا نقطه در بازه I صفر شود، f همچنان یکنوای اکید است.

تذکر۲۴. اگر f در متناهی نقطه از بازه I فاقد مشتق اما پیوسته باشد، قضیه بالا همچنان درست است.

نتیجه ۶. اگر برای هر x در بازه I داشته باشیم $f'(x) = g'(x)$ و $x_۰ \in I$ موجود باشد که $f(x_۰) = g(x_۰)$ آنگاه برای هر x در بازه I داریم $f(x) = g(x)$.

تعریف. نقطه $x_۰$ را برای تابع f **ماکزیمم نسبی** می‌نامیم هرگاه بازه باز I حول $x_۰$ موجود باشد که

$$\forall x \in I \quad : \quad f(x_۰) \geq f(x)$$

و $x_۰$ را نقطه **مینیمم نسبی** می‌نامیم هرگاه بازه باز I حول $x_۰$ موجود باشد که

$$\forall x \in I \quad : \quad f(x_۰) \leq f(x)$$

ضمناً به ماکزیمم یا مینیمم، اکسترمم گفته می‌شود.

قضیه ۷. اگر $x_۰$ نقطه اکسترمم نسبی f باشد و $f'(x_۰)$ موجود باشد آنگاه $f'(x_۰) = ۰$.

نتیجه ۸. اگر $x_\circ$ نقطه اکسترمم f باشد آنگاه f' در $x_\circ$ موجود نیست یا موجود و برابر صفر است.

تعریف. اگر $x_\circ \in D_f$ و $f'(x_\circ)$ موجود نباشد یا صفر شود، $x_\circ$ را **نقطه بحرانی f** می‌نامند.

نقاط بحرانی کاندیدای اکسترمم نسبی هستند، برای مشخص شدن اینکه نقطه بحرانی کدامیک از انواع اکسترمم است، از آزمون‌های زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۹.(**آزمون مشتق اول**)

فرض کنید $x_\circ$ نقطه بحرانی f و f' حول $x_\circ$ موجود و f در $x_\circ$ پیوسته است.

الف) اگر f' حول $x_\circ$ از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، $x_\circ$ نقطه مینیمم نسبی است.

ب) اگر f' حول $x_\circ$ از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، $x_\circ$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

ج) اگر f' حول $x_\circ$ از تغییر علامت ندهد، آزمون جواب نمی‌دهد.

تذکر۲۵. توجه کنید که فقط در حالتی که f در $x_\circ$ پیوسته باشد، می‌توانیم از این آزمون استفاده کنیم. چنانچه f در نقطه‌ای ناپیوسته باشد برای بررسی وضعیت آن نقطه باید به نمودار f در اطراف آن نقطه و یا مقایسه حد چپ و راست و مقدار تابع در آن نقطه توجه نمود.(مثال ۱۸ در صفحه ۱۵۰ را ملاحظه کنید.)

قضیه ۱۰. (**آزمون مشتق دوم برای شناسایی اکسترمم‌ها**)

فرض کنید $f'(x_\circ) = \circ$ و f'' در $x_\circ$ موجود باشد.

الف) اگر $f''(x_\circ) > \circ$، f در $x_\circ$ دارای مینیمم نسبی است.

ب) اگر $f''(x_\circ) < \circ$، f در $x_\circ$ دارای ماکزیمم نسبی است.

ج) اگر $f''(x_\circ) = \circ$، آزمون جواب نمی‌دهد.

مثال ۱۴

وضعیت یکنوایی تابع $f(x) = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x$ را بررسی کنید.

نخست برای تعیین دامنه f توجه کنید که طبق تعریف باید پایه مثبت باشد.

$$۱ + \frac{۱}{x} > \circ \implies \frac{x+۱}{x} > \circ \implies x > \circ \text{ یا } x < -۱$$

با توجه به مشتق لگاریتمی:

$$y = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x \implies \ln y = x \ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right) \implies \frac{y'}{y} = \ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right) - \frac{۱}{۱ + x}$$

$$\implies f'(x) = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x \left(-\frac{۱}{x+۱} + \ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)\right)$$

چون $\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x > \circ$ پس علامت عبارت داخل پرانتز را تعیین می‌کنیم. برای تعیین علامت، تعریف می‌کنیم $g(x) = -\frac{۱}{x+۱} + \ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)$ ولذا $f'(x) = g(x)\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x$ و داریم:

$$g'(x) = \frac{۱}{(x+۱)^۲} + \frac{-\frac{۱}{x^۲}}{۱ + \frac{۱}{x}} = \frac{۱}{(x+۱)^۲} - \frac{۱}{x(x+۱)} = \frac{-۱}{x(x+۱)^۲}$$

برای $x > ۰$ داریم $g'(x) < ۰$ و لذا g روی $(۰,+\infty)$ نزولی است و لذا برای هر $x > ۰$ داریم $g(x) \geq g(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ۰$ یعنی $g(x) \geq ۰$ پس $f'(x) \geq ۰$ و بنابراین تابع f در $(۰,+\infty)$ صعودی اکید است. برای $x < -۱$ داریم $g'(x) > ۰$ و لذا $g(x) > \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = ۰$ پس $f'(x) \geq ۰$ ولذا f در $(-\infty,-۱)$ صعودی اکید خواهد بود.

مثال ۱۵. بررسی کنید که $f(x) = \mathrm{Arcsin}\dfrac{۲x}{۱+x^۲} + ۲\mathrm{Arctan}x$ بر هر یک از بازه‌های $x \geq ۱$ و $x \leq -۱$ تابعی ثابت است و مقدار آنرا محاسبه نمایید.

روش اول. مشتق f را تشکیل می‌دهیم.

$$f'(x) = \frac{\frac{۲(۱+x^۲)-۴x^۲}{(۱+x^۲)^۲}}{\sqrt{۱-\left(\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)^۲}} + \frac{۲}{۱+x^۲} = \frac{۲(۱-x^۲)}{(۱+x^۲)^۲\sqrt{\frac{(۱+x^۲)^۲-۴x^۲}{(۱+x^۲)^۲}}} + \frac{۲}{۱+x^۲}$$

$$= \frac{۲(۱-x^۲)}{(۱+x^۲)\sqrt{(۱-x^۲)^۲}} + \frac{۲}{۱+x^۲} = \frac{۲(۱-x^۲)}{(۱+x^۲)|۱-x^۲|} + \frac{۲}{۱+x^۲}$$

$$|x| > ۱ \implies ۱-x^۲ < ۰ \implies f'(x) = \frac{-۲}{۱+x^۲} + \frac{۲}{۱+x^۲} = ۰$$

و بنا به قضیه ۵ در صفحه ۱۴۷ تابع f بر هر یک از بازه‌های $I_۱ = [۱,+\infty)$ و $I_۲ = (-\infty,-۱]$ تابعی ثابت است. برای تعیین مقدار آن بر هر بازه، کافی است مقدار آنرا در یک نقطه تعیین نماییم. با قرار دادن $x = \sqrt{۳}$ داریم $f(\sqrt{۳}) = \sin^{-۱}\dfrac{\sqrt{۳}}{۲} + ۲\tan^{-۱}(\sqrt{۳}) = \pi$ وبا محاسبه مشابه $f(-\sqrt{۳}) = -\pi$. پس:

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}\frac{۲x}{۱+x^۲} + ۲\mathrm{Arctan}x = \begin{cases} \pi & x \geq ۱ \\ -\pi & x \leq -۱ \end{cases}$$

روش دوم. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی نیز می‌توان $f(x)$ را ساده نمود. قرار می‌دهیم $x = \tan\alpha$ که $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ زاویه‌ای دلخواه است.

$$f(x) = \sin^{-۱}\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} + ۲\tan^{-۱}(\tan\alpha) = \sin^{-۱}(\sin ۲\alpha) + ۲\alpha$$

توجه کنید که رابطه $\sin^{-۱}(\sin ۲\alpha) = ۲\alpha$ را وقتی می‌توان استفاده کرد که $-\frac{\pi}{۲} \leq ۲\alpha \leq \frac{\pi}{۲}$ در حالیکه چون $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ پس در اینجا $-\pi < ۲\alpha < \pi$ است. پس باید حالتهای مختلف را بررسی کرد.

- چنانچه $|\alpha| \leq \frac{\pi}{۴}$ یعنی $|x| \leq ۱$ آنگاه:

$$۲|\alpha| \leq \frac{\pi}{۲} \implies \sin^{-۱}\big(\sin ۲\alpha\big) = ۲\alpha \implies f(x) = ۴\alpha = ۴\tan^{-۱}x$$

- چنانچه $\frac{\pi}{۴} \leq \alpha < \frac{\pi}{۲}$ یعنی $x \geq ۱$ آنگاه $\frac{\pi}{۲} \leq ۲\alpha < \pi$ ولی $۰ < \pi - ۲\alpha \leq \frac{\pi}{۲}$ و لذا:

$$\sin^{-۱}\big(\sin ۲\alpha\big) = \sin^{-۱}\big(\sin(\pi-۲\alpha)\big) = \pi - ۲\alpha \implies f(x) = \pi$$

- چنانچه $-\frac{\pi}{۲} < \alpha \leq -\frac{\pi}{۴}$ یعنی $x \leq -۱$ آنگاه $-\pi < ۲\alpha \leq -\frac{\pi}{۲}$ ولی $۰ < \pi + ۲\alpha \leq \frac{\pi}{۲}$ و لذا:

$$\sin^{-۱}\big(\sin ۲\alpha\big) = \sin^{-۱}\big(-\sin(\pi+۲\alpha)\big) = -\sin^{-۱}\big(\sin(\pi+۲\alpha)\big) = -(\pi+۲\alpha) \implies f(x) = -\pi$$

مثال ۱۶. نوع نقاط بحرانی را برای تابع $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ مشخص کنید.

$$f'(x) = e^{-x^2}(2x - 2x^3) \quad \text{و} \quad f'(x) = 0 \implies x = 0 \text{ و } \pm 1$$

چون f' در همه نقاط موجود است، نقاط به دست آمده تنها نقاط بحرانی هستند با استفاده از آزمون مشتق اول باید f' حول نقاط بحرانی تعیین علامت شود. چون ریشه‌های مشتق ساده (از مرتبه یک) هستند، f' حول آنها تغییر علامت می‌دهد و جدول تغییرات (رفتار) f را به صورت زیر خواهیم داشت.

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

مثال ۱۷. نوع نقطه $x = 0$ برای تابع $f(x) = xe^x - x$ را مشخص کنید.

$f'(x) = (x+1)e^x - 1 \implies f'(0) = 0 \implies$ $x = 0$ نقطه بحرانی است.

$f''(x) = (x+2)e^x \implies f''(0) = 2 > 0 \implies$ $x = 0$ نقطه مینیمم نسبی است.

مثال ۱۸. نوع نقاط بحرانی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را تعیین نمایید.

ابتدا نقاط بحرانی f را مشخص می‌کنیم.

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^2} = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} \quad \text{و} \quad f'(x) = 0 \implies x = \pm 1$$

چون f در $x = 0$ ناپیوسته است، این نقطه هم بحرانی می‌باشد. جدول تغییرات را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به جدول بالا نقاط $x = \pm 1$ می‌نیمم نسبی هستند. با وجود اینکه در اطراف $x = 0$ مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد اما چون f در این نقطه ناپیوسته است پس نمی‌توان این نقطه را با توجه به آزمون مشتق اول، ماکزیمم به حساب آورد. چون $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ و $f(0) = 0$، پس مقدار f در همسایگی این نقطه از مقدار آن در این نقطه بیشتر است و با توجه به تعریف، این نقطه نیز می‌نیمم نسبی است.

تست ۳۷ اگر $0 < a < 1$، $f(x) = xa^x$ به ازای چه مقادیری از x، f نزولی است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $x > -\frac{1}{\ln a}$ ۲) $x < -\frac{1}{\ln a}$ ۳) $x > -\ln a$ ۴) $x < -\ln a$

حل: گزینه ۱ درست است. باید مشتق را تشکیل دهیم.

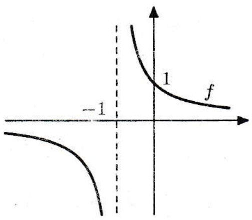
$$f'(x) = a^x(1 + x\ln a) < 0 \implies x\ln a + 1 < 0 \xRightarrow{\ln a < 0} x > -\frac{1}{\ln a}$$

تست ۳۸ توابع f و g با ضوابط $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = e^x$ بر $\mathbb{R}$ چگونه‌اند؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) f نزولی و g صعودی است. ۲) f و g هر دو صعودی هستند.

۳) f و g هر دو نزولی هستند. ۴) فقط g صعودی است.

حل: گزینه ۴ درست است. چون $g'(x) = e^x > 0$ پس $g(x)$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است. اما با وجود اینکه $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ به دلیل ناپیوستگی f در $x = -1$، نمی‌توان گفت f بر دامنه خود نزولی اکید است. با توجه به نمودار، تابع f در فاصله‌های $(-\infty, -1)$ و $(-1, +\infty)$ نزولی اکید است. اما چون $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ پس در اطراف $x = -1$ وضعیت یکنوایی برقرار نیست.



پس f در دامنه خود نه صعودی و نه نزولی است.

تذکر۲۶. به طور کلی همه توابع هموگرافیک فقط بر فواصل پیوستگی یکنوای اکید هستند ولی در کل دامنه خود غیر یکنوا می‌باشند. ضمناً هر تابع گویا که در دامنه تعریف خود داری مجانب قائم باشد، غیر یکنواست.

$\boxed{\text{تست ۳۹}}$ **معادله $3\tan x + x^3 = 2$ در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$:** (معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) دارای دو جواب است.   ۲) دارای سه جواب است.

۳) تنها دارای یک جواب است.   ۴) دارای جوابی نیست.

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $f(x) = 3\tan x + x^3 - 2$ آنگاه:

$$f(0) = -2 < 0 \quad \text{و} \quad f(\frac{\pi}{4}) = 3 + (\frac{\pi}{4})^3 - 2 > 0 \Longrightarrow$$ f حداقل یک ریشه دارد.

و چون $f'(x) = 3(1 + \tan^2 x) + 3x^2 > 0$ پس f صعودی اکید و دقیقاً یک ریشه دارد.

$\boxed{\text{تست ۴۰}}$ **در مورد معادله $x^2 - x\sin x - \cos x = 0$ می‌توان گفت:** (مکانیک ۷۱)

۱) فقط یک جواب دارد.   ۲) فقط دو جواب دارد.   ۳) بیش از دو جواب دارد.   ۴) اصلاً جواب ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است. $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$ تابعی پیوسته است.

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

چون $f'(x)$ در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد، یکنوا نیست. اما هر یک از فاصله‌های $x \geq 0$ و $x \leq 0$ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

- اگر $x \geq 0$ آنگاه $f'(x) \geq 0$ و لذا تابع f صعودی اکید و دارای حداکثر یک ریشه است.

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{و} \quad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$$

پس f در فاصله $[0, +\infty)$ دقیقاً یک ریشه دارد.

- اگر $x \leq 0$ آنگاه $f'(x) \leq 0$ و لذا تابع f نزولی اکید و دارای حداکثر یک ریشه است.

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{و} \quad f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty > 0$$

پس f در فاصله $(-\infty, 0]$ دقیقاً یک ریشه دارد. پس f بر $\mathbb{R}$ دقیقاً دارای دو ریشه است.

تذکر۲۷. توجه کنید که $f(x)$ تابعی زوج است. چون بر $[0, +\infty)$ یک ریشه دارد پس با توجه به متقارن بودن نمودار آن نسبت به محور y ها در فاصله $(-\infty, 0]$ نیز یک ریشه خواهد داشت.

تست ۴۱ فرض کنید تابع حقیقی f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $f(1) = 1$ و $f(-1) = -1$ و روی تمام $\mathbb{R}$، $|f'(x)| \leq 1$ در این صورت: (ریاضی ۸۰، MBA ۸۲)

۱) $f(0) = 0$
۲) $f(0) = 1$
۳) $f(0) = 2$
۴) با این اطلاعات نمی‌توان $f(0)$ را تعیین کرد.

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا حکم قویتری را ثابت می‌کنیم.

فرض کنید تابع حقیقی f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = a$ و $f(b) = b$ و روی تمام $\mathbb{R}$، $|f'(x)| \leq 1$ در این صورت روی بازه $[a,b]$ داریم $f(x) = x$.

برای اثبات این مطلب قرار می‌دهیم $g(x) = f(x) - x$ در این صورت $g(a) = g(b) = 0$ و چون $-1 \leq f'(x) \leq 1$ پس $-2 \leq g'(x) \leq 0$ بنابراین g تابعی نزولی است. برای هر نقطه $t \in (a,b)$ با توجه به نزولی بودن داریم :

$$\begin{cases} a < t \implies g(a) \geq g(t) \implies g(t) \leq 0 \\ t < b \implies g(t) \geq g(b) \implies g(t) \geq 0 \end{cases} \implies g(t) = 0$$

پس $g(x) = 0$ و لذا $f(x) = x$ برای هر x پس $f(0) = 0$.

تست ۴۲ f و g توابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ هستند و $f(a) \geq g(a)$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) > g'(x)$ در این صورت: (ریاضی ۷۹)

۱) اگر $x < a$ آنگاه $f(x) > g(x)$
۲) اگر $a < x$ آنگاه $f(x) > g(x)$
۳) اگر $a < x$ آنگاه $f(x) < g(x)$
۴) اگر $x < a$ آنگاه $f(x) < g(x)$

حل: گزینه ۲ درست است. قرار دهید $h(x) = f(x) - g(x)$ پس $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ پس تابع h صعودی اکید است و بنابراین برای $a < x$ داریم $h(x) > h(a)$. اما $h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$ و لذا $h(x) > 0$ پس $f(x) > g(x)$.

تست ۴۳ اگر برای هر x و y در $\mathbb{R}$ رابطه $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ برقرار باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) f بر $\mathbb{R}$ اکیداً یکنواست.
۲) $f'(0) = 1$
۳) f فقط می‌تواند تابع ثابت باشد.
۴) نقطه‌ای موجود است که f' در آن ناصفر باشد.

حل: گزینه ۳ درست است. کسر مشتق راتشکیل می‌دهیم. با تقسیم دو طرف بر $|x-y|$ داریم:

$$x \neq y \quad : \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq |x-y| \implies \lim_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0 \implies f'(x) = 0 \implies$$ f تابعی ثابت است

تذکر۲۸. با استدلال بالا اگر برای عدد ثابت $\alpha > 1$ و برای هر x و y در $\mathbb{R}$ رابطه $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha$ برقرار باشد(که در این صورت می‌گوییم تابع f در شرط لیپ‌شیتس از مرتبه α صدق می‌کند)، آنگاه f تابعی ثابت است.

تست ۴۴ تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ 1 - x & x < 0 \end{cases}$ در فاصله $(-\pi, \pi)$ چند نقطه بحرانی دارد؟ (نساجی ۷۹)

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

حل: گزینه ۲ درست است. در نقطه بحرانی مشتق f صفر است یا وجود ندارد.

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

در فاصله $(-\pi, \pi)$ معادله $f'(x) = 0$ فاقد جواب است اما چون f در $x = 0$ پیوسته است.

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} f'(x) = -۱ \quad , \quad f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+} f'(x) = ۰$$

پس f در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست و لذا این نقطه، بحرانی است.

تست ۴۵ اگر f تابعی با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^x & x > ۰ \\ ۱ & x = ۰ \\ ۱ + e^{-\frac{۱}{x^۲}} & x < ۰ \end{cases}$ باشد، چند نقطه بحرانی و چند نقطه اکسترمم دارد؟ (ریاضی ۸۰)

۱) یک نقطه بحرانی و یک اکسترمم
۲) دو نقطه بحرانی و یک اکسترمم
۳) نقطه بحرانی ندارد.
۴) دو نقطه بحرانی و دو اکسترمم

حل: گزینه ۲ درست است. f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. برای $x > ۰$ با توجه به تست ۱۴ در صفحه ۱۳۳ داریم $f'(x) = x^x(۱ + \ln x)$ ولذا:

$$f'(x) = \begin{cases} x^x(۱ + \ln x) & x > ۰ \\ \frac{۲}{x^۳}e^{-\frac{۱}{x^۲}} & x < ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad f'(x) = ۰ \implies ۱ + \ln x = ۰ \implies x = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} f'(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲}{x^۳}e^{-\frac{۱}{x^۲}} \overset{t=\frac{۱}{x}}{=\!=} \lim_{t\to -\infty} \frac{۲t^۳}{e^{t^۲}} = ۰$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to ۰^+} x^x = \lim_{x\to ۰^+} e^{x\ln x} = e^۰ = ۱$ و $\ln(۰^+) = -\infty$ پس $\lim_{x\to ۰^+} f'(x) = -\infty$ و لذا مشتق f در $x = ۰$ وجود ندارد یعنی $x = ۰, \frac{۱}{e}$ بحرانی هستند. $x = ۰$ نقطه زاویه‌دار است و چون تابع حول آن نزولی است اکسترمم نمی‌باشد اما $x = \frac{۱}{e}$ نقطه اکسترمم است.

x		۰		$\frac{۱}{e}$	
f'	$-$	$\|\|$	$-$	۰	$+$
f	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

تست ۴۶ حدود پارامتر m برای آنکه تابع $f(x) = x^۲e^{-mx}$ دارای یک نقطه می‌نیمم نسبی در بازه $(۱,۲)$ باشد، عبارت است از:

۱) $\frac{۱}{۲} < m < ۱$
۲) $۱ < m < ۲$
۳) $m < \frac{۱}{۲}$ یا $m > ۱$
۴) هیچ مقدار m

حل: گزینه ۴ درست است. نقاط بحرانی f را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = e^{-mx}(۲x - mx^۲) = x(۲ - mx)e^{-mx} \quad , \quad f'(x) = ۰ \implies x = ۰, \frac{۲}{m}$$

چون $۰ \notin (۱,۲)$ پس باید:

$$\frac{۲}{m} \in (۱,۲) \implies ۱ < \frac{۲}{m} < ۲ \implies \frac{۱}{۲} < \frac{۱}{m} < ۱ \implies ۱ < m < ۲$$

با توجه به جدول تغییرات تابع f نقطه $x = \frac{۲}{m}$ در این حالت نقطه ماکزیمم نسبی برای f است و لذا هیچ مقداری برای m به دست نمی‌آید.

x		۰		$\frac{۲}{m}$	
f'	$-$	۰	$+$	۰	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

تست ۴۷ طول نقطه می‌نیمم نسبی تابع پارامتری $\left(x=\frac{2t}{t-1}, y=\frac{t^2}{t-1}\right)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

حل: گزینه ۴ درست است. کاندیدای اکسترمم، نقاط بحرانی هستند پس $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}}{\frac{-2}{(t-1)^2}}=\frac{\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}}{\frac{-2}{(t-1)^2}}=-\frac{1}{2}(t^2-2t)$$

تنها نقاط بحرانی متناظر $t=0$ و $t=2$ هستند چون:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{2}(2t-2)}{\frac{-2}{(t-1)^2}}=\frac{1}{2}(t-1)^3\ ,\ y''(t=0)=-\frac{1}{2}<0\ ,\ y''(t=2)=\frac{1}{2}>0$$

پس $t=2$ متناظر نقطه می‌نیمم است و در این صورت $x=4$ طول نقطه می‌نیمم خواهد بود.

تذکر ۲۹.[1] بدون استفاده از آزمون مشتق دوم باید جدول تغییرات $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}(t^2-2t)$ را رسم کنیم. با توجه به جدول روبرو $t=0$ نقطه می‌نیمم و $t=2$ نقطه ماکزیمم نسبی است که با پاسخ آزمون مشتق دوم در تناقض است. توجه کنید که در جدول تغییرات برای تعیین یکنوایی و وضعیت نقاط بحرانی

t		0		2	
$\frac{dy}{dx}$	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

باید y' را بر حسب x تعیین علامت نمود. یعنی مشخص کرد که با افزایش x علامت y' چه تغییری می‌کند در حالیکه در جدول بالا y' بر حسب تغییرات t تعیین علامت شده است. پس تضمینی در مورد صحت جواب بدست آمده نخواهیم داشت.

۳-۵-۲ تقعر و نقطه عطف

تعریف. اگر f بر بازه I مشتق‌پذیر و $f'(x)$ صعودی اکید باشد می‌گوییم **تقعر f بر بازه I رو به بالا** (رو به سمت y های مثبت) یا f **محدب** است و اگر f' بر I نزولی اکید باشد می‌گوییم **تقعر f بر بازه I رو به پایین** (به سمت y های منفی) یا f **مقعر** است.

اگر تابع f بر بازه I دو بار مشتق‌پذیر باشد، علامت مشتق دوم جهت تقعر f را مشخص می‌کند به این ترتیب که:

الف) اگر f'' بر بازه I مثبت باشد، تقعر f بر I رو به سمت بالاست.

ب) اگر f'' بر بازه I منفی باشد، تقعر f بر I رو به سمت پایین است.

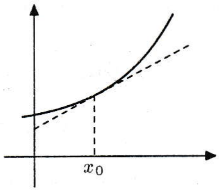
تذکر ۳۰. در حکم بالا، f'' در شمارا نقطه از بازه I می‌تواند صفر شود.

---

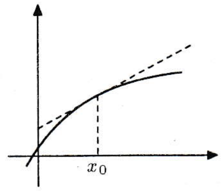
[1] این روشی است که برخی دانشجویان در کلاس آنرا پیشنهاد دادند که به خاطر عدم رعایت شرایط آزمون مشتق اول پاسخ نادرست می‌دهد.

تقعر تابع مشتق‌پذیر f از لحاظ هندسی نیز قابل بررسی است.

۱) اگر خط مماس بر نمودار f در هر نقطه از بازه I زیر نمودار f واقع شود، تقعر f بر I رو به سمت بالاست و اگر خط مماس بر نمودار f در هر نقطه از بازه I بالای نمودار f واقع شود، تقعر f روبه پایین است.



تقعر f رو به بالاست.



تقعر f رو به پایین است.

با توجه به اینکه معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه $x_\circ$ برابر $y = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$ است، چنانچه تقعر تابع f رو به بالا باشد برای هر x عرض تابع f یعنی $f(x)$ از عرض خط مماس بیشتر است و بر عکس این وضعیت برای تقعر رو به پایین برقرار است. پس:

نکته ۲۷.

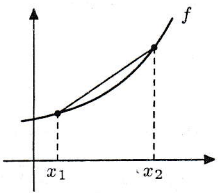
الف) اگر f بر بازه I مشتق‌پذیر و تقعر آن رو به بالا باشد برای هر $x_\circ \in I$ به ازای هر $x \in I$ داریم

$$f(x) \geq f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$$

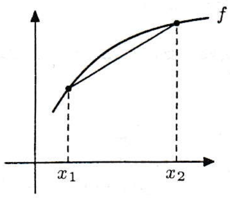
ب) اگر f بر بازه I مشتق‌پذیر و تقعر آن رو به پایین باشد برای هر $x_\circ \in I$ به ازای هر $x \in I$ داریم

$$f(x) \leq f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$$

۲) اگر تقعر f بر I رو به بالا باشد، خط واصل هر دو نقطه دلخواه از نمودار f، بالای نمودار f است و اگر تقعر f بر I روبه پایین باشد، خط واصل بین هر دو نقطه دلخواه از نمودار f، زیر نمودار f است.



تقعر f رو به بالاست.



تقعر f رو به پایین است.

شرط هندسی بالا را به شکل نابرابری زیر نیز می‌توان بیان کرد:

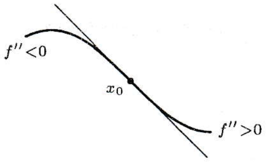
نکته ۲۸. اگر f بر بازه I مشتق‌پذیر و تقعر آن رو به بالا باشد برای هر دو نقطه دلخواه $x_۱, x_۲ \in I$ و هر عدد حقیقی $\alpha \in [\circ, ۱]$ داریم:

$$f\big(\alpha x_۱ + (۱ - \alpha)x_۲\big) \leq \alpha f(x_۱) + (۱ - \alpha)f(x_۲)$$

و در حالت خاص با قرار دادن $\alpha = \frac{۱}{۲}$:

$$f(\frac{x_۱+x_۲}{۲}) \leq \frac{f(x_۱)+f(x_۲)}{۲}$$

درحالتی که تقعر f رو به پایین باشد، کافی است جهت نابرابری را برعکس کنیم.



تعریف. نقطه $x_۰$ را برای تابع f، نقطه **عطف** می‌نامیم هرگاه f در این نقطه دارای مماس باشد و تقعر f حول این نقطه عوض شود.

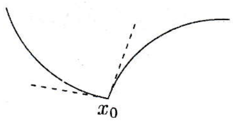
نکته ۲۹. از نظر هندسی $x_۰$ نقطه عطف است هرگاه خط مماس بر نمودار f در $x_۰$، از نمودار f عبور کند.

برای تعیین نقطه عطف باید نقاط بحرانی f' یعنی نقاطی که f'' در آنها موجود نیست یا صفر می‌شود را مشخص کنیم حال اگر در این نقطه

۱) f داری مماس باشد. ۲) f'' تغییر علامت دهد.

نقطه موردنظر برای f عطف خواهد بود.

تذکر ۳۱. تأکید می‌کنیم که اگر در نقطه‌ای تقعر تابع عوض شود اما خط مماس موجود نباشد، نقطه مورد نظر عطف نخواهد بود. مثلاً در شکل مقابل قبل از نقطه $x_۰$ خط مماس زیر نمودار و لذا تقعر رو به بالا و پس از آن خط مماس بالای نمودار و لذا تقعر رو به پایین است و بنابراین تقعر نمودار حول $x_۰$ عوض می‌شود اما این نقطه زاویه‌دار و فاقد خط مماس است.(خط مماس از نمودار تابع عبور نمی‌کند) و لذا نقطه مورد نظر عطف نخواهد بود.



مثال ۱۹. نقاط عطف تابع $f(x)=\frac{۳x^۲-۲}{x^۳}$ را مشخص کنید.

$$f(x)=\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x^۳} \implies f'(x)=-\frac{۳}{x^۲}+\frac{۶}{x^۴} \implies f''(x)=\frac{۶}{x^۳}-\frac{۲۴}{x^۵}=\frac{۶x^۲-۲۴}{x^۵}$$

نقاط $x=۰,\pm۲$ کاندیدای عطف هستند. اما f در ۰ مماس ندارد ($۰\notin D_f$) پس عطف نیست. در نقاط ±۲ چون مشتق f موجود است، پس f مماس دارد و f'' نیز تغییر علامت می‌دهد پس نقطه عطف هستند.

در آزمون مشتق دوم دیدیم که اگر $x_۰$ نقطه بحرانی f باشد و $f''(x_۰)$ صفر نشود، $x_۰$ نقطه اکسترمم است. اما در حالتی که $f''(x_۰)=۰$ آزمون بی‌نتیجه بود در این حالت می‌توانیم از تعمیم زیر استفاده کنیم.

قضیه ۱۱.(تعمیم آزمون مشتق دوم)

فرض کنید تابع f دارای مشتقات پیوسته تا هر مرتبه دلخواه و نقطه $x_۰$ نقطه بحرانی f باشد به‌طوری‌که $f'(x_۰)=f''(x_۰)=\cdots=f^{(n-۱)}(x_۰)=۰$ و $f^{(n)}(x_۰)\neq ۰$ (یعنی اولین مرتبه‌ای که مشتق تابع f در نقطه $x_۰$ مخالف صفر باشد را n می‌گیریم.) در این صورت در $x_۰$ داریم:

$$f(x)\sim f(x_۰)+\frac{f^{(n)}(x_۰)}{n!}(x-x_۰)^n$$

نتیجه ۱۲. با توجه به اینکه نمودار یک تابع و هم ارزآن، حول نقطه‌ای که هم‌ارزی در آن نوشته می‌شود مشابه یکدیگر هستند، برای رسم نمودار f حول نقطه x_0 کافی است از قضیه بالا استفاده کنیم.

الف) اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(x_0) > 0$، x_0 نقطه مینیمم است.

ب) اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(x_0) < 0$، x_0 نقطه ماکزیمم است.

ج) اگر n فرد باشد، x_0 نقطه عطف است.

در این صورت نمودار f حول نقطه x_0 به صورت زیر است.

n فرد و $f^{(n)}(x_0) < 0$ — n فرد و $f^{(n)}(x_0) > 0$ — n زوج و $f^{(n)}(x_0) < 0$ — n زوج و $f^{(n)}(x_0) > 0$

با شرایط قضیه بالا اگر $f(x_0) = 0$ آنگاه $f(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ و لذا x_0 ریشه مرتبه n برای f است.

نکته ۳۰. برای تعیین مرتبه تکرار یک ریشه باید اولین مرتبه‌ای که مشتق در آن نقطه مخالف صفر است را بدست آوریم. پس x_0 ریشه مرتبه n است هرگاه $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ و $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. چنانچه n زوج باشد f حول x_0 تغییر علامت نمی‌دهد و اگر n فرد باشد، f حول x_0 تغییر علامت می‌دهد.

تذکر۳۲. توجه کنید که بر اساس توضیحات بالا اگر هم ارزی (کوچکترین توان سری تیلور) تابع f را حول x_0 داشته باشیم با توجه به آن می‌توانیم موارد زیر را ساده تر انجام دهیم.

۱) رسم نمودار f در همسایگی x_0

۲) تعیین وضعیت نقطه x_0 از لحاظ اکسترمم یا عطف بودن

۳) اگر $f(x_0) = 0$ تعیین مرتبه صفر x_0 و تعیین علامت f حول x_0

مثال ۲۰. برای تابع $f(x) = e^{\sin x} - x$ در $x = 0$ یک هم‌ارز بیابید و سپس نوع نقطه بحرانی $x = 0$ را مشخص کنید.

باید اولین مرتبه‌ای که مشتق f در آن صفر نمی‌شود را بیابیم.

$$f'(x) = \cos x e^{\sin x} - 1 \implies f'(0) = 0 \quad \text{و} \quad f''(x) = e^{\sin x}(-\sin x + \cos^2 x) \implies f''(0) = 1$$

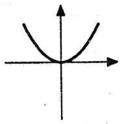
$$f(x) \sim f(0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 \implies f(x) \sim 1 + \frac{x^2}{2}$$

بنابراین از قسمت الف از نتیجه ۱۲، $x = 0$ نقطه مینیمم برای تابع f است.

مثال ۲۱. نمودار تابع $f(x) = e^{x^2} - x\sin x - 1$ را در اطراف $x = 0$ رسم کنید.

هم ارز f را حول این نقطه تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2 + \cdots\right) - x\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right) - 1 \sim \frac{2}{3}x^4$$



با توجه به یکسان بودن نمودار یک تابع و هم‌ارز آن، کافی است نمودار $y = \frac{۲}{۳}x^{۴}$ را حول $x = ۰$ رسم نماییم که نمودار روبرو در اطراف $x = ۰$ برای $f(x)$ حاصل می‌شود.

$\boxed{\text{تست ۴۸}}$ تقعر تابع $f(x) = \ln(۲ - x - x^{۲})$ بر بازه (a,b) رو به سمت پایین است. حداکثر مقدار $b - a$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $+\infty$

حل: گزینه ۲ درست است. دامنه تابع از حل نابرابری $۲ - x - x^{۲} > ۰$ بازه $(-۲, ۱)$ به دست می‌آید. اگر $u = ۲ - x - x^{۲}$ آنگاه $u > ۰$ و داریم $u' = -۱ - ۲x$ و $u'' = -۲$.

$$y = \ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u} \Longrightarrow y'' = \frac{uu'' - u'^{۲}}{u^{۲}}\ ,\ u'' = -۲ \Longrightarrow y'' = -\frac{۲u + u'^{۲}}{u^{۲}}$$

چون $u > ۰$ و $u'^{۲} > ۰$ پس y'' برای هر x در دامنه تابع منفی است و بنابراین برای $-۲ < x < ۱$، تقعر f رو به پایین است. پس بازه $(-۲, ۱)$ و هر زیر بازه‌ای از آن پاسخ سؤال است. اما چون بزرگترین بازه در سؤال خواسته شده است پس باید $a = -۲$ و $b = ۱$ و $b - a = ۳$.

تذکر۳۳. با استدلال بالا در تابع $y = \ln u$ که u تابعی دوبار مشتق‌پذیر بر حسب x است، باید $u > ۰$ و لذا برای x هایی که تقعر u رو به پایین باشد، تقعر y نیز رو به پایین است.

$\boxed{\text{تست ۴۹}}$ تابع $f(x) = x^{\frac{۲}{۳}} - ۲x^{\frac{۱}{۳}}$ در نقطه $x = ۱$ و نقطه $x = ۸$ به ترتیب دارای: (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) یک ماکزیمم و یک نقطه عطف است. ۲) یک می‌نیمم و یک نقطه عطف است.

۳) یک نقطه عطف و یک ماکزیمم است. ۴) یک می‌نیمم و یک ماکزیمم است.

حل: گزینه ۲ درست است.

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}(x^{-\frac{۱}{۳}} - x^{-\frac{۲}{۳}}) \ \text{و}\ f'(۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \ \text{بحرانی است}$$

$$f''(x) = -\frac{۲}{۹}(x^{-\frac{۴}{۳}} - ۲x^{-\frac{۵}{۳}}) \ \text{و}\ f''(۸) = ۰$$

چون f'' حول $x = ۸$ تغییر علامت می‌دهد(از مثبت به منفی) پس این نقطه عطف است و چون $f''(۱) = -\frac{۲}{۹}(۱ - ۲) = \frac{۲}{۹} > ۰$ پس $x = ۱$ نقطه می‌نیمم است.

$\boxed{\text{تست ۵۰}}$ اگر $f(x) = \begin{cases} x^{۳} + x^{۲} + x & x \geq ۰ \\ \cos x - ۱ & x < ۰ \end{cases}$، کدام گزینه وضعیت f را در مبدأ درست نشان می‌دهد؟

۱) مبدأ نقطه ماکزیمم است. ۲) تقعر f در مبدأ عوض می‌شود اما عطف نیست.

۳) مبدأ نقطه مینیمم است. ۴) مبدأ نقطه عطف است.

حل: گزینه ۲ درست است. f در مبدأ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^{۲} + ۲x + ۱ & x > ۰ \\ -\sin x & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f'_{+}(۰) = ۱ \ \text{و}\ f'_{-}(۰) = ۰$$

پس مبدأ نقطه زاویه‌دار و فاقد خط مماس است و چون f' حول این نقطه مثبت است، نقطه اکسترمم نمی‌باشد.

$$f''(x) = \begin{cases} ٦x + ۲ & x > ۰ \\ -\cos x & x < ۰ \end{cases} \implies f''_+(۰) = ۲ \text{ و } f''_-(۰) = -۱$$

پس f'' حول این نقطه تغییر علامت می‌دهد، اما چون مماس موجود نیست پس عطف نمی‌باشد.

تست ۵۱ تابع f در نقطه $x = ۱$ دارای مشتق اول و دوم و سوم برابر صفر است و مشتق چهارم f در $x = ۱$ منفی است. نقطه $x = ۱$ روی منحنی متناظر با چه نوع نقطه‌ای است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) ماکزیمم ۲) عطف ۳) مینیمم ۴) بازگشت

حل: گزینه ۱ درست است. چون اولین مرتبه‌ای از مشتق که صفر نیست، زوج است و $f^{(۴)}(۱) < ۰$ بنا به نتیجه ۱۲ در صفحه ۱۵۷ نقطه $x = ۱$ ماکزیمم است.

تست ۵۲ برای تابع $f(x) = \sqrt[۵]{x^۳ - ٦x^۲}$، $x = ٦$ نقطه ... و $x = ۰$ نقطه ... است.

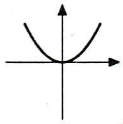
۱) عطف، ماکزیمم ۲) ماکزیمم، مینیمم ۳) عطف، مینیمم ۴) ماکزیمم، عطف

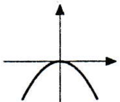
حل: گزینه ۱ درست است. هم ارز تابع را به دست می‌آوریم. توجه کنید که $\lim_{x \to ٦} x^۲ = ۳٦$ و لذا $x^۲ \sim ۳٦$ پس:

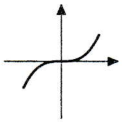
$$x = ٦ \ : \ f(x) = \sqrt[۵]{x^۲(x-٦)} \sim \sqrt[۵]{۳٦} \cdot \sqrt[۵]{x-٦} \xRightarrow{\text{نکته ۱۸ صفحه ۱۲۷}} \text{عطف قائم}$$

$$x = ۰ \ : \ f(x) = \sqrt[۵]{x^۳ - ٦x^۲} \sim \sqrt[۵]{-٦x^۲} = -\sqrt[۵]{٦} \cdot \sqrt[۵]{x^۲} \xRightarrow{\text{نکته ۱۸}} \text{بازگشت و ماکزیمم}$$

تست ۵۳ نمودار $f(x) = \sinh x + \ln(۱ - x) + \frac{۱}{۲} \sin x^۲$ در همسایگی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

حل: گزینه ۴ درست است. هم ارز f را در $x = ۰$ تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = (x + \frac{x^۳}{٦} + \cdots) + (-x - \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳} + \cdots) + \frac{۱}{۲}(x^۲ + \cdots) \sim -\frac{x^۳}{٦}$$

پس باید نمودار $y = -\frac{x^۳}{٦}$ را در اطراف $x = ۰$ رسم کنیم که در گزینه (۴) داده شده است.

تست ۵۴ فرض کنید f و g توابع مشتق‌پذیر تعریف شده روی تمام خط حقیقی باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر اشتباه است؟ (MBA ۸۲)

۱) ممکن است همه‌جا $f' > g'$ و $f < g$.

۲) ممکن است همه‌جا $f'' > ۰$ و $f' < ۰$ و $f > ۰$.

۳) ممکن است همه‌جا $f > ۰$ و $f' > ۰$ و $f'' < ۰$.

۴) اگر $f' = g'$ همه جا و $f(x_۰) = g(x_۰)$ به‌ازای یک $x_۰$، آنگاه $f = g$ همه‌جا.

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $f' > ۰$ و $f'' < ۰$ و تابع f در نقطه‌ای مثبت باشد، تابع f نموداری شبیه تست ۳۷ در صفحه ۲۲۸ دارد پس f باید در نقاطی منفی شود.

تذکر ۳۴. مثالی که نشان دهد گزینه (۱) درست است $g(x) = ۰$ و $f(x) = -e^{-x}$ و مثالی که نشان دهد گزینه (۲) درست است، $f(x) = e^{-x}$ می‌باشد. حکم گزینه (۴) هم که نتیجه ٦ در صفحه ۱۴۷ است.

نکته ۳۱. تحت هر یک از چهار شرط زیر تابع f که ۲ بار مشتق پذیر بر $\mathbb{R}$ باشد، موجود نیست.

۱) $f'' < 0$ و $f' > 0$ و $f > 0$ ۲) $f'' > 0$ و $f' > 0$ و $f < 0$

۳) $f'' > 0$ و $f' < 0$ و $f < 0$ ۴) $f'' < 0$ و $f' < 0$ و $f > 0$

برای به خاطر سپردن احکام بالا می‌توان گفت تابعی وجود ندارد که در کل $\mathbb{R}$ تعریف شده و وضعیت یکنوایی آن ثابت بوده و f و f'' دارای علامت ثابت و متفاوت باشند.

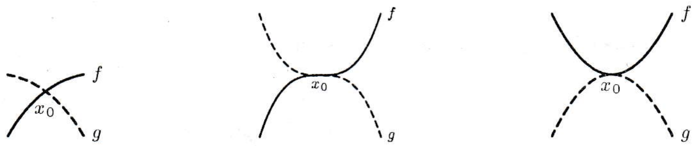
تست ۵۵ نمودار دو تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x$ و $g(x) = 2x^3 + x^2 + 4$ در نقطه‌ای با کدام طول از یکدیگر می‌گذرند؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) -2 ۴) -1

حل: گزینه ۳ درست است. دو منحنی را با هم تقاطع می‌دهیم.

$$f(x) = g(x) \implies x^4 - 2x^2 + 8x = 2x^3 + x^2 + 4 \implies x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$$

با بررسی گزینه‌ها $x = 1$ و $x = -2$ در معادله بالا صدق می‌کند. حال توجه کنید که در حالت کلی اگر دو نمودار f و g در نقطه x_0 با هم تقاطع داشته باشند وضعیتهای نشان داده شده در شکل (نموداری که با نقطه چین رسم شده مربوط به g است) می‌تواند رخ دهد.



شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

شکل (۱) مربوط به حالتی است که x_0 ریشه ساده باشد. در این حالت دو نمودار از یکدیگر می‌گذرند. در شکل (۲) و (۳) نمودارها در x_0 بر هم مماس هستند. در شکل (۲) نمودارها از هم می‌گذرند و x_0 ریشه با مرتبه تکرار فرد (مرتبه ۳ یا ۵ یا ...) است اما در شکل (۳) دو نمودار از هم نمی‌گذرند و x_0 ریشه با مرتبه تکرار زوج (مرتبه ۲ یا ۴ یا ...) است. پس از بین $x = 1$ و $x = -2$ باید ریشه‌ای را انتخاب کنیم که ساده و یا در حالت کلی‌تر از مرتبه فرد باشد. برای یافتن مرتبه تکرار ریشه تعریف می‌کنیم $h(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ و بنا به نکته ۳۰ در صفحه ۱۵۷ مشتق آنرا تشکیل دهیم.

$$h'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 8 \implies h'(1) = 0\ ,\ h'(-2) \neq 0$$

$$h''(x) = 12x^2 - 12x - 6 \implies h''(1) \neq 0$$

پس $x = -2$ ریشه ساده است و لذا دو نمودار در این نقطه از هم می‌گذرند. $x = 1$ ریشه مرتبه ۲ برای $h(x)$ است و لذا نمودار آن شبیه شکل (۳) خواهد بود. می‌توان بررسی کرد که در نقطه $x = 2$ نیز دو نمودار از هم عبور می‌کنند و در واقع $h(2) = 0$ و $h'(2) \neq 0$.

تذکر۳۵. شرط آنکه دو نمودار در نقطه برخورد از هم عبور کنند، آن است که آن نقطه ریشه از مرتبه فرد باشد.

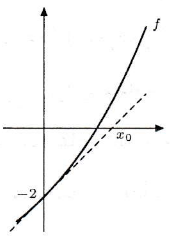
تست ۵۶ f تابعی است که مشتق مرتبه دوم آن پیوسته است و $f(\circ) = -۲, f'(\circ) = ۳$ و $f''(x) > \circ$ و $f'(x) > \circ$. کدام گزینه در مورد ریشه‌های f درست است؟

۱) f دقیقاً یک ریشه دارد که در بازه $(\circ, \frac{۱}{۳})$ واقع است.

۲) f در $\mathbb{R}$ فاقد ریشه است.

۳) f دقیقاً یک ریشه دارد که در بازه $(\circ, \frac{۲}{۳})$ واقع است.

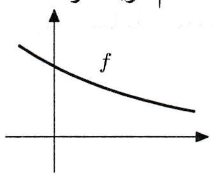
۴) در مورد تعداد ریشه‌های f نمی‌توان حکمی داد.

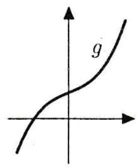


حل: گزینه ۳ درست است. چون تقعر رو به بالاست، خط مماس بر نمودار f زیر نمودار واقع است. خط مماس در $(\circ, -۲)$ دارای معادله $g(x) = ۳x - ۲$ است و محور x ها را در $x_\circ = \frac{۲}{۳}$ قطع می‌کند و چون خط مماس زیر نمودار f است. $f(x_\circ) > g(x_\circ) = \circ$ پس $f(\circ)f(x_\circ) < \circ$ و لذا f در فاصله $(\circ, \frac{۲}{۳})$ ریشه دارد و چون f صعودی اکید است، این ریشه تنها ریشه f است. (نمودار تقریبی f را ملاحظه کنید.)

تست ۵۷ در مورد تابع‌های f و g که نمودارشان داده شده است، کدام گزینه درست است؟

(فلسفه ۸۱)





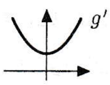
۱) مشتق سوم f می‌تواند مثبت باشد ولی مشتق سوم g مثبت نیست.

۲) مشتق سوم g می‌تواند مثبت باشد ولی مشتق سوم f مثبت نیست.

۳) مشتق سوم هر دو می‌تواند مثبت باشد.

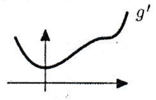
۴) مشتق سوم هیچیک نمی‌تواند مثبت باشد.

حل: گزینه ۲ درست است. مشتق سوم g می‌تواند مثبت باشد. ابتدا نمودار g' را رسم می‌کنیم. چون g صعودی اکید است پس $g' > \circ$ یعنی نمودار g' بالای محور x ها قرار دارد. تقعر نمودار g در $x = \circ$ (محل برخورد با محور x ها) عوض می‌شود و قبل از آن تقعر رو به پایین یعنی $g'' < \circ$ و بعد از آن تقعر رو به بالا یعنی $g'' > \circ$ پس نمودار g' تا



قبل از $x = \circ$ نزولی و پس از آن صعودی است. پس نمودار روبرو را می‌توان برای g' رسم کرد و چون تقعر g' رو به بالاست پس مشتق دوم g' و لذا مشتق سوم g مثبت است. اما مشتق سوم f نمی‌تواند مثبت باشد زیرا در غیر این صورت اگر $h(x) = f'(x)$ فرض شود داریم $h'' > \circ$. از طرفی چون f نزولی با تقعر رو به بالاست پس $h = f' < \circ$ و $h' = f'' > \circ$ پس h باید دارای سه ویژگی $h < \circ$ و $h' > \circ$ و $h'' > \circ$ در کل $\mathbb{R}$ باشد که با توجه به نکته ۳۱ امکان ندارد.

تذکر۳۶. توجه کنید که نمی‌توان حکم داد که مشتق سوم g قطعاً مثبت است. مثلاً با اطلاعات داده شده در این سؤال، نمودار روبرو هم برای g' قابل رسم است که تقعر آن عوض می‌شود پس g''' تغییر علامت می‌دهد.



۳-۵-۳ رسم نمودار توابع

برای رسم نمودار یک تابع موارد زیر باید مشخص شود.

۱) دامنه تعریف تابع را مشخص کنیم.

۲) ریشه‌ها (صفرهای) تابع را در صورت امکان مشخص کنیم.

۳) زوج، فرد یا متناوب بودن تابع را بررسی کنیم.

۴) مجانب‌های تابع و وضع تابع در نقاط ابتدا و انتهایی دامنه را مشخص کنیم.

۵) با محاسبه f'، نقاط بحرانی و نوع آنها را در جدول تغییرات مشخص کنیم.

۶) در صورت نیاز مشتق دوم و نقاط عطف را مشخص کنیم.

مثال ۲۲. نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{۱}{x}}$ را رسم کنید.

چون در توابع نمایی طبق تعریف مبنا باید نامنفی باشد پس دامنه f بازه $(۰, +\infty)$ است. تابع f را در $+\infty$ و ۰ بررسی می‌کنیم.

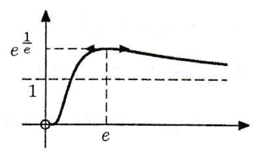
$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۰^{+\infty} = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) \overset{\infty^۰}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{x}\ln x} = e^۰ = ۱$$

پس $y = ۱$ مجانب افقی f است. نمودار f فاقد مجانب قائم است.

$$y = x^{\frac{۱}{x}} \Longrightarrow \ln y = \frac{۱}{x}\ln x \Longrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{۱}{x^۲}\ln x + \frac{۱}{x^۲} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x^{\frac{۱}{x}}}{x^۲}(۱ - \ln x)$$

پس $x = e$ تنها نقطه بحرانی f است. حال جدول تغییرات f را تشکیل می‌دهیم.

x	۰		e		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	max	↘	۱



مثال ۲۳. با رسم نمودار $f(x) = x + \frac{۱}{x}$ در مورد تعداد جواب‌های معادله $x + \frac{۱}{x} = k$ بر حسب k بحث کنید.

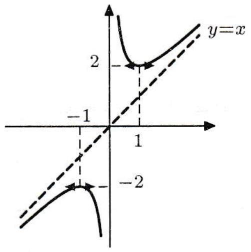
دامنه تابع f، $\mathbb{R} - \{۰\}$ و f تابعی فرد است. پس کافی است آن را برای $x > ۰$ در نظر بگیریم.

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ مجانب قائم $x = ۰$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x) = ۰ \Longrightarrow$ مجانب مایل $y = x$

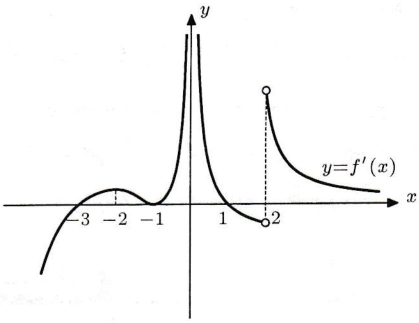
$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \quad , \quad f'(x) = ۰ \Longrightarrow x = ۱$

x	۰		۱		$+\infty$
f'	‖	−	۰	+	
f	$+\infty$	↘	۲ min	↗	$+\infty$



حال نمودار را برای $x > ۰$ رسم می‌کنیم و چون f فرد است، برای $x < ۰$ قرینه نمودار را نسبت به مبدأ به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار اگر $|k| < ۲$ معادله جواب ندارد. برای $|k| > ۲$ معادله دو جواب و برای $k = \pm ۲$ یک جواب (ریشه مضاعف) دارد.

مثال ۲۴ تابع f در تمام نقاط پیوسته است و نمودار مشتق آن مطابق شکل زیر است. به موارد زیر پاسخ دهید.



الف) نقاط بحرانی و نوع آنها را برای تابع f مشخص کنید.

ب) تقعر f را در بازه های مختلف مشخص کرده و نقاط عطف آنرا بیابید.

الف) نقاط بحرانی f، نقاطی هستند که مشتق در آنها صفر می‌شود یا وجود ندارد پس نقاط برخورد نمودار f' با محور x ها یا نقاطی f' در آنها موجود نمی‌باشد، بحرانی هستند. پس $x = -۳, -۱, ۰, ۱, ۲$ نقاط بحرانی هستند. توجه کنید که چنانچه نمودار f' زیر محور x ها باشد داریم $f'(x) < ۰$ و لذا f نزولی اکید است و اگر نمودار f' بالای محور x ها باشد داریم $f'(x) > ۰$ و لذا f صعودی اکید است. بنابراین اگر نمودار مشتق در اطراف نقطه‌ای از پایین محور به بالای محور برود، این نقطه می‌نیمم نسبی است.(مانند $x = -۳$) و اگر نمودار مشتق در اطراف نقطه‌ای از بالای محور به پایین محور برود، این نقطه ماکزیمم نسبی است.(مانند $x = ۱$) پس جدول تغییرات f به صورت زیر است.

x		-۳		-۱		۰		۱		۲	
$f'(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$+$	$\vert$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

با توجه به جدول بالا $x = ۲$ و $x = -۳$ نقاط می‌نیمم و $x = ۱$ نقطه ماکزیمم نسبی بوده ولی سایر نقاط بحرانی، اکسترمم نیستند. ضمناً توجه کنید که چون در $x = ۲$ تابع f پیوسته است، می‌توانیم با توجه به آزمون مشتق اول نوع نقطه بحرانی را تشخیص دهیم. در این نقطه مشتق چپ و راست موجود و نابرابر هستند و لذا این نقطه زاویه‌دار است.

ب) برای تعیین تقعر f توجه کنید که در نقاطی که f' صعودی اکید است، تقعر f رو به بالاست و در نقاطی که f' نزولی اکید است، تقعر f رو به پایین است. چون در نقطه عطف f تقعر این تابع عوض می‌شود، پس وضعیت یکنوایی f' تغییر می‌کند و لذا نقاط اکسترمم برای f' نقطه عطف نمودار f خواهند بود.(همچنین نقاطی که f' در آنها تعریف نمی‌شوند، کاندیدای عطف می‌باشند.) با توجه به توضیحات بالا، وضعیت تقعر تابع f به صورت زیر است.

x		-۲		-۱		۰		۲	
$f''(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$

با توجه به جدول بالا نقاط $x = -۲, -۱, ۰$ برای تابع f نقاط عطف هستند. توجه کنید که در $x = ۰$ مشتق وجود ندارد اما $f'_+(۰) = f'_-(۰) = +\infty$ (یعنی $x = ۰$ انفصال مضاعف برای نمودار f' است) و چون f در $x = ۰$ پیوسته است، این نقطه عطف قائم برای f است.

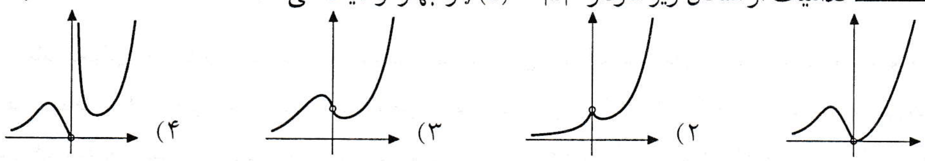
نکته ۳۲.

۱) نقاط اکسترمم f' برای f نقطه عطف هستند.

۲) نقاطی که برای f' انفصال مضاعف هستند یعنی f' در آنها دارای مجانب است و حدود f' در هر دو طرف بینهایت‌های هم‌علامت باشند(به شرط پیوستگی f) نقطه عطف f محسوب می‌شوند.

۳) نقاطی که f' در آنها دارای مجانب قائم است، به شرط آنکه حدود f' در هر دو طرف بینهایت‌های غیرهم‌علامت باشند(به شرط پیوستگی f) نقطه بازگشت و اکسترمم نسبی برای f محسوب می‌شوند.

تست ۵۸ کدامیک از اشکال زیر نمودار $f(x) = |x|^x$ را بهتر توصیف می‌کند؟ (فلسفه ۸۲)



۱) ۲) ۳) ۴)

حل: گزینه ۳ درست است. دامنه تابع $x \neq ۰$ است. توجه کنید که $\ln f(x) = x \ln|x|$ و چون وقتی $x \to ۰$ داریم $x \ln|x| \to ۰$ پس $f(x) \to e^۰ = ۱$. از طرفی با مشتق گرفتن از رابطه:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|x| + ۱ \implies f'(x) = |x|^x(۱ + \ln|x|)\ ,\ f'(x) = ۰ \implies x = \pm\frac{۱}{e}$$

x		$-\frac{۱}{e}$		۰		$\frac{۱}{e}$	
f'	$+$	۰	$-$	$\vert$	$-$	۰	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

با توجه به جدول تغییرات، f دارای یک ماکزیمم نسبی در $-\frac{۱}{e}$ و می‌نیمم نسبی در $\frac{۱}{e}$ است. ضمناً $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۰$ پس نمودار (۳) حاصل می‌شود.

تست ۵۹ تابع $f(x) = \frac{۲x^۲}{x^۲ + ۳}$ مفروض است. کدامیک از ادعاهای زیر برای این تابع کاملاً صادق است؟ (سیستم ـ آزاد ۸۱ و ۸۲)

۱) این تابع دارای یک مجانب افقی و سه نقطه می‌نیمم است.

۲) این تابع دارای دو نقطه می‌نیمم است.

۳) این تابع دارای یک مجانب $y = ۲$، یک نقطه می‌نیمم و دو نقطه عطف است.

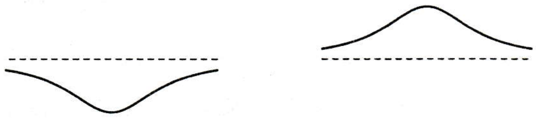
۴) این تابع دارای دو نقطه عطف و یک نقطه می‌نیمم است و لیکن مجانب افقی ندارد.

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = ۲$ پس این تابع دارای مجانب افقی $y = ۲$ است.

$$f(x) = ۲ - \frac{۶}{x^۲ + ۳} \implies f'(x) = \frac{۱۲x}{(x^۲ + ۳)^۲} = ۰ \implies x = ۰$$

و چون f' از $-$ به $+$ تغییر علامت می‌دهد این نقطه می‌نیمم است. پس فقط گزینه ۳ می‌تواند درست باشد.

نکته ۳۳. نمودار $f(x) = \frac{ax^۲ + bx + c}{a'x^۲ + b'x + c'}$ به شرط آنکه $ab' - ba' = ۰$ دارای یک مجانب افقی، یک نقطه اکسترمم در $x_۰ = -\frac{b}{۲a}$ و دو نقطه عطف و محور تقارنی به معادله $x = x_۰$ است و به یکی از دو شکل زیر است:



$\boxed{\text{تست ۶۰}}$ معادله $۲x^۵ + ۵x^۴ + ۱ = ۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (آمار ۷۹)

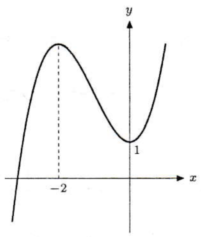
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۵

حل: گزینه ۱ درست است. قرار دهید $f(x) = ۲x^۵ + ۵x^۴ + ۱$ آنگاه:

$$f'(x) = ۱۰x^۴ + ۲۰x^۳ = ۱۰x^۳(x + ۲) \quad , \quad f'(x) = ۰ \implies x = ۰, -۲$$

x		-۲		۰	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

جدول تغییرات تابع f به صورت روبرو است. بر هر یک از بازه‌هایی که f یکنوا است، باید تعداد ریشه‌ها را تعیین نماییم. نقطه $x = -۲$ و $x = ۰$ به ترتیب نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی برای f هستند و $f(۰) = ۱$ و $f(-۲) = ۱۷$. پس چون f بر $[۰, +\infty)$ صعودی اکید و $f(۰) = ۱$ پس معادله برای $x \geq ۰$ فاقد جواب است. از طرفی چون $f(-۲) = ۱۷$ و f بر فاصله $[-۲, ۰]$ نزولی اکید است پس معادله بر این فاصله نیز فاقد ریشه است، بر بازه $(-\infty, -۲]$ تابع f صعودی اکید است و چون $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ پس f بر این فاصله دقیقاً دارای یک ریشه خواهد بود. (این موضوع از روی نمودار f نیز مشهود است.)



۳ـ۵ـ۴ قضایای رُل، مقدار میانگین

قضیه ۱۳. (قضیه رُل)

اگر f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b)$ نقطه $a < c < b$ موجود است که $f'(c) = ۰$ یعنی f حداقل در یک نقطه مماس افقی دارد.

تذکر ۳۷. اگر در قضیه رُل شرط مشتق‌پذیری برقرار نباشد، نقطه مناسب $a < c < b$ موجود است که برای f، اکسترمم نسبی شود.

نتیجه ۱۴. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، f' بین هر دو ریشه متوالی f حداقل یک ریشه دارد.

مثال ۲۵. تابع f در $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر و دارای سه ریشه متمایز است. معادله $f''(x) = ۰$ چند جواب دارد؟
اگر ریشه‌های f را $x_۳$ و $x_۲$ و $x_۱$ بگیریم که $x_۱ < x_۲ < x_۳$ آنگاه از قضیه رُل نقاط مناسب $x_۱ < y_۱ < x_۲$ و $x_۲ < y_۲ < x_۳$ موجودند که $f'(y_۱) = f'(y_۲) = ۰$. اگر از قضیه رُل برای f' روی بازه $[y_۱, y_۲]$ استفاده کنیم نقطه

مناسب $y_1 < z < y_2$ موجود است که $f''(z) = 0$ و لذا این معادله دارای حداقل یک جواب است.

نکته ۳۴. استدلال بالا نشان می‌دهد که با هر مرتبه مشتق‌گیری از ریشه‌های تابع، یکی کم می‌شود یعنی اگر f دارای n ریشه و دارای مشتق مرتبه n باشد، f' حداقل دارای $(n-1)$ ریشه، f'' حداقل دارای $(n-2)$ ریشه و $f^{(n-1)}$ حداقل دارای یک ریشه خواهد بود.

نکته ۳۵. اگر مشتق یک تابع دارای n ریشه باشد، آن تابع دارای حداکثر $n+1$ ریشه خواهد بود.

تذکر۳۸. یکی از کاربردهای قضیه رُل با توجه به نکته بالا یافتن حداکثر تعداد ریشه‌های یک تابع است و خصوصاً اگر آن را با قضیه مقدار میانی تلفیق کنیم، تعداد ریشه‌های تابع را می‌توان کراندار کرد.

مثال ۲۶. معادله $x^4 - 4x - 1 = 0$ چند ریشه دارد؟

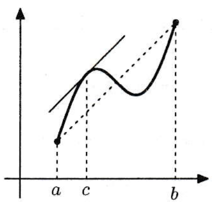
اگر $f(x) = x^4 - 4x - 1$ داریم $f'(x) = 4x^3 - 4$ که دارای یک ریشه است پس بنا به نکته بالا معادله $f(x) = 0$ دارای حداکثر ۲ ریشه است. حال:

$$f(-1) = 4 \quad \text{و} \quad f(0) = -1 \quad \text{و} \quad f(3) = 68$$

پس بنا به قضیه مقدار میانی تابع f دارای حداقل دو ریشه در بازه‌های $[-1, 0]$ و $[0, 3]$ و لذا دقیقاً دو ریشه است.

تعمیم قضیه رُل به صورت زیر است:

قضیه ۱۵. (قضیه مقدار میانگین)



اگر f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد، نقطه $a < c < b$ موجود است که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

از نظر هندسی قضیه مقدار میانگین تضمین می‌کند که حداقل یک نقطه در بازه (a, b) موجود است که مماس در آن نقطه موازی خط واصل $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ است.

نکته ۳۶. کاربرد مهم قضیه مقدار میانگین در تخمین زدن تغییرات تابع است به این ترتیب که اگر $a < b$ و شرایط قضیه برقرار باشد نقطه $a < c < b$ موجود است که $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ و اگر بر بازه (a, b) مشتق کراندار باشد یعنی $\alpha \le f'(x) \le \beta$ آنگاه $\alpha(b-a) \le f(b) - f(a) \le \beta(b-a)$

تذکر۳۹. تعمیم قضیه مقدار میانگین(که قضیه کوشی نامیده می‌شود) به صورت زیر است:

فرض کنید توابع f و g بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر بوده و در این بازه $g'(x)$ در هیچ نقطه‌ای صفر نشود، آنگاه $c \in (a, b)$ موجود است که $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

مثال ۲۷. نقطه مناسب در قضیه مقدار میانگین را برای تابع $f(x) = \cos x - \frac{x}{2}$ در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست آورید.

شرایط قضیه برقرار است و لذا نقطه مناسب $-\pi < c < \pi$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi - (-\pi)} = -\frac{1}{2} \implies -\sin c - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \implies c = 0, \pm\pi$$

باید نقاطی که داخل بازه قرار دارند را در نظر بگیریم پس $c = 0$ جواب است.

تذکر ۴۰. قضیه رُل و مقدار میانگین وجود نقطه مناسب را تضمین می‌کنند ولی در مورد تعداد آن هیچ حکمی نمی‌دهند.

تست ۶۱ هرگاه داشته باشیم $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ معادله $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ در فاصله $(0, 1)$ چند ریشه دارد؟ (آمار ۷۴)

۱) دو ریشه ۲) حداقل دو ریشه ۳) صفر ریشه ۴) حداقل یک ریشه

حل: گزینه ۴ درست است. تعریف می‌کنیم $f(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (این تابع را با انتگرال گرفتن از معادله داده شده در صورت سؤال به دست آوردیم.) حال چون $f(0) = 0$ و $f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ پس بنا به قضیه رل نقطه $0 < x_0 < 1$ موجود است که $f'(x_0) = 0$. چون $f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ پس معادله داده شده در سؤال دارای حداقل یک ریشه در بازه $(0, 1)$ است.

تست ۶۲ تابع f در فاصله $[0, 2]$ دو بار مشتق‌پذیر است و $f(0) = f(2) = 0$ و برای هر $x \in [0, 2]$، $f''(x) \neq 0$. در بازه $(0, 2)$ کدام بیان درست است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) f ریشه ندارد. ۲) f' دو ریشه متمایز دارد.

۳) f حداقل یک ریشه دارد. ۴) f' ریشه ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است. اگر f در بازه $(0, 2)$ دارای ریشه باشد آنگاه چون $f(0) = f(2) = 0$ بر بازه $[0, 2]$ تابع f دارای سه ریشه متمایز است و لذا با توجه به مثال ۲۵ در صفحه ۱۶۵، f'' دارای حداقل یک ریشه است که تناقض است پس f ریشه ندارد.

تذکر ۴۱. اگر f' دو ریشه داشته باشد، از قضیه رُل f'' حداقل یک ریشه دارد که تناقض با فرض سؤال است. از طرفی $f(0) = f(2) = 0$ پس از قضیه رُل تابع f' حداقل یک ریشه در $(0, 2)$ دارد پس تحت این شرایط f' دقیقاً یک ریشه دارد.

تست ۶۳ فرض کنید $f(x)$ همواره مشتق‌پذیر بوده و $f(2) = -3$ و به ازای $2 < x < 5$ داشته باشیم $1 < f'(x) < 2$ آنگاه: (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $f(5) > 3$ ۲) $f(5) < 0$ ۳) $0 < f(5) < 3$ ۴) $f'(5)$ موجود نیست.

حل: گزینه ۳ درست است. از قضیه مقدار میانگین استفاده می‌کنیم. نقطه $2 < c < 5$ موجود است که:

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = f'(c) \implies 1 < \frac{f(5) + 3}{3} < 2 \implies 0 < f(5) < 3$$

تست ۶۴ اگر $0 < a < b$ و تعریف کنیم $A = \frac{\ln b - \ln a}{b - a} - \frac{1}{a}$ و $B = \frac{\ln b - \ln a}{b - a} - \frac{1}{b}$، آنگاه کدام نامساوی‌ها برقرار است؟ (مکانیک ۸۱)

۱) $0 < A < B$ ۲) $A < 0 < B$ ۳) $A < B < 0$ ۴) $B < 0 < A$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $f(x) = \ln x$ آنگاه $a < c < b$ موجود است که:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \implies \frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{۱}{c} - \frac{۱}{a} = \frac{a-c}{ac} < ۰ \quad \text{و} \quad B = \frac{۱}{c} - \frac{۱}{b} = \frac{b-c}{bc} > ۰$$

تست ۶۵ **تعداد ریشه‌های $\pi \cos \pi x - ۴(۱ - ۲x) = ۰$ در بازه $(۰, \frac{۱}{۲})$ برابر کدام است؟** (ریاضی ۷۶)

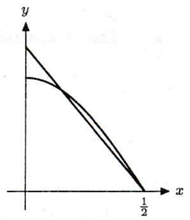
۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌نهایت

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. اگر $f(x) = \pi \cos \pi x - ۴(۱ - ۲x)$ آنگاه:

$$f'(x) = -\pi^۲ \sin \pi x + ۸ = ۰ \Longrightarrow \sin(\pi x) = \frac{۸}{\pi^۲}$$

چون $۱ > \frac{۸}{\pi^۲} > ۰$ و $۰ < \pi x < \frac{\pi}{۲}$ پس زاویه πx در ربع اول قرار دارد و لذا معادله بالا دارای یک جواب است یعنی f' بر $[۰, \frac{۱}{۲}]$ دارای یک ریشه است. پس بنا به نکته ۳۵ در صفحه ۱۶۶ تابع f بر $[۰, \frac{۱}{۲}]$ حداکثر دارای دو ریشه است. چون $f(\frac{۱}{۲}) = ۰$ پس f بر $(۰, \frac{۱}{۲})$ حداکثر یک ریشه دارد. اما $f(\frac{۱}{۴}) = \frac{\pi\sqrt{۲}}{۲} - ۲ > ۰$ و $f(۰) = \pi - ۴ < ۰$ ولذا f بر $(۰, \frac{۱}{۲})$ حداقل یک ریشه و لذا دقیقاً یک ریشه خواهد داشت.



روش دوم. تعداد جوابهای این معادله برابر تعداد نقاط برخورد $y = \pi \cos \pi x$ و $y = ۴(۱ - ۲x)$ در بازه $(۰, \frac{۱}{۲})$ است. هر دو نمودار در $x = \frac{۱}{۲}$ محور x ها را قطع می‌کنند و با توجه به شکل در بازه مورد نظر یک نقطه برخورد دارند.

تست ۶۶ **تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و f' صعودی اکید است و $f(۰) = ۰$. در مورد تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ بر بازه $(۰, +\infty)$ کدام حکم درست است؟**

۱) دارای اکسترمم مطلق است. ۲) صعودی اکید است.

۳) ممکن است دارای اکسترمم نسبی باشد. ۴) نزولی اکید است.

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به گزینه‌ها باید $g'(x)$ را تشکیل دهیم.

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^۲} = \frac{xf'(x) - \big(f(x) - f(۰)\big)}{x^۲}$$

بنا به قضیه مقدار میانگین عدد مناسب $۰ < c < x$ موجود است که $f(x) - f(۰) = f'(c)x$ و چون f' صعودی اکید است پس $f'(c) < f'(x)$ و لذا:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - xf'(c)}{x^۲} = \frac{x\big(f'(x) - f'(c)\big)}{x^۲} > ۰ \Longrightarrow \text{g صعودی اکید است.}$$

تذکر۴۲. روش دیگر برای بررسی نامنفی بودن صورت کسر در $g'(x)$ این است که تعریف کنیم $h(x) = xf'(x) - f(x)$. چون $h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x)$ و چون f' صعودی اکید است،(با فرض وجود مشتق دوم) داریم $f''(x) \geq ۰$ پس برای $x > ۰$ داریم $h'(x) \geq ۰$ پس $h(x)$ صعودی اکید است و لذا برای $x > ۰$ داریم $h(x) > h(۰) = ۰$.