به نام او، برای او

پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۹۳/۱۰/۲۵

وقت امتحان: ۳ ساعت

۱. انتگرال‌های نامعین زیر را حساب کنید.

(الف)
$$\int \frac{2x}{1-x^4}\mathrm{d}x.$$

(ب)
$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x.$$

۲. تابع f با ضابطه زیر در چه نقطه‌ای از بازه $[0, \frac{\pi}{3}]$ ماکسیمم می‌شود؟

$$f(x) = \int_{x/2}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

۳. (الف) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x داریم $e^x > 1 + x$.

(ب) نشان دهید سری زیر همگراست:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2}).$$

۴. (الف) سری تیلور تابع $\sin x$ را حول $\frac{\pi}{4}$ حساب کنید.

(ب) با استفاده از قضیه تقریب خطای چندجمله‌ای تیلور نشان دهید که این سری برای هر x حقیقی به تابع $\sin x$ همگراست.

۵. حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n) - \ln(k)}{\sqrt{nk}}.$$

موفق باشید.

به نام او و برای او

پاسخ سؤال‌های امتحان پایان ترم

ریاضی عمومی ۱ (پاییز ۹۳)

① [۲۰ نمره]

(الف) [۱۰ نمره]

۴ نمره $\left\{ \quad \frac{2x}{1-x^4} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \right.$

۲ نمره $\left\{ \quad A=\frac{1}{2}, \ B=-\frac{1}{2}, \ C=1, \ D=0 \right.$

۴ نمره $\left\{ \int \frac{2x}{1-x^4}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C \right.$

(ب) [۱۰ نمره]

۴ نمره $\left\{ I = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = -e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x\,dx}_{dv} \right.$

۴ نمره $\left\{ \quad = -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int e^x \sin x\,dx}_{I} \right.$

بنابراین،

۲ نمره $\left\{ I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) \right.$

[۲۰ نمره] ② هرگاه $f(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt$ ، داریم $f'(x)=g(b(x))b'(x)-g(a(x))a'(x)$

در مسئلهٔ داده شده داریم $b(x)=x$ ، $a(x)=\frac{x}{2}$ ، $g(x)=\frac{\sin x}{x}$. پس:

$$f'(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sin x-\sin\frac{x}{2}}{x}$$

تابع $\sin(x)$ در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{3}]$ اکیداً صعودی است، پس به ازای هر $x\in(0,\frac{\pi}{3})$ ، $\sin x > \sin\frac{x}{2}$ و در نتیجه $f'(x)>0$. بنابراین f در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{3}]$ اکیداً صعودی است و ماکسیمم آن در انتهای بازه، یعنی $\frac{\pi}{3}$ ، رخ می‌دهد.

③ [۲۰ نمره]

[۱۰ نمره] (الف) برای هر $x \in \mathbb{R}$، با توجه به بسط تیلور مرتبهٔ اول همراه با جملهٔ خطا داریم:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} e^{c}$$

که در آن c عددی بین ۰ و x است.

چون همواره $\frac{x^{2} e^{c}}{2} \geq 0$، پس $e^{x} \geq 1 + x$.

[۱۰ نمره] (ب) با توجه به قسمت (الف) برای $x > -1$ داریم $x = \ln e^{x} \geq \ln(1+x)$.

پس $\ln\left(1 + \frac{1}{n^{2}}\right) \leq \frac{1}{n^{2}}$. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$ همگرا است، بنابر آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^{2}}\right)$ همگرا است.

---

④ [۲۰ نمره]

[۱۰ نمره] (الف)

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{3} + \cdots$$

[۱۰ نمره] (ب) قرار دهید:

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{\sin^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. با توجه به خطای تقریب چندجمله‌ای تیلور داریم:

$$|\sin(x_0) - S_m(x_0)| = \frac{\sin^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\left|x_0 - \frac{\pi}{4}\right|^{m+1}$$

که در آن ξ عددی بین x_0 و $\frac{\pi}{4}$ است. ۵ نمره

چون همواره $|\sin^{(m+1)}(\xi)| \leq 1$، پس

$$|\sin(x_0) - S_m(x)| \leq \frac{\left|x_0 - \frac{\pi}{4}\right|^{m+1}}{(m+1)!}$$

چون $\lim_{m \to \infty} \frac{\left|x_0 - \frac{\pi}{4}\right|^{m+1}}{(m+1)!}$، پس ۵ نمره

$$\lim_{m \to \infty} S_m(x_0) = \sin(x_0)$$

۵ [۲۰ نمره]

۱۰ نمره

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n)-\ln(k)}{\sqrt{nk}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{n}{k}\right)\sqrt{\frac{n}{k}}$$

$$= \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

۱۰ نمره

$$\left[u=\sqrt{x} \ , \ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right] = -4\int_0^1 \ln u \, du$$

[چون انتگرال ناسره است] $= -4 \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \ln u \, du$

$$= -4 \lim_{\varepsilon\to 0} \left(u\ln u - u \Big|_{u=\varepsilon}^{1} \right)$$

$$= -4 \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-1 - \varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon\right)$$

$$= 4$$

Generated by CamScanner