مشتقات[۲]

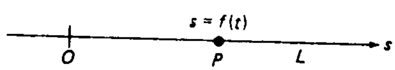
مفهوم **میزان تغییر** یک متغیر نسبت به متغیر دیگر در علوم طبیعی و در علوم احتماعی کمی راه یافته است. مفهوم ریاضی نظیر میزان تغییر نوع خاصی حد است که **مشتق** نام دارد. حال به بررسی مشروح مشتقات پرداخته، نظریهٔ اساسی را با کاربردهای متنوعی به هم می‌آمیزیم. از جمله کاربردهای مهم استفاده از مشتق در تعریف سرعت لحظه‌ای ذره‌ای است که حرکت مستقیم‌الخط دارد (ر.ک. بخش ۲.۱)، و استفاده از مشتق دریافتن خط مماس بر یک منحنی به شکل کلی می‌باشد (ر.ک. بخش ۲.۲).

۲.۱ سرعت و میزانهای تغییر؛ مفهوم مشتق

منظور از ذره یعنی جسمی که اندازه‌اش در یک مسئله قابل اغماض است؛ و لذا، می‌توان آن را یک نقطه تصور کرد. مثلاً، یک الکترون، یک اتومبیل، یا یک سیاره را می‌توان، بسته به موقعیت، یک ذره گرفت. حرکت ذرهٔ P در امتداد خط مستقیم L را درنظر گرفته، فرض می‌کنیم s موضع آن، یعنی **مختص** آن بر L، باشد. (فرض است که خط L، که می‌توان آن را محور s گرفت، دارای مبداء O، جهت مثبت، و واحد طول می‌باشد.) فرض کنیم موضع ذره در لحظهٔ t با **تابع موضع**

$$s = f(t)$$

مشخص شود (ر.ک. شکل ۱) شهوداً واضح است که ذره در هر لحظهٔ t دارای سرعت



شکل ۱

$v = v(t)$ است، که خود تابعی از t می‌باشد. اما این سرعت چطور باید تعریف شود؟

سرعت متوسط . برای پاسخ دادن به این سئوال ، ابتدا **سرعت متوسط** v_{av} ی ذره بین دو لحظهٔ t و u را به صورت خارج قسمت

$$v_{av} = \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم . مخرج (۱) تغییر زمانی متغیر مستقل ضمن رفتن از مقدار " قدیم " t به‌مقدار " جدید " u است ، و صورت $f(u) - f(t)$ تغییر نظیر در موضع ذره ، یعنی متغیر وابسته ، ضمن رفتن از مقدار قدیم $f(t)$ بـه مقدار جدید $f(u)$ می‌باشد . شایسته است نمادهای خاصی برای این تغییرات یا تفاضلات وضع شود . مثلا" ، می‌نویسیم

$$\Delta t = u - t, \qquad \Delta s = f(u) - f(t),$$

که در آن باید عبارت Δt و Δs را ، که " دلتای t " و "دلتای s " خوانده می‌شوند ، موجودات *واحدی* تلقی کرد تا حاصل ضربهایی از علایم Δ و t ، یا Δ و s . همچنین ، Δt را نمو t و Δs را نمو s می‌نامیم . توجه کنید که

$$u = t + \Delta t, \qquad f(u) = f(t + \Delta t),$$

و لذا ،

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

عبارت سرعت متوسط (۱) نسبت به نموهای Δt و Δs شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

یا ، معادلا" ،

$$v_{av} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{۲}$$

سرعت لحظه‌ای . تا اینجا خوب پیش رفته‌ایم . ولی هنوز پای‌بند آنیم که عبارت (۲) به Δt وابسته است ؛ و درنتیجه ، با ایدهٔ شهودی ما از سرعت *لحظه‌ای* در زمان t ، یعنی کمیتی که می‌خواهیم دقیقا" تعریف کنیم ، متفاوت است . درک شهودی می‌گوید که سرعت لحظه‌ای $v(t)$ نتیجـهٔ محاسبهٔ سرعت متوسط v_{av} در " زمان متوسط " به‌قدر کافی کوچک $|\Delta t|$ است . در فرمول سرعت متوسط (۲) نمی‌توان Δt را 0 گرفت ، زیرا با این کار فرمول (۲) به صورت مبهم 0/0 درمی‌آید . اما **می‌تـوان** Δt را به 0 نزدیک کرد . لذا ، برای یک ذره با تابع موضـع $s = f(t)$ ، به تعریف **سرعت متوسط** (یا فقط سرعت) در لحظهٔ t بـه صورت حد

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

می‌رسیم ؛ یعنی ،

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (۳)$$

همچنین ، (۳) را می‌توان به شکل معادل زیر نوشت :

$$v(t) = \lim_{u \to t} \frac{f(u) - f(t)}{u - t}. \qquad (۳')$$

هر یک از حدود (۳) و ('۳) طریقه‌ای برای بیان **میزان تغییر** تابع موضع f نسبت به t است . لذا ، می‌توان این بحث را خلاصه کرد و گفت که سرعت یک ذرهٔ متحرک میزان تغییر موضع ذره نسبت به زمان است .

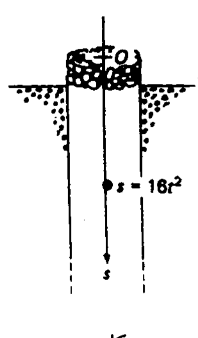
تبصره . سرعت کمیتی *علامت‌دار* است ،و اغلب قدرمطلق آن را **تنــــــدی** می‌نامند . طبق یک داستان جعلی ، راننده‌ای که در جهت مخالف یک خیابان یکطرفه می‌رفته به‌خاطر "نقض سرعت" توقیف شده است . دلیلش را توضیح دهید .

مثال ۱ . سنگی را در چاه عمیقی می‌اندازیم . سرعتش t ثانیه پس از افتادن چیست؟ سه دوم ثانیه پس از افتادن چیست؟

حل . همانند مثال ۶ ، صفحهٔ ۶۹ ، موضع سنگ در لحظهٔ t عبارت است از

$$s = 16t^2,$$

که در آن t به ثانیه و s به فوت و به طور قائم از سر چاه به پایین است (ر.ک. شکل ۲) .



شکل ۲

لذا، طبق رابطه‌ٔ (۳) به‌ازای $f(t) = 16t^2$ ، سرعت لحظه‌ای سنگ در زمان t عبارت‌است از

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(t + \Delta t)^2 - 16t^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\,\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

$$= 16 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\,\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 16(2t) = 32t.$$

بخصوص، 1.5 ثانیه‌پس‌از رها شدن، سرعت‌سنگ‌عبارت‌است از 48 فوت‌برثانیه $= 32(1.5)$ (و به‌طور فشرده‌تر، 48 ft/sec) .به‌صورت دیگر، بنابر (۳')،

$$v(t) = \lim_{u \to t} \frac{16u^2 - 16t^2}{u - t} = 16 \lim_{u \to t} \frac{(u + t)(u - t)}{u - t}$$

$$= 16 \lim_{u \to t} (u + t) = 16(2t) = 32t.$$

شتاب. فرض کنید بخواهیم میزان تغییر تابع سرعت $v(t)$ را، که خود یک میزان تغییر است، نسبت به زمان حساب کنیم. با این کار تابع جدید

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \tag{۴}$$

به نام *شتاب*، به دست می‌آید. شتاب منفی را اغلب *یا شتاب* می‌نامند.

مثال ۲. از فرمول (۴) و مثال قبل معلوم می‌شود که شتاب یک سنگ افتان عبارت‌است از

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{32(t + \Delta t) - 32t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{32\,\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 32 = 32,$$

یعنی، شتاب دراین‌حالت دارای مقدار ثابت 32 فوت بر ثانیه بر ثانیه (به‌طور فشرده‌تر، $32\ \text{ft/sec}^2$) است. شتاب یک شئی افتان، که با g نموده می‌شود، ناشی از جاذبه‌ٔ ثقلی زمین است. درواقع، g با موقعیت جغرافیایی تغییر می‌کند، ولی $g \approx 32\ \text{ft/sec}^2$ تقریب مناسبی می‌باشد. در دستگاه متری، $g \approx 9.8\ \text{meters/sec}^2$.

چگالی متوسط و دقیق. مسئله‌ٔ فیزیکی کاملاً" متفاوت دیگری وجود دارد که در آن *ایده‌ٔ* میزان تغییر ظاهر می‌شود. این بار، به جای موضع یا سرعت نسبت به زمان، جرم نسبت به فاصله تغییر می‌کند. میله‌ٔ فلزی **غیرهمگن** و نازک AB را درنظر می‌گیریم، و آن را در

امتداد محور x مثبت به مبداء در A قرار می‌دهیم (ر.ک. شکل ۳). فرض کنیم جرم m

شکل ۳

قطعه‌ای از میله که بین A و نقطهٔ x است با **تابع جرم**

$$m = f(x)$$

داده شده باشد. شهوداً واضح است که میله در هر نقطهٔ x دارای چگالی $d(x)$ است، که خود تابعی از x می‌باشد. اما این چگالی را چطور تعریف کنیم؟

برای پاسخ دادن به این سئوال، ابتدا **چگالی متوسط** d_{av} قطعه‌ای از میله با نقاط انتهایی x و $x + \Delta x$ را خارج قسمت جرم Δm این قطعه بر طولش تعریف می‌کنیم:

$$d_{av} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(چرا این فرمول در صورت $\Delta x < 0$ نیز کار می‌کند؟) درک شهودی می‌گوید که چگالی **دقیق** $d(x)$ حاصل محاسبهٔ چگالی متوسط d_{av} به ازای " طول متوسط " بدلخواه کوچک $|\Delta x|$ است. با آنکه در فرمول d_{av} نمی‌توان $\Delta x = 0$ قرار داد، زیرا صورت مبهم $0/0$ حاصل می‌شود، **می‌توان** Δx را به 0 نزدیک ساخت. لذا، به تعریف **چگالی دقیق**، یافقط **چگالی**، میله در نقطهٔ x به صورت حد

$$d(x) = \lim_{\Delta x \to 0} d_{av} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

می‌رسیم؛ یعنی،

$$d(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

با جانشانی $u = x + \Delta x$، می‌توان $d(x)$ را به شکل معادل زیر نوشت:

$$d(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

تشابه بین این فرمولها برای چگالی $d(x)$ و فرمولهای (۳) و (۳') برای سرعت $v(t)$ کامل است، اگرچه سرعت و چگالی از دیدگاه فیزیک مفاهیم کاملاً متفاوتی می‌باشند. آنچه در آن سهیمند این است که هر دو به نوع خاصی از حد منجر می‌شوند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال به **مشتق** معروف است. این ما را به بررسی مشتق وا می‌دارد، کاری که هم اکنون بدان خواهیم پرداخت.

تعریف مشتق. فرض‌کنیم تابع f در همسایگی نقطهٔ x تعریف شده باشد. منظور از مشتق f در x ، که با $f'(x)$ نموده می‌شود، یعنی حد

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{۵}$$

مشروط برآنکه موجود باشد، یا معادلا "

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \tag{۵'}$$

(قرار می‌دهیم $u = x + \Delta x$). اگر f در x مشتق داشته باشد، نیز گوییم f در x **مشتقپذیر** است.

باید به یاد داشت که در محاسبهٔ حد (۵) یا (۵') x را **ثابت** می‌گیریم؛ درنتیجه، در (۵) فقط Δx و در (۵') فقط u تغییر می‌کند. لذا، مشتق به ازای هر مقدار ثابت x یک عدد است‌که با $f'(x)$ نموده‌می‌شود. بااینحال، همانطورکه‌ازنماد برمی‌آید، طبیعی‌است که عدد $f'(x)$ را **مقدار تابع جدید** f' (که به‌جای مشتق f در x فقط مشتق f نام دارد) درنظر بگیریم. همواره از قراین روشن است که مشتق به چه مفهومی گرفته شده است، یک عدد با x ثابت یا تابعی با x متغیر.

عمل مشتقگیری. عملی‌که ما را از تابع f به مشتقش f' می‌رساند **مشتقگیری** نسبت به متغیر مستقل نام دارد. این عمل را با علامت D نشان می‌دهیم که جلو تابع مشتقگیری شده نوشته می‌شود و متغیر مستقل به عنوان زیرنویس D می‌آید. لذا، D_x مشتقگیری نسبت به x ، D_t مشتقگیری نسبت t ، و از این قبیل را نشان می‌دهد. عبارت

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{۶}$$

یا، معادلا "،

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x}, \tag{۶'}$$

که $f'(x)$ حد آن وقتی $\Delta x \to 0$ یا وقتی $u \to x$ است، **خارج‌قسمت تفاضلی** نام دارد. صورت (۶) یا (۶') **نمو تابع f در نقطهٔ** x نام دارد و با $\Delta f(x)$ نموده می‌شود. لذا،

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = f(u) - f(x), \tag{۷}$$

که در آن، مثل همیشه در نموها، Δf موجود واحدی‌تلقی‌شده (و خوانده می‌شود "دلتای

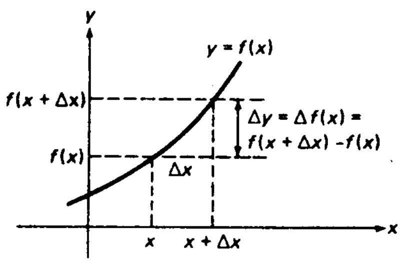
f ") نه به صورت حاصل ضربی از عوامل جداگانهٔ Δ و f . $\Delta f(x)$ طبعا" نه فقط تابع نقطهٔ x است بلکه تابع Δx ، یعنی نمو متغیر مستقل، یا تابع u ، یعنی مقدار جدید متغیر مستقل، نیز هست ولی ما این نکته را صریحا" ذکر نمی‌کنیم.

خواهید دید که خارج‌قسمت تفاضلی (۶) یا ('۶) به ازای $\Delta x = 0$ یا $u = x$ به صورت مبهم $0/0$ درمی‌آید. لذا، مسئلهٔ حل صور مبهم به شکل $0/0$ ، جداازاینکه صرفا" یک مسئلهٔ تکنیکی است، در قلب حساب دیفرانسیل جا دارد!

اغلب شایسته است یک متغیر وابسته معرفی شود. اگر مثلا" $y = f(x)$ ، می‌توان مشتق $D_x f(x)$ یا $f'(x)$ را با $D_x y$ یا فقط y' نشان داد. با این نماد،

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

که در آن Δy ، یعنی نمو y ، نام دیگری است برای کمیت (۷). تعبیر هندسی $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ در شکل ۴ نموده شده است.



شکل ۴

مثال ۳. نمو Δy و خارج‌قسمت تفاضلی $\Delta y/\Delta x$ را برای تابع $y = f(x) = x^5$ درصورتی بیابید که $x = 2$ و $\Delta x = 0.1$.

حل. به ازای مقادیر دادهٔ شدهٔ x و Δx ، داریم

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.1) - f(2) \\ &= (2.1)^5 - 2^5 = 40.84101 - 32 = 8.84101, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{8.84101}{0.1} = 88.4101. \end{aligned}$$

قواعد مشتقگیری. حال برای محاسبهٔ مشتق چند قاعدهٔ ساده به دست می‌آوریم. این ما

را به پویش وامی‌دارد، و در بخشهای بعد قواعد دیگری عرضه خواهند شد.

(یک) مشتق تابع ثابت $f(x) \equiv c$ صفر است. در واقع،

$$D_x f(x) = D_x c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

یا، به صورت دیگر،

$$D_x c = \lim_{u \to x} \frac{c - c}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{0}{u - x} = 0,$$

درنتیجه،

$$D_x c = 0.$$

(دو) هرگاه c ثابت دلخواهی باشد، آنگاه

$$D_x cf(x) = cD_x f(x).$$

به عبارت دیگر، مشتق حاصل‌ضرب یک ثابت در یک تابع مساوی حاصل‌ضرب آن ثابت در مشتق آن تابع است. برهان فوراً نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} D_x cf(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cD_x f(x). \end{aligned}$$

به بیان دیگر،

$$D_x cf(x) = \lim_{u \to x} \frac{cf(u) - cf(x)}{u - x} = c \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = cD_x f(x).$$

(سه) مشتق x متحد 1 است. در واقع،

$$D_x x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1,$$

یا، به صورت دیگر،

$$D_x x = \lim_{u \to x} \frac{u - x}{u - x} = \lim_{u \to x} 1 = 1,$$

درنتیجه،

$$D_x x = 1.$$

(چهار) توابع x^2 و x^3 به ترتیب دارای مشتقات $2x$ و $3x^2$ اند. برای تحقیق این امر،

محاسبات سرراست زیر را انجام می‌دهیم :

$$D_x x^2 = \lim_{u \to x} \frac{u^2 - x^2}{u - x} = \lim_{u \to x} (u + x) = x + x = 2x,$$

$$D_x x^2 = \lim_{u \to x} \frac{u^3 - x^3}{u - x} = \lim_{u \to x} (u^2 + ux + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2.$$

(به یاد داشته باشید که x در محاسبهٔ این حدود ثابت است .) لذا ،

$$D_x x^2 = 2x,$$
$$D_x x^3 = 3x^2.$$

(پنج) به‌طور کلی ، مشتق تابـع x^n ، که در آن n عدد صحیح مثـبتی‌است،از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$D_x x^n = nx^{n-1} \tag{۸}$$

توجه کنید که اگر به نوبت قرار دهیم $n = 1, 2, 3$ ، فرمول (۸) به قواعد (سه) و (چهار) تحویل می‌شود . برای اثبات فرمول (۸) به ازای عدد صحیح مثبت دلخواه n ، ملاحظه می‌کنیم که ، به کمک قضیهٔ دوجمله‌ای (ر.ک. مثال ۵ ، صفحهٔ ۳۶۴ ، یا هر کتاب جبر) ،

$$D_x x^n = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right].$$

بنابراین ،

$$D_x x^n = nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right],$$

که در آن جملات ذکر نشده‌ای که با نقطه نموده شده‌اند همه شامل Δx به توانی بزرگتر از 1 هستند . از اینرو ، آخرین حد مساوی 0 است ،و (۸) ثابت می‌شود . به بیان دیگر ، اگر طرز تقسیم $u^n - x^n$ بر $u - x$ را به یاد آورید ،

$$D_x x^n = \lim_{u \to x} \frac{u^n - x^n}{u - x} = \lim_{u \to x} \underbrace{(u^{n-1} + u^{n-2}x + \cdots + ux^{n-2} + x^{n-1})}_{\text{جمله } n},$$

که فوراً (۸) را ایجاب می‌کند ، زیرا هر یک از n جمله وقتی $u \to x$ به حد x^{n-1} نزدیک

می‌شود .

(شش) مشتق تابع $\sqrt{x}$ از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$D_x\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

این فرمول از محاسبات زیر به دست می‌آید :

$$D_x\sqrt{x} = \lim_{u\to x}\frac{\sqrt{u}-\sqrt{x}}{u-x} = \lim_{u\to x}\frac{\sqrt{u}-\sqrt{x}}{(\sqrt{u}+\sqrt{x})(\sqrt{u}-\sqrt{x})} = \lim_{u\to x}\frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

که در آن از پیوستگی $\sqrt{x}$ ، که در مثال ۲ صفحهٔ ۱۴۲ ثابت شد ، استفاده می‌کنیم .

(هفت) مشتق توابع $\sin x$ و $\cos x$ از فرمولهای زیر به دست می‌آیند :

$$D_x \sin x = \cos x \tag{۹}$$

و

$$D_x \cos x = -\sin x. \tag{۹'}$$

برای اثبات (۹) ، در فرمول (۱۵) صفحهٔ ۹۶ قرار می‌دهیم $\alpha = u, \beta = x$ ، خواهیم داشت

$$\sin u - \sin x = 2\cos\frac{u+x}{2}\sin\frac{u-x}{2}. \tag{۱۰}$$

بنابراین ،

$$D_x \sin x = \lim_{u\to x}\frac{\sin u - \sin x}{u-x} = \lim_{u\to x}\cos\frac{u+x}{2}\lim_{u\to x}\frac{\sin\frac{u-x}{2}}{\frac{u-x}{2}}$$

$$= \lim_{u\to x}\cos\frac{u+x}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t},$$

که در آن $t = (u-x)/2$. پس نتیجه می‌شود که

$$D_x \sin x = \left(\cos\frac{x+x}{2}\right)\cdot 1 = \cos x,$$

که در آن از پیوستگی تابع کسینوس و اینکه وقتی $t \to 0$ ، $(\sin t)/t \to 1$ استفاده می‌کنیم .

برای اثبات (۹') ، در فرمول (۱۰) x را با $u + (\pi/2)$ و $x + (\pi/2)$ عوض می‌کنیم . خواهیم داشت

$$\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{u+x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{u-x}{2},$$

یا ، معادلاً ،

$$\cos u - \cos x = -2\sin\frac{u+x}{2}\sin\frac{u-x}{2},$$

درنتیجه ،

$$D_x\cos x = \lim_{u\to x}\frac{\cos u - \cos x}{u-x} = -\lim_{u\to x}\sin\frac{u+x}{2}\lim_{u\to x}\frac{\sin\frac{u-x}{2}}{\frac{u-x}{2}} = -\sin x.$$

لازم است همهٔ این قواعد و نیز قضیهٔ زیر را یاد بگیرید ، که می‌گوید مشتق **مجموع** دو تابع را می‌توان با مشتقگیری **جمله به جمله** از مجموع حساب کرد .

قضیهٔ ۱ (مشتق مجموع دو تابع) . هرگاه f و g در x مشتقپذیر ***باشند*** **، آنگاه مجموع $f+g$ نیز چنین** ***است*** **و**

$$D_x(f+g) = D_xf + D_xg. \tag{۱۱}$$

برهان . برای ساده بودن نمادها ، در فرمول (۱۱) شناسه‌های f و g حذف شده‌اند . برهان نتیجهٔ فوری این امر است که حد مجموع حدود جملات می‌باشد :

$$D_x(f+g) = \lim_{u\to x}\frac{f(u)+g(u)-[f(x)+g(x)]}{u-x}$$
$$= \lim_{u\to x}\frac{f(u)-f(x)}{u-x} + \lim_{u\to x}\frac{g(u)-g(x)}{u-x} = D_xf + D_xg.$$

نتیجه . هرگاه $f_1, f_2, \ldots, f_n$ در x مشتقپذیر ***باشند*** **، آنگاه مجموع جبری $f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n$ نیز چنین** ***است*** **و**

$$D_x(f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n) = D_xf_1 \pm D_xf_2 \pm \cdots \pm D_xf_n. \tag{۱۱}$$

برهان . قضیه را چندبار به‌کار می‌بریم . برای سامان‌دادن علایم منها ، از $D_x(-f) = -D_xf$ استفاده می‌کنیم ، که از قاعدهٔ (دو) به ازای $c=-1$ نتیجه می‌شود .

مثالهای زیر کاربرد قضیهٔ ۱ و قواعد (یک) تا (هفت) می‌باشد .

مثال ۴ . از $7x^3 + 3x^2 - 5x + 8$ مشتق بگیرید .

حل. بنابرنتیجهٔ قضیهٔ ۱ و قواعد (یک) تا (چهار)، داریم

$$\begin{aligned} D_x(7x^3 + 3x^2 - 5x + 8) &= D_x(7x^3) + D_x(3x^2) - D_x(5x) + D_x 8 \\ &= 7D_x x^3 + 3D_x x^2 - 5D_x x + 0 \\ &= 7(3x^2) + 3(2x) - 5(1) = 21x^2 + 6x - 5. \end{aligned}$$

پس از تسلط بر قواعد مشتقگیری، نوشتن تمام مراحل محاسبات از این نوع لازم نیست.

مثال ۵. از $2\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sin x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قواعد (شش) و (هفت)،

$$D_x\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sin x\right) = 2D_x\sqrt{x} - \frac{1}{3}D_x \sin x = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\cos x.$$

از چه قواعد دیگر استفاده شده است؟

مثال ۶. از تابع چندجمله‌ای کلی

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n,$$

که در آن $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ثابت‌اند، مشتق بگیرید.

حل. فرض کنیم $a_n \neq 0$؛ درنتیجه، $P(x)$ از درجهٔ n است. اگر $n = 0$، $P(x)$ مساوی ثابت a_0 است و مشتق $P(x)$ متحد صفر می‌باشد. هرگاه $n \geq 1$، آنگاه، با چند بار استفاده از فرمول (۸) در قاعدهٔ (پنج)،

$$\begin{aligned} P'(x) = D_x P(x) &= D_x a_0 + a_1D_x x + a_2D_x x^2 + a_3D_x x^3 + \cdots + a_nD_x x^n \\ &= 0 + a_1(1) + a_2(2x) + a_3(3x^2) + \cdots + a_n(nx^{n-1}) \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}, \end{aligned}$$

که یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n - 1$ است، زیرا $na_n \neq 0$.

مثال ۷. موضع یک ذرهٔ متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظهٔ $t \geq 0$ عبارت است از $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$. سرعت و شتاب ذره را درلحظهٔ t بیابید. چه وقت جهت حرکت ذره تغییر می‌کند؟ چه وقت ذره به موضع اولیهٔ خود باز می‌گردد؟

حل. سرعت ذره عبارت است از

$$v = D_t s = D_t\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right) = \frac{1}{3}D_t t^3 - 2D_t t^2 + 3D_t t$$
$$= \frac{1}{3}(3t^2) - 2(2t) + 3 = t^2 - 4t + 3,$$

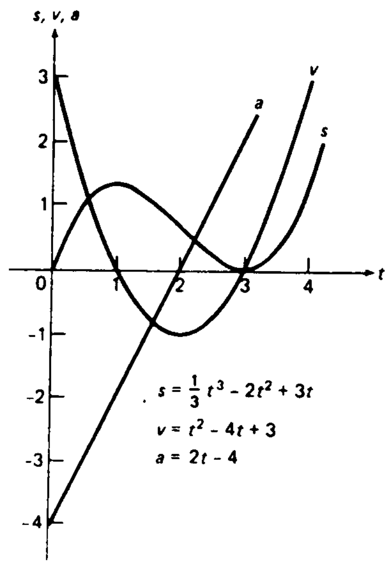
و شتابش خواهد بود

$$a = D_t v = D_t(t^2 - 4t + 3) = D_t t^2 - 4D_t t + D_t 3 = 2t - 4.$$

جهت حرکت ذره وقتی سرعتش v تغییر علامت می‌دهد تغییر می‌کند، و این زمانی صورت می‌گیرد که سرعت صفر است؛ یعنی، وقتی $t = 1$ یا $t = 3$. در واقع، چون $v = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$، v به ازای $0 \le t < 1$ مثبت، به ازای $t = 0$ صفر، به ازای $1 < t < 3$ منفی، به ازای $t = 3$ صفر، و مجدداً به ازای $t > 3$ مثبت می‌باشد. موضع اولیهٔ ذره، یعنی موضع آن در $t = 0$، $s = 0$ است. چون

$$s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t = \frac{1}{3}t(t^2 - 6t + 9) = \frac{1}{3}t(t-3)^2,$$

ذره در لحظهٔ $t = 3$ به موضع اولیهٔ خود باز می‌گردد. شکل ۵ موضع، سرعت، و شتاب



شکل ۵

ذره را به صورت توابعی از زمان نشان داده، و تصویر مشروحی از حرکت ذره‌را می‌نمایاند.

مثال ۸. میزان تغییر بار الکتریکی نسبت به زمان *شدت جریان* نام دارد. فرض کنید در

زمان t ثانیه $q = 2t^2 - 3t + 1$ کولن بار در یک سیم هادی جریان یابد. شدت جریان حاصل i را پس از 3 sec به آمپر (کولن برثانیه) بیابید. چه وقت جریان برمی‌گردد؟ اگر یک فیوز 15-amp در مدار باشد، چقدر کار خواهد کرد؟

حل. چون

$$i = D_t q = D_t(2t^2 - 3t + 1) = 4t - 3,$$

شدت جریان پس از 3 sec مساوی $4(3) - 3 = 9$ amp است. جریان زمانی برمی‌گردد که i تغییر علامت دهد، و این وقتی رخ می‌دهد که $i = 0$؛ یعنی، وقتی $t = \frac{3}{4} = 0.75$ sec در واقع، چون $i = 4(t - \frac{3}{4})$، i به ازای $0 \le t < \frac{3}{4}$ منفی، به ازای $t = \frac{3}{4}$ صفر، و به ازای $t > \frac{3}{4}$ مثبت است. فیوز وقتی می‌سوزد که $i = 4t - 3 = 15$؛ یعنی، وقتی $t = \frac{18}{4}$ $= 4.5$ sec.

مسائل

۱. موضع یک ذرهٔ متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظهٔ t عبارت است از $s = 10t + 5t^2$، که در آن s به فوت و t به ثانیه است. فرض کنید $v_{av}(\Delta t)$ سرعت متوسط ذره بین لحظات $t = 20$ و $t = 20 + \Delta t$ باشد. $v_{av}(\Delta t)$ را به ازای $\Delta t = 1,$ 0.1, 0.01, 0.001 حساب کنید. سرعت لحظه‌ای v ذره در لحظهٔ $t = 20$ چیست؟

۲. در حل مثالهای ۱و۲ در واقع دو مشتق حساب شده‌اند. آنها را مشخص کنید.

نمو $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ و خارج قسمت تفاضلی $\Delta y/\Delta x$ را برای تابع $f(x)$، نقطهٔ x، و نمو Δx پیدا نمایید.

۳. $y = x^2,\ x = 3,\ \Delta x = 0.1$

۴. $y = x^3,\ x = -1,\ \Delta x = -0.1$

۵. $y = x^4,\ x = 0,\ \Delta x = -0.2$

۶. $y = 1/x,\ x = 2,\ \Delta x = 2$

۷. $y = 1/x^2,\ x = 1,\ \Delta x = -3$

۸. $y = 1/x^3,\ x = -2,\ \Delta x = 1$

۹. $y = \sqrt{x},\ x = 16,\ \Delta x = -7$

۱۰. $y = \sin x,\ x = 0,\ \Delta x = \pi/6$

۱۱. $y = \cos x,\ x = \pi/2,\ \Delta x = \pi/4$

۱۲. $y = \tan x,\ x = \pi/4,\ \Delta x = -\pi/2$

از توابع زیر مشتق بگیرید.

۱۳. $x^3 + x^2 + x + 1$

۱۴. $2s^3 - 4s^2 + 8s - 16$

۱۵. $-t^3 + 9t^2 + 5t$

۱۶. $4u^3 - 3u^2 - u + \pi$

۱۷. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

۱۸. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

۱۹. $(x^2 - 4)(x + 4)$

۲۰. $\cos^2 x + \sin^2 x$

۲۱. $x^4 + 3x^2 - 6$

۲۲. $x^5 - 2\sqrt{x}$

۲۳. $x^9 + x^6 + x^3 + 1$

۲۴. $2x^{10} - 3x^7 + 5x^3 + 20$

۲۵. $x^{100} - 2x^{50} + 25x$

۲۶. $3 \sin x - 4 \cos x$

۲۷. $s^4 - s^3 + 3s^2 + 8$

۲۸. $10t^5 - 100t^4 + 1000t$

۲۹. $5u^7 - 7u^6 + 9u^5 - 11$

۳۰. $8w^3 - 4\sqrt{w} + \cos w$

۳۱. $(x^2 + 3)(x^2 - 3)$

۳۲. $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

۳۳. حد

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

را به صورت مشتق تعبیر کرده، و آن را محاسبه نمایید.

۳۴. موضع یک ذرهٔ متحرک درامتداد خطی مستقیم درلحظهٔ $t \geq 0$ با $s = t^4 - 4t^3 + 4t^2$ داده شده است. سرعت v و شتاب a ذره در لحظهٔ t را بیابید. جهت حرکت ذره چه وقت تغییر می‌کند؟ ذره چه‌وقت به موضع اولیه‌اش باز می‌گردد؟

۳۵. ارتفاع بالای موضع اولیهٔ سنگی که با سرعت اولیهٔ $v_0 = 96$ ft/sec به طور قائم به بالا پرتاب شده عبارت است از $s = v_0 t - 16t^2$، که در آن s به فوت و t به ثانیه است

(این در مثال ۳، صفحهٔ ۴۲۸ ، نموده شده است) . فرض کنید $v_0 = 96$ ft/sec چه وقت سنگ صعودش متوقف شده و شروع به نزول می‌کند ؟ ارتفاع ماکزیمم سنگ چقدر است ؟ شتاب آن چقدر است ؟

۳۶. یک سنگ توسط شخصی که در لبهٔ بام به فاصلهٔ 48 ft از زمین ایستاده با سرعت اولیهٔ 32 ft/sec به طور قائم به بالا پرتاب شده است . اگر سنگ هنگام فرود به بام نخورد ، چه وقت به زمین می‌خورد ؟ سرعتش هنگام برخورد چقدر است ؟

۳۷. در مسئلهٔ قبل ، ارتفاع بام چقدر باشد تا سنگ چهار ثانیه بعد ؟ پنج ثانیه بعد به زمین بخورد ؟

۳۸. موضع اتومبیلی t ثانیه پس از شروع حرکت $s = \frac{1}{2}kt^2$ است ، که در آن s به فوت و t به ثانیه است . ثابت k را تعبیر کرده ، و مقدارش را درصورتی بیابید که در 10 ثانیه به سرعت 60 mph (میل بر ساعت) برسد . آیا فرمول $s = \frac{1}{2}kt^2$ حرکت اتومبیل را به ازای t ی بزرگ توصیف می‌کند ؟

۳۹. فرض کنید $q = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + t$ کولن بار در t ثانیه در یک سیم هادی شارش یابد . شدت جریان i را 4 sec بعد بیابید . آیا جریان برمی‌گردد ؟ اگر یک فیوز 25-amp در مسیر جریان باشد ، چقدر عمر خواهد کرد ؟

۴۰. میلهٔ فلزی غیرهمگن نازک AB به طول 6 متر است . جرم 2 متر اول میله باشروع از A مساوی 1 کیلوگرم است . فرض کنید جرم قطعهٔ AP از میله با مکعب فاصلهٔ A تا P متناسب باشد . چگالی میله در نقطهٔ میانی چقدر است ؟ چگالی متوسط تمام میله چقدر است ؟ چگالی متوسط یکسوم میانی میله چقدر است ؟

۴۱. نشان دهید که

$$\lim_{u \to x} \frac{uf(x) - xf(u)}{u - x} = f(x) - xf'(x).$$

۴۲. فرض کنید $f(x) = (x - a)g(x)$ ، که در آن تابع g در f پیوسته است . نشان دهید مشتق f در a مساوی $g(a)$ است .

مشتق تابع داده شده را با محاسبهٔ مستقیم حد معرف مشتق پیدا کنید .

۴۳. $f(x) = 1/x$ ۴۴. $f(x) = 1/x^2$

۴۵. $f(x) = 1/(x^2 + 1)$

۲.۲ خط مماس بر منحنی

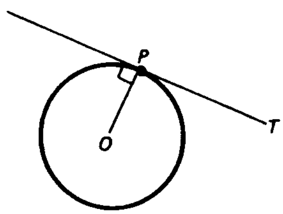
حال، با استفاده از مشتق ، مسئلهٔ هندسی مهم یافتن **خط مماس**، یا فقط **مماس**، بر یک

منحنی به شکل کلی را حل می‌کنیم . مسئلهٔ یافتن مماس بر یک منحنی ازمسئلهٔ **تعریف** مماس جدا نیست . فرض کنیم منحنی C یک دایره بوده ، و P نقطه‌ای از C باشد . بنابر هندسهٔ مقدماتی ، مماس بر C در P عبارت است از

(یک) خطی که C را در نقطهٔ P و فقط این نقطه قطع می‌کند ، یا

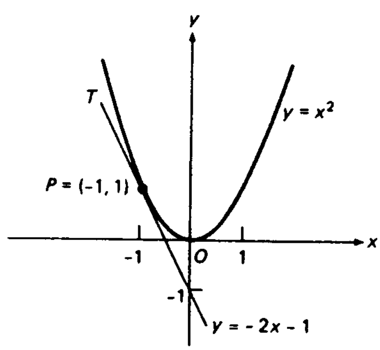
(دو) خط ماربر P و عمود بر شعاعی از C که از P می‌گذرد .

این خط T است که در شکل ۶ نموده شده است . تعریف (دو) ، مستلزم شعاع ،همتابی در



شکل ۶

منحنیهای دلخواه ندارد ، و تعریف (یک) نیز مستعد تعمیم نیست . مثلاً ، در منحنی $y = x^2$ با شکل ۷ (یک سهمی) ، دو خط ، یعنی محور x و محور y ، وجود دارند که



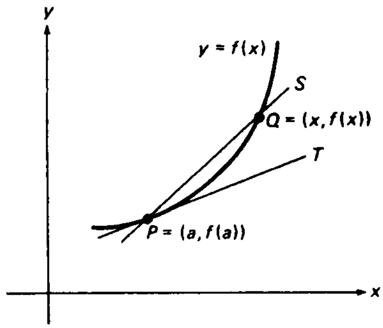
شکل ۷

منحنی را فقط در مبداء O قطع می‌کنند . اما عقل سلیم مماس بودن محور y بر منحنی در O را رد می‌کند ، و در عین حال محور x را به عنوان مماس در O می‌پذیرد . از این نکات چنین برمی‌آید که خاصیت کلیدی مماس این است که در مجاورت نقطهٔ تماس خیلی به منحنی " چسبیده است " . مثلاً " ، این امر برای خط T در شکل۷ درست است که ، همانطور که در مثال ۲ نشان خواهیم داد ، بر سهمی $y = x^2$ در نقطهٔ $P = (-1, 1)$ مماس‌است .

خط مماس به عنوان موضع حدی خط قاطع. برای آنکه به این ایدهٔ شهودی معنی دقیق ریاضی بدهیم ، به صورت زیر استدلال می‌کنیم . فرض کنیم $P = (a, b)$ نقطه‌ای ثابت و $Q = (x, y)$ نقطه‌ای متغیر از منحنی $y = f(x)$ باشد ، که در آن f بر بازهٔ بازی شامل a و x پیوسته است . فرض کنیم S خط مستقیمی ماربر نقاط P و Q باشد ؛ یک چنین خط یک ***خط قاطع*** ، یا فقط ***قاطع*** ، منحنی نام دارد . اگر S مایل باشد ، همانطور که شکل ۸ نشان داده ، شیب S مساوی است با

$$m_S = \frac{y-b}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \qquad (۱)$$

حال نقطهٔ Q را درامتداد منحنی تغییرداده آن را به‌نقطهٔ ثابت P نزدیک‌می‌کنیم (مواضع متوالی Q لازم نیست یک طرف P باشند) . در این صورت ، x به a نزدیک می‌شودودرعین

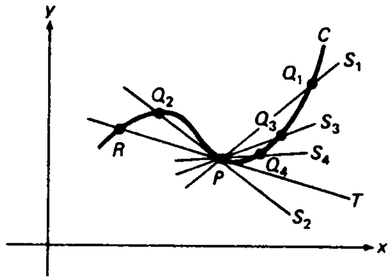


شکل ۸

حال شیب خط قاطع ماربر P و Q تغییر می‌نماید . فرض کنیم حد

$$m = \lim_{x \to a} m_S \qquad (۲)$$

موجود باشد . در این صورت ، *مماس* برمنحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ P خط مستقیم ماربر P به شیب m تعریف می‌شود . می‌توان گفت که مماس در P دارای شیب حدی قاطع S ماربر P و Q است وقتی نقطهٔ متغیر Q به نقطهٔ ثابت P نزدیک می‌شود . این رفتار در شکل ۹ مجسم شده است ، که در آن وقتی نقطهٔ متغیر با گرفتن مواضع متوالی $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$ به P نزدیک می‌شود ، قاطع با گرفتن مواضع $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ به موضع خط مماس T نزدیک می‌گردد . شکل همچنین نشان می‌دهد که ، برخلاف دایره ، مماس بر منحنی کلی C ممکن است C را در نقاطی غیر از نقطهٔ تماس قطع کند (در اینجا T منحنی C را در R و P قطع می‌کند) .



شکل ۹

تعریف و معادلهٔ خط مماس. حال آنچه باقی مانده گذاردن (۱) در (۲) است. این کار نتیجه می‌دهد که

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

که فوراً تشخیص می‌دهید که مساوی حد معرف $f'(a)$، یعنی **مشتق f در a**، است. پس منحنی $y = f(x)$ ***دارای خط مماس مایل T در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ است اگر و فقط اگر f در a مشتق‌پذیر باشد***، و دراین صورت، شیب T مساوی $f'(a)$ می‌باشد. این شیب **شیب خود منحنی در P** نیز نام دارد. لذا، شیب منحنی در P را می‌توان میزان تغییر مختص y منحنی $y = f(x)$ نسبت به مختص x آن گرفت که در $x = a$ محاسبه شده است. چون معادلهٔ خط مستقیم به شیب m و ماربر نقطهٔ (a, b) مساوی $y = m(x - a) + b$ است، معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $(a, f(a))$ عبارت است از

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \qquad (۳)$$

توجه کنید که اگر $f'(a) = 0$، مماس خط افقی $y = f(a)$ است.

مثال ۱. نشان دهید، همانطور که انتظار می‌رود، مماس بر خط $y = f(x) = mx + b$ در هر نقطه از آن چیزی جز خود آن نیست.

حل. چون $f'(x) = m$، $f'(a) = m$، و $f(a) = ma + b$، در این حالت معادلهٔ (۳) به $y = m(x - a) + (ma + b) = mx + b$ تحویل می‌شود.

مثال ۲. معادلهٔ مماس T بر سهمی $y = x^2$ در نقطهٔ $P = (-1, 1)$ را بیابید.

حل. دراینجا $f(x)=x^2$؛ درنتیجه، $f'(x)=2x$. باگذاردن $a=-1$، $f(-1)=(-1)^2=1$، و $f'(-1)=2(-1)=-2$ در معادلهٔ (۳)، درمی‌یابیم که معادلهٔ مماس T عبارت است از

$$y=-2(x+1)+1=-2x-1$$

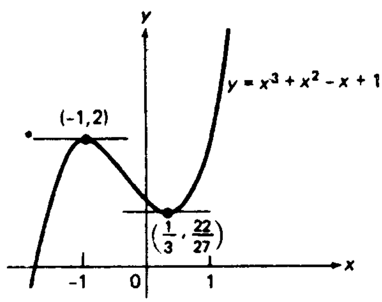
(T در شکل ۷ نموده شده است).

مثال ۳. مماس بر منحنی $y=f(x)=x^3+x^2-x+1$ کجا افقی است؟

حل. شیب مماس در نقطهٔ $(x,f(x))$ مساوی است با

$$f'(x)=D_x(x^3+x^2-x+1)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1).$$

چون $f'(x)=0$ اگر و فقط اگر $x=\frac{1}{3}$ یا $x=-1$، مماس فقط در دو نقطه از منحنی افقی است؛ یعنی، در $(\frac{1}{3},f(\frac{1}{3}))=(\frac{1}{3},\frac{22}{27})$ و $(-1,f(-1))=(-1,2)$، و این در شکل ۱۰ نموده شده است.



شکل ۱۰

مثال ۴. نشان دهید که منحنی $y=f(x)=x^4$ دو مماس دارد که از نقطهٔ $(\frac{3}{4},0)$ محور x می‌گذرد.

حل. نقطهٔ $(\frac{3}{4},0)$ خود روی منحنی $y=x^4$ قرار ندارد (ر.ک. شکل ۱۱).
با اینحال، بنابر فرمول (۳) به ازای $f(x)=x^4$ و $f'(x)=4x^3$، معادلهٔ مماس‌برمنحنی $y=x^4$ در نقطهٔ (a,a^4) عبارت است از

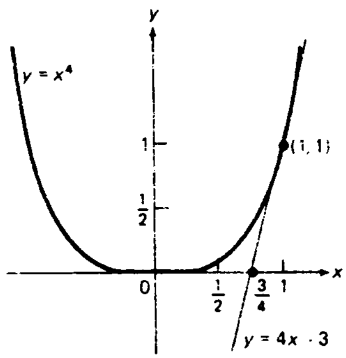
$$y=4a^3(x-a)+a^4=4a^3x-3a^4, \qquad (۴)$$

و اگر مماس بخواهد از نقطهٔ $(\frac{3}{4},0)$ بگذرد، (۴) باید دارای جواب $x=\frac{3}{4}, y=0$ باشد.

با گذاردن $x = \frac{3}{4},\ y = 0$ در (۴) ، به دست می‌آوریم

$$4a^3\left(\frac{3}{4}\right) - 3a^4 = 0,$$

یا معادلاً $a^3 - a^4 = a^3(1 - a) = 0$. این معادله دارای دو جواب $a = 0$ و $a = 1$ است . با گذاردن این مقادیر a در (۴) ، در می‌یابیم که دو مماس وجود دارند که در شرایط مسئله صدق می‌کنند ، یکی به معادلهٔ $y = 0$ (محور x) و دیگری به معادلهٔ $y = 4x - 3$ ، و این امر در شکل نموده شده است .



شکل ۱۱

مثال ۵ . موضع یک ذرهٔ متحرک در امتداد یک خط مستقیم در لحظهٔ t با تابع $s = f(t)$ داده شده است . سرعت لحظای v ذره را به عنوان شیب یک منحنی تعبیر نمایید .

حل . نمودار منحنی $s = f(t)$ را با t به عنوان طول و s به عنوان عرض رسم می‌کنیم . در این صورت ، سرعت v چیزی جز شیب منحنی $s = f(t)$ نیست ، زیرا $v = D_t s = f'(t)$. بخصوص ، هر وقت منحنی مماس افقی داشته باشد ، v مساوی صفر است . برای تابع موضع شکل ۵ ، صفحهٔ ۱۸۲ ، این وقتی رخ می‌دهد که $t = 1$ و $t = 3$ ؛ و درنتیجه ، سرعت v دقیقاً در این لحظات مساوی صفر است .

مثال ۶ . نشان دهید که نمودار $y = |x|$ در مبداء دارای مماس نیست .

حل . فرض کنیم $f(x) = |x|$. در این صورت ، طبق مثال ۳ صفحهٔ ۱۱۲ ، حد

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

معرف مشتق f در $x = 0$ **وجود ندارد**. از اینرو، نمودار $y = |x|$ در مبداء مماس ندارد.

از آن‌سو، نمودار $y = |x|$ در هیچ نقطه غیر از مبداء مماس ندارد. در واقع، اگر P سمت راست مبداء باشد، مماس در P خط $y = x$ است که در شکل ۱۲ (آ) نموده شده است، ولی اگر P سمت چپ مبداء باشد، مماس در P خط $y = -x$ است که در شکل ۱۲ (ب) دیده می‌شود (در این باب، ر.ک. مثال ۱.)

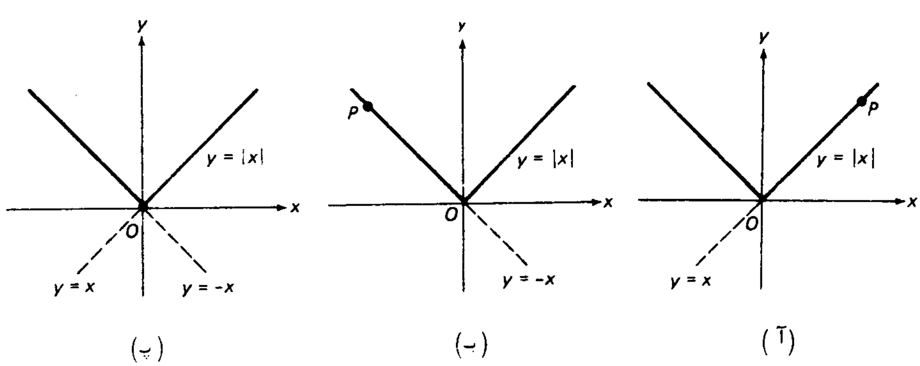
مشتقات یکطرفه و مماسها. در مورد تابع $f(x) = |x|$، مشتق " راست "

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1,$$

و مشتق " چپ "

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

هر دو در $x = 0$ موجود ولی نابرابرند و یک گوشهٔ تیز در مبداء به وجود می‌آورند. چون مشتقات یکطرفهٔ $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ نابرابرند، مشتق معمولی (دوطرفهٔ) $f'(0)$ وجودندارد (ر.ک. قضیهٔ ۱۲، صفحهٔ ۱۴۸)؛ و لذا، مماس معمولی (دوطرفه) در مبداء O وجود ندارد. با اینحال، می‌توان مماس راست در O به شیب $f'_+(0)$، و مماس چپ در O به شیب $f'_-(0)$ تعریف کرد. البته، این مماسها خطوط $y = x$ و $y = -x$ بوده، و متمایز بودن این خطوط مجددا" نشان می‌دهد که خط مماس به معنی معمولی در O وجود ندارد [ر.ک. شکل ۱۲ (پ)].



شکل ۱۲

به‌طورکلی ، حد

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مشتق راست تابع f در نقطهٔ a است ، و حد

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

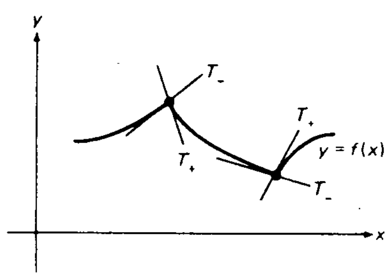
مشتق چپ f در a نام دارد . از قضیهٔ ۱۲ ، صفحهٔ ۱۴۸ ، معلوم می‌شود که مشتق معمولی $f'(a)$ موجود است اگر و فقط اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو موجود و مساوی باشند ، که در این حالت $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$. اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو موجود ولی نابرابر باشند ، گوییم منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای **گوشه** است . در این حالت **مماس راست** T_+ در P به معادلهٔ

$$y = f'_+(a)(x - a) + f(a),$$

و **مماس چپ** T_- در P به معادلهٔ

$$y = f'_-(a)(x - a) + f(a)$$

وجود دارد ولی مماس معمولی در P وجود ندارد . شکل ۱۳ یک منحنی با دو گوشه همراه با مماسهای راست و چپ T_+ و T_- نظیر را نشان می‌دهد . حالاتی هستند که در آنها نمودار یک تابع پیوسته نه فقط در نقطه‌ای مانند P مماس ندارد بلکه در P **مماس یکطرفه** نیز ندارد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۳) .



یک منحنی با دو گوشه

شکل ۱۳

با آنکه تابع $y = |x|$ در $x = 0$ مشتق ندارد ، همانطور که در مثال ۶ دیدیم ، در $x = 0$ پیوسته است . به بیان کوتاه ، این نشان می‌دهد که پیوستگی مشتقپذیری را ایجاب نمی‌کند . از آن سو ، همانطور که اینک ثابت می‌شود ، مشتقپذیری پیوستگی را ایجاب **می‌کند** :

یعنی ، یک تابع باید در هر نقطه که مشتق دارد پیوسته باشد .

قضیهٔ ۲ (مشتقپذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند) .هرگاه f در a مشتقپذیر باشد ، آنگاه f در a پیوسته است .

برهان . فرض کنیم f در a مشتقپذیر باشد . در این صورت ، حد

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

وجود دارد . پس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

یا ، معادلا" ،

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

یعنی ، f در a پیوسته می‌باشد .

خط قائم به یک منحنی . فرض کنیم منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای مماس T باشد . خط N مار بر P و عمود بر T ***خط قائم*** ، یا فقط ***قائم*** ، به منحنی در نقطهٔ P نام دارد . چون شیب T مساوی $f'(a)$ است ، از شرط تعامد (قضیهٔ ۹ ، صفحهٔ ۵۳) معلوم می‌شود که شیب N مساوی $-1/f'(a)$ است مشروط براینکه $f'(a) \neq 0$. ولی اگر $f'(a) = 0$ ، مماس T خط افقی $y = f(a)$ ماربر P است ، و در این صورت قائم خط قائم $x = a$ ماربر P می‌باشد . لذا ، معادلهٔ قائم به منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ مساوی است با

$$y = -\frac{1}{f'(a)} (x - a) + f(a) \qquad (۵)$$

اگر $f'(a) \neq 0$ و

$$x = a \qquad (۵')$$

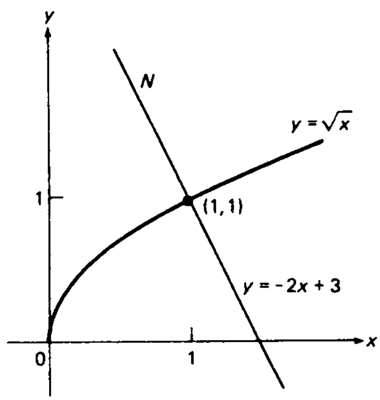
اگر $f'(a) = 0$. حالت مماس قائم و خط قائم افقی مستلزم مفهوم مشتق نامتناهی است و و در بخش ۵.۳ درنظر گرفته خواهد شد .

مثال ۷ . قائم N به منحنی $y = \sqrt{x}$ در نقطهٔ $(1, 1)$ را بیابید .

حل . در اینجا $f(x) = \sqrt{x}, a = 1$ ؛ درنتیجه ،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

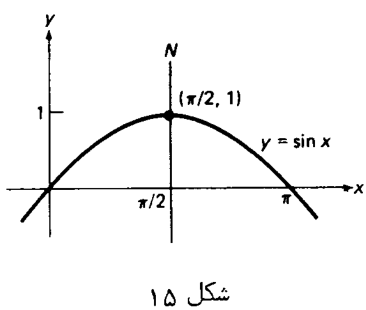
لذا ، طبق (۵) ، قائم N خط $y = -2(x-1) + 1$ یا $y = -2x + 3$ اســت ،که‌در شکل ۱۴ نموده شده است .



شکل ۱۴

مثال ۸ . قائم N به منحنی $y = \sin x$ در نقطهٔ $(\pi/2, 1)$ را بیابید .

حل . این بار $f(x) = \sin x, \; a = \pi/2$ ؛ درنتیجه ، $f'(x) = \cos x, \; f'(a) = \cos(\pi/2) = 0$
پس N خط قائم $x = \pi/2$ است که در شکل ۱۵ نموده شده است .



شکل ۱۵

مسائل

معادلهٔ مماس بر منحنی داده شده را بیابید .

۱. $y = x^2 + 2x + 3$ در $(-1, 2)$

۲. $y = 2 - x - x^2$ در $(2, -4)$

۳. $y = \frac{1}{3}x^3 - 1$ در $(-1, -\frac{4}{3})$

۴. $y = 2x^4$ در $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$

۵. $y = \sqrt{x}$ در $(4, 2)$

۶. $y = \sin x$ در $(\pi, 0)$

۷. $y = \cos x$ در $(\pi/2, 0)$

۸. $y = \sin x + \cos x$ در $(\pi/4, \sqrt{2})$

مماس (یا مماسهای) منحنی داده شده که از نقطهٔ P میگذرد را بیابید . (در هر حالت P بر منحنی قرار ندارد .)

۹. $y = x^2, P = (3, 8)$ ۱۰. $y = x^3, P = (0, 2)$

۱۱. $y = x^4, P = (0, -3)$

آیا منحنی داده شده دو مماس موازی متمایز دارد ؟

۱۲. $y = x^2$ ۱۳. $y = x^3$ ۱۴. $y = \sin x$

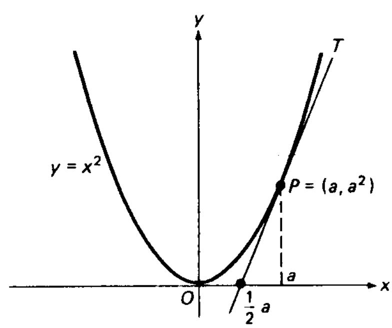
آیا منحنی داده شده دو مماس عمود برهم دارد ؟

۱۵. $y = x^3$ ۱۶. $y = x^2$ ۱۷. $y = \cos x$

۱۸. در چه نقطه از منحنی $y = x^2$ مماس موازی قاطع ماربر نقاط منحنی به طولهای 1 و 3 است ؟

۱۹. در چه نقطه از منحنی $y = x^2 - 2x + 5$ مماس بر خط $y = x$ عمود است ؟ $m_1 = m_2$

۲۰. فرض کنید T بر سهمی $y = x^2$ درنقطهٔ $P = (a, a^2)$ جز مبداء O مماس‌باشد . همانطور



شکل ۱۶

که شکل ۱۶ نشان می‌دهد، T خطی است که از P و نقطهٔ $(\frac{1}{2}a, 0)$ از محور x می‌گذرد.
چرا چنین است؟

برای تابع داده شدهٔ f، مشتقات یکطرفهٔ $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را در صورت وجود حساب‌کنید.

۲۱. $f(x) = |x|$

۲۲. $f(x) = |x - x^2|$

۲۳. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$

۲۴. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{اگر } x \leq 0 \\ \cos x & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$

۲۵. به ازای چه مقادیری از m و b، تابع

$$f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{اگر } x < a \\ x^2 & \text{اگر } x \geq a \end{cases}$$

در a مشتقپذیر است؟

۲۶. تابع $y = |x| + |x - 1|$ را رسم کنید. مماسهای یکطرفه در گوشه‌های نمودار را بیابید.

۲۷. به ازای چه مقادیری از عدد صحیح مثبت n، منحنی

$$y = f(x) = \begin{cases} b & \text{اگر } x < a \\ b + (x - a)^n & \text{اگر } x \geq a \end{cases}$$

در نقطهٔ (a, b) گوشه دارد؟

۲۸. نشان دهید هرگاه منحنی $y = f(x)$ در $(a, f(a))$ گوشه داشته باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

معادلهٔ قائم به منحنی داده شده را بیابید.

۲۹. $y = x^2 + 1$ در $(0, 1)$

۳۰. $y = 1 - x^3$ در $(-1, 2)$

۳۱. $y = x^4 - 6x^2 + 2$ در $(2, -6)$

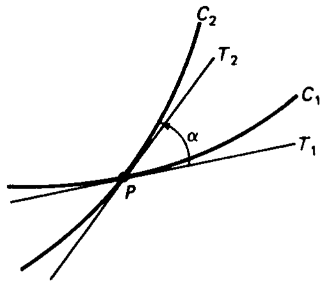
۳۲. $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ در $(\pi/2, 2)$

قائم (یا قائمهای) به‌منحنی $y = x^2$ را بیابید که از نقطهٔ داده شدهٔ P که برمنحنی واقع نیست بگذرد.

۳۳. $P = (3, 0)$ ۳۴. $P = (0, \frac{9}{2})$

همانند در شکل ۱۷، زاویهٔ α $(0 \leq \alpha < \pi)$ بین دو منحنی متقاطع C_1 و C_2 راویهٔ بین

مماسهای T_1 و T_2 آنها در نقطهٔ اشتراک P تعریف می‌شود که از T_1 به T_2 درجهت‌خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود. به کمک فرمول (۱۷)، صفحهٔ ۹۸، زاویهٔ α بین‌جفت



زاویهٔ بین منحنیهای C_1 و C_2 در P مساوی α است.

شکل ۱۷

منحنیهای داده شده را درصورتی بیابید که از منحنی اول به منحنی دوم سنجیده می‌شود.

۳۵. $y = x^2$ و $y = x^3$ در $(0, 0)$ و $(1, 1)$ ✓

۳۶. $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ در $(1, 1)$ ✓

۳۷. $y = \frac{1}{2}x^2$ و $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ در $(\pm 1, \frac{1}{2})$ ✓

۳۸. $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در $(\pi/4, 1/\sqrt{2})$ ✓

۳۹. چه انتخابی از ثابت c منحنیهای $y = 1/x$ و $y = cx^3$ را **متعامد** می‌سازد؛ یعنی، یکدیگر را در هر دو نقطهٔ اشتراک در زوایای قائمه قطع می‌کنند؟

۴۰. چه انتخابی از c منحنیهای $y=x^2$ و $y=1-cx^2$ را متعامد می‌سازد؟

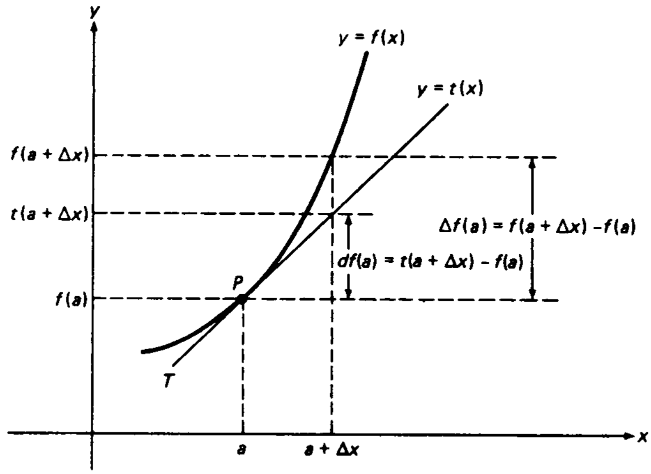
۳.۲ تقریب خط مماس و دیفرانسیلها

روشی برای تقریب توابع وجود دارد که با مفهوم مماس بر یک‌منحنی رابطه‌ای‌نزدیک‌دارد. فرض کنیم منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای خط مماس T باشد. بنابر فرمول (۳)، صفحهٔ ۱۸۸، T نمودار تابع $y = t(x)$ است، که در آن

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

توجه کنید که $t(a) = f(a)$، زیرا، همانطور که شکل ۱۸ نشان داده، نقطهٔ P متعلق‌به منحنی $y = f(x)$ و خط $y = t(x)$ می‌باشد.

از شکل برمی‌آید که خط مماس $y = t(x)$ (دست‌کم در مجاورت P) تقریب مناسبی به منحنی $y = f(x)$ است، و این درحالت کلی نیز درست است (ر.ک. مسئلهٔ ۲۹). لذا،



تعبیر هندسی تقریب خط مماس و دیفرانسیل

شکل ۱۸

اگر $|x - a|$ کوچک ولی ناصفر باشد ، داریم $f(x) \approx t(x)$ ؛ یعنی ،

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

این تقریب ،که **تقریب‌خط مماس** نام دارد ، برحسب‌نمو $\Delta x = x - a$ به‌شکل زیر درمی‌آید :

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x \qquad (۲)$$

این را می‌توان به صورت بسیار فشرده‌ی

$$\Delta f(a) \approx f'(a)\,\Delta x \qquad (۲')$$

نیز نوشت ، که در آن

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) \qquad (۳)$$

نمو تابع f در a می‌باشد .

تعریف دیفرانسیل . فرمولهای (۲) و (۲') شامل عبارت $f'(a)\Delta x$ می‌باشند ، که با $df(a)$ نموده و *دیفرانسیل تابع f در a* نامیده می‌شود . در اینجا df موجود واحدی تلقی شده ، و حاصل‌ضرب عوامل d و f نمی‌باشد . لذا ، *طبق تعریف* ،

$$df(a) = f'(a)\,\Delta x.$$

با گذاردن $\Delta x = x - a$ در فرمول (۱) ، معلوم می‌شود که

$$t(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\,\Delta x.$$

لذا ، دیفرانسیل f در a از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$df(a) = t(a + \Delta x) - f(a),$$

که باید با فرمول (۳) مربوط به نمو $\Delta f(a)$ تابع f در a مقایسه شود (فرض است‌که $df(a)$ و $\Delta f(a)$ هر دو ، علاوه‌بر a ، تابع Δx نیـز هستند) . لذا ، دیفرانسیل $df(a)$ تغییر عرض (مختص y) **خط مماس** $y = t(x)$ است وقتی x از a تا $a + \Delta x$ تغییر نماید ، حال آنکه نمو $\Delta f(a)$ تغییر نظیر عرض خود منحنی $y = f(x)$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۸) .

حال a را با x عوض می‌کنیم ، زیرا دیگر لازم نیست x مختص x یک نقطهٔ متغیر منحنی $y = f(x)$ یا خط مماس $y = t(x)$ رانشان دهد . درنتیجه ، فرمول $df(a) = f'(a)\,\Delta x$ خواهد شد

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \tag{۴}$$

فرض کنید $f(x) = x$ را اختیار کرده‌باشیم ،که درمورد آن داریم $df(x) = dx$ و $f'(x) = 1$ در این صورت ، (۴) به شکل زیر درمی‌آید :

$$dx = \Delta x,$$

یعنی ، **دیفرانسیل و نمو متغیر مستقل باهم مساویند** . به کمک این می‌توان به جای (۴) نوشت

$$df(x) = f'(x)\,dx, \tag{۴'}$$

از تقسیم طرفین (۴') بر dx فرمول زیر به دست می‌آید :

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

لذا ، می‌توان مشتق $f'(x)$ را خارج قسمت دیفرانسیلهای $df(x)$ و dx تعبیر نمود .مثلا ً، با این نماد ، فرمول مشتق توان x^n بـه‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}, \tag{۵}$$

قاعدهٔ مشتقگیری از مجموع دو تابع f و g (اگر شناسه‌ها را حذف کنیم) خواهد شد

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \tag{۶}$$

و از این قبیل . همانطور که از این فرمولها برمی‌آید ، می‌توان از عبارت "خالی" d/dx برای نمایش عمل مشتقگیری نسبت به x ، که تاکنون با D_x نموده شده ، نیز استفاده کرد . مثلا ً ، فرمول

$$D_x(x^4 + \sin x) = 4x^3 + \cos x$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}(x^4 + \sin x) = 4x^3 + \cos x.$$

نماد لایب‌نیتز. نماد $df(x)/dx$، که در ۱۶۸۴ توسط لایب‌نیتز عرضه شد، به‌خاطر سادگی و قابلیت انعطاف بیشتر توجه ما را جلب کرده است، اگرچه طرق دیگری برای‌نوشتن‌مشتق f در x، یعنی $f'(x)$ و $D_x f(x)$، نیز وجوددارند که باارزش‌بوده و به کارخواهندرفت. لازم است با همهٔ این نمادهای معادل کاملاً آشنا شوید. علی‌رغم تعبیر $df(x)/dx$ به صورت خارج قسمت دیفرانسیلها، معمولاً بهتر است $df(x)/dx$ را فقط نماد دیگری برای مشتق f در x بگیریم.

چون

$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{df(x)}{dx}\,dx,$$

هر فرمول محاسبهٔ مشتق فرمول مشابهی برای محاسبهٔ دیفرانسیل به دست می‌دهد. لذا، با ضرب طرفین (۵) در dx، فرمول

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$$

برای دیفرانسیل x^n به‌دست می‌آید. به‌همین نحو، از ضرب طرفین (۶) در dx خواهیم داشت

$$d(f + g) = df + dg,$$

که همان قاعدهٔ مشتقگیری از مجموع است منتها در مورد دیفرانسیلها. به همین نحو، اگر c ثابت باشد،

$$dc = 0, \qquad d(cf) = c\,df$$

(اینها مشابه قواعد (یک) و (دو)، صفحهٔ ۱۷۷، برای دیفرانسیلها می‌باشند).

مثال ۱. $d(x^5 + 3\cos x)$ را محاسبه کنید.

حل. چون

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 3\cos x) = \frac{d}{dx}x^5 + 3\frac{d}{dx}\cos x = 5x^4 - 3\sin x,$$

داریم

$$d(x^5 + 3\cos x) = (5x^4 - 3\sin x)\,dx.$$

مثال ۲ . $d(9-2\sqrt{x})$ را محاسبه کنید .

حل . این بار مستقیما" از چند قاعده‌ٔ حاکم بر دیفرانسیلها استفاده می‌کنیم :

$$d(9-2\sqrt{x}) = d\,9 - 2d\sqrt{x} = 0 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

توجه کنید که چگونه با آوردن dx در صورت می‌توان جواب را به‌طور فشرده‌تر نوشت .

مثال ۳ . $d(t^3+t)$ را حساب کنید .

حل . در اینجا متغیر مستقل t است ؛ و درنتیجه ،

$$d(t^3+t) = \frac{d(t^3+t)}{dt}\,dt = (3t^2+1)\,dt.$$

همانطور که قبلا" گفتیم ، تقریب (۲) یعنی تعویض منحنی $y=f(x)$ در مجاورت نقطهٔ $P=(a, f(a))$ باخط مماس آن در P . تقریب معادل‌عبارت‌است از $\Delta f(a) \approx df(a)$ ؛ یعنی ، تقریب نمو $\Delta f(a)$ با دیفرانسیل $df(a)$. همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند ، این تقریبات به ازای $|\Delta x|$ کوچک کاملا" دقیق‌اند .

مثال ۴ . $\sqrt{98}$ را تخمین بزنید .

حل . ملاحظه‌می‌کنیم که 98 به عدد 100 که ریشهٔ دومش‌دقیقا" 10 است نزدیک‌می‌باشد. لذا ، درفرمول (۲) اختیارمی‌کنیم $f(x)=\sqrt{x},\ a=100,\ \Delta x=-2$. چون $f'(x)=1/2\sqrt{x}$ ، این نتیجه می‌دهد که

$$\sqrt{a+\Delta x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\Delta x,$$

که از مقایسه با مقدار دقیق 9.8995 تا چهار رقم اعشار ،

$$\sqrt{98} = \sqrt{100-2} \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(-2) = 10 - \frac{1}{10} = 9.9,$$

مثال ۵ . $\sin 46^\circ$ را تخمین بزنید .

حل . این بار از نزدیک بودن $46°$ به زاویهٔ $45°$ استفاده می‌کنیم که سینوس و کسینوس آن $1/\sqrt{2}$ است . لذا ، در فرمول (۲) اختیار می‌کنیم $f(x) = \sin x, a = 45° = \pi/4, \Delta x = 1° = \pi/180$. چون $f'(x) = \cos x$ (اگر x به رادیان باشد) ، نتیجه عبارت است از

$$\sin(a + \Delta x) \approx \sin a + \Delta x \cos a,$$

لذا ، تا پنج رقم اعشار ،

$$\sin 46° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{180}\right) = 0.71945$$

این با مقدار دقیق 0.71934 با همین تعداد اعشار نزدیک است .

تبصره . در بخش ۸.۹ ، وقتی تخمین دقت تقریب *از قبل* مطرح می‌شود ، از تقریب خط مماس استفاده خواهیم کرد .

مثال ۶ . اگر شعاع کرهٔ زمین به اندازهٔ 1 فوت زیاد شود ، مساحت سطح آن چقدر زیاد می‌شود ؟

حل . مساحت سطح یک کره به شعاع R عبارت است از $S = 4\pi R^2$ ، و شعاع زمین تقریباً 3960 میل است . اگر نمو ΔS مساحت سطح آن را با دیفرانسیل dS در $R = 3960$ تخمین بزنیم ، به دست می‌آوریم

$$\Delta S \approx dS = d(4\pi R^2) = 8\pi R\,\Delta R = 8\pi(3960)\cdot\frac{1}{5280} \text{ میل مربع}$$

زیرا هر میل 5280 فوت است . با محاسبه درمی‌یابیم که $\Delta S \approx 18.85$ sq mi . برای مقایسه ، مساحت جزیرهٔ مانهاتان تقریباً 22 sq mi است .

در مثال ۶ می‌توان دقت تقریب $\Delta S \approx dS$ را فوراً تعیین کرد ، زیرا محاسبهٔ دقیق ΔS بسیار آسان است . در واقع ،

$$\Delta S = 4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2 = 8\pi R\,\Delta R + 4\pi(\Delta R)^2,$$

درنتیجه ،

$$\Delta S - dS = 4\pi(\Delta R)^2 = 4\pi\left(\frac{1}{5280}\right)^2 < \frac{1}{2} \times 10^{-6} \text{ sq mi.}$$

مثال ۷. اگر شعاع کرهٔ زمین 1 اینچ کم شود، حجم آن چقدر کاهش می‌یابد؟

حل. حجم یک توپ کروی به شعاع R مساوی است با $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. اگر نمو ΔV حجم را با دیفرانسیل dV تخمین بزنیم، درمی‌یابیم که

$$\Delta V \approx dV = d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2\, \Delta R$$

$$= -4\pi(3960)^2 \cdot \frac{1}{12(5280)} \approx -3110 \text{ میل مکعب}$$

($\frac{1}{12}$ فوت = 1 اینچ) . میزان کاهش این حجم تقریبا "یک‌میلیونیم حجم فعلی زمین است، زیرا

$$\frac{4\pi R^2|\Delta R|}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3|\Delta R|}{R} = \frac{3}{3960(12)(5280)} \approx 1.2 \times 10^{-8}$$

مسائل

دیفرانسیلهای زیر را بیابید.

۱. $7x - 11$ ✓
۲. $2x^2 - 3x + 5$ ✓
۳. $x^5 + 6x^3 + x$ ✓
۴. $t^4 - 3t^3 + 2t^2 - 10$ ✓
۵. $5u^6 - \cos u$ ✓
۶. $4\sqrt{v} + 5\sin v$ ✓
۷. $\cos x - \sin x$ ✓
۸. $10x^9 - 9x^{10}$ ✓

دیفرانسیل $df(a) = f'(a)\Delta x$ تابع داده شده را به ازای مقادیر a و Δx بیابید. درهرحالت $df(a)$ را با نمو $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ تا ارقام اعشاری مناسبی مقایسه نمایید.

۹. $f(x) = 2x + 1, a = 3, \Delta x = 0.001$ ✓
۱۰. $f(x) = x^2, a = -\frac{1}{4}, \Delta x = 1$ ✓
۱۱. $f(x) = x^3 - 1, a = -1, \Delta x = 0.01$ ✓
۱۲. $f(x) = x^4 + 3x^2, a = 2, \Delta x = -0.02$ ✓
۱۳. $f(x) = \sqrt{x}, a = 4, \Delta x = -0.1$ ✓
۱۴. $f(x) = \sin x + \cos x, a = \Delta x = \pi/6$

با استفاده از تقریب خط مماس (۲) کمیت داده شده را تخمین زده، و نتیجه را با جواب دقیق تا تعداد اعشاری مناسبی مقایسه نمایید.

۱۵. $(3.1)^2 + (3.1)^3 + (3.1)^4$
۱۶. $\sqrt{35}$

۱۷. $\sqrt{49.6}$ ✓ ۱۸. $\sqrt{611}$ ✓

۱۹. $\sin 28^\circ$ ✓ ۲۰. $\cos 121^\circ$

تقریب داده شده را به ازای $|x|$ کوچک توجیه کنید.

۲۱. $\sin x \approx x$ ۲۲. $\cos x \approx 1$

۲۳. اگر شعاع یک قرص مستدیر به اندازهٔ 5% زیاد شود، درصد افزایش مساحت آن را تخمین بزنید. اگر محیط به اندازهٔ 3% زیاد شود چطور؟

۲۴. فرض کنید محیط کرهٔ زمین 1 فوت افزایش یابد. فاصلهٔ بین سطح زمین " جدید" و سطح زمین " قدیم " را تخمین بزنید.

افزایش شعاع زمین را درصورتی تخمین بزنید که افزایش مساحت زیر را داشته باشیم.

۲۵. جزیرهٔ رود $(\approx 1215$ sq. mi$)$

۲۶. اوهایو $(\approx 41{,}220$ sq. mi$)$

۲۷. تگزاس $(\approx 267{,}340$ sq. mi$)$

۲۸. آنتارکتیکا $(\approx 5{,}500{,}000$ sq. mi$)$

۲۹. فرض‌کنید $e(\Delta x)$ خطای‌تقریب‌خط مماس (۲) باشد؛ یعنی، $e(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x$. نشان دهید که

$$\lim_{\Delta x \to 0} e(\Delta x) = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

لذا، وقتی $\Delta x \to 0$، خطای $e(\Delta x)$ نه تنها به صفر نزدیک می‌شود بلکه از Δx " سریعتر " به صفر نزدیک خواهد شد.

۳۰. نشان دهید که تقریب خط مماس (۲) **بهترین تقریب خطی** به $f(a + \Delta x)$ نزدیک a به معنی زیر است: هرگاه $e(\Delta x)$ خطای تقریب خط مماس بوده و $E(\Delta x)$ خطای حاصل از تقریب $f(a + \Delta x)$ به وسیله خط L ماربر نقطهٔ $(a, f(a))$ غیر از خط مماس نزدیک a باشد، آنگاه، به ازای هر $\Delta x \neq 0$ با قدر مطلق به قدر کافی کوچک، یعنی به‌ازای هر Δx در یک همسایگی سفتهٔ صفر، $|e(\Delta x)| < |E(\Delta x)|$.

۳۱. فرض کنید $\tilde{q}$ تقریبی به‌یک‌کمیت با مقدار دقیق q باشد. دراین صورت، خطای $q - \tilde{q}$ تقریب $q \approx \tilde{q}$ را اغلب ***خطای مطلق*** می‌نامند تا از ***خطای نسبی*** تعریف شده با $|(q - \tilde{q})/q|$ متمایز باشد. (خطای نسبی اغلب به صورت درصد بیان می‌شود؛ مثلا "، خطای نسبی 0.05 خطای نسبی 5% نیز نامیده می‌شود.) بنابر مسئلهٔ ۲۹، خطای مطلق تقریب خط مماس، وقتی $\Delta x \to 0$، سریعتر از Δx به‌صفر نزدیک می‌شود. مثالی بزنید که خطای نسبی تقریب خطای مماس، بدون توجه به اندازهٔ Δx، 100% باشد.

۴.۲ قواعد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت

حال تکنیک مشتقگیری را از سر گرفته، محاسبهٔ مشتق حاصل‌ضرب، متقابل، و خارج‌قسمت توابع را محاسبه می‌کنیم. مطلب را با حاصل‌ضرب آغاز می‌کنیم. ممکن است شباهت با حدود ما را گمراه کرده مشتق حاصل‌ضرب دو تابع را حاصل‌ضرب مشتقات عوامل بنویسیم، اما این را می‌توان باتوجه‌به‌عدم تساوی $D_x(1 \cdot x) = D_x x = 1$ با $(D_x 1)(D_x x) = 0 \cdot 1 = 0$ فوراً رد کرد. قضیهٔ زیر راه صحیح محاسبهٔ مشتق حاصل‌ضرب را به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۳ (قاعدهٔ حاصل‌ضرب). *هرگاه توابع f و g در x مشتقپذیر باشند، آنگاه حاصل ضرب fg نیز چنین است، و*

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx} g + f\frac{dg}{dx} = f'g + fg'. \qquad (۱)$$

برهان. در اینجا پریم مشتقگیری نسبت به x را نشان می‌دهد، و گاهی به خاطر اختصار شناسهٔ توابع را حذف می‌کنیم (این کار معمول است). طبق تعریف،

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{u \to x} \frac{f(u)g(u) - f(x)g(x)}{u - x},$$

که در آن x ثابت گرفته می‌شود. صورت $f(u)g(u) - f(x)g(x)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(u)g(u) - f(x)g(u) + f(x)g(u) - f(x)g(x),$$

که در آن جملهٔ $f(x)g(u)$ کم و زیاد شده است! با این کار می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(fg) &= \lim_{u \to x}\left[\frac{f(u)g(u) - f(x)g(u)}{u - x} + \frac{f(x)g(u) - f(x)g(x)}{u - x}\right] \\ &= \lim_{u \to x}\frac{f(u) - f(x)}{u - x}\, g(u) + \lim_{u \to x} f(x)\,\frac{g(u) - g(x)}{u - x},\end{aligned}$$

که طبق خواستهٔ ما در آخرین مرحله *خارج‌قسمتهای تفاضلی* f و g ظاهر شده‌اند. باادامهٔ محاسبات به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(fg) &= \lim_{u \to x}\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \lim_{u \to x} g(u) + \lim_{u \to x} f(x) \lim_{u \to x}\frac{g(u) - g(x)}{u - x} \qquad (۲) \\ &= f'(x) \lim_{u \to x} g(u) + f(x)g'(x),\end{aligned}$$

که در آن از تعاریف $f'(x)$ و $g'(x)$ و ثابت بودن $f(x)$ استفاده می‌کنیم. اما g طبق فرض

در x مشتقپذیر است؛ و لذا، طبق قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۱۹۳، در x پیوسته می‌باشد؛ درنتیجه،

$$\lim_{u \to x} g(u) = g(x). \qquad (۳)$$

با گذاردن (۳) در (۲) نتیجهٔ مطلوب (۱) به دست می‌آید.

لذا، مشتق حاصل‌ضرب دو تابع مشتقپذیر مشتق تابع اول در تابع دوم به‌علاوهٔ تابع اول در مشتق تابع دوم می‌باشد.

نتیجه. هرگاه توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ همه در x مشتقپذیر باشند، آنگاه حاصل‌ضرب $f_1 f_2 \ldots f_n$ نیز چنین است و

$$\frac{d}{dx}(f_1 f_2 \cdots f_n) = \frac{df_1}{dx} f_2 \cdots f_n + f_1 \frac{df_2}{dx} f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} \frac{df_n}{dx}$$
$$= f'_1 f_2 \cdots f_n + f_1 f'_2 f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f'_n.$$

برهان. قضیه را چند بار به کار می‌بریم. مثلاً،

$$\frac{d}{dx}(fgh) = \frac{d(fg)}{dx} h + fg \frac{dh}{dx} = \left(\frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}\right) h + fg \frac{dh}{dx}$$
$$= \frac{df}{dx} gh + f \frac{dg}{dx} h + fg \frac{dh}{dx},$$

یا، معادلاً،

$$(fgh)' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

مثال ۱. از $(2x-1)(x^2-6x+3)$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب،

$$\frac{d}{dx}[(2x-1)(x^2-6x+3)] = \frac{d(2x-1)}{dx}(x^2-6x+3) + (2x-1)\frac{d(x^2-6x+3)}{dx}$$
$$= 2(x^2-6x+3) + (2x-1)(2x-6) = 6x^2 - 26x + 12.$$

راه دیگر این است که ابتدا ضرب کرده سپس مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{dx}[(2x-1)(x^2-6x+3)] = \frac{d}{dx}(2x^3 - 13x^2 + 12x - 3) = 6x^2 - 26x + 12.$$

مثال ۲. از $x^2 \sin x$ مشتق بگیرید .

حل . هیچ راهی جز قاعدهٔ حاصل‌ضرب وجود ندارد :

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = \frac{d(x^2)}{dx} \sin x + x^2 \frac{d \sin x}{dx} = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

مثال ۳. از $\sqrt{x} \sin x \cos x$ مشتق بگیرید .

حل . با استفاده از نتیجه ، داریم

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sin x \cos x) = \frac{d\sqrt{x}}{dx} \sin x \cos x + \sqrt{x} \frac{d \sin x}{dx} \cos x + \sqrt{x} \sin x \frac{d \cos x}{dx}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos^2 x - \sqrt{x} \sin^2 x.$$

توجه کنید که این را می‌توان به کمک فرمولهای (۱۴) و ('۱۴) ، صفحهٔ ۹۶ ، به صورت ساده‌تر زیر نوشت :

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sin x \cos x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x,$$

قضیهٔ ۴ (مشتق متقابل یک‌تابع) . *هرگاه تابع g در x مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه متقابل g نیز چنین است و*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2}\frac{dg}{dx} = -\frac{g'}{g^2},$$

مشروط بر اینکه $g(x) \neq 0$.

برهان . به کمک فرمول (۳) داریم

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g} = \lim_{u \to x} \frac{\dfrac{1}{g(u)} - \dfrac{1}{g(x)}}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{g(x) - g(u)}{g(u)g(x)(u - x)}$$
$$= -\lim_{u \to x} \frac{1}{g(u)g(x)} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}$$
$$= -\frac{1}{g(x)} \lim_{u \to x} \frac{1}{g(u)} \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} = -\frac{1}{g^2(x)} g'(x),$$

چون طبق فرض $g(x) \neq 0$ ، لازم نیست از صفر بودن $g(u)$ در هیچ مخرجی نگران باشیم (قاعدهٔ (دو) ، صفحهٔ ۱۲۴، را به یاد آورید) .

مثال ۴ . از $1/(x^2 + 1)$ را مشتق بگیرید .

حل . بنابر قضیهٔ ۴ ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{(x^2+1)^2}\frac{d}{dx}(x^2+1) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

مثال ۵ . از $1/(\sin x + \cos x)$ مشتق بگیرید .

حل . بنابر همان قضیه ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)$$

$$= -\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

مشتقگیری از توانهای منفی . حال می‌توانیم از متقابل x^n ،که در آن n عدد صحیح مثبتی است ، مشتق بگیریم . مجددا"،طبق قضیهٔ ۴ ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{x^{2n}}\frac{d}{dx}x^n = -\frac{1}{x^{2n}}nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

مشروط براینکه $x \neq 0$. این رابطه را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1} \qquad (۴)$$

اما (۴) از تعویض n با $-n$ در فرمول

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad (۵)$$

که از قبل بر ما معلوم است ، به دست می‌آید . در واقع ، ما فقط‌از (۵) به ازای $n > 0$ برای اثبات (۴) استفاده کرده‌ایم لذا ، می‌بینیم که فرمول مشتقگیری اساسی (۵) برای اعداد صحیح منفی نیز برقرار است . این فرمول ، دست کم به‌طور صوری ، به ازای $n = 0$ نیز برقرار است ، زیرا هرگاه $x \neq 0$ ، آنگاه $x^0 \equiv 1$ ؛ درنتیجه ، $D_x x^0 = D_x 1 = 0$ ،

حال آنکه فرمول (۵) نتیجه می‌دهد کـه $D_x x^0 = 0x^{-1} = 0$. لذا، فرمول (۵) به ازای هر عدد صحیح، مثبت، منفی، یا صفر، برقرار است.

مثال ۶. با دو بار استفاده از فرمول (۵)، داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{d}{dx}(x^{-1}+x^{-3})=-1x^{-2}-3x^{-4}=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}$$

قضیهٔ ۵ (قاعدهٔ خارج‌قسمت) . *هرگاه توابع f و g در x مشتقپذیر باشند، آنگاه خارج قسمت f/g نیز چنین است و*

$$\frac{d}{dx}\frac{f}{g}=\frac{\dfrac{df}{dx}g-f\dfrac{dg}{dx}}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2},$$

مشروط براینکه $g(x) \neq 0$.

برهان. ابتدا از قاعدهٔ حاصل‌ضرب و سپس قاعدهٔ مشتقگیری از متقابل یک تابع استفاده می‌کنیم، داریم

$$\frac{d}{dx}\frac{f}{g}=\frac{d}{dx}\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)=f'\cdot\frac{1}{g}+f\cdot\frac{-g'}{g^2}=\frac{f'}{g}-\frac{fg'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

مثال ۷. از $2x/(1-x^2)$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ خارج قسمت،

$$\frac{d}{dx}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\dfrac{d(2x)}{dx}(1-x^2)-2x\dfrac{d(1-x^2)}{dx}}{(1-x^2)^2}$$
$$=\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2},$$

مشروط براینکه $x \neq \pm 1$.

مثال ۸. از $(x^3+1)/(x^2-x-2)$ مشتق بگیرید.

حل . پیش از مشتقگیری فکر می‌کنیم! شاید تابع را بتوان ساده کرد . می‌بینیم که صورت و مخرج عامل مشترک $x + 1$ دارند . در واقع ،

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x^2-x+1}{x-2} = x+1+\frac{3}{x-2},$$

که درآخرین مرحله ، با استفاده‌از تقسیم متوالی ، $x^2 - x + 1$ را بر $x - 2$ تقسیم می‌کنیم (جزئیات را شرح دهید) . حال با مشتقگیری خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{d}{dx}(x+1) + \frac{d}{dx}\frac{3}{x-2} = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}.$$

در اینجا فرض کرده‌ایم $x \neq -1, 2$. اگراین‌حذف مقدماتی‌صورت‌نگیرد ، به جواب بسیار پیچیده‌تری می‌رسیم که در آن $(x + 1)^2$ عامل مشترک غیرقابل تشخیص صورت و مخرج می‌باشد .

مشتقگیری از توابع مثلثاتی . در قاعدهٔ (هفت) ، صفحهٔ ۱۷۹ ، نشان دادیم که

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x. \tag{۶}$$

حال برای مشتق چهار تابع مثلثاتی دیگر فرمول به‌دست‌می‌آوریم . مشتق $\tan x$ با استفاده از قاعدهٔ خارج‌قسمت ، و مشتقات $\cot x$ ، $\sec x$ ، و $\csc x$ بااستفاده ازقاعدهٔ مشتقگیری از متقابل یک تابع (قضیهٔ ۴) به دست می‌آیند . محاسبات سرراست بوده و به صورت زیر جریان می‌یابند .

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\dfrac{d\sin x}{dx}\cos x - \sin x\dfrac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{\tan^2 x}\frac{d}{dx}\tan x = -\frac{1}{\tan^2 x}\sec^2 x$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{\cos^2 x}\frac{d}{dx}\cos x = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)$$

$$= \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x,$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\frac{d}{dx}\sin x = -\frac{1}{\sin^2 x}\cos x$$

$$= -\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x.$$

لذا، داریم

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \tag{۷}$$

و

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \tag{۸}$$

فرمولهای (۷) و (۸) از فرمولهای (۶) پیچیده‌ترند، ولی اینها را نیز باید حفظ کرد.

مثال ۹. از $(\tan x)/x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ خارج‌قسمت و فرمول (۷)،

$$\frac{d}{dx}\frac{\tan x}{x} = \frac{\dfrac{d\tan x}{dx}x - \tan x\dfrac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}.$$

مثال ۱۰. از $\sec^2 x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ خارج قسمت و فرمول (۸)،

$$\frac{d}{dx}\sec^2 x = \frac{d}{dx}(\sec x \sec x) = \frac{d\sec x}{dx}\sec x + \sec x\frac{d\sec x}{dx}$$

$$= 2\sec x\frac{d\sec x}{dx} = 2\sec^2 x \tan x.$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱. $3x^{-2}-5x^{-3}$

۲. $6x^{-4}+5x^{-5}+4x^{-6}$

۳. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

۴. $\frac{1}{x^{10}}+\frac{1}{x^5}+100$

۵. $(1+x^2)(2-x^2)$

۶. $(1+4x^2)(1+2x^2)$

۷. $(1-x^2)(1+x^3)$

۸. $(x-1)(x^2+x+1)$

۹. $(x+1)(x^2-x+1)$

۱۰. $(1-x^{99})(1+x^{99})$

۱۱. $(2-x^3)(1+x^{-2})$

۱۲. $(2+x^2)(1-x^{-3})$

۱۳. $(1-x^{-5})^2$

۱۴. $(1+x+x^{-1})(1+x-x^{-1})$

۱۵. $(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$

۱۶. $(1-x)(1+x+x^2)(1+x^3)$

۱۷. $\frac{1}{1+x}$

۱۸. $\frac{1-x}{1+x}$

۱۹. $\frac{x^2}{1+x^2}$

۲۰. $\frac{x^3+1}{x^2-1}$

۲۱. $\frac{x^3-1}{x^3+1}$

۲۲. $\frac{x^2+5x}{x^3-3}$

۲۳. $\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

۲۴. $\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

۲۵. $\frac{t^4-1}{t^2-3t+2}$

۲۶. $\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

۲۷. $\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$

۲۸. $u^2\cos u$

۲۹. $\frac{\sin v}{v}$

۳۰. $\frac{\tan v}{\sqrt{v}}$

۳۱. $\sqrt{w}\cot w$

۳۲. $w^3\sec w$

۳۳. $2x\csc x$

۳۴. $x^2\sin^2 x$

۳۵. $x\sin x\tan x$

۳۶. $\frac{1}{1+\sin x}$

۳۷. $\frac{1}{1-\cos x}$

۳۸. $\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$

۳۹. $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ ✓

۴۰. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ ✓

۴۱. $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ ✓

۴۲. $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$ ✓

دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید.

۴۳. $x^{-2}+x^{-1}+7$ ✓

۴۴. $\dfrac{1}{1-x}$ ✓

۴۵. $\dfrac{x}{1+x}$

۴۶. $x\tan x$ ✓

۴۷. $\sqrt{x}\sin x$ ✓

۴۸. $\dfrac{x}{\sin x}$ ✓

۴۹. $\dfrac{x}{\cos x}$ ✓

۵۰. $\csc^2 x$ ✓

۵۱. با کمی تلاش نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}=1.$$

۵۲. قواعد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت زیر برای دیفرانسیلها را که شبیه قواعد مشتقها هستند اثبات نمایید:

$$d(fg)=g\,df+f\,dg,\qquad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,df-f\,dg}{g^2}$$

۵.۲ قاعدهٔ زنجیره‌ای

هیچیک از قواعد مشتقگیری که تاکنون ثابت شده‌اند طرز مشتقگیری از توابع مرکب نظیر $\sqrt{x^2+1}$ یا $\sin(\sin x)$ را به‌ما نمی‌گوید. لذا، اینک به‌اثبات قاعدهٔ دیگری می‌پردازیم که مشتق تابع مرکب را برحسب مشتقات توابع مؤلفهٔ آن بیان می‌کند. قاعده، که به‌**قاعدهٔ زنجیره‌ای** موسوم است، به قدر کافی ساده است ولی اثباتش کمی پیچیده می‌باشد. فرض کنیم f و g دو تابع باشند به‌طوری که f در x و g در $f(x)$، یعنی مقدار f در x، مشتقپذیر باشد. بزودی نشان می‌دهیم که تابع مرکب $g(f(x))$ نیز در x مشتقپذیر بوده و دارای مشتق

$$\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x) \qquad (1)$$

می‌باشد، که در آن پریم مشتق نسبت به شناسهٔ تابع را نشان می‌دهد. مثلاً، هرگاه

$f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، آنگاه $g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$. به علاوه ، f به‌ازای هر x مشتقپذیر است حال آنکه g به ازای هر $x > 0$ و درنتیجه به ازای هر مقدار از f زیرا $x^2 + 1 \geq 1$ مشتقپذیر می‌باشد . در این حالت $g'(x) = 1/2\sqrt{x}$ و $f'(x) = 2x$ ؛ درنتیجه، قاعدهٔ زنجیره‌ای (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \tag{۲}$$

و به ازای هر x معتبر است .

اگر دو متغیر مستقل $y = f(x)$ و $z = g(y) = g(f(x))$ را وارد کار کنیم ، ساختار فرمول (۱) روشنتر می‌شود ، زیرا در این صورت (۱) را می‌توان به شکل سادهٔ زیر نوشت :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{۳}$$

به عنوان مثال ، هرگاه $y = x^2 + 1$ و $z = \sqrt{y}$ ، آنگاه $z = \sqrt{y} = \sqrt{x^2 + 1}$ ورابطهٔ (۳) می‌گوید که

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{d\sqrt{y}}{dy}\frac{d(x^2+1)}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)2x = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

که با رابطهٔ (۲) سازگار است . فرمول (۳) ، با وجود شکل الهام‌بخش خود ، قضیه‌ای در حساب دیفرانسیل است‌که نیاز به برهان داشته و یک‌اتحاد جبری بدیهی نیست . به‌عبارت دیگر ، حذف dy ها در طرف راست (۳) نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر تا راهی‌برای اثبات آن .

قضیهٔ ۶ (قاعدهٔ زنجیره‌ای) . *فرض‌کنیم f در x و g در $f(x)$ مشتقپذیر باشد . در این صورت ، تابع مرکب $g \circ f$ در x مشتقپذیر است و مشتقش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :*

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{۱'}$$

برهان (اختیاری) . چون g در $y = f(x)$ مشتقپذیر است ، داریم

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y),$$

یا ، معادلاً ،

$$\frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) + \varepsilon(\Delta y), \tag{۴}$$

که در آن

$$\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$$

(نتیجهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۳۱، را به یاد آورید) . با ضرب (۴) در Δy ، درمی‌یابیم که

$$g(y + \Delta y) - g(y) = [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)]\, \Delta y. \tag{۴'}$$

مهم است توجه کنیم که اگرچه (۴) با فرض $\Delta y \neq 0$ نوشته شده است ، فرمول (۴') حاصل از (۴) به‌ازای $\Delta y \neq 0$ حتی درصورت $\Delta y = 0$ نیز درست‌است ،زیرا نمو $g(y + \Delta y) - g(y)$ صرف نظر از انتخاب $\varepsilon(0)$ ، به ازای $\Delta y = 0$ صفر است . تا بحال $\varepsilon(\Delta y)$ فقط به ازای $\Delta y \neq 0$ تعریف شده است ، ولی اکنون قلمرو $\varepsilon(\Delta y)$ را با فرض $\varepsilon(0) = 0$ وسیع ساخته $\varepsilon(\Delta y)$ را در $\Delta y = 0$ **پیوسته** می‌سازیم .

حال (۴') را بر Δx ، یعنی‌نمومتغیرمستقل ،تقسیم‌کرده و حد آن را وقتی $\Delta x \to 0$ می‌گیریم . این کار نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{۵}$$

که در آن

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{۶}$$

نمو متغیر مستقل y است . به‌علاوه ، چون f در x مشتق‌پذیر است و لذا در x پیوسته است (قضیهٔ ۲ ،صفحهٔ ۱۹۳ ،را به‌یاد آورید) ، $\Delta x \to 0$ ایجاب می‌کند که $\Delta y \to 0$ ؛ درنتیجه،

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{۷}$$

این امر که $\varepsilon(0) = 0$ و درنتیجه $\varepsilon(\Delta y)$ در $\Delta y = 0$ پیوسته‌است در این نتیجه‌گیری‌اهمیت دارد ، زیرا برقراری $\Delta y \neq 0$ را نمی‌توان تضمین کرد (به یاد آورید که Δy دلخواه‌نیست بلکه با مقدار Δx معین می‌شود) . از روابط (۵) تا (۷) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

یا ، معادلا" ،

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = g'(f(x))f'(x), \tag{۸}$$

زیرا $y = f(x)$ و $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. حال برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای (۱) یا (۱') کامل است ، زیرا حد (۸) چیزی جز مشتق تابع مرکب $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ نیست .

بحث غیرصوری قاعدهٔ زنجیره‌ای. برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای فقط به یک دلیل پیچیده است: باید فکرمان حول این امر دور بزند که $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ممکن است حتی اگر $\Delta x \neq 0$ مساوی صفر باشد که مشکل مخرجهای صفر را خواهیم داشت. اگر این نمی‌بود " مشکل $\Delta y = 0$ " ، برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای کاملا " ساده بود. در واقع ، می‌توانستیم بنویسیم

$$\Delta z = g(y + \Delta y) - g(y)$$

و به صورت زیر استدلال می‌کردیم. تابع f در x مشتق‌پذیر ، و درنتیجه در x پیوسته ، است لذا ، $\Delta x \to 0$ ایجاب می‌کند که $\Delta y \to 0$ ؛ درنتیجه ،

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{۹}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

که قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکل (۳) است. این استدلال بصیرتی از برهان قضیهٔ ۶ به ما می‌دهد ، ولی " مشکل $\Delta y = 0$ " را حل نمی‌کند.

تبصره. برهان سریع (۹) قاعدهٔ زنجیره‌ای با آنکه از نظر تکنیکی نقص دارد ولی برای مقاصد عملی کافی است. نکته آن است که یک تابع بندرت آنقدر مغشوش است که " مشکل $\Delta y = 0$ " (مثال داده شده در مسئلهٔ ۶۵) را عملا " پدید آورد.

مثال ۱. فرض کنیم یک میلهٔ فلزی به طول L به ازای هر درجهٔ افزایش دمای سلسیوس T خود 2 میلیمتر افزایش یابد؛ درنتیجه ،

$$\frac{dL}{dT} = 2 \text{ mm/°C}.$$

میله را در کوره گذارده و طوری حرارت می‌دهیم که دمایش به میزان $3°$ بردقیقه افزایش یابد؛ یعنی ،

$$\frac{dT}{dt} = 3°/\text{min},$$

که در آن t زمان است. سرعت افزایش طول میله چقدر است؟

حل. عقل سلیم به ما می‌گوید که چون T هر دقیقه $3°$ افزایش دارد و نیز L به ازای هر

درجهٔ افزایش T به اندازه 2mm زیـاد می‌شود، پس L باید به میـزان $3 \cdot 2 = 6$ mm بر دقیقه افزایش داشته باشد. قاعدهٔ زنجیره‌ای همین را به‌طور فشرده‌تر بیان می‌کند:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dT}\frac{dT}{dt} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ mm/min.}$$

فرض کنیم c یک ثابت باشد. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx}f(cx) = f'(cx)\frac{d}{dx}cx,$$

که بی‌درنگ فرمول مشتقگیری مهم زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{d}{dx}f(cx) = cf'(cx). \qquad (۱۰)$$

دقت کنید (۱۰) با فرمول

$$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x),$$

که در آن تابع به‌جای شناسه‌اش در c ضرب شده، اشتباه نشود.

مثال ۲. از $\sin 2x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر فرمول (۱۰) به ازای $f(x) = \sin x$ ، $f'(x) = \cos x$ ، $c = 2$ ،

$$\frac{d}{dx}\sin 2x = 2\cos 2x.$$

به‌طور معادل، می‌توان قاعدهٔ زنجیره‌ای را مستقیما"، به‌ازای $2x$ به عنوان تابع "داخلی"، به کار برد.

مثال ۳. از $(1 + 5x)^{10}$ مشتق بگیرید.

حل. می‌نویسیـم $y = 1 + 5x$ و $z = y^{10}$ و از قاعـدهٔ زنجیره‌ای به شکل (۳) استفاده می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx}(1 + 5x)^{10} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 10y^9 \cdot 5 = 50(1 + 5x)^9.$$

به توان ده رسانیدن $1 + 5x$ و مشتقگیری از چند جمله‌ای نتیجه هیچگاه سرگـرم‌کننـده

نخواهد بود .

مثال ۴ . از $1/(x^2+2)^3$ مشتق بگیرید .

حل . این بار اختیار می‌کنیم $y = x^2+2$ و $z = y^{-3}$. در این صورت ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^2+2)^3} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (-3y^{-4})(2x) = -\frac{6x}{(x^2+2)^4}.$$

مثال ۵ . از $(x+\sqrt{x})^2$ مشتق بگیرید .

حل . بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})^2 = 2(x+\sqrt{x})\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x}) = 2(x+\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= 2x + 3\sqrt{x} + 1,$$

که در آن مشتق تابع " داخلی " $(\cdots)^2$ را در $x+\sqrt{x}$ حساب کرده و سپس نتیجه را در مشتق تابع " داخلی " $x+\sqrt{x}$ ضرب می‌کنیم . البته ، از متغیرهای " میانی " (مانند y و z در دو مثال پیش) نیز می‌توان استفاده کرد ، ولی همینکه بر قاعدهٔ زنجیره‌ای مسلط شدید این کار زائد است یا اینکه می‌توان آن را ذهنی انجام داد .

مثال ۶ . از $\cos(2x^3-1)$ مشتق بگیرید .

حل . با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای ، داریم

$$\frac{d}{dx}\cos(2x^3-1) = -\sin(2x^3-1)\frac{d}{dx}(2x^3-1) = -6x^2\sin(2x^3-1).$$

مثال ۷ . از $\sin(\sin x)$ مشتق بگیرید .

حل . قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx}\sin(\sin x) = \cos(\sin x)\frac{d}{dx}\sin x = \cos(\sin x)\cos x.$$

فرض کنیــم $h(g(f(x))) = (h \circ g \circ f)(x)$ ترکیـب سه تابع f ، g ، و h باشـد . در این صورت ، با فرض مشتقپذیری لازم و اعمال دوبار قاعدهٔ زنجیره‌ای متوالیا " ، خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx} h(g(f(x))) = h'(g(f(x)))\frac{d}{dx}g(f(x)) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x).$$

به بیان نادقیق ، پرانتزها را در هر لحظه از خارج به داخل " برمی‌داریم " و از هــر تابع مشتق می‌گیریم .

مثال ۸ . از $(1 + \tan\sqrt{x})^2$ مشتق بگیرید .

حل . تابع $(1 + \tan\sqrt{x})^2$ به‌شکل $h(g(f(x)))$ است‌که‌درآن $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = 1 + \tan x$ و $h(x) = x^2$. با دوبار استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(1 + \tan\sqrt{x})^2 &= 2(1 + \tan\sqrt{x})\frac{d}{dx}(1 + \tan\sqrt{x})\\ &= 2(1 + \tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x}\\ &= 2(1 + \tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(1 + \tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

مثال ۹ . به‌ازای تابــع $y = f(x)$ ، مشتــق y^n را درصورتی بیابید که n عددی صحیح‌باشد .

حل . بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d(y^n)}{dx} = \frac{d(y^n)}{dy}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}\frac{dy}{dx},$$

یا ، معادلا " ،

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}y',$$

که در آن y' مشتــق y نسبت به x است . برای آنکه مطمئن شوید این فرمول بسیار فشرده را فهمیده‌اید ، آن را به‌طور کامل بنویسید :

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x).$$

مشتقگیری از توانهای گویا . قبلاً نشان دادیم که فرمول

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \tag{۱۱}$$

به ازای هر عدد صحیح n معتبر است . حال به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای نشان می‌دهیم که (۱۱) درصورتی که n **عدد گویای** دلخواهی باشد برقرار است . مطلب را بامحاسبهٔ مشتق $\sqrt[n]{x}$ ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است ، مستقیماً از تعریف آغاز می‌کنیم :

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \lim_{u \to x} \frac{\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{x}}{u - x}.$$

این را می‌توان با فرض $y = \sqrt[n]{x}$ و $v = \sqrt[n]{u}$ به آسانی حساب کرد . در این صورت ، بنابر پیوستگی $\sqrt[n]{x}$ ، $u \to x$ ایجاب می‌کند که $v \to y$ ؛ و درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \lim_{v \to y} \frac{v - y}{v^n - y^n} = \lim_{v \to y} \frac{1}{\dfrac{v^n - y^n}{v - y}} = \frac{1}{\lim\limits_{v \to y} \dfrac{v^n - y^n}{v - y}}.$$

اما حد موجود در مخرج چیزی جز مشتق y^n نسبت به y نیست . بنابراین ،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy} y^n} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{y}{ny^n}, \tag{۱۲}$$

یا ، معادلاً ،

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}. \tag{۱۲'}$$

اگر n زوج باشد ، فرمول (۱۲') فقط به ازای $x > 0$ معتبر است ، ولی اگر n فرد باشد ، به ازای هر $x \neq 0$ برقرار خواهد بود (چرا؟) .

حال فرض کنیم r عددی گویا باشد ؛ درنتیجه ، $r = m/n$ ، که‌درآن m و n صحیح‌اند. می‌توان فرض کرد $n > 0$ و m/n به صورت تحویل‌ناپذیر باشد . با نوشتن

$$z = x^r = x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = y^m$$

و اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای ، به کمک (۱۲) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = my^{m-1} \frac{y}{ny^n} = \frac{m}{n}\frac{y^m}{y^n},$$

بنابراین ،

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{m}{n}\frac{(\sqrt[n]{x})^m}{(\sqrt[n]{x})^n} = \frac{m}{n}\frac{x^{m/n}}{x} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1},$$

درنتیجه، مآلا" داریم

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}. \tag{۱۳}$$

این تعمیم مطلوب فرمول (۱۱) به نمای گویای دلخواه است. اگر $x > 0$ ، فرمول (۱۳) همواره برقرار است، ولی به ازای مقادیری از r ، این فرمول برای $x < 0$ یا $x \leq 0$ نیز برقرار می‌باشد (ببشتر توضیح دهید).

مثال ۱۰. از $x^{2/3} + x^{3/4}$ مشتق بگیرید.

حل. از فرمول (۱۳) داریم

$$\frac{d}{dx}(x^{2/3} + x^{3/4}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} + \frac{3}{4}x^{(3/4)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{3}{4}x^{-1/4}.$$

مثال ۱۱. از $(1 - x^2)^{-1/5}$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای و فرمول (۱۳)،

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2)^{-1/5} = -\frac{1}{5}(1 - x^2)^{-6/5}\frac{d}{dx}(1 - x^2) = \frac{2}{5}x(1 - x^2)^{-6/5}$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱. $(x^2 - 2x + 1)^2$

۲. $(x^2 + 1)^3$

۳. $(2x + 3)^4$

۴. $(x^3 + 1)^5$

۵. $(1 - 3x^2)^6$

۶. $(x^2 + x - 1)^7$

۷. $(x + 1)^3(x - 1)^4$

۸. $(1 - x)(1 - x^2)^2$

۹. $(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$

۱۰. $\dfrac{x^2}{(x + 1)^2}$

۱۱. $\dfrac{(1 - x)^2}{(1 + x)^3}$

۱۲. $\left(\dfrac{1 - 2x}{1 + 2x}\right)^2$

۱۳. $\dfrac{(x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2}$

۱۴. $\dfrac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^2}$

۱۵. $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{10}$

۱۶. $x\sqrt{1+x^2}$

۱۷. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

۱۸. $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

۱۹. $x^{3/2}-x^{4/3}+1$

۲۰. $9x^{10/9}-10x^{9/10}$

۲۱. $x^{0.99}+x^{-0.99}$

۲۲. $(s^2+s+2)^{7/11}$

۲۳. $\sqrt[3]{t}+\sqrt[4]{t}+\sqrt[5]{t}$

۲۴. $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{u}}$

۲۵. $\sqrt[3]{v^2}-\dfrac{3}{\sqrt{v}}$

۲۶. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

۲۷. $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$

۲۸. $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$

۲۹. $\sin^2 x+\tan^2 x$

۳۰. $\sin^3 x+\cos^3 x$

۳۱. $(1+\sin 2x)^3$

۳۲. $\frac{1}{3}\tan^3 x+\cot 3x$

۳۳. $3\cos 2x+2\sec 3x$

۳۴. $(2-\cos x)^{-2}$

۳۵. $x\sin(1/x)$

۳۶. $x^2\cos(1/x)$

۳۷. $\sqrt{1+\sin u}$

۳۸. $\sqrt{\dfrac{1+\cos v}{1-\sin v}}$

۳۹. $\cos w^3$

۴۰. $(1+\tan x)^{2/3}$

۴۱. $\cos(\cos x)$

۴۲. $\sin(\tan x)$

۴۳. $\sin(\sin(\sin x))$

۴۴. $\sin(\cos x^2)$

دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید.

۴۵. $(x^4-2)^3$

۴۶. $\sqrt{1-x^2}$

۴۷. $x^{3/5}+x^{5/3}$

۴۸. $\sin(1/x^2)$

۴۹. $\cos\sqrt{x}$

۵۰. $\sin(\cos x)$

۵۱. $\tan u^2$

۵۲. $\tan(\cot v)$

۵۳. $(\sec w)^{2/3}$

✓ ۵۴ . $f'(0)$ را درصورتی بیابید که $f(x) = (2x+3)^{100}$.

✓ ۵۵ . $f'(1)$ را درصورتی بیابید که $f(x) = (1+x^{-2})^{50}$.

۵۶ . هر یک از فرمولهای زاویهٔ مضاعف $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ را از دیگری با مشتقگیری نتیجه بگیرید .

۵۷ . با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، فرمول $D_x(1/g) = -g'/g^2$ برای مشتق متقابل تابع g را ثابت کنید (قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۲۰۷) .

۵۸ . نشان دهید مشتقگیری جفتی را تغییر می‌دهد ؛ یعنی ، مشتق یک تابع زوج‌فرد و مشتق یک تابع فرد زوج است .

۵۹ . نشان دهید که مشتقگیری‌تناوب را حفظ می‌کند ؛ یعنی ، مشتق یک تابع متناوب متناوب با همان دورهٔ تناوب است .

مماس بر منحنی داده شده را بیابید .

۶۰ . $y = \sqrt{x^2+1}$ در $(1, \sqrt{2})$

۶۱ . $y = \sqrt[3]{x+1}$ در $(7, 2)$

۶۲ . $y = \cos(\sin x)$ در $((n+\frac{1}{2})\pi, \cos 1)$ ، کـه در آن n صحیح و دلخواه است .

قائم به منحنی داده شده را بیابید .

۶۳ . $y = \sqrt{x^3+1}$ در $(0, 1)$

۶۴ . $y = x^{3/2}$ در $(4, 8)$

۶۵ . فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

تحقیق کنید که مشتق $f'(0)$ موجـود است . نشان دهید که f در $x = 0$ دارای "مشکل $\Delta y = 0$ " اســت . به عبارت دیگر ، نشان دهید که هر همسایگی $x = 0$ شامـل نقاطی چون $x \neq 0$ است که به ازای آنـها نمو $\Delta y = f(x) - f(0)$ صفر می‌باشد .

۶۶ . نشان دهید که عبارت دیفرانسیل یک تابع ، چه شناسه‌اش متغیر مستقل باشد یا نه ، یکی است . به‌طور دقیقتر ، نشان دهید هرگاه $z = g(y)$ که در آن $y = f(x)$ ، آنگاه ، حتی اگر y متغیری وابسته باشد ، $dz = g'(y)dy$.

۶۰۲ مشتقات مراتب بالاتر

گوییم تابع $f(x)$ **بر بازهٔ I مشتقپذیر است** اگر در هر نقطهٔ I دارای مشتق $f'(x)$ باشد . فرض کنیم $f(x)$ بر بازهٔ باز I مشتقپذیر بوده و $f'(x)$ خود بر I مشتقپذیر با مشتق

$$D_x f'(x)$$

باشد. در این صورت، تابع $D_x f'(x)$ **مشتق دوم** $f(x)$ نام دارد، و با $f''(x)$ نموده‌وخوانده می‌شود: " اف زگوند x"یا با $f^{(2)}(x)$ نشان داده می‌شود. به همین نحو، اگر $f''(x)$ بر I مشتقپذیر با مشتق

$$D_x f''(x)$$

باشد، $D_x f''(x)$ **مشتق سوم** $f(x)$ نامیده و با $f'''(x)$ یا $f^{(3)}(x)$ نموده می‌شود. پس از n بار مشتقگیری از تابع اصلی $f(x)$، **مشتق مرتبهٔ** n تابع $f(x)$، یا **مشتق** n م $f(x)$، به‌دست می‌آید که با $f^{(n)}(x)$ نموده شده و به‌طور بازگشتی با

$$f^{(n)}(x) = D_x f^{(n-1)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{۱}$$

تعریف می‌شود، که در آن فرض است که $f^{(n-1)}(x)$ از مرتبهٔ $n-1$ موجود و بر I مشتقپذیر است. برای آنکه فرمول به ازای $n = 1$ نیز برقرار باشد، طبق تعریف می‌نویسیم

$$f^{(0)}(x) = f(x),$$

یعنی، " مشتق صفرم " یک تابع خود تابع است. در نوشتن مشتقات استفادهٔ بیشتراز سه پریم مرسوم نیست.

مثال ۱. تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

بر هر بازهٔ باز I که شامل نقطهٔ $x = 0$ نیست مشتقپذیر است. مشتق

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

نیز بر I مشتقپذیر است؛ و درنتیجه، $f(x)$ بر I دارای مشتق دوم

$$f''(x) = D_x f'(x) = D_x\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

می‌باشد. چون $f''(x)$ خود بر I مشتقپذیر است، $f(x)$ بر I دارای مشتق سوم

$$f'''(x) = D_x f''(x) = D_x\left(\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{6}{x^4}$$

است، و به همین ترتیب تا آخر (ر.ک. مسئلهٔ ۱۰).

$f^{(n)}(x)$ برحسب نماد d به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

در صورت نمای n به علامت d وصل شده است ولی در مخرج به متغیر مستقل x متصل شده است . عبارت d^n/dx^n را باید موجودی واحد تلقی کرد و مشتقگیری n گانه (یعنی ، n بار مشتقگیری) تابع نوشته شده بعداز آن نامید . به همین نحو ، $d^nf(x)/dx^n$ را باید طریقهٔ دیگری برای نوشتن مشتق n م $f^{(n)}(x)$ گرفت بی‌آنکه به علایم مختلف عبارت معانی جداگانه داد . مشتقات مراتب بالاتر متغیر وابسته به نحو طبیعی تعریف می‌شوند. لذا ، اگر $y = f(x)$ داریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x), \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

گاهی از علامت D_x^n به معنی d^n/dx^n استفاده خواهد شد .

مثال ۲ . هرگاه $y = x^4$ ، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}4x^3 = 12x^2, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}12x^2 = 24x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}24x = 24, \qquad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}24 = 0,$$

و تمام مشتقات از مرتبهٔ $n > 5$ نیز صفرند . توجه کنید که مشتق چهارم x^4 مساوی $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ است . به‌طور کلی ، فرض کنیم $y = x^n$. در این صورت ،

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \ldots,$$

$$\frac{d^ky}{dx^k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

که در آن $n!$ نمایش n **فاکتوریل** است یعنی حاصلضرب n عدد صحیح مثبت اولیه $(1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \ldots)$. لذا ، هر یک از n مشتقگیری اول درجهٔ x^n رایکی پایین می‌آورد تا آنکه ثابت $n!$ به‌دست آید ، و تمام مشتقات مراتب بالاتر از n متحد صفر می‌باشند .

مثال ۳ . از مثال قبل معلوم می‌شود که مشتق n م چند جمله‌ای

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$

از درجهٔ n مساوی است با

$$P^{(n)}(x) = n!a_n,$$

و $P^{(n+1)}(x) \equiv P^{(n+2)}(x) \equiv \cdots \equiv 0$.

مثال ۴. مشتقات مراتب دوم و سوم $f(x)g(x)$ را بیابید .

حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب ،

$$(fg)' = f'g + fg',$$

که در آن شناسه‌ها به‌خاطر سادگی حذف شده‌اند . لذا ، اگر دوبار دیگر از قاعدهٔ حاصل ضرب استفاده کنیم ،

$$(fg)'' = \frac{d}{dx}(f'g + fg') = \frac{d}{dx}f'g + \frac{d}{dx}fg' = (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''. \tag{۲}$$

به همین نحو ،

$$(fg)''' = \frac{d}{dx}(f''g + 2f'g' + fg'') = \frac{d}{dx}f''g + 2\frac{d}{dx}f'g' + \frac{d}{dx}fg'' = (f'''g + f''g') + 2(f''g' + f'g'') + (f'g'' + fg''') = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''. \tag{۳}$$

تبصره. فرمول کلی برای مشتق n م حاصل ضرب $f(x)g(x)$ در مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۳۶۶ ، داده شده است . این فرمول توضیح می‌دهد که چرا ضرایب $1, 2, 1$ در فرمول (۲) و ضرایب $1, 3, 3, 1$ در فرمول (۳) همان‌ضرایب‌در فرمولهای‌جبری‌آشنای $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ می‌باشند .

قانون دوم حرکت نیوتن. ذره‌ای به جرم m درنظر می‌گیریم که در امتداد خطی مستقیم حرکت می‌کند ، و فرض کنیم موضع ذره در لحظهٔ t ، که از مبداء مناسبی سنجیده‌می‌شود ، $s = s(t)$ باشد . در اینجا از علامت s برای نمایش تابع و متغیر وابسته استفاده می‌کنیم که معمولاً برای احتراز از نماد اضافی صورت‌می‌گیرد . فرض کنیم نیروی F که عموماً متغیر است بر ذره وارد شود . در این صورت ، **قانون دوم حرکت نیوتن** می‌گوید

$$F = ma, \tag{۴}$$

که در آن $a = a(t)$ شتاب ذره می‌باشد. همانند درصفحهٔ ۱۷۳ ، a مشتق سرعت $v = v(t)$ ذره نسبت به زمان است :

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

اما v خود مشتق موضع $s = s(t)$ ذره نسبت به زمان تعریف شده است:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

بنابراین،

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad (۵)$$

یعنی، شتاب مشتق دوم موضع ذره نسبت‌به زمان‌است. با گذاردن (۵) در (۴)، به‌دست می‌آوریم

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F. \qquad (۶)$$

معادلات دیفرانسیل. هر معادله مانند (۶)، شامل دست کم یک‌مشتق از یک تابع واحتمالاً" خود تابع، یک *معادلهٔ دیفرانسیل* نام دارد. منظور از **مرتبهٔ** یک معادلهٔ دیفرانسیل یعنی مرتبهٔ بالاترین مشتق‌آمده در معادله. لذا، قانون دوم نیوتن $F = ma$ در واقع یک‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌دوم بانتایج فیزیکی سیارات است. البته، شکل دقیق معادله‌به‌ماهیت نیروی F وابسته‌است. مثلا"، $F = 0$ اگر ذره "آزاد" باشد به این معنی که نیرویی برآن‌اثرنکند، $F = -ks$ $(k > 0)$ اگر بر ذره نیروی جاذبی متناسب با فاصله‌اش تا مبداء اثر کند، و از این قبیل. این مطلب مهم در بخش ۷.۴ دنبال خواهد شد.

مثال ۵. تحقیق کنید که تابع $y = \sin x$ در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y'' + y = 0 \qquad (۷)$$

صدق می‌کند.

حل. برقراری‌معادلهٔ (۷) به ازای $y = \sin x$ فورا" از $y' = \cos x$ و $y'' = -\sin x$ نتیجه می‌شود. به عنوان تمرین، نشان دهید که (۷) به‌وسیلهٔ $y = \cos x$ و هر تابع به شکل $y = a\sin x + b\cos x$، که در آن a و b ثابتهای دلخواهی هستند، نیز برقرار است.

مثال ۶. تحقیق‌کنیدکه‌تابع $y = (x-1)/(x+1)$ در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $2y'^2 = (y-1)y''$ صدق می‌کند.

حل. با تقسیم صورت $x - 1$ بر مخرج $x + 1$، به دست می‌آوریم

$$y = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

سپس، با دوبار مشتقگیری از y به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای، خواهیم داشت

$$y' = \frac{(-2)(-1)}{(x+1)^2}\frac{d}{dx}(x+1) = \frac{2}{(x+1)^2},$$

$$y'' = \frac{2(-2)}{(x+1)^3}\frac{d}{dx}(x+1) = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

(فرض کنیم $x \neq -1$) . بنابراین،

$$(y-1)y'' = \left[-\frac{2}{x+1}\right]\left[-\frac{4}{(x+1)^3}\right] = \frac{8}{(x+1)^4}$$

$$= 2\left[\frac{2}{(x+1)^2}\right]^2 = 2y'^2,$$

که همان مطلوب ما می‌باشد .

مسائل

مشتقات دوم و سوم y'' و y''' را درصورتی بیابید که

۱. $y = 5x^{10} + 10x^5 + 1$

۲. $y = (1 + x^2)^3$

۳. $y = x/(1 + x)$

۴. $y = (1 + x^{1/2})^2$

۵. $y = x \sin x$

۶. $y = x^2 \cos x$

۷. $y = \sin x^2$

۸. $y = \tan x$

۹. $y = \sec x$

۱۰. نشان دهید که به‌ازای هر $n = 1, 2, \ldots$،

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad (x \neq 0)$$

فرض کنید $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$. با کمترین سعی، کمیات زیر را بیابید .

۱۱. $y^{(6)}$ ۲۸۸۰

۱۲. $y^{(7)}$

نشان دهید که

۱۳. $$\frac{d^8}{dx^8}\frac{x^2}{x-1} = \frac{8!}{(x-1)^9}$$

۱۴. $$\frac{d^6}{dx^6}\sin^2 x = 32 \cos 2x$$

۱۵. $$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x(1-x)} = n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

۱۶. فرض کنید $y = \sin x$. نشان دهید به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$،

$$y^{(4n)} = \sin x, \qquad y^{(4n+1)} = \cos x,$$
$$y^{(4n+2)} = -\sin x, \qquad y^{(4n+3)} = -\cos x$$

۱۷. به ازای چه ثابتهای a، b، و c تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{اگر } x \le 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$

در $x = 1$ مشتق دوم دارد؟

۱۸. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \le 0 \\ x^4 & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$$

$f'(x)$، $f''(x)$، و $f'''(x)$ را بیابید. نشان دهید که $f^{(4)}(0)$ وجود ندارد.

۱۹. نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{اگر } x \ne 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

بر $(-\infty, \infty)$ مشتقپذیر است ولی در $x = 0$ مشتق دوم ندارد.

۲۰. تحقیق کنید که تابع $y = \sqrt{1 - x^2}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $yy' + x = 0$ صدق می‌کند.

۲۱. تحقیق‌کنیدکه تابع $y = \sqrt{2x - x^2}$ درمعادلهٔ دیفرانسیل $y^3y'' + 1 = 0$ صدق می‌کند.

۲۲. فرض کنید $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n$، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است. تحقیق کنید که y در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - n^2y = 0$$

صدق می‌کند.

۷.۲ مشتقگیری ضمنی

معادلات بی‌شماری وجود دارند شامل دو متغیر x و y که بعضی از آنها به آسانی نسبت به y و برحسب متغیر x حل می‌شوند. به عنوان مثال، اگر

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

می‌توان دو جواب یافت که y را به صورت تابع پیوسته‌ای از x بیان می‌کنند؛ یعنی،

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{2}$$

و

$$y = -\sqrt{1-x^2}. \tag{۲'}$$

با اینحال ، در مورد معادلهٔ

$$x^2 - xy + y^3 = 1,$$

یافتن فرمول صریحی که y را برحسب x بیان کند آسان نیست (باید معادلهٔ مکعبی را نسبت به y حل کنیم) ، و در معادلهٔ

$$xy + \sin y + x^2 = 1$$

این امر ناممکن است . معهذا ، برای‌هریک‌ازدومعادلهٔ‌اخیرتابعی‌چون $y = f(x)$ وجود دارد که در معادلهٔ داده شده ، دست کم به ازای مقادیری از x ، صدق می‌کند (این را می‌توان به کمک قضیهٔ مقدار میانی نشان داد) ، اگرچه نمی‌توان فرمول صریحی برای تابع یافت یا اینکه ترجیح می‌دهیم این کار صورت نگیرد .

توابع ضمنی . تابع $y = f(x)$ تعریف شده به این صورت ، یعنی با معادله‌ای از دو متغیر x و y ، یک **تابع ضمنی** نام دارد . شرایط‌وجود توابع ضمنی در آخر بخش ۵.۱۳ داده شده است . در اینجا فرض است که اغلب از معادله‌ای از x و y برای **تعریف** y به عنوان تابعی از x استفاده می‌کنیم حتی وقتی نتوان معادله را نسبت به y به صورت عبارت صریحی‌از x حل کرد . عجب آنکه همواره می‌توان مشتق $y' = dy/dx$ را **به‌طور ضمنی** ، یعنی بدون حل نسبت به y و برحسب x ، حساب کرد (با اینحال ، ر.ک. نکات مذکور پس از مثال ۱) . چرا که اگر از معادلهٔ داده شده نسبت به x مشتق بگیریم (صرفاً y را تابعی از x تصور کنیم) ، همواره معادلهٔ حاصل را می‌توان به آسانی نسبت بـه y' حل کرد . این طرز یافتن y' **مشتقگیری ضمنی** نام دارد . توجه می‌کنیم که ، به‌خاطر قاعدهٔ زنجیره‌ای ، مشتقگیری از تابع y نسبت به x همواره عامـل y' را حاصل می‌دهد . لذا ، مثل مثال ۹ ، صفحهٔ ۲۱۹ ،

$$\frac{d}{dx} y^n = \frac{d(y^n)}{dy}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}y', \tag{۳}$$

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d \sin y}{dy}\frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} = y' \cos y,$$

و غیره .

مثال ۱ . نشان دهید که مشتقگیری ضمنی از معادلهٔ (۱) همان عبارت برای y' بـه‌دست می‌آید که مشتقگیری (صریح) معمولی از فرمول (۲) یا (۲') حاصل می‌دهد .

حل. با مشتقگیری از طرفین (۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} 1,$$

یا، به کمک (۳)،

$$2x + 2yy' = 0.$$

این معادله به آسانی نسبت به y' حل شده و نتیجه می‌دهد

$$y' = -\frac{x}{y}. \qquad (۴)$$

در اینجا می‌توان توقف کرد، یا با گذاردن (۲) و (۲') در (۴) به دست آورد

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (۵)$$

و

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (۵')$$

از آن سو، مشتقگیری صریح از (۲) و (۲') به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}\frac{d}{dx}(1 - x^2) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

که با (۵) سازگار است، و

$$\frac{d}{dx}(-\sqrt{1 - x^2}) = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}\frac{d}{dx}(1 - x^2) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

که با (۵') سازگار می‌باشد.

روش مشتقگیری ضمنی را نمی‌توان کورکورانه به‌کار برد، زیرا حتی در حالاتی که y به‌عنوان تابعی از x موجود نیست جوابی صوری برای y' به ما می‌دهد. مثلاً "بی‌توجه به مقدار x، مقداری از y که در معادلهٔ $x^2 + y^2 = -1$ صدق کند وجود ندارد، ولی مشتقگیری ضمنی از این معادله همان جواب (۴) مثل حالت معادلهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را به ما می‌دهد. همچنین، توجه کنید که وقتی پس از مشتقگیری ضمنی از معادله‌ای شامل x و y حاصل را نسبت به y' حل می‌کنیم، جواب عموماً" عبارتی شامل هر دو متغیر x و y است.

مثال ۲. مشتق (۴) را در نقطهٔ $x = \frac{1}{2}$ حساب کنید.

حل . با گذاردن $x = \frac{1}{2}$ در (۱) ، معادلهٔ

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

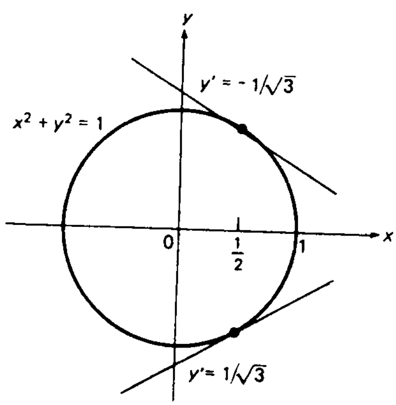
به دست می‌آید که دارای دو جواب $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ است . با استفاده از (۴) ، درمی‌یابیم که مقادیر نظیر y' عبارتند از

$$y'|_{x=\frac{1}{2},\, y=-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

و

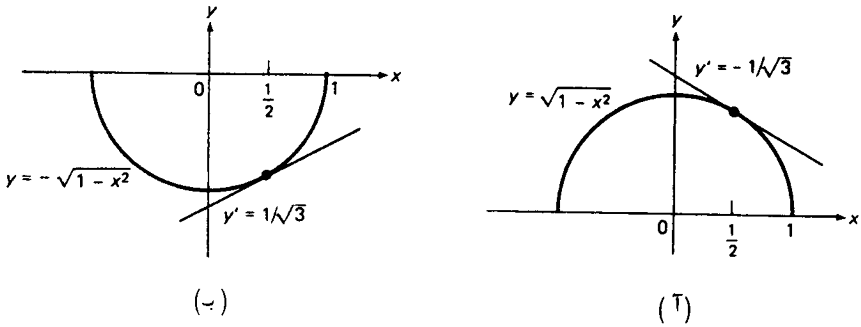
$$y'|_{x=\frac{1}{2},\, y=\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

در اینجا $y'|_{x=x_0,\, y=y_0}$ مقدار y' نظیر به $x = x_0,\ y = y_0$ است (ما اغلب این نوع خط قائم را مفید خواهیم یافت) . چرا در اینجا دو مقدار مختلف y' را یافته‌ایم ؟ فقط به این خاطر که نمودار (۱) ، یعنی دایره به شعاع 1 و مرکز مبداء ، دو نقطهٔ متفاوت با مختص x یکسان $\frac{1}{2}$ دارد ، و همانطور که شکل ۱۹ نشان داده ، شیب مماسهای دایره در این نقاط



شکل ۱۹

متفاوتند . به عبارت دیگر ، یک مقدار از شیب y' مربوط به نیمدایرهٔ بالایی (۲) است که نمودارش در شکل ۲۰ (آ) رسم شده است ، و مقدار دیگر y' مربوط به نیمدایرهٔ پایینی (۲') است که نمودارش در شکل ۲۰ (ب) نموده شده است . طبیعی است که اگر در (۵) و (۵') قرار دهیم $x = \frac{1}{2}$ ، همین دو مقدار برای y' به دست می‌آیند .



شکل ۲۰

مثال ۳. به فرض آنکه

$$x^2 - xy + y^3 = 1, \tag{۶}$$

y' را در $x = 1$ حساب کنید.

حل. با مشتقگیری ضمنی داریم

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^3) = \frac{d}{dx}1,$$

یا، به کمک (۳)،

$$2x - y - xy' + 3y^2y' = 0,$$

توجه کنید که، بنابر قاعدهٔ حاصلضرب، $(xy)' = y + xy'$. با حل این نسبت به y'، معلوم می‌شود که

$$y' = \frac{2x - y}{x - 3y^2}, \tag{۷}$$

و، با گذاردن $x = 1$ در (۶)، معادلهٔ

$$1 - y + y^3 = 1,$$

یا

$$y^3 = y$$

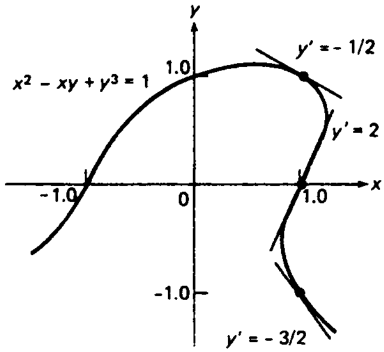
به دست می‌آید، که دارای سه جواب $y = 0$ و $y = \pm 1$ می‌باشد. مقادیر نظیر y' حاصل از (۷) عبارتند از

$$y'|_{x=1,\,y=0} = \frac{2(1) - 0}{1 - 3(0)^2} = 2,$$

$$y'|_{x=1,\,y=1} = \frac{2(1)-1}{1-3(1)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$y'|_{x=1,\,y=-1} = \frac{2(1)+1}{1-3(-1)^2} = -\frac{3}{2}.$$

شکل ۲۱ معنی هندسی این سه مقدار y' را نشان می‌دهد .



شکل ۲۱

مثال ۴. با استفاده از مشتقگیری ضمنی نشان دهید

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \qquad (۸)$$

که در آن r عددی گویا است .

حل . ما قبلاً (۸) را در بخش ۲ . ۶ به روشی دیگر ثابت کردیم . فرض کنیم $y = x^{m/n}$ در این صورت ،

$$y^n = (x^{m/n})^n = x^m,$$

و ، با مشتقگیری نسبت به x و استفاده از (۳) ، به دست می‌آوریم

$$ny^{n-1}y' = mx^{m-1}.$$

پس نتیجه می‌شود

$$y' = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{(x^{m/n})^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{x^{m-(m/n)}} = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1},$$

که با (۸) معادل است . در اینجا روش مشتقگیری ضمنی نتایج زیادی به بار می‌آورد .

همانطور که مثال بعد نشان‌می‌دهد ، مشتقگیری ضمنی اغلب کار یافتن مشتقات مراتب بالاتر را ساده می‌کند .

مثال ۵ . به فرض آنکه

$$x^2 + y^2 = 25, \quad (۹)$$

مقادیر y'' و y''' را در نقطهٔ $(3, 4)$ بیابید .

حل . با مشتقگیری ضمنی از (۹) نسبت به x خواهیم داشت

$$2x + 2yy' = 0, \quad (۱۰)$$

و لذا ، مثل مثال ۱ ،

$$y' = -\frac{x}{y},$$

درنتیجه ، بخصوص ،

$$y'|_{x=3,\, y=4} = -\frac{3}{4}. \quad (۱۱)$$

اگر رابطهٔ (۱۰) را بر 2 تقسیم کرده و مجدداً مشتق بگیریم ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(x + yy') = 1 + y'^2 + yy'' = 0, \quad (۱۲)$$

یا

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}.$$

لذا ، به کمک (۱۱) داریم

$$y''|_{x=3,\, y=4} = -\frac{1 + \frac{9}{16}}{4} = -\frac{25}{64}. \quad (۱۳)$$

مشتقگیری ضمنی دیگر ، این بار از معادلهٔ (۱۲) ، نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx}(1 + y'^2 + yy'') = 2y'y'' + y'y'' + yy''' = 3y'y'' + yy''' = 0,$$

یا

$$y''' = -\frac{3y'y''}{y}.$$

اگر از (۱۱) و (۱۳) برای محاسبهٔ y''' در نقطهٔ $(3, 4)$ استفاده کنیم ، درمی‌یابیم که

$$y'''|_{x=3,\, y=4} = -\frac{3(-\frac{3}{4})(-\frac{25}{64})}{4} = -\frac{225}{1024}.$$

سعی کنید این مشتقات مراتب بالاتر را با مشتقگیری صریح از $y = \sqrt{25 - x^2}$ حساب کنید و ببینید چقدر بیشتر کار می‌برد .

مسائل

با استفاده از مشتقگیری ضمنی ، y' را درصورتی بیابید که x و y در معادلهٔ داده شده صدق کنند .

۱. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

۲. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$

۳. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

۴. $x^3 + y^3 = 3xy$

۵. $(xy)^3 = 3(x + y)$

۶. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 1$

۷. $x^{2/3} + y^{-2/3} = 8$

۸. $y^2 = \frac{1}{x + y}$

۹. $\frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y} = 2$

۱۰. $\frac{1 + xy}{x + y} = 10$

۱۱. $\sin x + \cos y = 0$

۱۲. $y = \sin(x + y)$

۱۳. $\cos xy = x$

۱۴. $y \tan y = x^2$

۱۵. در معادلهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ فرض کنید x تابعی از y گرفته شود . با استفاده ازمشتقگیری ضمنی ، dx/dy (نه dy/dx) را محاسبه نمایید . سپس نشان دهید که مماس بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ در نقاط $(\pm r, 0)$ قائم است .

۱۶. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال ، نشان دهید که مماس در هر نقطهٔ P از دایرهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ بر شعاع و اصل از مبداء به P عمود است .

۱۷. معادلهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ را رسم کنید . y' را با مشتقگیری ضمنی بیابید . معادله را نسبت به y به عنوان تابعی از x حل کرده ، سپس y' را با مشتقگیری معمولی بیابید. $y'|_{x=4}$ را به هر دو روش حساب کنید .

مماس بر نمودار معادلات زیر را بیابید .

۱۸. $y^2 + xy - 5 = 0$ در $(4, -5)$

۱۹. $y^3 - y^2 - 4x + x^2 = 0$ در $(2, 2)$ ✓

۲۰. $y^4 - 2x^2y^3 - 27 = 0$ در $(-1, 3)$ ✓

فرض کنید $x^2 - xy + y^2 = 1$. با استفاده از مشتقگیری ضمنی ، سه مشتق اول y', y'', y''' را در هر نقطهٔ زیر حساب کنید .

۲۱. $x = 0$ ✓ ۲۲. $x = 1$ ✓ ۲۳. $x = -1$ ✓

نقاطی از نمودار معادلهٔ

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

را بیابید که مماس در آنها به شیب دادهٔ شدهٔ زیر باشد .

۲۴. 0° ۲۵. 90° ۲۶. 45° ۲۷. 135°

۲۸. تغییر x به $-x$ در معادلهٔ (۶) معادلهٔ $x^2 + xy + y^3 = 1$ را بــه دست می‌دهــد ،که نمودارش انعکاس نمودار شکل ۲۱ نسبت به محور y است . با استفاده از مشتقگیــری ضمنی ، چهار مشتق اول $y', y'', y''', y^{(4)}$ در $x = 1$ را حساب کنید .

۲۹. استفادهٔ کورکورانه از مشتقگیری ضمنی در معادلهٔ $x^4 + y^4 = x^2y^2$ به فرمول

$$y' = \frac{2x^3 - xy^2}{x^2y - 2y^3}$$

منجر می‌شود . چرا این نتیجه بی‌معنی است ؟

۸.۲ میزانهای مرتبط

ردهٔ مهمی از مسائل وجود دارد که در آنها میزان تغییر کمیتی ، که معمولا" نسبت به زمان است ، داده شده و از ما میزان تغییر کمیت مرتبط دیگری خواسته می‌شود . روش حل مسائل *میزانهای مرتبط* شباهت زیادی به تکنیک مشتقگیری ضمنی دارد ، ولی در اینجا دو متغیر وابسته وجود دارند .

مثال ۱ . یک بالون کروی به میزان یکدهم فوت مکعب بر ثانیه (به طور فشرده‌تر ، $0.1\ \text{ft}^3/\text{sec}$) هوا از دست می‌دهد . سرعت کاهش شعاع بالون وقتی قطرش 6 ft است چقدر می‌باشد ؟

حل . فرض کنیم R شعاع و V حجم بالون باشد . در این صورت ،

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (۱)$$

چون اندازهٔ بالون تغییر می‌کند ، V و R هر دو تابع زمان t هستند . این امر را می‌توان

با نوشتن $V = V(t), R = R(t)$ بیان کرد، ولی بهتر است فقط به یاد داشته باشیم که V و R تابع زمانند. با مشتقگیری از طرفین (۱) نسبت به t به دست می‌آوریم

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3R^2\frac{dR}{dt}\right) = 4\pi R^2\frac{dR}{dt}.$$

حال این معادله را نسبت به dR/dt حل کرده، به دست می‌آوریم

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dV}{dt}. \qquad (۲)$$

این مرحله یک مرحلهٔ کلیدی است، زیرا dR/dt، یعنی میزان تغییر مجهول شعاع بالون، را برحسب dV/dt، یعنی میزان تغییر **معلوم** حجم آن، بیان کرده‌ایم. در واقع، فرض است که حجم بالون به میــزان $0.1\ \text{ft}^3/\text{sec}$ کاهش می‌یابد (**هوا از دست می‌دهد**)، بدین معنی که dV/dt دارای مقدار ثابت $-0.1\ \text{ft}^3/\text{sec}$ می‌باشد. با گذاردن این dV/dt در (۲)، معلوم می‌شود که

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{0.1}{4\pi R^2}. \qquad (۳)$$

وقتی قطر بالون 6 ft است، شعاع آن 3 ft می‌باشد. در این لحظه فرمول (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{0.1}{4\pi(3)^2} = -\frac{1}{360\pi} \approx -0.00088\ \text{ft/sec}.$$

چون این عدد خیلی کوچک است، آن را به اینچ بر دقیقه تبدیل می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{360\pi}\frac{\cancel{\text{ft}}}{\cancel{\text{sec}}}\frac{12\ \text{in}}{\cancel{\text{ft}}}\frac{60\,\cancel{\text{sec}}}{\text{min}} = -\frac{12(60)}{360\pi}\frac{\text{in}}{\text{min}},$$

که در آن واحدهای سنجش را به طریقی که در فیزیک مقدماتی آموخته‌ایم حذف می‌کنیم. بنابراین،

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2}{\pi} \approx -0.64\ \text{in/min},$$

یعنی، شعاع R به میزانی تقریباً" 0.64 in/min کاهش می‌یابد، که برای این بالون بزرگ نشتی جزئی می‌باشد. توجه کنید که dR/dt خود تابعی از شعاع است. در واقع، همانطور که رابطهٔ ۳ نشان می‌دهد، هرقدر بالون کوچکتر باشد $|dR/dt|$ بزرگتر است.

مثال ۲. در مثال قبل، سرعت کاهش مساحت بالون وقتی شعاعش 4 ft باشد چقدر است؟

حل. مساحت یک کره به شعاع R مساوی است با

$$S = 4\pi R^2.$$

بنابراین، پس از مشتقگیری نسبت به زمان،

$$\frac{dS}{dt} = 4\pi\left(2R\frac{dR}{dt}\right) = 8\pi R\frac{dR}{dt}. \qquad (۴)$$

این میزان تغییر مساحت بالون برحسب میزان تغییر شعاعش را بیان می‌کند، ولی این همان چیزی که می‌خواهیم نیست. با اینحال، رابطهٔ مطلوب بین dS/dt و کمیت دادهٔ شدهٔ $dV/dt = -0.1\ \text{ft}^3/\text{sec}$ را می‌تـوان به آسانی با گذاردن (۲) در (۴) به‌دست آورد:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{8\pi R}{4\pi R^2}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{R}\frac{dV}{dt} = -\frac{0.2}{R}.$$

از این رابطه وقتی شعاع بالون 4 ft است نتیجه می‌شود که

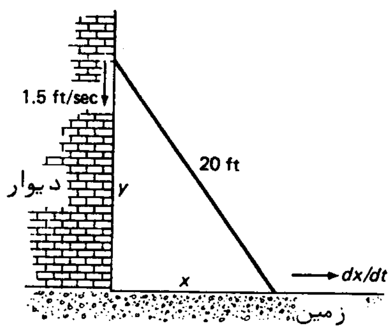
$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.2}{4} = -0.05\ \text{ft}^2/\text{sec},$$

یا، معادلاً،

$$\frac{dS}{dt} = -0.05(12)^2 = -7.2\ \text{in}^2/\text{sec},$$

یعنی، مساحت بالون به میزان 7.2 اینچ مربع برثانیه کاهش می‌یابد.

مثال ۳. نردبانی به طول 20 ft به دیوار تکیه دارد. فرض کنید سر نردبان به‌میزان ثابت 1.5 ft/sec بـه پایین سر بخورد. سرعت حرکت پای نردبان وقتی سرش در فاصلهٔ 16 ft از زمین است چقدر است؟



شکل ۲۲

حل . نردبان را پاره‌خط مستقیمی تجسم کرده ، مختصات قائم را مثل شکل ۲۲ معرفی می‌کنیم، که در آن x فاصلهٔ بین دیوار و پای نردبان بوده و y ارتفاع سر نردبان می‌باشد . بنا بر قضیهٔ فیثاغورس ،

$$x^2 + y^2 = 20^2 = 400. \qquad (۵)$$

چون موضع نردبان تغییر می‌کند ، هر دوی x و y توابعی از زمان t اند ، مطلبی که می‌توان با نوشتن $x = x(t), y = y(t)$ بر آن تأکید کرد . برای یافتن dx/dt ، از طرفین (۵) نسبت به t مشتق گرفته معادلهٔ

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

را به دست می‌آوریم ، که می‌توان آن را نسبت به dx/dt حل کرد . نتیجه عبارت است از

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}. \qquad (۶)$$

بنا بر صورت مسئله ، سر نردبان به‌میزان ثابت 1.5 ft/sec به‌پایین سر می‌خورد . لذا ، مختص y به میزان 1.5 ft/sec کاهش می‌یابد ، بدین معنی که dy/dt مساوی -1.5 ft/sec می‌باشد . با گذاردن این مقدار dy/dt در (۶) ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1.5y}{x}. \qquad (۷)$$

با حل (۵) نسبت به x و برحسب y ، داریم $x = \sqrt{400 - y^2}$. لذا ، وقتی $y = 16$ ، یعنی وقتی سر نردبان در فاصلهٔ 16 ft از زمین است ، $x = \sqrt{400 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ ؛ درنتیجه ، پای نردبان در فاصلهٔ 12 ft از دیوار می‌باشد . باگذاردن این مقادیر x و y در (۷) ، معلوم می‌شود که

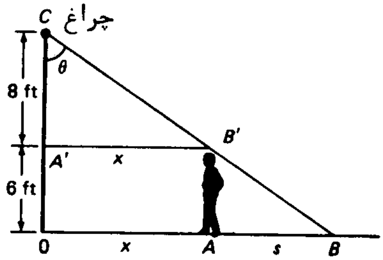
$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1.5)(16)}{12} = 2 \text{ ft/sec}.$$

لذا ، در لحظه‌ای که سر نردبان در فاصلهٔ 16 ft از زمین است ، پای نردبان به میزان 2 ft/sec از دیوار دور می‌شود .

مثال ۴ . مردی با قد 6 ft و با تندی 4 ft/sec به سوی یک چراغ خیابان که در 14 ft بالای زمین نصب شده است حرکت می‌کند . سرعت کاهش طول سایهٔ مرد چقدر است ؟

حل . فرض کنیم x فاصلهٔ مرد تا پای تیر بوده و s طول سایهٔ آن مثل شکل ۲۳ باشد (در

مثال بعدی، زاویهٔ θ نقشی ایفا خواهد کرد). مثلثهای ABB' و $A'B'C$ زوایای مساوی دارند؛



شکل ۲۳

و درنتیجه، باهم متشابه‌اند. از اینرو، نسبتهای اضلاع نظیر مساویند. بخصوص،

$$\frac{|AB|}{|AB'|}=\frac{|A'B'|}{|A'C|},$$

یعنی،

$$\frac{s}{6}=\frac{x}{8},$$

یا، معادلاً"،

$$s=\frac{3}{4}x. \qquad (۸)$$

معادلهٔ (۸) طول سایهٔ مرد را برحسب فاصله‌اش تا تیر بیان می‌کند، که همان مطلوب ما می‌باشد.

حال از طرفین (۸) نسبت به زمان t مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3}{4}\frac{dx}{dt}. \qquad (۹)$$

بنا برصورت مسئله، مرد باتندی 4 ft/sec به‌سوی تیرقدم می‌زند؛ یعنی، $dx/dt = -4$ ft/sec با گذاردن این مقدار در (۹)، به دست می‌آوریم

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3}{4}(-4)= -3 \text{ ft/sec}.$$

لذا، طول سایهٔ مرد به‌میزان ثابت 3 ft/sec، بی‌توجه به فاصله‌اش تا تیر، کاهش می‌یابد.

مثال ۵. در مسئلهٔ قبل، فرض کنیم θ زاویهٔ بین سایهٔ مرد در سرش باشد؛ این زاویهٔ

بین تیر چراغ برق و یک‌شعاع نورانی از چراغ به‌سروی‌نیزمی‌باشد . سرعت تغییر θ وقتی مرد در فاصلهٔ 12 ft از تیر است چقدر است ؟

حل . باتوجه به شکل ۲۳ ، می‌بینیم که

$$x = 8 \tan \theta.$$

با مشتقگیری از طرفین این معادله نسبت به زمان t ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dx}{dt} = 8 \frac{d \tan \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 8 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}. \qquad (۱۰)$$

با حل معادلهٔ (۱۰) نسبت به $d\theta/dt$ ، یعنی کمیتی که سعی می‌کنیم آن را برحسب داده‌های مسئله بیان کنیم ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2 \theta}{8} \frac{dx}{dt}.$$

به‌علاوه ، از شکل واضح است که

$$\cos \theta = \frac{|A'C|}{|B'C|} = \frac{8}{\sqrt{8^2 + x^2}}.$$

از تلفیق دو معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{8}{64 + x^2} \frac{dx}{dt}, \qquad (۱۱)$$

درنتیجه ، توانستیم $d\theta/dt$ را کاملا "برحسب داده‌ها ، یعنی $dx/dt = -4$ ft/sec و $x = 12$ ، بیان داریم . با گذاردن این مقادیر در (۱۱) ، درمی‌یابیم که

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{8(4)}{64 + 12^2} = -\frac{2}{13} \approx -0.154 \text{ rad/sec}.$$

جواب به رادیان برثانیه است ، زیرا ضمن استفاده از فرمول $D_\theta \tan \theta = \sec^2 \theta$ برای مشتقگیری از $\tan \theta$ تلویحا" فرض کرده‌ایم θ به رادیان است . البته ، به محض یافتن جواب می‌توان آن را به درجه تبدیل کرد . در واقع ،

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2}{13} \frac{180}{\pi} \approx -8.8°/\text{sec},$$

یعنی ، زاویهٔ سایهٔ مرد در سرش به میزان تقریبی 8.8 درجه برثانیه کاهش می‌یابد . از فرمول (۱۱) معلوم می‌شود که در این مسئله ، برخلاف مسئلهٔ قبل ، جواب به فاصلهٔ مرد تا تیر چراغ برق بستگی دارد .

چگونه مسائل میزانهای مرتبط را حل کنیم . روند گام به گام زیر شما را در حل مسائل

میزانهای مرتبط یاری خواهد کرد .

۱ . متغیرهای مرتبط را نامگذاری کرده ، حروفی را اختیار می‌کنیم که معنی واقعی متغیرهارا بدهد . حروف اول انتخاب شایسته‌ای است ، مانند V برای حجم ، L برای طول ، و T برای دما (t بـه‌زمان اختصاص داده شده است) .

۲ . معادله‌ای شامل متغیرهای مرتبط می‌نویسیم . این مرحله را اغلب می‌توان با رسم شکلی مناسب ساده کرد ، و شما باید در رسم اشکال " به قدر کافی " مناسب ، یعنی اشکالی‌که ویژگیهای اساسی یک مسئله را بدون پیرایهٔ زیاد نشان دهد ، مهارت کسب کنید .

۳ . از طرفین معادله نسبت به متغیر **مستقل** مشتق می‌گیریم . این متغیر که نوعاً " (ولی نه همیشه) زمان t است ، یکی از متغیرهای مرتبط نیست ؛ و لذا ، می‌توان انتظار داشت که قاعدهٔ زنجیره‌ای لازم باشد .

۴ . معادلهٔ دیفرانسیل میزان تغییر مطلوب را حل کرده ، سپس (ولی نه قبلاً " !) حل را با جانشانی داده‌های عددی آمده در صورت مسئله ، به انضمام میزان تغییر معلوم و مقادیر داده یا محاسبه شدهٔ متغیرها ، کامل می‌کنیم .

مسائل

۱ . نقطهٔ $P = (x, y)$ در ربع اول از مبداء در امتداد منحنی $y = x^3/48$ طوری حرکت می‌کند که dx/dt ثابت‌است . چه‌مختص ، x یا y ، سریعتر افزایش می‌یابد ؟ (جواب‌به‌اندازهٔ x بستگی دارد .)

۲ . شعاع موج مستدیر حاصل از انداختن سنگی در یک استخر به میزان (متـر بـر ثانیه) 3 m/sec پخش می‌شود . وقتی موج به قطر 10 m است ، سرعت افزایش مساحت محصور به موج چقدر است ؟

۳ . طول یک مستطیل به میزان (سانتیمتر برثانیه) 3 cm/sec کاهش یافته و عرضش به‌میزان 2 cm/sec افزایش می‌یابد . در لحظه‌ای معین مستطیل به طول 50 cm و عرض 20 cm است . آیا مساحت مستطیل صعودی است یا نزولی و سرعت آن چقدر است ؟

۴ . هـوا بـه میزان $10\ ft^3/min$ به داخل یک بالون کروی بزرگ وارد می‌شود . سرعـت افزایش شعاع بالون وقتی قطرش 4 ft باشد چقدر است ؟ سرعت افزایش مساحـت آن در همین لحظه چقدر است ؟

۵ . حجم یک بالون در لحظه‌ای که مساحتش به میزان $5\ ft^2/sec$ در حال افزایش است بـه میزان $15\ ft^3/sec$ زیاد می‌شود . شعاع آن چقدر است ؟ سرعت افزایش شعاع‌آن در این لحظه چقدر است ؟

۶. حجم یک گلولهٔ نفتالین درحال‌تغییر به‌میزانی متناسب با مساحتش کاهش‌می‌یابد. نشان دهید این ایجاب می‌کند که شعاع گلوله به میزان ثابت کاهش یابد.

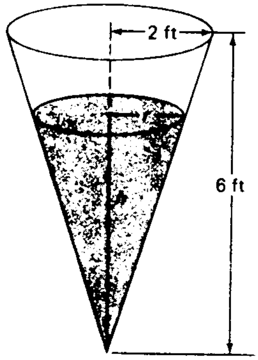
۷. دو کشتی A و B از نقطهٔ P در امتداد مسیرهایی عمود برهم از یکدیگر دور می‌شوند کشتی A با تندی 15 گره و کشتی B با تندی 20 گره حرکت می‌کند. فرض کنید در یک لحظه A در فاصلهٔ 5 گره دریایی از P و B در فاصلهٔ 10 گره دریایی از P باشد. یک ساعت بعد سرعت دور شدن کشتیها از هم چقدر است؟ (یک گره دریایی برساعت = یک گره.)

۸. مایعی به میزان $8\ cm^3/sec$ در یک ظرف استوانه‌ای به شعاع 2 cm ریخته می‌شود. با چه سرعتی سطح مایع بالا می‌آید؟

۹. یک سر طنابی به‌یک‌قاشق 3 ft پایین اسکله بسته شده‌است. سر دیگر که به‌چرخ‌چاهی در کنار اسکله وصل شده به میزان 1 ft/sec کشیده می‌شود. سرعت نزدیک‌شدن قایق به اسکله در فاصلهٔ 4 ft از آن چقدر است؟ سرعت تغییر زاویهٔ بین طناب و سطح آب در این لحظه چقدر است؟

۱۰. اتومبیلی در یک‌جاده باسرعت 60 mph مستقیما" از زیر یک بالون که‌باسرعت 10 mph بالا می‌رود می‌گذرد. فرض کنید در لحظهٔ عبور اتومبیل بالون در ارتفاع 1 میلی باشد. 1 دقیقه بعد، سرعت‌افزایش فاصلهٔ بین‌اتومبیل و بالون چقدر است؟ سرعت تغییر زاویهٔ بین جاده و خط‌واصل بین اتومبیل و بالون در این لحظه چقدر است؟

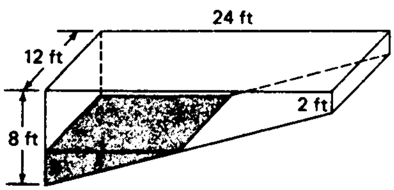
۱۱. آب به‌میزان $720\ in^3/min$ وارد یک‌مخزن به شکل مخروط مستدیر قائم وارون به‌ارتفاع 6 ft و شعاع 2 ft در بالا می‌شود (ر.ک. شکل ۲۴، که در آن بشکه‌تاعمق h پر شده و سطح مایع به شعاع r می‌باشد). سرعت بالاآمدن سطح آب وقتی یک‌هشتم بشکه پر



شکل ۲۴

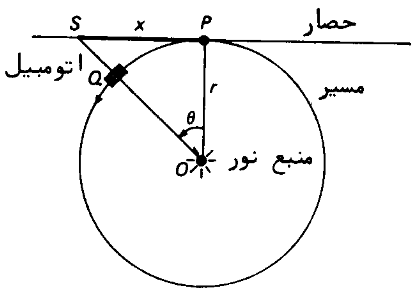
شده ، یکدوم آن پر شده چقدر است ؟ چقدر طول می‌کشد تا بشکه پر شود ؟ آیا پاسخ آخرین سئوال نیاز به حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد ؟ (حجم یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ٔ r عبارت است از $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.)

۱۲ . یک استخر به عرض 12 ft ، طول 24 ft ، عمق 2 ft در انتهای کم عمق ، و عمق 8 ft در انتهای گود به میزان 16 ft³/min از آب پر می‌شود (ر.ک. شکل ۲۵ ، که در آن استخر تا عمق h پر شده است) . سرعت بالا آمدن آب وقتی آب در انتهای کم عمق به عمق 1 ft باشد چقدر است ؟ وقتی عمق آب در انتهای گود 2 ft باشد چقدر است ؟ نیم ساعت پس از شروع به پرشدن چقدر است ؟



شکل ۲۵

۱۳ . یک اتومبیل مسابقه با سرعت (کیلومتر بر ساعت) 150 km/hr حول یک مسیر مستدیر در حرکت است . فرض کنید منبع نوری در مرکز O مسیر و یک حصار مماس برمسیر در نقطه‌ٔ P وجود داشته باشند (ر.ک. شکل ۲۶ ، که در آن مسیر به شعاع r بوده و



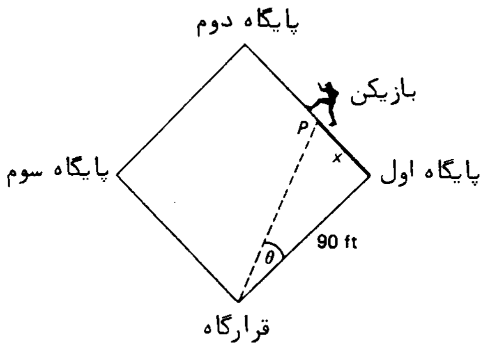
شکل ۲۶

اتومبیل ، در نقطه‌ٔ Q ، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند) . سرعت حرکت سایه‌ٔ اتومبیل (نقطه‌ٔ S در شکل) روی حصار وقتی یکهشتم دور از P را پیموده چقدر است ؟

۱۴ . عکاسی از یک مسابقه فیلمبرداری می‌کند . فرض کنید فاصله‌ٔ عمودی وی از مسیر در

خط پایان 40 ft بوده ، و دوربین برای آنکه روی برنده وقتی در فاصلهٔ 30 ft ازخط پایان است ثابت بماند باید به میزان 18 درجه بر ثانیه بچرخد . سرعت برنده در این لحظه چقدر است ؟ (فرض کنید مسیر خط راست باشد .)

۱۵ . یک بازیکن بیس‌بال در مدت 3.6 ثانیه از پایگاه اول به پایگاه دوم می‌دود (ر . ک . شکل ۲۷ ، که در آن بازیکن در فاصلهٔ x از پایگاه اول است) .



شکل ۲۷

سرعت تغییر زاویهٔ بین خط پایگاه اول و خط قرارگاه تا بازیکن وقتی در نیمه‌راه بین پایگاه اول و دوم است چقدر است ؟ (فرض کنید تندی بازیکن ثابت باشد .)

۱۶ . سر یک نردبان که به دیواری تکیه دارد با سرعت 3 in/sec پایین می‌آید . وقتی پای نردبان در فاصلهٔ 6 ft از دیوار است ، سرعت دورشدن آن از دیوار 4 in/sec می‌باشد. طول نردبان چقدر است ؟

در مسئله نردبان مثال ۳ ،

۱۷ . سرعت پای نردبان وقتی در فاصلهٔ 10 ft از دیوار است چقدر می‌باشد ؟

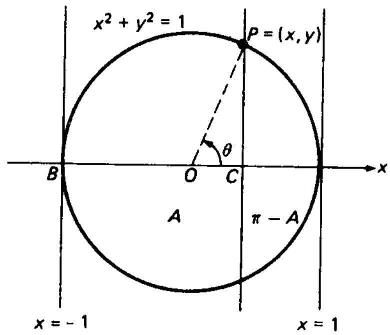
۱۸ . سرعت تغییر زاویهٔ بین نردبان و زمین وقتی پای نردبان در فاصلهٔ 8 ft از دیوار است چقدر است ؟

۱۹ . **شتاب پای نردبان درلحظه‌ای‌که** سرش در فاصلهٔ 12 ft از زمین است چقدرمی‌باشد ؟ چه وقت سر نردبان به زمین می‌رسد ؟

۲۰ . از یک ماده میله‌ای به‌طول L و مکعبی به حجم V ساخته‌می‌شود . ***ضریب‌انبساط خطی*** ماده α است ، بدین‌معنی‌که وقتی میله گرم شود ، طولش طبق فرمول $\alpha = (1/L)(dL/dT)$ تغییر می‌کند ، که در آن T دماست . ***ضریب انبساط حجمی*** ماده β است ، بدین‌معنی که وقتی مکعب گرم می‌شود ، حجمش طبق فرمول $\beta = (1/V)(dV/dT)$ تغییر می‌کند .

نشان دهید که $\beta = 3\alpha$.

۲۱. خط مستقیمی‌که موازی محور y از وضع $x = -1$ به وضع $x = 1$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند ، دایره‌ٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را قطع کرده و آن را به قطعه‌ٔ چپ به مساحت A و قطعه‌ٔ راست به مساحت $\pi - A$ تقسیم می‌کند (ر.ک. شکل ۲۸) . سرعت افزایش A وقتی خط در وضع $x = \frac{1}{2}$ است چقدر می‌باشد؟



شکل ۲۸

راهنمایی. A را برحسب زاویهٔ θ شکل بیان کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

سرعت و شتاب متوسط و لحظه‌ای

چگالی متوسط و دقیق

تعریف مشتق

مشتقگیری و مشتقپذیری

خارج قسمت تفاضلی و نموها

خطوط مماس و قائم بر یک منحنی

مشتقات یکطرفه و مماسها

پیوستگی یک تابع مشتقپذیر

تقریب خط مماس و دیفرانسیلها

نماد لایب‌نیتز برای مشتقات

قواعد حاصلضرب و خارج‌قسمت

قاعدهٔ زنجیره‌ای

مشتقات مراتب بالاتر

مشتقگیری ضمنی

میزانهای مرتبط

قواعد و فرمولهای اساسی مشتقگیری

تابع	مشتق
f	$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (تعریف)
f	$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$ (تعریف معادل)
c (ثابت)	0
cf	cf'
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n (n صحیح)	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^r (r گویا)	rx^{r-1} (این قاعده شامل پنج قاعدهٔ فوق است)
$f + g$	$f' + g'$
$f - g$	$f' - g'$
fg	$f'g + fg'$ (قاعدهٔ حاصلضرب)
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$ (قاعدهٔ خارج‌قسمت)
$z = z(y)$ ، که در آن $y = y(x)$	$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ (قاعدهٔ زنجیره‌ای)
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$

$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

مسائل تکمیلی

۱. شخصی که در بالای یک صخره ایستاده هفت تیر می‌کشد و شلیک می‌کند. گلوله با سرعت فرار $v_0 = 480$ به پایین شلیک شده و درست نیم ثانیه بعد به زمین می‌خورد. ارتفاع صخره چقدر است؟

۲. اتومبیلی که باسرعت v_0 mph در حرکت است ناگاه ترمز می‌کند. فرض کنید حرکت بعدی آن طبق $s = v_0 t - \frac{1}{2}kt^2 \ (k > 0)$ صورت گیرد. ثابت k را تعبیر کرده و مقدار آن را درصورتی بیابید که $v_0 = 60$ mph و اتومبیل پس از 5.5 sec توقف کامل کند. اتومبیل چه مسافتی را پیش از توقف می‌پیماید؟ نشان دهید که فاصلهٔ پیموده شده پس از ترمز با مربع تندی v_0 آن متناسب است.

فرض کنید a ، b ، c ، و d ثابتهای دلخواهی باشند. از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۳. $ax + \dfrac{b}{x}$

۴. $(x-a)(x-b)$

۵. $x(x-a)(x-b)$

۶. $(x-a)(x-b)(x-c)$

۷. $\dfrac{x-a}{x+a}$

۸. $\dfrac{x-a}{x+b}$

۹. $\dfrac{x+a}{x-b}$

۱۰. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

۱۱. $\dfrac{x^2-a}{x^2-b}$

۱۲. $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$

۱۳. $\sqrt{x^2+a^2}$

۱۴. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

۱۵. $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

۱۶. $\sin^2(ax+b)$

۱۷. $\cos(ax^2+bx+c)$

در صفحهٔ ۱۸۶ دو تعریف "فارغ از حساب دیفرانسیل و انتگرال" (و درنتیجه، ناسازگار) از خط مماس بر یک دایره در نقطهٔ P داده شده است.

۱۸. یک منحنی غیر از دایره بیابید که برای آن تعریف (دو) درست و تعریف (یک)

نادرست باشد .

۱۹ . یک منحنی غیر از دایره بیابید که برای آن تعریف (یک) درست باشد .

معادلهٔ مماس بر منحنیهای زیر را بیابید .

۲۰ . $y = 1/x$ در $(2, \frac{1}{2})$

۲۱ . $y = 1/x$ در $(-1, -1)$

۲۲ . $y = 1/x^2$ در $(-\frac{1}{2}, 4)$

۲۳ . $y = \tan x$ در $(0, 0)$

۲۴ . $y = \csc x$ در $(\pi/4, \sqrt{2})$

۲۵ . $y = 8/(x^2 + 4)$ در $(2, 1)$

معادلهٔ قائم به منحنیهای زیر را بیابید .

۲۶ . $y = 1/x$ در $(-\frac{1}{2}, -2)$

۲۷ . $y = 1/x^2$ در $(2, \frac{1}{4})$

۲۸ . $y = \cot x$ در $(\pi/2, 0)$

۲۹ . $y = \sec x$ در $(-\pi/4, \sqrt{2})$

۳۰ . منحنی $y = 1/x$ مماسی دارد که از $(0, 1)$ می‌گذرد . آن را بیابید .

۳۱ . زاویهٔ بین منحنیهای $y = 1/x^2$ و $y = 1/x$ در نقطهٔ $(1, 1)$ را بیابید .

۳۲ . نشان دهید که قطعه‌ای از مماس بر منحنی $y = 1/x$ که توسط محورهای مختصات جدا می‌شود در نقطهٔ تماس نصف می‌شود .

۳۳ . نمودار منحنی $y = |x - 1| - |x| + |x + 1|$ را رسم کنید . مماسهای یکطرفه درگوشه‌های منحنی را بیابید .

۳۴ . آیا تابع $|x|^2$ در $x = 0$ مشتقپذیر است ؟

۳۵ . آیا مشتق یک تابع گویا همیشه تابعی گویاست ؟

دیفرانسیل $df(a) = f'(a)\Delta x$ تابع داده شده را به ازای مقادیر a و Δx ذکر شده بیابید . در هر حالت $df(a)$ را با نمو $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ تا تعداد ارقام اعشاری مناسبی مقایسه نمایید .

۳۶ . $f(x) = 1/x,\ a = 5,\ \Delta x = -0.1$

۳۷ . $f(x) = (1 + x)/(1 - x),\ a = 0,\ \Delta x = 0.1$

۳۸ . $f(x) = 1/\sqrt{x},\ a = 9,\ \Delta x = 0.5$

۳۹ . $f(x) = \sec x,\ a = \pi/3,\ \Delta x = \pi/60$

۴۰ . با استفاده از تقریب خط مماس، نشان دهید که به ازای $|x|$ کوچک ،

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\sqrt[n]{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

با استفاده از تقریب خط مماس، کمیت داده شده را تخمین زده و نتیجه را باجواب دقیق تا تعداد ارقام اعشاری مناسب مقایسه نمایید .

۴۱. $(2.9)^{-2}$ ۴۲. $\sqrt[3]{26}$ ۴۳. $(8.6)^{2/3}$

۴۴. $\csc 32°$ ۴۵. $\tan 63°$ ۴۶. $1/\sqrt{4.1}$

۴۷. $\sec 1°$ ۴۸. $(82)^{-1/4}$ ۴۹. $\sqrt[4]{17}$

۵۰. $\cot 43°$ ۵۱. $(7.8)^{-1/3}$ ۵۲. $(0.9)^{0.9}$

۵۳. $f(x) = (x-4)(x-3)^2(x-2)^3$ را به ازای $x = 4.001$ تخمین بزنید.

۵۴. با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب، برهان دیگری برای فرمول $D_x x^n = nx^{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ بیاورید.

تابع $y = f(x)$ را چنان بیابید که

۵۵. $y' = (x+1)^3$ ۵۶. $y' = x(x^2+1)^3$

۵۷. $y' = x^3(x^4+1)^3$ ۵۸. $y' = x^2(x^3+1)^2$

راهنمایی. قاعدهٔ زنجیره‌ای را به یاد آورید.

تابع $y = f(x)$ را طوری بیابید که

۵۹. $y'' = x$ ۶۰. $y'' = x^2$ ۶۱. $y'' = x^3$

۶۲. $y''' = 1$ ۶۳. $y''' = x$ ۶۴. $y''' = x^2$

راهنمایی. به یاد داشته باشید که هر مشتقگیری از یک توان x نما را یکی پایین‌می‌آورد.

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۶۵. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$ ۶۶. $\tan(\sec x^2)$

۶۷. $\sqrt{\sin(\tan\sqrt{x})}$ ۶۸. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

۶۹. $\sin(\cos(\sin x^2))$ ۷۰. $\sin(\cos(\tan(\cot x)))$

۷۱. فرض کنید $p(x) = f(x)g(x)$ و $f'(x)g'(x) = c$، که در آن c ثابت بوده و مشتقات‌سوم f''' و g''' وجود دارند. نشان دهید که

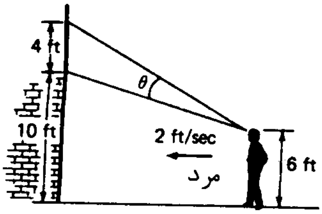
$$\frac{p'''(x)}{p(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{g'''(x)}{g(x)}.$$

۷۲. مماس و قائم به نمودار معادلهٔ $y^6 + y^5 - xy + 2 = 0$ در نقطهٔ $(4, 1)$ را بیابید.

مردی به قد 6 ft با تندی 2 ft/sec به جانب یک ساختمان روان است و چشم از یک‌پنجره به طول 4 ft که در 10 ft ی زمین است بر نمی‌دارد. فرض کنید θ زاویهٔ دید مرد از پنجره باشد (ر.ک. شکل ۲۹. از اندازهٔ سر مرد صرف‌نظر می‌شود).

۷۳. سرعت تغییر θ وقتی فاصلهٔ مرد تا ساختمان 16 ft، 8 ft، یا 4 ft می‌باشد چقدر

است ؟



شکل ۲۹

۷۴. در چه فاصله از ساختمان زاویهٔ θ ، که ابتدا صعودی است ، شروع به نزول می‌کند ؟

۷۵. نشان دهید که منحنی $y = \sin x$ دارای بی‌نهایت مماس متمایز ماربر مبداء است .

نشان دهید که نقاط تماس و نقاط تقاطع خط $y = x$ و نمودار $y = \tan x$ مختص x یکسان دارند .