آیا تابع داده شده بر بازهٔ ذکر شده یک به یک است؟ جواب خود را در هر حالت توضیح دهید.

۵. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ بر $(-\infty, 1]$

۶. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ بر $[2, 4]$

۷. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ بر $[-1, 1]$

۸. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ بر $[1, \infty)$

۹. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ بر $[1, 3]$

۱۰. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ بر $[0, 2]$

۱۱. $f(x) = x^{3/5}$ بر $(-\infty, \infty)$

۱۲. $f(x) = x^{8/3}$ بر $(-\infty, \infty)$

۱۳. $f(x) = x^{-2/5}$ بر $(-\infty, 0)$

۱۴. $f(x) = x^{-5/4}$ بر $(0, \infty)$

۱۵. $f(x) = \sin x$ بر $[\pi/4, 3\pi/4]$

۱۶. $f(x) = \cos x$ بر $[0, \pi]$

۱۷. $f(x) = \tan x$ بر $(-\pi/2, \pi/2)$

۱۸. $f(x) = \sec x$ بر $(-\pi/2, \pi/2)$

۱۹. $f(x) = \cos x + \sin x$ بر $[0, \pi]$

۲۰. $f(x) = x + \cos x$ بر $(-\infty, \infty)$

تمام بازه‌ها به طول π را بیابید که بر آنها

۲۱. $\sin x$ یک به یک باشد.　　۲۲. $\cos x$ یک به یک باشد.

با حل نسبت به x به عنوان تابعی از y، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۲۳. $y = -x$　　۲۴. $y = 2x + 1$

۲۵. $y = \dfrac{1}{x}$　　۲۶. $y = \dfrac{1}{1-x}$

۲۷. $y = \dfrac{x}{x+1}$　　۲۸. $y = \dfrac{3x-1}{3x+1}$

۲۹. $y = x^3 - 2$　　۳۰. $y = \sqrt[3]{x-1}$

۳۱. $(0 \le x \le 4)$　$y = \sqrt{x(8-x)}$

۳۲. $(4 \le x \le 8)$　$y = \sqrt{x(8-x)}$

با استفاده از فرمول $f(f^{-1}(x)) \equiv x$، مثل مثال ۵، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۳۳. $f(x) = 1 - 3x$　　۳۴. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

۳۵. $(0 \le x < \infty)$　$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

۳۶. $(-\infty < x \le 0)$　$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

۳۷. $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$

۳۸. $f(x) = (x^3+1)^{1/3}$

۳۹. $(-\infty < x \le 1)$　$f(x) = x^2 - 2x + 5$

۴۰. $(1 \le x < \infty)$　$f(x) = x^2 - 2x + 5$

۴۱. نمودار تابع $y = f(x)$ که معکوس خودش است را توصیف کنید.

نشان دهید که هر یک از توابع زیر معکوس خودش است.

۴۲. $f(x) = 2 - x$　　۴۳. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

۴۴. $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$　　۴۵. $f(x) = \dfrac{3x+5}{4x-3}$

۴۶. $(0 \le x \le 3)$　$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

مسائل

۱. به فرض مشتقپذیر بودن f و f^{-1}، فرمول (۱) را به کمک مشتقگیری ضمنی ثابت کنید.

۲. فرض کنید $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$، که در آن $x \geq -1$. $(f^{-1})'(9)$ را با استفاده از قضیهٔ ۴ حساب کنید. سپس جواب را ابتدا با حل نسبت به x به عنوان تابعی از y امتحان نمایید.

با استفاده از قضیهٔ ۴، $(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۳. $f(x) = 4x^2 - 5x + 1, c = 10$

۴. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, c = -16$

۵. $f(x) = \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 1, c = 7$

۶. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, c = 5$ ✓

۷. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}, c = -3$

۸. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}, c = \dfrac{1}{2}$

۹. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, c = 4$

۱۰. $f(x) = x^{21} + 2x^{11} + 5x^7, c = -8$ ✓

۱۱. $f(x) = x + \cos x, c = \pi - 1$

$f(x) = x^3 + x + \sin x, c = 0$ ۰ ۱۲

$f(x) = \tan x, c = -\sqrt{3}$ ۰ ۱۳

$f(x) = \cot^3 x, c = 1$ ۰ ۱۴

در هر حالت تحقیق کنید که f بر بازهٔ مناسبی یک به یک است .

در مسائل ۱۵ تا ۲۰ هر تابع f یک به یک با معکوس f^{-1} است . مماس بر منحنی $y = f^{-1}(x)$ در نقطهٔ دادهٔ شدهٔ P را بیابید .

$f(x) = \dfrac{x}{x-4}, P = (-3, 3)$ ۰ ۱۵

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-5}, P = (2, 11)$ ۰ ۱۶

$f(x) = x^3 + x, P = (-10, -2)$ ۰ ۱۷

$f(x) = x + \sin x, P = \left(\dfrac{\pi}{2} + 1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ۰ ۱۸ @

$f(x) = \sqrt{169 - x^2}\ (0 \le x \le 13), P = (12, 5)$ ۰ ۱۹

$f(x) = \sqrt{169 - x^2}\ (-13 \le x \le 0), P = (5, -12)$ ۰ ۲۰

۲۱ ۰ فرض کنید $f(x) = \int_1^x \sqrt{2 + \sin^{11} t}\, dt$. نشان دهید که f بر $(-\infty, \infty)$ یک به یک است . قرار دهید $a = f(\pi), b = f(3\pi/2)$ ، با آنکه قادر به محاسبهٔ این اعداد نیستیم . $(f^{-1})'(a)$ و $(f^{-1})'(b)$ را بیابید . همچنین ، $(f^{-1})'(0)$ را پیدا نمایید . T R

فرض کنید $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + u^6}\, du$ ۰ $(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

$c = 0$ ۰ ۲۲ T $\qquad$ $c = f(\frac{1}{2})$ ۰ ۲۳ R $\qquad$ $c = f(\sqrt{2})$ ۰ ۲۴

۲۵ ۰ فرض کنید f در همان شرایط قضیهٔ ۴ صدق کرده ، و نیز f در نقطهٔ x مشتق دوم متناهی داشته باشد . نشان دهید که f^{-1} در نقطهٔ $y = f(x)$ مشتق دومی مساوی Rh

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \qquad \text{(یک)}$$

دارد

در مسائل ۲۶ تا ۳۱ ، هر یک از توابع یک به یک با معکوس f^{-1} می‌باشد . با استفاده از (یک) ، $(f^{-1})''(c)$ را درصورتی حساب کنید که

$f(x) = x^{3/2}, c = 8$ ۰ ۲۶

$f(x) = \dfrac{3x+1}{3x-1}, c = 2$ ۰ ۲۷

۲۸. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2}, c = 1$

۲۹. $f(x) = x + \sin x, c = 0$

۳۰. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + v^2}\, dv, c = f(1)$

۳۱. $f(x) = \tan^3 x\ (-\pi/2 < x < \pi/2), c = -1$

مسائل

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید .

۱. $\arcsin \frac{1}{2}$

۲. $\operatorname{arccot}(-1)$

۳. $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$

۴. $\operatorname{arccsc}(2/\sqrt{3})$

۵. $\arctan(-1/\sqrt{3})$

۶. $\arccos 1$

۷. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$

۸. $\operatorname{arcsec} 2$

۹. $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2})$

۱۰. $\arctan\sqrt{3}$

۱۱. $\arccos(-\frac{1}{2})$

۱۲. $\arcsin(1/\sqrt{2})$

۱۳. $\arcsin(\sin(3\pi/2))$

۱۴. $\sin(\arccos(-1/\sqrt{2}))$

۱۵. $\cos(\arcsin \frac{1}{3})$

۱۶. $\tan(\arccos \frac{1}{4})$

۱۷. $\operatorname{arcsec}(\sec(5\pi/4))$

۱۸. $\operatorname{arccot}(\tan(4\pi/3))$ ۵

۱۹. معکوس تابع $\sin x$ در صورت محدود شدن قلمروش به بازهٔ $[\pi/2, 3\pi/2]$ چیست ؟

عبارات زیر را بدون استفاده از توابع مثلثاتی یا مثلثاتی معکوس بیان کنید .

۲۰. $\sin(\operatorname{arcsec} x)$

۲۱. $\cos(\arctan x)$ ۵

۲۲. $\tan(\arcsin x)$

۲۳. $\sin(2\arccos x)$

۲۴. $\cos(2\arccos x)$

۲۵. $\cos(2\arcsin x)$

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۲۶. $(\arccos x)^2$

۲۷. $\operatorname{arcsec}(2x+1)$

۲۸. $\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$

۲۹. $\operatorname{arccot}\dfrac{2t}{1-t^2}$

۳۰. $\arcsin t^2$

۳۱. $\operatorname{arccsc}\dfrac{1}{t}$

T ۴۱. فرمول انتگرالگیری

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C \qquad (|x|>1)$$

و ، به‌طورکلی ،

فقط ذیل

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|x|}{a} + C \qquad (|x|>a>0)$$

را تحقیق کنید .

انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید .

۴۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ ۴۳. $\int \frac{dx}{x^2+121}$ ۴۴. $\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-49}}$

۴۵. $\int \frac{dt}{\sqrt{16-4t^2}}$ ۴۶. $\int \frac{du}{64u^2+36}$ ۴۷. $\int \frac{dr}{r\sqrt{121r^2-144}}$

T ۴۸. $\int_{1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ T ۴۹. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ T ۵۰. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

آیا تابع داده شده بر بازهٔ مشخص شده یک به یک است؟

۳. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ بر $(-\infty, 0]$

۴. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ بر $(-1, 1)$

۵. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ بر $(1, \infty)$

۶. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ بر $[0, \infty)$

معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۷. $f(s) = s^2 + s + 1 \quad (-\frac{1}{2} \leq s < \infty)$

۸. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 1} \quad (0 \leq t < \infty)$

۹. $h(u) = (u^3 + 1)^{1/5}$

۱۰. $k(v) = (10 + v^{1/3})^5$

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید .

۲۷ . $\operatorname{arcsec}(-2/\sqrt{3})$

۲۸ . $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$

۲۹ . $\operatorname{arccot} 1$

۳۰ . $\arccos(\sqrt{3}/2)$

۳۱ . $\operatorname{arccsc}(-2)$

۳۲ . $\arctan(-1)$

۳۳ . $\sec(\arctan 2)$

۳۴ . $\cot(\operatorname{arcsec}(-3))$

۳۵ . $\arccos(\tan \pi)$

۳۶ . $\operatorname{arccsc}(\sec \pi)$

۳۷ . $\csc(\operatorname{arccot} \frac{2}{3})$

۳۸ . $\arctan(-\tan(5\pi/4))$

۳۹ . $\sin(\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{3})$

۴۰ . $\cos(\arccos \frac{2}{3} + \arcsin \frac{3}{4})$

۴۱ . $\tan(\arctan 5 - \arctan 4)$

۴۲ . $\cot(\arctan \sqrt{3} + \operatorname{arccot} 1)$

۴۳ . $\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0)$

۴۴ . $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x$

۴۵ . $\arctan\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)$

۴۶ . $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۴۷ . $\int_{-3/7}^{0} \frac{dx}{\sqrt{36 - 49x^2}}$

۴۸ . $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2 + 2}$

۴۹ . $\int_{5\sqrt{2}/3}^{10/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 25}}$

۵۰ . تابع $f(x) = \arcsin(\sin x)$ را رسم کرده ، و نشان دهید متناوب با دورهٔ تناوب اساسی 2π است .

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال ، حدود زیر را حساب کنید .

۵۱ . $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

۵۲ . $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$