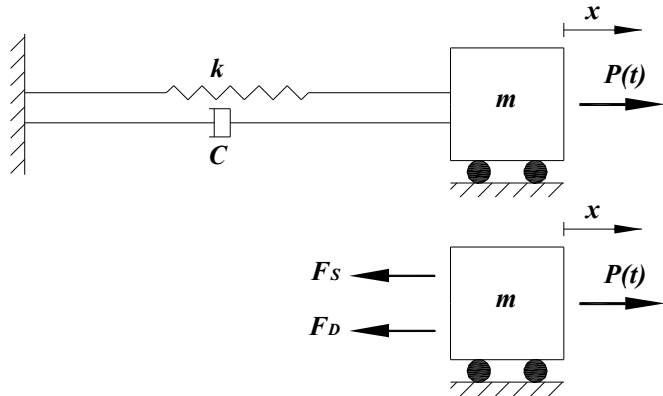


# دینامیک سازه ها

استاد: دکتر مقدم

## ارتعاش دستگاه تک درجه

اجزاء دستگاه تکدرجه:



شکل شماره ۱

نیروی سازه (فنر) یا نیروی برگرداننده :  $F_S = \text{Spring Force}$

نیروی میرایی (استهلاک) :  $F_D = \text{Damping Force}$

در حالت کلی:

$$P(t) - F_S - F_D = m\ddot{x}$$

معادله کلی حرکت دستگاه تک درجه (اعم از اینکه دستگاه خطی باشد یا غیر خطی):

$$m\ddot{x} + F_D + F_S = P(t) \quad (1)$$

در مورد دستگاه خطی داریم:

معمولاً در حیطة خاصی درست است :  $F_S = k \cdot x$  (۲)

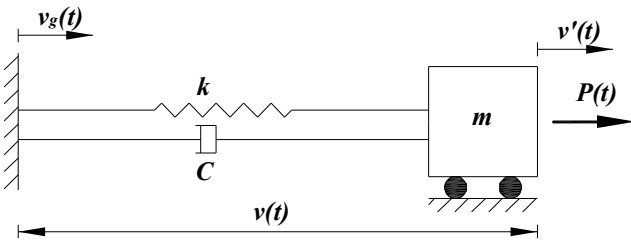
فرض :  $F_D = c \cdot \dot{x}$  (۳)

تذکره ۱: رابطه (۲) قابل تحقیق است و معمولاً برای اغلب سازه ها در یک محدوده خاص درست است.

تذکره ۲: رابطه (۳) به راحتی قابل تحقیق و اندازه گیری مستقیم نمی باشد.

از جایگزینی ۲ و ۳ در رابطه ۱ داریم:

معادله دیفرانسیل حرکت دستگاه تکدرجه خطی (با میرایی لزج) :  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$  (۴)



شکل شماره ۲

ارتعاش ناشی از حرکت پی:

در این حالت اگر پی دارای حرکت

$v_g(t)$  باشد، حرکت مطلق سازه

$v'(t)$  برابر است با:

$$v'(t) = v_g(t) + v(t) \quad (5)$$

در این صورت، معادله حرکت دستگاه نسبت به پی عبارت است از (اصل دالامبر):

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = -m\ddot{v}_g(t) \quad (6)$$

بدیهی است اگر نیروی خارجی هم وارد شود باید به سمت راست معادله اضافه شود:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = -m\ddot{v}_g(t) + P(t) \quad (7)$$

همچنین می توان معادله حرکت را در

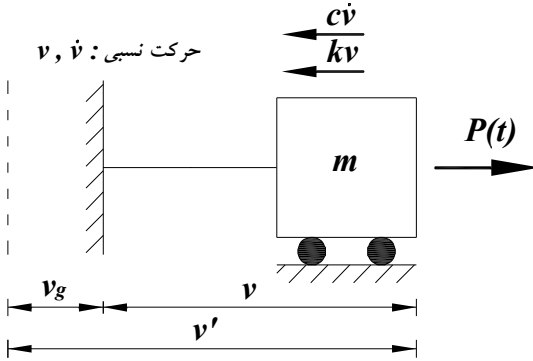
یک دستگاه مطلق نوشت، در این

صورت نیروهای وارده به جرم  $m$

برابر است با:

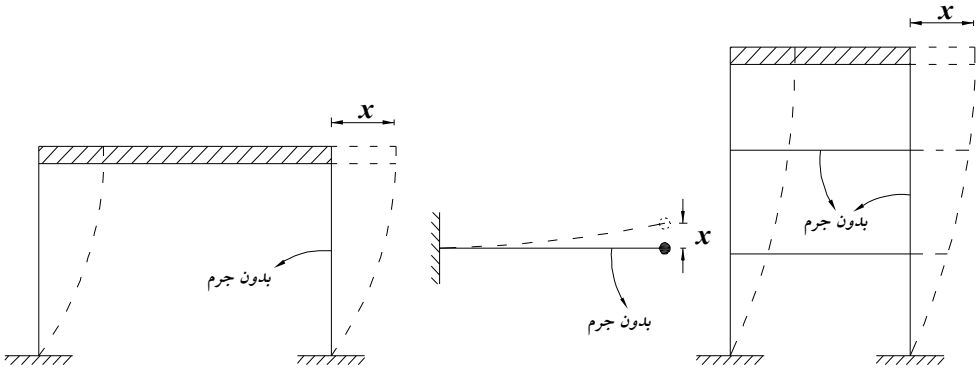
معادله حرکت به عنوان تمرین توسط

دانشجویان به دست آورده شود.



شکل شماره ۳

نمونه هایی از دستگاه های تکدرجه



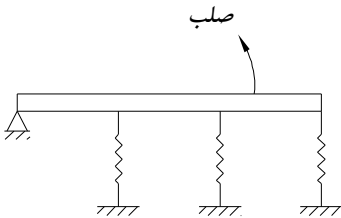
شکل شماره ۴

(۱) از جرم سازه در برابر جرم طبقات صرف نظر شود.

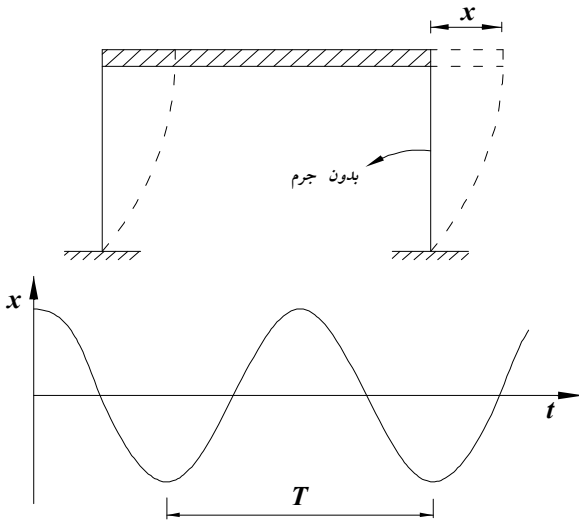
(۲) صلبیت جسم بسیار بیشتر از صلبیت سازه است.

نحوه تبدیل این دستگاهها به دستگاه تکدرجه بعداً بررسی

خواهد شد.



شکل شماره ۵



ارتعاش آزاد دستگاه تکدرجه  
اگر سازه در اثر جابجایی یا ضربه  
اولیه به حرکت درآید و ارتعاش  
کند این حرکت را ارتعاش آزاد می  
خوانیم.

حرکت دستگاه ممکن است به دو  
حالت زیر باشد:

۱- بدون میرایی (نامیرا)

۲- با میرایی (میرا)

معادله ارتعاش آزاد دستگاه تکدرجه  
(خطی) عبارت است از:

$$P(t)=0 \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (8)$$

پاسخ کلی این معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$x = Ae^{rt}$$

که در آن  $r$  یک عدد مختلط است.

$$\therefore (mr^2 + cr + k)e^{rt} = 0 \Rightarrow mr^2 + cr + k = 0 \quad (9)$$

حالت نامیرا

$$c=0 \Rightarrow mr^2 + k = 0 \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta]$$

$$x_1 = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

$$x_2 = e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

هر ترکیب خطی دلخواه از  $x_1$  و  $x_2$  نیز پاسخ معادله دیفرانسیل فوق خواهد بود.

$$x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \cos\omega t$$

$$x'_2 = \frac{1}{2}(-ix_1 + ix_2) = \sin\omega t$$

پس هر ترکیب خطی از  $x'_1$  و  $x'_2$  نیز پاسخ معادله خواهد بود.

$$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

این رابطه را می توان با استفاده از قواعد مثلثات بصورت زیر نوشت:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi)$$

پارامترهای  $a$  و  $b$  (یا  $A$  و  $\varphi$ ) از شرایط حدی یا شرایط اولیه حرکت بدست می آیند.

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v$$

$$\therefore b = x_0, \quad a = \frac{v}{\omega} \quad (11)$$

$$\therefore x = \frac{v}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$$

قضیه مثلثاتی:

$$a \sin x + b \cos x = A \cos(x - \varphi)$$

$$a \sin x + b \cos x = A [\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi]$$

$$\therefore b = A \cos \varphi, \quad a = A \sin \varphi$$

$$\therefore A = [a^2 + b^2]^{1/2}, \quad \tan \varphi = \frac{a}{b}$$

$$\therefore x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \cos(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{v}{\omega x_0} \quad (13)$$

ملاحظه می شود که ارتعاش آزاد دستگاه از نوع هماهنگ (سینوسی) است با دامنه:  $\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$

چنانچه سرعت اولیه دستگاه صفر باشد، دامنه حرکت برابر با  $x_0$  خواهد بود و این حرکت بصورت دائمی تا زمان بی انتها ادامه خواهد داشت. عملاً در طبیعت چنین حرکتی وجود ندارد و انرژی اولیه دستگاه پس از مدتی از بین رفته و ارتعاش میرا می گردد و از دامنه نوسان کاسته می شود. از این رو، ایده میرایی برای توجیه این وضعیت به کار گرفته شده است.

## حالت میرا

با توجه به بحث قبلی چنانچه برای دستگاه یک نیروی اصطکاک درونی قائل شویم که با سرعت متناسب است (میرایی لزج) آنگاه:

$$m\ddot{r} + c\dot{r} + k r := 0$$

$$\Delta := \sqrt{c^2 - 4mk} \quad (14)$$

نوع حرکت بستگی به این دارد که  $\Delta$  حقیقی باشد یا موهومی، اگر موهومی باشد:

$$r := \frac{-c}{2m} + i \cdot \sqrt{-\left(\frac{-c}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} \quad (15)$$

$$\omega_D := \sqrt{\frac{k}{m} + \left(\frac{-c}{2m}\right)^2} \quad (16) \quad \text{اگر:}$$

$$x_1 := e^{\frac{-c}{2m}t} e^{i\omega_D t}$$

$$x_2 := e^{\frac{-c}{2m}t} e^{-i\omega_D t} \quad (17)$$

آنگاه:

می بینیم اگر  $\Delta$  موهومی باشد حرکت از نوع هماهنگ است. با یک دامنه میرا شوند اگر  $\Delta$  حقیقی باشد  $\Gamma$  نیز حقیقی است. جواب از نوع هزلولوی (هیپربولیک) خواهد بود.

### میرایی بحرانی

$$\Delta := 0$$

$$(C_c)^2 - 4mk := 0 \quad C_c := 2\sqrt{mk} \quad (18)$$

$$\frac{C_c}{m} := 2\sqrt{\frac{k}{m}} \quad C_c := 2\omega_0 m \quad (19)$$

اگر میرایی را به صورت درصدی از میرایی بحرانی نشان دهیم:

درصد میرایی

$$C := \zeta C_c$$

$$C := 2\zeta \omega_0 m$$

اکنون معادله حرکت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{c}{m} = 2\zeta \omega_0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (21)$$

اگر  $1 < \zeta$  باشد:

$$r^2 + 2\zeta \omega_0 r + (\omega_0)^2 := 0$$

$$r := -\zeta \cdot \omega_0 + \sqrt{(\zeta \cdot \omega_0)^2 - (\omega_0)^2}$$

if  $\zeta < 1$

$$r := -\zeta \cdot \omega_0 + -i \cdot \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_D := \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (22)$$

$$r := -\zeta \cdot \omega_0 + -i \cdot \omega_D$$

$$x := e^{-\zeta \omega_0 t} (A \cdot \sin \omega_D t + B \cdot \cos \omega_D t)$$

$$x(0) := x_0 \quad B := x_0$$

$$v(0) := v_0 \quad (-\zeta \cdot \omega_0)B + A \omega_D := v_0$$

$$A := \frac{v_0 + \zeta \cdot \omega_0 x_0}{\omega_D}$$

$$x := e^{-\zeta \omega_0 t} \left( \frac{v_0 + \zeta \cdot \omega_0 x_0}{\omega_D} \cdot \sin \omega_D t + x_0 \cdot \cos \omega_D t \right) \quad (23)$$

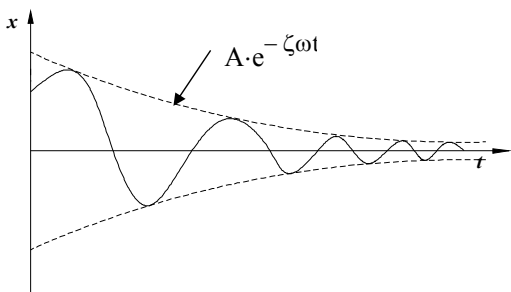
و یا با استفاده از قضیه مثلثاتی پیشین :

$$x := (e^{-\zeta\omega_0 t}) A \cos(\omega_D t - \Phi) \quad (24)$$

$$x := e^{-\zeta\omega_0 t} A \cdot \cos(\omega_D t - \Phi)$$

$$A := \left[ (x_0)^2 + \left( \frac{v_0 + \zeta \cdot \omega_0 x_0}{\omega_D} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan \Phi := \frac{v_0 + \zeta \cdot \omega_0 x_0}{\omega_D \cdot x_0}$$



ملاحظه می شود وقتی  $\zeta < 1$  حالت ارتعاش نوسانی با دامنه میرا شونده است به طوریکه دامنه ارتعاش برابرست با :

$$a := A \cdot e^{-\zeta\omega t}$$

در عمل میرایی سازه ها بسیار کمتر از حد بحرانی است. بطوریکه مثلا برای سازه فولادی نسبت برابر ۱٪ و حتی کمتر از ۰.۰۱ است. باید توجه داشت که در این صورت فرکانس های میرا و نا میرا تقریبا یکی هستند زیرا :

$$\omega_D := \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega \cdot \sqrt{1 - 0.0001} := \omega$$

ارتعاش در حالت  $\zeta \geq 1$  :

در این حالت معادله حرکت هذلولی است و نوسانی نمی باشد اگر  $\zeta = 1$  (میرایی بحرانی):

$$r^2 + 2 \cdot \zeta \omega r + \omega^2 := 0$$

$$\zeta := 1 \quad r_1 := r_2$$

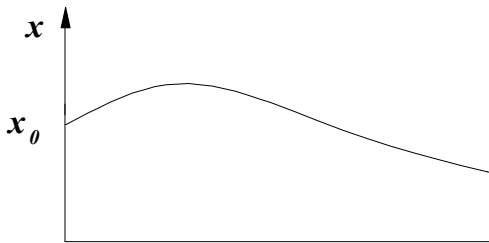
$$r_1 := -\omega_0 \quad x := e^{-\omega t} (A + Bt)$$

$$x(0) := x_0 \quad A := x_0$$

$$v(0) := v_0 \quad -A\omega + B := v_0 \quad B := v_0 + \omega_0 x_0$$

$$x := e^{-\omega t} \left[ x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0)t \right] \quad (25)$$





می بینیم که حرکت نوسانی نیست  
فقط یکبار به اوج رسیده و میرا میشود

حالت  $\zeta > 1$  (حالت بیش میرا)

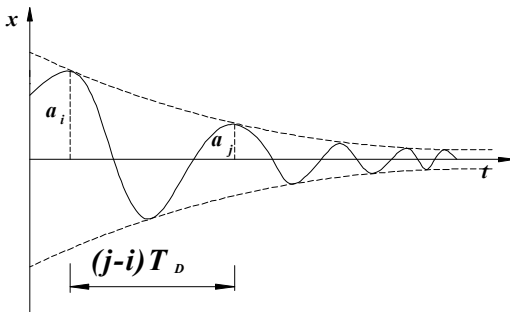
$$r := -\zeta \cdot \omega_0 + \left( \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

$$\bar{\omega} := \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$x := e^{-\zeta \omega t} (A \cdot \sinh \bar{\omega} t + B \cdot \cosh \bar{\omega} t) \quad (26)$$

ملاحظه میشود که در این حالت هم ارتعاش نوسانی نمی باشد. از موارد استفاده این حالت در دستگاه های ثبت ارتعاش (شتاب نگار) است.

تعیین میرایی با استفاده از ارتعاش آزاد:



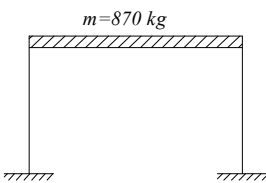
$$x := \left( e^{-\zeta \omega_0 t} \right) A \cos(\omega_D t - \Phi)$$

$$a := A \cdot e^{-\zeta \omega t}$$

اگر  $T_D \approx T$ :

$$\frac{a_i}{a_j} := e^{-\zeta \omega (t_i - t_j)} = e^{-\zeta \omega (j-i) T_D}$$

$$\text{Ln} \frac{a_i}{a_j} := \zeta \omega [(j-i) \cdot 2\pi, \omega] \quad \zeta := \frac{\text{Ln} \frac{a_i}{a_j}}{2\pi(j-i)} \quad (27)$$



مثال: در یک آزمایش فرکانس قاب مقابل برابر ۲.۲۵ هرتز بدست آمده و دامنه ارتعاش آزاد در جدول زیر داده شده است:

n	۰	10	20	30	40
a(mm)	۱۵.۲	۱۰	۶.۷	۴.۸	۳.۴

مطلوبست: ۱- درصد میرایی ۲- سختی قاب ۳- تغییرات درصد میرایی برای دوره‌های مختلف را چگونه توجیه می‌کنید.

$$\zeta := \frac{\text{Ln} \frac{a_i}{a_j}}{2\pi(j-i)}$$

$$\zeta := \frac{\text{Ln} \frac{15.2}{10}}{2\pi(10-0)} = .0067$$

$$\omega_D := 2\pi f_D = 6.28 * 2.25 = 14.13$$

$$\omega_D := \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad 14.13 := \omega \cdot \sqrt{1 - .0067^2} \quad \omega := 4.1$$

$$k := m\omega^2 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k := 17.7 \frac{\text{kg}}{\text{mm}}$$

$$C := 2\zeta m\omega = 2 \cdot .0067 \cdot 870 \cdot 4.13 \quad C := 164 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$= 870 * 14.13^2$$

میزان میرایی نیز

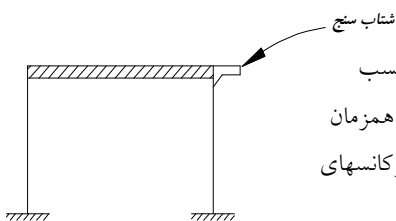
در مورد قسمت سوم قاعدتا انتظار می رود با کاهش دامنه ارتعاش

کم شود.

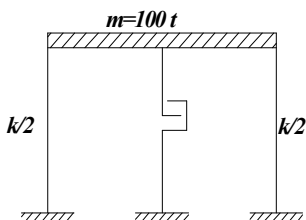
$$\zeta := \frac{\text{Ln} \frac{a_{30}}{a_{20}}}{2\pi(30 - 20)} = \frac{\text{Ln} \frac{6.7}{4.8}}{20\pi} = 0.005$$

با کاهش دامنه ارتعاش میزان میرایی نیز کم می شود.

### روش ارتعاش محیطی برای اندازه گیری خواص دینامیکی:



در این روش تعدادی شتاب سنج روی نقاط مختلف سازه نصب می شود و اطلاعات مربوطه توسط یک دستگاه به صورت همزمان قرائت می شود. به کمک اطلاعات به دست آمده می توان فرکانسهای سازه و مقادیر میرایی نظیر را محاسبه نمود.



مثال: سازه مقابل از یک جا به جایی اولیه 5cm در زمان

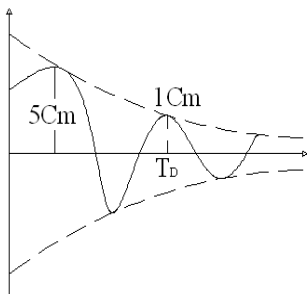
$t = 0$  رها می شود. اگر حداکثر جابه جایی در هنگام بازگشت

(ابتدای دور دوم) برابر 1cm باشد و در زمان  $t = 0.5 \text{ sec}$

رخ دهد مطلوب است: ۱ - نسبت میرایی  $\zeta$  ۲ - سختی جانبی  $k$

۳ - ضریب میرایی  $C$

حل:



$$T_D = 0.5 \text{ sec}$$

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T_D}$$

$$\omega = \frac{\omega_D}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$L_n \frac{V_i}{V_j} = \frac{2\pi(j-i)\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$j=1, i=0 \therefore L_n \frac{5}{1} = \frac{6.28\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = 0.248$$

$$\omega = \frac{\omega_D}{\sqrt{1-\xi^2}} = 12.97$$

$$K = m\omega^2 = 100 \times 12.97^2 = 16811 \left( \frac{KN}{m} \right)$$

$$C = 2\xi m\omega = 1247.2 \left( \frac{t}{s} \right)$$

کوئیز:

سازه تحت نیروی 20k به اندازه 0.5"

جابجا شده و به ناگاه رها می شود. اولین

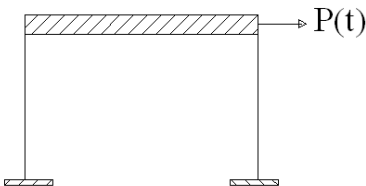
دامنه جابجایی در بازگشت برابر 0.3"

و زمان تناوب این دور برابر T=0.02s

می باشد. وزن سازه، ضریب میرایی و

دامنه حرکت در دور سوم را معین

نمایید.



کوئیز

در سازه تکدرجه نامیرا با جرم ۱۰ کیلوگرم و فرکانس ۲ هرتز مطلوب است محاسبه:

۱. سختی

۲. میرایی بحرانی

دامنه حرکت پس از ۱ ثانیه اگر میراگری با میرایی  $C_c$  به سیستم متصل و جابجایی اولیه

۱۰۰ میلیمتر به آن اعمال گردد.

پاسخ دستگاه به محرک هماهنگ (سینوسی):

□ حالت بدون میرایی:

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \omega t$$

$$x_h = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

$$x_p = G \sin \omega t$$

جواب عمومی

جواب خاص

$$\therefore -G\omega^2 + G\omega_0^2 = \frac{P_0}{m}$$

$$G = \frac{P_0}{m\omega_0^2(1-\beta^2)}, \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$m\omega_0^2 = k \therefore G = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)}$$

$$x = x_h + x_p$$

$$\therefore x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)} \sin \omega t$$

$$\delta_s = \frac{P_0}{k}$$

$$DMF = H(\omega) = \frac{1}{(1-\beta^2)}$$

DMF: ضریب تشدید

اگر  $x_0 = v_0 = 0$

$$\therefore B = 0, A = \frac{P_0 \beta}{k(1-\beta^2)}$$

□ حالت میرا

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t$$

معادله دیفرانسیل حرکت دستگاه تحت محرک هارمونیک:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \omega t$$

$$x_h = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$$

جواب عمومی از قبل:

$$x_p = G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t$$

اگر جواب خاص به صورت یک تابع هارمونیک فرض شود از

نهادن آن در معادله دیفرانسیل حرکت داریم:

$$\therefore [-G_1\varpi^2 - G_2\varpi(2\xi\omega) + G_1\omega^2] \sin \varpi t = \frac{P_0}{m} \sin \varpi t$$

$$[-G_2\varpi^2 - G_1\varpi(2\xi\omega) + G_2\omega^2] \cos \varpi t = 0$$

از متحد ساختن ضرایب:

$$G_1 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$G_2 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$x = x_h + x_p = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin \varpi t - 2\xi\beta \cos \varpi t]$$

یا با نمایش ساده تری:

$$x = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \rho \sin(\varpi t - \varphi)$$

$$\beta = \frac{\varpi}{\omega}$$

$$\rho = \delta_s H(\varpi) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

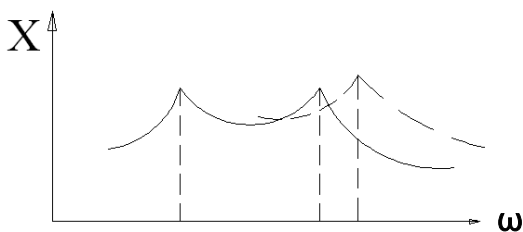
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

**بحث**

پاسخ شامل دو فرکانس است: فرکانس دستگاه و فرکانس محرک

پاسخ شامل دو بخش است: **گذرا و مانا**

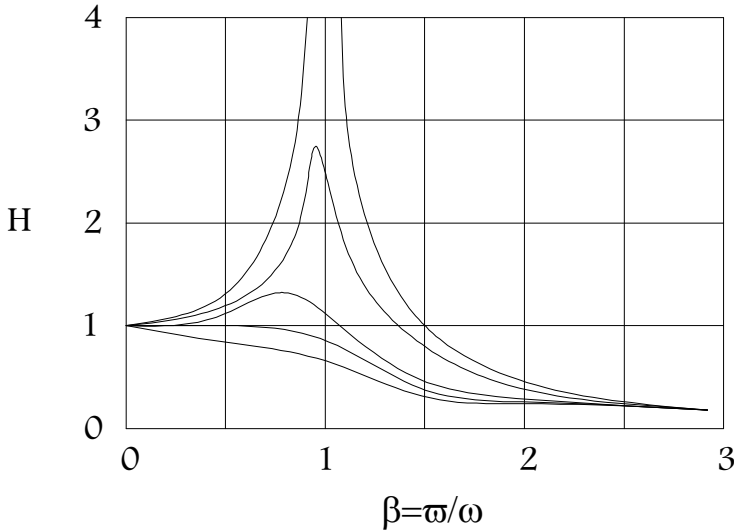
چنانچه پاسخ را به کمک دستگاه تحلیل سیگنال تجزیه کنیم شکل زیر بدست می آید:



## شکل اصلاح شود

ضریب تشدید یا تابع پاسخ

$$H = DMF = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



### اختلاف فاز ارتعاش

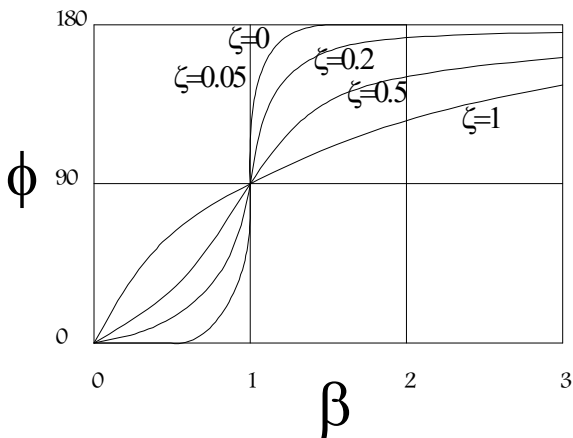
دیدیم که در هنگام اعمال نیروی  $p_0 \sin \omega t$  پاسخ زیر به دست آمد:

$$X = X_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

ملاحظه می شود که پاسخ به اندازه  $\varphi$  از محرک عقب مانده است (از نظر زمانی).

اختلاف فاز  $\varphi$  تابعی از  $\xi$  و  $\beta$  است، پس نمودار زیر بیانگر تاخیر فاز متحرک نسبت به محرک می باشد



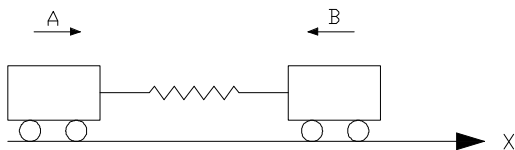
نتیجه:

در ناحیه  $\beta < 1$ ، نیرو و جابجایی همفازند، زیرا  $\varphi < \pi/2$  است.

در حالت تشدید داریم:  $\varphi = \pi/2$

با عبور  $\beta$  از نقطه تشدید ( $\beta = 1$ )، افزایش می یابد و به سرعت به  $\pi$  نزدیک می شود. در این

حالت نیرو و جابجایی (پاسخ) در دو فاز متقابلند که مشابه وضع زیر است :



در حالیکه B بیشترین نیرو را به A در خلاف جهت x اعمال می کند، A بیشترین جابجایی را در

جهت x انجام می دهد.

### حالت تشدید

دیدیم که پاسخ ماندگار (پایدار) یک دستگاه یک درجه آزادی به محرک هماهنگ (سینوسی) برابر است

با :



$$X = \delta_D \sin(\omega t - \varphi) \quad \delta_D = \frac{P_0}{K} \cdot D$$

$$D = \left[ (1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{1/2}$$

برای به دست آوردن  $D_{\max}$  داریم :

$$\frac{dD}{d\beta} = 0 \quad \therefore \quad \beta_m = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \therefore \quad D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

که برای مقادیر کوچک  $\xi$  می توان نوشت :

$$\beta_m \cong 1 \quad , \quad D_m = \frac{1}{2\xi}$$

مثلا برای  $\xi = 0.01$  داریم :

$$D_m = \frac{1}{2 \times 0.01} = 50 \quad \therefore \quad \delta_D = 50\delta_s$$

یعنی برای یک سازه فولادی سخت در دامنه های کوچک که میرایی حدود ۱٪ است ، دامنه جابجایی

دینامیکی ۵۰ برابر جابجایی استاتیکی است .

فرکانس تشدید را  $\omega_R$  گوئیم ، که در حالتی که میرایی کوچک است :

$$\omega_R \cong \omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

در غیر اینصورت

$$\omega_R = \omega\sqrt{1 - 2\xi^2} = \left[ \omega\sqrt{1 - \xi^2} \right] \sqrt{\frac{1 - 2\xi^2}{1 - \xi^2}}$$

$$\therefore \quad \omega_R = \omega_D \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}}$$

اگر  $\xi$  نسبتا کوچک باشد :

$$\therefore \quad \omega_R = \omega_D \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\frac{\omega_R}{\omega_D} = \frac{\omega_D}{\omega} = \sqrt{1 - \xi^2}$$

که برای  $\xi < 0.4$  تا دقت خوبی برخوردار است.

برای  $\beta = 1$  ، با مقادیر کوچک  $\xi$  معادله ارتعاش به صورت زیر در می آید :

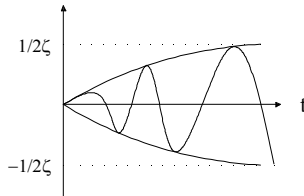
$$X(t) \cong \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t$$

$$\beta = 1 \quad , \quad \varpi = \omega$$

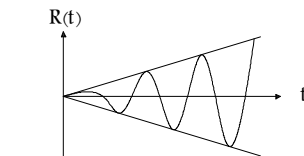
اگر  $\xi = 0$  باشد ، تابع پاسخ فوق به صورت  $\frac{0}{0}$  در می آید که پس از رفع ابهام به کمک قاعده هوییتال ،

داریم :

$$R(t) = \frac{X(t)}{P_0/K} = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \quad \text{نسبت پاسخ دینامیکی به استاتیکی}$$



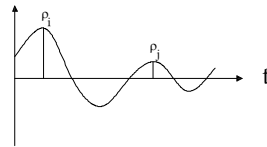
$$0 < \xi \ll 1$$



$$\xi = 0$$

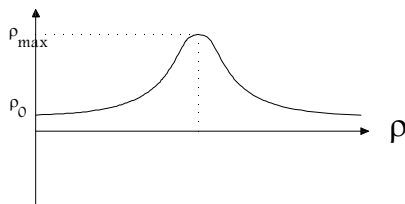
## اندازه گیری میرایی

### ۱- به روش ارتعاش آزاد



$$\xi = \frac{\text{Ln} \frac{\rho_i}{\rho_j}}{2\pi(j-i)}$$

### ۲- دامنه تشدید

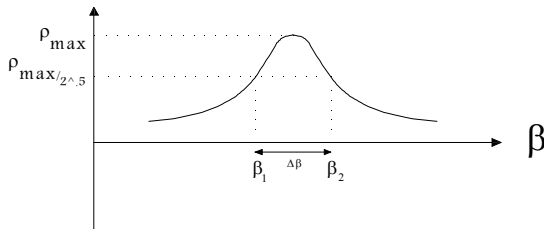


شکل اصلاح شود

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} = \frac{1}{2\xi} \quad \therefore \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{\max}}$$

### 3- روش نوار تشدید Half Power (band Width) Method

در حالی که اندازه گیری  $\rho_0$  مشکل باشد، از این روش استفاده می شود.



شکل اصلاح شود

می توان ثابت نمود که:

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 2\xi \quad \therefore \quad \xi = \frac{1}{2} \Delta\beta$$

و اگر نمودار بر حسب فرکانس رسم شده باشد:

$$f_{res} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$$

$$\beta = \frac{f}{f_{res}} \quad \therefore \quad \xi = \frac{1}{2} \Delta\beta = \frac{1}{2} \frac{f_2 - f_1}{f_{res}} = \frac{1}{2} \frac{f_2 - f_1}{\frac{1}{2}(f_2 + f_1)} = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

میرایی معادل

برای محاسبه انرژی هدر رفته توسط میرایی داریم:

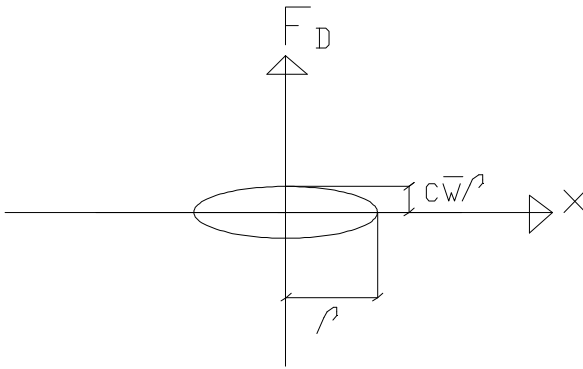
$$X = \rho \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{X} = \rho \omega \cos(\omega t - \varphi)$$

$$f_D = C \dot{X} = C \omega \rho \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{نیروی میرایی}$$

$$\left(\frac{X}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{f_D}{C\omega\rho}\right)^2 = 1 \quad \text{معادله بیضی میرایی}$$

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{f_D}{c\omega\rho}\right)^2 = 1.0$$



$$d_{w_D} = F_D \cdot d_X$$

جزء کار هدر رفته توسط نیروی میرایی  
کل کار هدر رفته در یک دور کامل نوسان برابر است با سطح بیضی

$$\therefore w_D = \pi ab = \pi c \omega \rho^2$$

چنانچه در یک حرکت ارتعاشی میزان انرژی هدر رفته در یک دور کامل نوسان معین شود میرایی معادل از رابطه زیر به دست می آید:

$$C_{eq} = \frac{w_D}{\pi \omega \rho^2}$$

کارذخیره شده در فنر در جابجایی  $\rho$  (دامنه ارتعاشی نوسانی) برابر است با:

$$w_s = \frac{1}{2} K \rho^2$$

طبق تعریف میرایی بحرانی برابر است با:

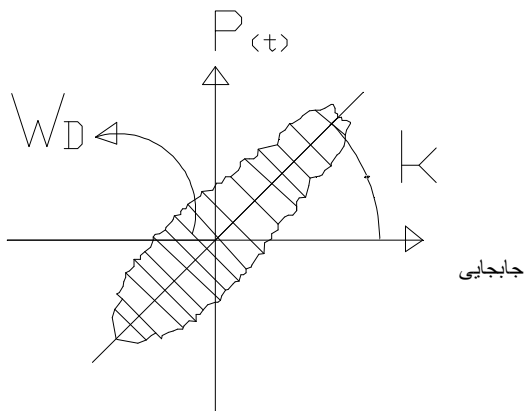
$$C_c = \frac{2K}{\omega}$$

پس نسبت میرایی معادل برابر خواهد بود با

$$\therefore \xi = \frac{C_{eq}}{C_c} = \frac{W_D}{4\pi W_s \frac{\omega}{\omega}} = \frac{W_D}{2\pi K \rho^2 \frac{\omega}{\omega}}$$

که در آن  $W_D$  کار هدر رفته توسط میراگر در یک دور ارتعاش میباشد. اگر آزمایش در حالت تشدید انجام شود نسبت  $\frac{\bar{\omega}}{\omega}$  برابر یک خواهد بود.

برای تعیین میرایی به روش فوق، می‌توان سازه را با سرعت کم (فرکانس پایین) بارگذاری نمود. در این صورت چنانچه نمودار نیروی اعمال شده نسبت به جابجایی را رسم کنیم، می‌توان  $W_D$ ،  $W_s$  و  $K$  را بدست آورد زیرا جابجایی دینامیکی تقریباً با جابجایی استاتیکی برابر است.



کوئیز ۸۶۷/۱۵

سازه تکدرجه با فرکانس ۱۰ هرتز تحت نیروی هماهنگ با فرکانس ۵ هرتز قرار میگیرد و دامنه پاسخ پایدار به ۵ سانتیمتر میرسد. اگر تاخیر فاز پاسخ سازه برابر ۰/۱ رادیان ثبت شده باشد میزان کار میراشده در یک دور را محاسبه نمایید. جرم سازه برابر ۱۰۰ کیلوگرم فرض گردد.

حل:

روش اول

با استفاده از رابطه

$$\therefore w_D = \pi a b = \pi c \varpi \rho^2$$

با نهادن مقادیر ۳۱.۴ برای فرکانس محرک و ۵ سانتیمتر برای دامنه میتوان کار میرا شده را بر حسب C حساب کرد. مقدار C از رابطه زیر بدست می آید:

روش اول:

$$W_D = \pi \cdot C \cdot \bar{w} \cdot \rho^2$$

$$\rho = 0.05 \text{ m}$$

$$\bar{w} = 2 * \pi * 5 = 31.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\beta = \frac{\bar{w}}{w} = \frac{2\pi * 5}{2\pi * 10} = 0.5$$

$$\tan(\phi) = \frac{2\xi \cdot \beta}{1 - \beta^2} \Rightarrow \xi = \frac{\tan(\phi) * (1 - \beta^2)}{2\beta} = \frac{\tan(0.1) * (1 - 0.5^2)}{2 * 0.5} = 0.0753$$

$$C = 2\xi \cdot m \cdot w = 2 * 0.0753 * 100 * 2\pi * 10 = 946.25 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\therefore W_D = \pi * 946.25 * 31.4 * .05^2 = 233.36$$

روش دوم

میدانیم در حالت ارتعاش پایدار، در هر دور نوسان سازه کار تلف شده در میراگر با کار انجام شده توسط نیروی خارجی برابر است پس

$$W_{\text{ext. force}} = W_D$$

$$W_{ext\_force} = \int P dx = \int (p_0 \sin \omega t)(\rho \bar{w} \cos(\omega t - \phi)) dt$$

$$\Rightarrow W_{ext\_force} = p_0 \rho \bar{w} \int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} \sin \omega t \cos(\omega t - \phi) dt$$

$$W_{ext\_force} = W_D = p_0 \rho \bar{w} [\pi \sin \phi]$$

هر دو روش جوابهای یکسانی را ارائه می کنند.

### تعیین میرایی به روش تشدید

اگر سازه را با فرکانس تشدید بار گذاری کنیم یعنی  $\bar{\omega} = \omega$  باشد داریم:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} = \tan^{-1} \infty = \pi/2$$

یعنی پاسخ نسبت به تحریک یک اختلاف فاز ۹۰ دارد:

$$P = P_0 \sin(\omega t)$$

$$x = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{2\xi} \cdot \sin(\omega t - \pi/2)$$

با توجه به وضعیت نیروهای وارد بر سازه داریم:

شکل ص ۲۲ رسم شود

$$f_I + f_D + f_S = p(t)$$

در لحظه ای که نیرو به اوج می رسد، داریم  $\omega t = 2\pi k + \pi/2$  پس:

$$P = P_0 \sin(2\pi k + \pi/2) = P_0$$

$$f_S = kx = k\rho \sin(2\pi k) = 0$$

$$f_D = c \dot{x} = c\omega\rho \cos(2\pi k + \pi/2 - \pi/2) = c\omega\rho$$

$$f_I = m \ddot{x} = -m\rho \omega^2 \sin 2\pi k = 0$$

$$\therefore 0 + f_D + 0 = p \quad \therefore c\omega\rho = P_0 ,$$

$$C = \frac{P_0}{\omega\rho} ; C = 2\xi\omega m$$

$$\therefore \xi = \frac{P_0}{2m\omega^2\rho}$$

و اگر از شرایط قبلی استفاده کنیم:

$$\xi = \frac{W_D}{2\Pi K \rho^2 \frac{\omega}{\omega}}$$

که اگر  $\frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1$  باشد (شرایط تشدید) داریم:

$$\xi = \frac{W_D}{2\Pi K \rho^2}$$

### عایق کردن ارتعاش (Vibration Isolation)

نیروی انتقالی از دستگاههای مکانیکی دوار و نوسانی مانند ژنراتور به شاسی زیرین و تکیه گاه در خیلی از موارد آزار دهنده یا مشکل ساز است. برای کاهش این نیرو میتوان به شکل زیر عمل کرد. جابجایی ناشی از نیروی هماهنگ برابر است با:

$$x(t) = \frac{P_0}{K} D \text{Sin}(\bar{\omega}t - \varphi)$$

و نیروی ایجاد شده در میراگر:

$$f_D = C \dot{x} = C \frac{P_0}{K} D \omega \text{Cos}(\omega t - \varphi)$$

و نیروی ایجاد شده در سازه:

$$f_S = kx = P_0 D \text{Sin}(\bar{\omega}t - \varphi)$$

شکل



جمع نیروی ایجاد شده در سازه و میراگر برابر با نیروی وارد به پایه یعنی  $f_{sup port}$  میباشد پس:

$$f_{sup.} = f_S + f_D = (P_0 D) \sin(\bar{\omega}.t - \varphi) + (C \frac{P_0}{k} D \bar{\omega}) \cos(\bar{\omega}.t - \varphi)$$

$$f_{sup.} = \rho \sin(\bar{\omega}.t - \varphi - \varphi')$$

$$P = P_0 D \sqrt{1 + \left(\frac{C \bar{\omega}}{K}\right)^2} = P_0 D \sqrt{1 + \frac{2m\xi\omega\bar{\omega}}{m\omega^2}}$$

$$\therefore P = P_0 D \sqrt{(1 + 2\xi\beta)^2}$$

ضریب انتقال نیرو به پی:

$$T R = \frac{P}{P_0} = D \sqrt{1 + (2 \xi \beta)^2}$$

*T r a n s m i s s i b i l i t y*

*R a t i o*

شکل ص ۲۳ رسم شود

چنانچه یک دستگاه مکانیکی دوار یا ضربه ای داشته باشیم که دامنه نیروی متناوب  $P_0$  با فرکانس ... را به پی وارد نماید برای کاهش نیروی وارد به پی میتوان ... را تا حد دلخواه افزایش داد. برای این کار میتوان سختی سیستم  $k$  را کاهش داد که اینکار معمولاً به کمک نصب فنر یا لاستیک (تکیه گاه الاستومری) انجام میگردد.

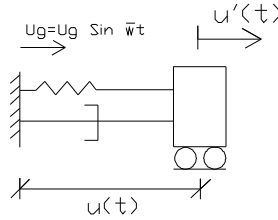
**تأثیر میرایی بر نیروی وارد به پی:**

همانطور که در شکل فوق ملاحظه می شود میرایی تأثیری دوگانه دارد:

اثر آن در بازه  $\beta \leq \sqrt{2}$  کاهشده و در  $\beta \geq \sqrt{2}$  افزایشده است.

**کاهش ارتعاش ناشی از حرکت هماهنگ پی**

با توجه به شکل داریم:



$u_g(t)$  جابجایی مطلق پی:

$u'_g(t)$  جابجایی مطلق سازه:

$u(t)$  جابجایی نسبی سازه:

معادله حرکت نسبی سازه در یک دستگاه شتابدار که همراه با پی در حرکت است:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

اگر حرکت پی هماهنگ باشد، داریم:

$$\ddot{u}_g(t) = -(\bar{\omega})^2 u_g \text{Sin}(\bar{\omega}.t)$$

دامنه نیروی مجازی:

$$P_0 = m\bar{\omega}^2 u_g$$

$$\therefore \ddot{u}_g(t) = -\frac{P_0}{m} \text{Sin}(\bar{\omega}.t)$$

ولذا معادله حرکت نسبی سازه به این صورت است:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \text{Sin}(\bar{\omega}.t)$$

و معادله حرکت پایدار این سیستم عبارت است از:

$$u(t) = H.\delta_s \text{Sin}(\bar{\omega}.t - \varphi)$$

$$\delta_s = \frac{P_0}{K} = \frac{m\bar{\omega}^2 u_g}{m\bar{\omega}^2} = \beta^2 u_g$$

$$\therefore \underline{u(t) = \beta^2 \cdot u_g \cdot H \cdot \sin(\bar{\omega}t - \varphi)}$$

که این حرکت دستگاه نسبت به پی می‌باشد.

و حرکت مطلق دستگاه برابر است با:

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) + u_g(t) \\ &= \beta^2 \cdot H \cdot u_g \cdot \sin(\bar{\omega}t - \varphi) + u_g \sin(\bar{\omega}t) \end{aligned}$$

حل معادله دستگاه تحت تحریک هماهنگ با استفاده از توابع مختلط

معادله دیفرانسیل حرکت دستگاه زیر اثر محرک هماهنگ را می‌توان با استفاده از تابع مختلط برای پاسخ

حل کرد. مثلاً اگر دستگاه تحت تحریک  $P_0 e^{i(\bar{\omega}t + \varphi)}$  گیرد داریم:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\bar{\omega}\dot{u}(t) + \bar{\omega}^2 u(t) = \frac{P_0}{m} e^{i(\bar{\omega}t + \varphi)}$$

در حالت کلی که تابع محرک را به صورت مجموع تعدادی تابع هماهنگ (سری فوریه) نشان دهیم، هر

تابع هماهنگ زاویه فاز  $(\varphi)$  مختلفی خواهد داشت پس در حالت کلی زاویه  $(\varphi)$  صفر نخواهد بود. در

حالت  $\varphi = 0$  داریم:

$$u_p(t) = G \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\dot{u}_p(t) = i\bar{\omega} \cdot G \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\bar{\omega}^2 \cdot G \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

از جایگزینی این مقادیر در معادله دیفرانسیل فوق:

$$G = \frac{P_0}{K} \left[ (1 - \beta^2) + i(2\xi\beta) \right]^{-1} = \frac{P_0}{K} \left[ \frac{(1 - \beta^2) - i(2\xi\beta)}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right]$$

$$\begin{cases} G = \bar{G}.e^{i\theta} \\ \bar{G} = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{\left[ (1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2 \right]^{1/2}} \end{cases}$$

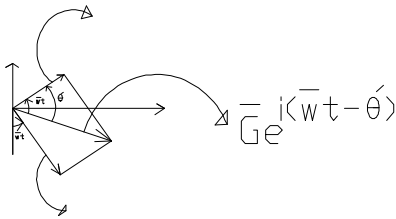
و نیز خواهیم داشت:

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{-2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right)$$

از جایگزینی  $G$  در رابطه مربوط به  $v_p(t)$  و با فرض  $\theta' = -\theta$  داریم:

$$u_p(t) = G.e^{i\bar{\omega}.t} = \bar{G}.e^{-i\theta'}.e^{i\bar{\omega}.t} = \bar{G}.e^{i(\bar{\omega}.t - \theta')}$$

$$\frac{P_0}{K} \left[ \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right] . e^{i\bar{\omega}.t}$$



$$\frac{P_0}{K} \left[ \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right] (-i.e^{i\bar{\omega}.t})$$

تعادل نیروها در دستگاه مختصات مختلط:

تمرین: با رسم کلیه نیروهای خارجی و داخلی در یک دستگاه مختلط نشان دهید که این نیروها در تعادلند.

محرک هماهنگ

$$P = P_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

پاسخ

$$v_p = \rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}$$

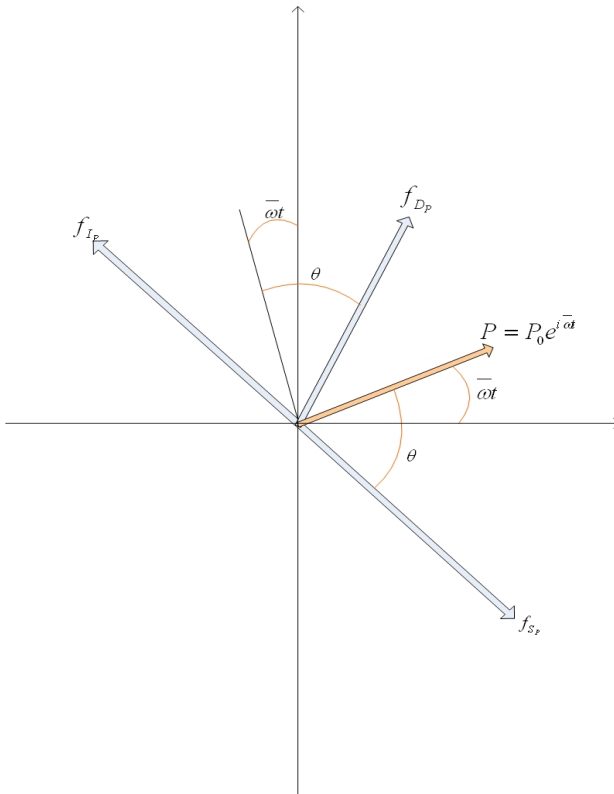
نیروی ماند

$$f_{I_p} = m \dot{v} = -m \bar{\omega}^2 \rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}$$

$$f_{D_p} = c \dot{v} = ic \bar{\omega} \rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}$$

$$f_{S_p} = kv = k \rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}$$

شکل ذیل نشان می دهد که نیروهای میرایی، فنر، اینرسی و نیروهای خارجی دارای اختلاف فاز می باشند.



شکل ۱

میرایی ناشی از جابجایی (میرایی پسماند)

قبلاً دیدیم که:

$$P = P_0 \sin(\bar{\omega} t)$$

$$v_p = \rho \sin(\bar{\omega} t - \varphi)$$

$$f_D = c \dot{v} = (2 \xi \omega m) \rho \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \varphi)$$

$$\frac{f_D^2}{(2 \xi \omega \bar{\omega} m \rho)^2} + \frac{v^2}{\rho^2} = 1$$

$$\therefore W_D = \pi ab = \pi c \rho^2 \bar{\omega} = 2 \pi \xi \omega \bar{\omega} m \rho^2$$

ملاحظه می شود که کار ناشی از میرایی لزج به فرکانس محرک بستگی دارد یعنی در یک دور بارگذاری، مقدار آن ثابت نبوده و به سرعت بارگذاری بستگی دارد.

نوع دیگر میرایی را می توان به صورت میرایی ناشی از جابجایی بیان نمود که با دامنه جابجایی متناسب است اما به اندازه ۹۰ درجه اختلاف فاز دارد، پس

$$f_D = i \xi kv$$

$$f_s = kv$$

$$K = k(1 + i \xi)$$

$$\therefore m \dot{v} + Kv = P_0 e^{i \bar{\omega} t}$$

$$v_p = Ge^{i \bar{\omega} t}$$

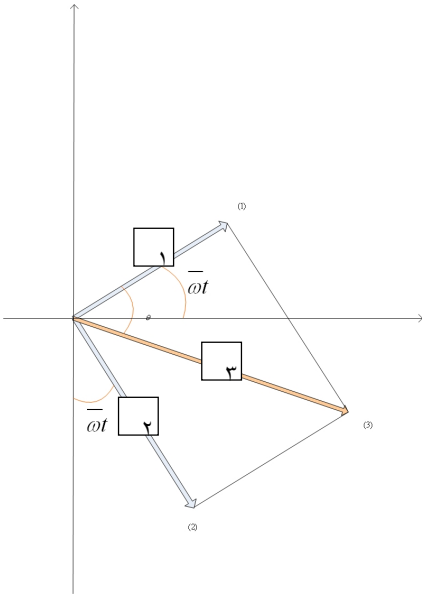
$$\dot{v} = -\bar{\omega}^2 Ge^{i \bar{\omega} t}$$

$$\left[ -m \bar{\omega}^2 + K \right] Ge^{i \bar{\omega} t} = P_0 e^{i \bar{\omega} t}$$

$$\therefore G = \frac{P_0}{k \left[ -\frac{m}{k} \bar{\omega}^2 + (1 + i \xi) \right]}$$

$$G = \frac{P_0}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2) + i \zeta} \right] = \frac{P_0}{k} \frac{(1 - \beta^2) - i \zeta}{(1 - \beta^2)^2 + \zeta^2}$$

$$v = Ge^{i \bar{\omega} t}$$



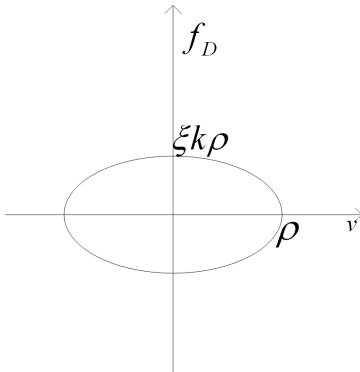
$$(1) \equiv \frac{P_0}{k} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2 + \zeta^2} e^{i\bar{\omega}t}$$

$$(2) \equiv \frac{P_0}{k} \frac{\zeta}{(1 - \beta^2)^2 + \zeta^2} (-ie^{i\bar{\omega}t})$$

$$(3) \equiv \bar{\rho} e^{i(\bar{\omega}t - \bar{\theta})} = (1) + (2)$$

$$\bar{\rho} = \frac{P_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + \zeta^2]^{0.5}$$

$$\bar{\theta} = \tan^{-1} \frac{\zeta}{1 - \beta^2}$$



شکل ۳

$$P = P_0 \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\therefore v = \rho \sin(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$$

$$f_D = \xi k \rho \cos(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$$

$$\left(\frac{f_D}{\xi k \rho}\right)^2 + \left(\frac{v}{\rho}\right)^2 = 1$$

$$W_D = \pi ab = \pi (\xi k \rho) \rho = \pi \xi m \omega^2 \rho^2$$

یعنی انرژی اتلاف شده در یکدور به  $\bar{\omega}$  بستگی ندارد. در کتاب کلاف (ص ۶۱ رابطه B.84)

$\xi = 2\bar{\zeta}$  فرض شده و رابطه به صورت زیر بدست آمده است:

$$W_D = 2 \pi \zeta m \omega^2 \rho^2$$

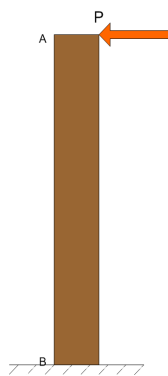
$$\therefore \zeta = \frac{W_D}{2 \pi m \omega^2 \rho^2}$$

باید دانست که در اینجا  $\zeta$  با نسبت میرایی نه قبلاً برای میرایی لزج به صورت زیر تعریف شده بود تفاوت دارد:

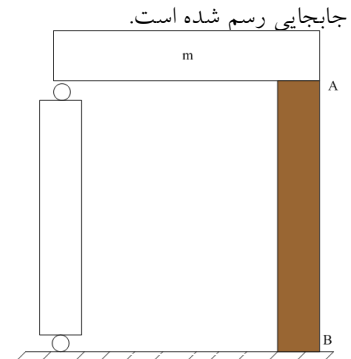
$$C = 2\xi\omega m$$

### راهنمایی برای حل برخی از مسایل دینامیکی

در یکی از مسائل فصل ۳ برای بدست آوردن سختی و میرایی ستون AB، یک آزمایش انجام شده است، بدین ترتیب که این ستون به تنهایی زیر اثر نیروی هماهنگ قرار گرفته است و رابطه نیرو و



شکل ۴



شکل ۵

جابجایی رسم شده است.

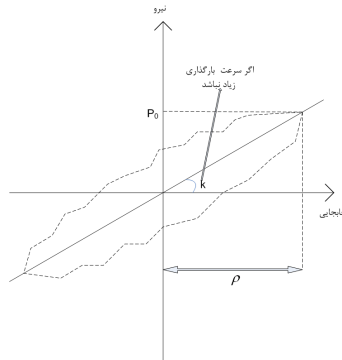
۱- چگونه می توان این آزمایش را انجام داد؟

۲- چه اطلاعاتی را می توان از نمودار فوق بدست آورد؟

-جابجایی به کمک یک سازه مبنا (Reference) و یک جابجایی سنج اندازه گیری می شود.

-مقدار نیرو را با کالیبره کردن محرک هماهنگ و داشتن  $\bar{\omega}$  و بازوی برون محوری مشخص

می کنیم.





شکل ۶

اطلاعات بدست آمده:

$W_D$ : سطح پسماند

$$\therefore W_D = \pi c \overline{\omega} \rho^2$$

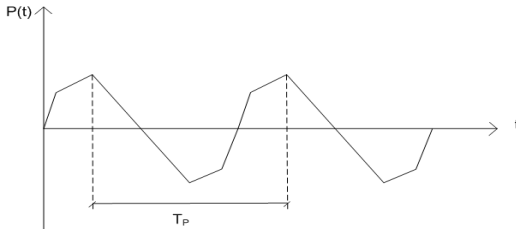
$$K = \frac{p_0}{\rho} \text{ تعیین}$$

$$\therefore c = \frac{W_D}{\pi c \overline{\omega} \rho^2}$$

### محرك تناوبی

هر تابع تناوبی را می توان به شکل سری فوریه نشان داد:

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t$$



شکل ۷

که ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  با استفاده از اتحادهای زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\int_0^{T_p} \sin \frac{2\pi m}{T_p} t \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt = 0$$

$$\int_0^{T_p} \cos \frac{2\pi m}{T_p} t \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt = 0$$

$$\int_0^{T_p} \sin \frac{2\pi m}{T_p} t \cos \frac{2\pi m}{T_p} t dt = 0$$

$$\int_0^{T_p} \sin^2 \frac{2\pi m}{T_p} t dt = \int_0^{T_p} \cos^2 \frac{2\pi m}{T_p} t dt = \frac{T_p}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \cos \frac{2\pi m}{T_p} t dt$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \sin \frac{2\pi m}{T_p} t dt$$

همچنین سری فوریه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \sin(\omega_n t - \varphi_n)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T_p}$$

$$\rho_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$$

$$\varphi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

پاسخ پایدار به چنین تحریکی عبارت است از:

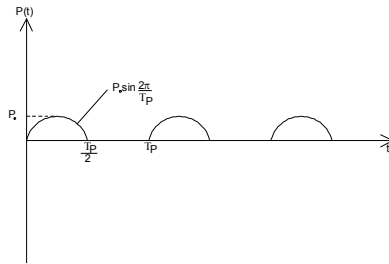
$$X(t) = \frac{P_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P_n D_n}_{H_n} \sin(\omega_n t - \varphi_n - \varphi'_n)$$

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}} \cdot \frac{P_n}{K}$$

$$\varphi_n' = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta_n}{1 - \beta_n^2}$$

$$\beta_n = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{\frac{2\pi n}{T_P}}{\frac{2\pi}{T}} = n \frac{T}{T_P}$$

مثال- معادله حرکت یک دستگاه تکدرجه تحت بارگذاری متناوب زیر را بدست آورید.



حل:

$$a_0 = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} P(t) dt = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P/2} \sin \frac{2\pi}{T_P} t dt = \frac{P_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P/2} P(t) \cos \omega_n t dt = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P/2} P_0 \sin \frac{2\pi t}{T_P} \cos \frac{2\pi n t}{T_P} dt = \begin{cases} 0 \rightarrow n = 2k + 1 \\ \frac{P_0}{\pi} \cdot \frac{2}{1 - n^2} \rightarrow n = 2k \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^{T_P} P(t) \sin \omega_n t dt = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P/2} P_0 \sin \frac{2\pi t}{T_P} \sin \frac{2\pi n t}{T_P} dt = \begin{cases} \frac{P_0}{2} \rightarrow n = 1 \\ 0 \rightarrow n > 1 \end{cases}$$

$$P(t) = \frac{P_0}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega_1 t - \frac{2}{3} \cos 2\omega_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_1 t - \frac{2}{35} \cos 6\omega_1 t \right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_P}$$

اگر از میرایی سازه صرف نظر شود و تناوب بارگذاری برابر  $\frac{4}{3}T$  فرض شود (T تناوب سازه است)

$$T_p = \frac{4}{3}T$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{T}{T_p} = \frac{3}{4}$$

$$\beta_n = \frac{n\omega_1}{\omega} = \frac{3}{4}n$$

$$\therefore X(t) = \frac{P_0}{K\pi} \left( 1 + \frac{8\pi}{7} \sin \omega_1 t + \frac{18}{15} \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{60} \cos 4\omega_1 t + \dots \cos 6\omega_1 t \right)$$

مسائل فصل 4 (سری فوریه) - 4.1.4.2 (کتاب کلاف)

4-1. Express the periodic loading shown in Fig. P4-1 as a Fourier series. Thus, determine the coefficients  $a_n$  and  $b_n$  by means of Eqs. (4-3) for the periodic loading given by

$$p(t) = p_0 \sin \frac{3\pi}{T_p} t \quad (0 < t < 2\pi)$$

$$p(t) = 0 \quad (2\pi < t < 3\pi)$$

Then write the loading in the series form of Eq. (4-1).

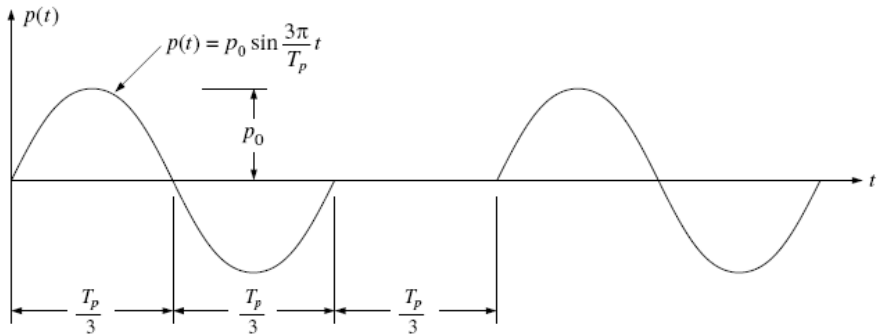


FIGURE P4-1

4-2. Repeat Prob. 4-1 for the periodic loading shown in Fig. P4-2.

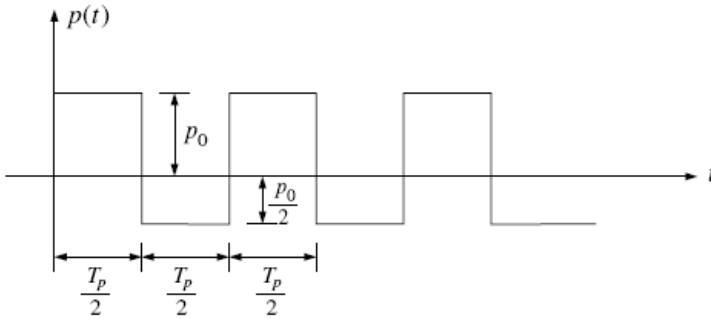
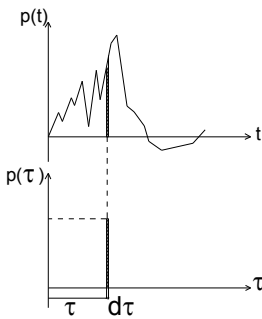


FIGURE P4-2

پاسخ دستگاه تکدرجه به محرک کلی

الف. حالت نامیرا



اگر نیروی  $P(\tau)$  در زمان بسیار کوچک  $d\tau$  اعمال شود، اثر آن معادل اثر ضربه زیر است.

$$I = P(\tau)d\tau$$

طبق قانون نیوتن:

تغییر اندازه حرکت = ضربه

$$\therefore dm v = P(\tau)d\tau$$

سرعت ایجاد شده در جرم  $m$  در اثر ضربه وارده

$$\therefore dv = \frac{1}{m} P(\tau) d\tau$$

$$x(t - \tau) = \frac{dv}{\omega} \sin \omega(t - \tau)$$

$$x(t - \tau) = \frac{1}{m\omega} P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

در واقع اثر این ضربه روی حرکت دستگاه همانند حرکت یک دستگاه با سرعت اولیه  $dv$  است که حرکت از زمان  $t = \tau$  آغاز شده باشد. چون  $P(t)$  مرکب از تعداد بسیار زیادی از این ضربات است (از نظر نظری  $\infty$ ) پس، حرکت کلی تحت اثر  $P(t)$  به صورت حاصل جمع حرکات فوق است، یعنی:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega} P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

انتگرال دوهمامل

این انتگرال حالت خاصی از انتگرال چرخشی (*Convolution Integral*) است:

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t P(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \end{cases}$$

ب. در حالت میرا

به طور مشابه می توان نشان داد که پاسخ دستگاه در این حالت برابر است با:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t - \tau) d\tau$$

حل انتگرال دوهمامل به روش عددی

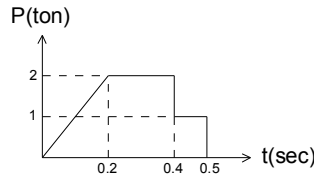
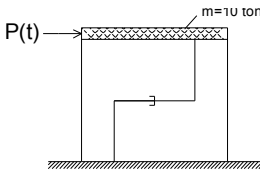
صفحات ۸۷ تا ۹۲ کتاب مهندسی زلزله/جلد ۱

روش عددی انتگرال دوهمامل توسط دانشجویان مطالعه شود/ کتاب کلاف / ص؟

تمرین: برنامه ای برای حل عددی انتگرال دوهمال نوشته وبه کمک آن پاسخ زمانی جابجایی سازه زیر را محاسبه نمایید. حرکت از سکون آغاز می شود.

$$\xi = 0.05$$

$$f = 10\text{HZ}$$



مهلت تحویل: دو هفته

تمرین: فصل ۶ مساله ۶.۱

6-1. The undamped SDOF system of Fig. P6-1a is subjected to the half sine-wave loading of Fig. P6-1b. Calculate the spring force history  $f_s(t)$  for the time  $0 < t < 0.6 \text{ sec}$  by numerical evaluation of the Duhamel integral with  $\Delta\tau = 0.1 \text{ sec}$  using:

- Simple summation
- Trapezoidal rule
- Simpson's rule

Compare these results with those obtained with Eq. (5-1) evaluated at the same  $0.1 \text{ sec}$  time increments.

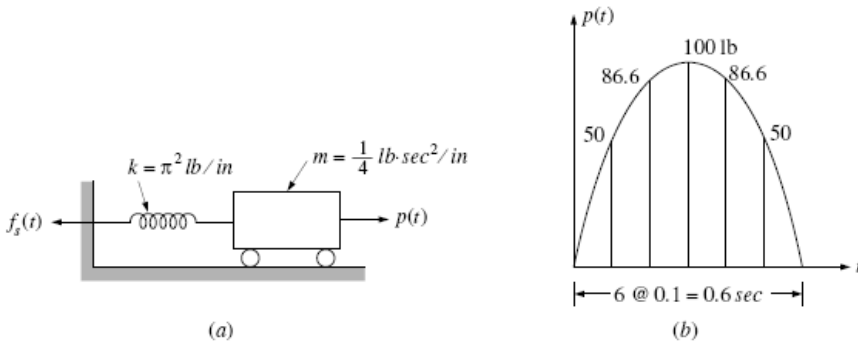


FIGURE P6-1

اکنون به تشریح روش عددی حل انتگرال دوهمال میپردازیم:

حالت نامیرا

دیدیم که پاسخ زمانی به محرک  $P(t)$  برابر است با

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega} P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

پس برای تعیین مقدار پاسخ در هر لحظه  $t_1$  باید انتگرال زیر را به صورت عددی حل کرد:

$$v(t_1) = \frac{1}{m\omega} \int_0^{t_1} P(\tau) \sin \omega(t_1 - \tau) d\tau$$

اگر بخواهیم پاسخ را در طول ۱۰ ثانیه و در گامهای زمانی ۰/۱ ثانیه بدست آوریم باید ۱۰۰۰ بار انتگرال فوق را بروش عددی حل کنیم. در هر بار، باید تابع زیر انتگرال  $y(\tau) = P(\tau) e^{-\xi\omega(t_1 - \tau)} \sin \omega_D(t_1 - \tau)$  را به گامهای ریز تقسیم و محاسبه نمود. اشکال این روش این است که مقادیر  $y(\tau)$  که برای تعیین  $y(t_1)$  محاسبه شده اند، براحتی برای محاسبه  $y(t_2)$  بکار نمی آیند. برای حل این مشکل میتوان از تکنیک زیر استفاده نمود:

با توجه به رابطه مثلثاتی زیر

$$\sin(\omega t - \omega \tau) = [\sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau]$$

برای ساده کردن انتگرال دوهمامل داریم:

$$v(t) = \sin \omega t \left[ \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] - \cos \omega t \left[ \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]$$

و یا

$$v(t) = [\bar{A}(t) \sin \omega t - \bar{B}(t) \cos \omega t]$$

که در آن

$$\bar{A}(t) \equiv \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad \bar{B}(t) \equiv \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

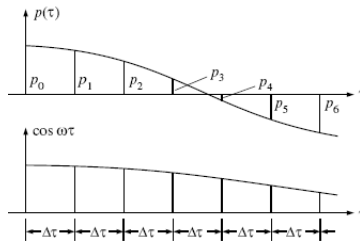
بدین ترتیب انتگرال پیچیده دوهمامل به رابطه ساده ای تبدیل شد که برای بدست آوردن آن باید انتگرال های ساده فوق را حل کرد.

اکنون اگر زمان محاسبه را به  $N$  گام  $\Delta\tau$  تقسیم کنیم داریم

$$t_i = i \cdot \Delta\tau$$

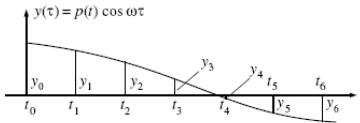
برای محاسبه انتگرال میتوان مقدار این دو تابع را در گامهای زمانی فوق محاسبه نمود:





حال از ضرب این دو مقدار داریم:

$$y(\tau) \equiv p(\tau) \cos \omega \tau$$



برای محاسبه  $A(t)$  باید سطح زیر منحنی  $y(t)$  را از صفر تا  $t=N\Delta\tau$  محاسبه نمود. این محاسبه را میتوان به روشهای مختلفی انجام داد:  
جمع ساده:

$$\bar{A}_N \doteq \frac{\Delta\tau}{m\omega} [y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1}]$$

روش دوزنقه:

$$\bar{A}_N \doteq \frac{\Delta\tau}{2m\omega} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + y_N]$$

روش سیمسون:

$$\bar{A}_N \doteq \frac{\Delta\tau}{3m\omega} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{N-1} + y_N]$$

بدین ترتیب با محاسبه مقدار  $y$  در نقاط زیر میتوان ضرایب فوق را در این نقاط با استفاده از یکی از روشهای فوق حساب کرد:

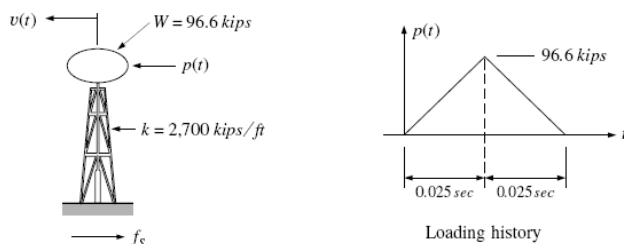
$$t_0 = 0, t_1 = \Delta\tau, t_2 = 2\Delta\tau, t_3 = 3\Delta\tau, \dots, t_N = N\Delta\tau$$

مقادیر  $\bar{B}_N$  نیز بطور مشابه محاسبه خواهند شد و پاسخ زمانی در هر لحظه  $t_N$  برابر است با:

$$v_N = \bar{A}_N \sin \omega t_N - \bar{B}_N \cos \omega t_N$$

**Example E6-1.** The dynamic response of a water tower subjected to a blast loading will now be presented to illustrate the above numerical procedure for obtaining undamped response through the time domain in accordance with Eq. (6-14). The idealizations of the structure and blast loading are shown in Fig. E6-1. For this system, the vibration frequency and period are

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{2,700(32.2)}{96.6}} = 30 \text{ rad/sec} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.209 \text{ sec}$$



The time increment used in the numerical integration is  $\Delta\tau = 0.005 \text{ sec}$ , which corresponds to an angular increment in free vibrations of  $\omega\Delta\tau = 0.15 \text{ rad}$  (probably a somewhat longer increment would give equally satisfactory results). In this analysis, Simpson's-rule summation as given by Eq. (6-13c) is used.

An evaluation of response over the first 10 time steps is presented in a convenient tabular format in Table E6-1. The operations performed in each column are generally apparent from the labels at the top; however, a few brief comments may be helpful as follows: (a) Columns (4) through (10) are used to evaluate  $\bar{A}_N/F$  (where  $F \equiv \Delta t/3m\omega$ ) in accordance with Eq. (6-13c) using  $y_N \equiv p_N \cos\omega t_N$ . (b) Columns (11) through (17) are used to evaluate  $\bar{B}_N/F$  in accordance with its equivalence of Eq. (6-13c). (c) Columns (18) through (21) are used to evaluate  $v_N$  in accordance with Eq. (6-14). (d) The last column is used to evaluate the spring force  $f_{SN} = kv_N$ . (e) The multiplication factor  $M_2 = 1$  need not be shown in Table E6-1; however, it is entered for later comparison with  $M_2 \neq 1$  as required in the damped-response solution.

Since the blast loading terminates at the end of the first 10 time steps, the values of  $\bar{A}$  and  $\bar{B}$  remain constant after time  $t = 0.050$ . If these constant values are designated  $\bar{A}^*$  and  $\bar{B}^*$ , the free vibrations which follow the blast loading are given by

$$v(t) = \bar{A}^* \sin \omega t - \bar{B}^* \cos \omega t$$

in accordance with Eq. (6-10). The amplitude of this motion is

$$v_{\max} = [(\bar{A}^*)^2 + (\bar{B}^*)^2]^{1/2}$$

In the above example,  $\bar{A}^* = 1026 F = 0.0190 \text{ ft}$  [0.579 cm] and  $\bar{B}^* = 956 F = 0.0177 \text{ ft}$  [0.539 cm] [see Columns (10) and (17) for  $N = 10$ ] so that  $v_{\max} = 0.0260 \text{ ft}$  [0.792 cm] and  $f_{S\max} = 70.2 \text{ kips}$  [31, 840 kg].

TABLE E6-1  
Numerical Duhamel integral analysis without damping

N	$t_N$	$p_N$	$\sin 30 t_N$	$\cos 30 t_N$	$y_N$	$y_{N-1}$	$y_{N-2}$	$M_1 \times$	$M_2 \times$	$\frac{\bar{A}_{N-2}}{F}$	$\frac{\bar{A}_N}{F}$	$y_N$	$y_{N-1}$	$y_{N-2}$	$M_1 \times$	$M_2 \times$	$\frac{\bar{B}_{N-2}}{F}$	$\frac{\bar{B}_N}{F}$				$v_N$	$f_{S_N}$
sec	kips	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)
0	0.000	0	0	1.000	0	—	—	—	—	—	0	0	—	—	—	—	0	0	0	0	0	0	0
1	0.005	19.32	0.149	0.989	19.1	0	—	—	—	—	2.88	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0.010	38.64	0.296	0.955	36.9	19.1	0	76.4	0	0	113.3	11.4	2.88	0	11.5	0	0	22.9	33.5	21.9	11.6	0.0002	0.54
3	0.015	57.96	0.439	0.900	52.2	36.9	19.1	—	—	—	—	25.2	11.4	2.88	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	0.020	77.28	0.565	0.825	63.8	52.2	36.9	208.8	150.2	113.3	422.8	43.7	25.2	11.4	100.8	34.3	22.9	178.8	239	148	91	0.0017	4.60
5	0.025	96.60	0.682	0.732	70.7	63.8	52.2	—	—	—	—	65.9	43.7	25.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	0.030	77.28	0.783	0.622	48.1	70.7	63.8	282.8	486.6	422.8	817.5	60.5	65.9	43.7	263.6	222.5	178.8	546.6	640	340	300	0.0056	15.1
7	0.035	57.96	0.867	0.498	28.9	48.1	70.7	—	—	—	—	50.3	60.5	65.9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0.040	38.64	0.932	0.362	14.0	28.9	48.1	115.6	865.6	817.5	995.2	36.0	50.3	60.5	201.2	607.1	546.6	844.3	928	306	622	0.015	31.0
9	0.045	19.32	0.976	0.219	4.23	14.0	28.9	—	—	—	—	18.9	36.0	50.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0.050	0	0.997	0.0707	0	4.23	14.0	16.9	1009	995.2	1026	0	18.9	36.0	75.6	880.3	844.3	955.9	1023	67.6	955	0.0177	47.8

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{W}} = 30 \text{ rad/sec} \quad \Delta t = 0.0005 \text{ sec} \quad M_1 = 4 \quad M_2 = 1 \quad F = \frac{\Delta \tau}{3\omega} = 1.852 \times 10^{-3} \text{ ft/kip} \quad k = 2700 \text{ kips/ft}$$

### حالت میرا

در حالت میرا انتگرال دو هامبل برابر است با

$$v(t) = \frac{1}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi \omega (t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau) d\tau$$

مشابه قبل، در این حالت با استفاده از بسط مثلثاتی داریم

$$v(t) = A(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t$$

$$A(t) \equiv \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{\exp(\xi \omega \tau)}{\exp(\xi \omega t)} \cos \omega_D \tau d\tau$$

$$B(t) \equiv \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{\exp(\xi \omega \tau)}{\exp(\xi \omega t)} \sin \omega_D \tau d\tau$$

آشنایی با مفهوم تحلیل دینامیکی در قلمرو فرکانس

قبلا با کاربرد سری فوریه آشنا شدیم و دیدیم که هر تابع متناوبی را می توان به صورت سری فوریه

نشان داد:

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(\omega_n t - \varphi_n)$$

که مقادیر  $P_n$  و  $\varphi_n$  تابعی از  $\omega_n$  می باشند و قابل محاسبه اند. با محاسبه مقدار  $P_n$  و  $\varphi_n$  تابع  $P(t)$  به طور

کامل تعریف شده است. از آنجا که

$$P = P(\omega) \quad \text{و} \quad \varphi = \varphi(\omega)$$

پس تابع  $P$  در قلمرو فرکانس تعریف شده است.

پاسخ دستگاه تکدرجه به چنین محرکی قبلا بصورت زیر بدست آمده است:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n H_n \sin(\omega_n t - \varphi_n - \varphi'_n)$$

پس پاسخ  $X$  نیز در قلمرو فرکانس تعریف شده است. اگر

$$\rho' = P_n H_n \quad \therefore \quad \rho'(\omega) = P(\omega) H(\omega) \quad (1)$$

$$\varphi''(\omega) = \varphi(\omega) + \varphi'(\omega) \quad (2)$$

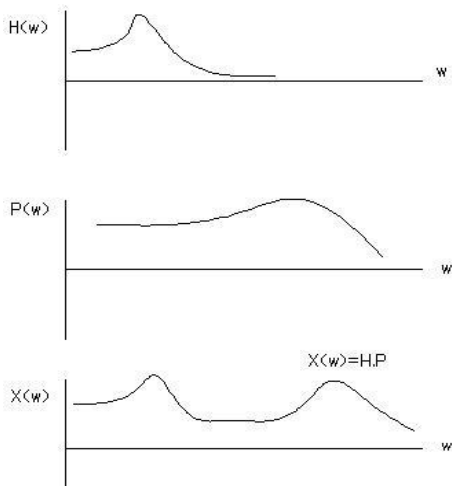
رابطه (۱) نحوه عملکرد دینامیکی را به روشنی نشان می دهد. در واقع نقش دستگاه دینامیکی در تابع پاسخ  $H(\omega)$  جلوه گر می باشد به طوریکه هر محرک  $P(\omega)$  در تابع پاسخ  $H(\omega)$  ضرب شده و پاسخ  $\rho'(\omega)$  را تشکیل می دهد. در حالت کلی داریم:

$$X(\omega) = H(\omega) \cdot P(\omega)$$

*frequency response function* =  $H(\omega)$

نمایش گرافیکی این رابطه در شکل نشان داده شده است:

نحوه تشخیص ورودی به دستگاه از طریق کالبره کردن:



$$H(\omega) = \frac{X_1(\omega)}{P_1(\omega)}$$

$$\therefore P_2(\omega) = X_2(\omega) \cdot H^{-1}(\omega)$$

مثال: میز زلزله.

### تعمیم روش فوریه برای محرک کلی

هر محرک کلی را میتوان مطابق شکل به صورت محرک متناوب با زمان تناوب اختیاری  $T_p$  نشان داد بطوریکه این زمان تناوب بسیار بزرگتر از زمان اعمال محرک  $t_1$  است. در اینصورت عینا میتوان از روابط قبلی برای تبدیل محرک به سری فوریه استفاده کرد.

شکل

## [Impulsive loads] – پاسخ به تحریک ضربه ای

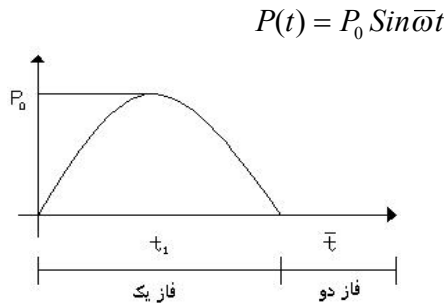
بارهای ضربه ای در یک زمان کوتاه اعمال شده پایان میابند و پاسخ سازه نیز زود به مقدار اوج رسیده و میرا می شود. این بارها در طراحی سیستم هایی چون کامیون خودرو و جرثقیل متحرک کاربرد دارند. در این نوع بارگذاری میرایی سازه از اهمیت چندانی برخوردار نیست زیرا قبل از آنکه میرایی بتواند اثری بر پاسخ بگذارد پاسخ به اوج میرسد.

### اثر ضربه هماهنگ (سینوسی) بر دستگاه نامیرا

حرکت در دو فاز قابل مطالعه است:

فاز یک که نیروی خارجی در حال وارد شدن است.

فاز دو که نیروی خارجی حذف شده است.



معادله حرکت در فاز یک عبارت است از:

$$X(t) = A \text{Sin} \omega t + B \text{Cos} \omega t + \frac{P_0}{K} D \text{Sin} \bar{\omega} t$$

$$D = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$X(0) = 0 \quad , \quad V(0) = 0 \quad \therefore B = 0 \quad , \quad A = -\frac{P_0 \beta}{K} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\therefore X(t) = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} (\text{Sin} \bar{\omega} t - \beta \text{Sin} \omega t) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

در فاز دو حرکت به حالت ارتعاش آزاد تبدیل میشود و داریم:

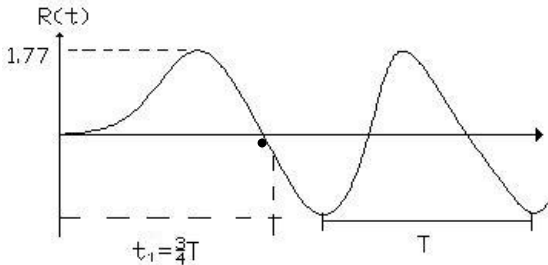
$$X(\bar{t}) = \frac{V(t_1)}{\omega} \cdot \text{Sin} \omega \bar{t} + X(t_1) \text{Cos} \omega \bar{t} \quad 0 \leq \bar{t} = t - t_1$$

نسبت پاسخ [Response Ratio] - R(t)

$$\delta_s = \frac{P_0}{K}$$

$$R(t) = \frac{X(t)}{\delta_s}$$

مثلا در مثال پیشین اگر  $t_1/t = 3/4$  باشد داریم:



تعیین لحظه پاسخ اوج

در حالتی که  $\beta < 1$  باشد در محدوده  $0 \leq t \leq t_1$ :

$$R(t) = \frac{1}{1 - \beta^2} (\text{Sin} \bar{\omega} t - \beta \text{Sin} \omega t)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \bar{\omega} \text{Cos} \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \omega \text{Cos} \omega t = 0$$

$$\text{Cos} \bar{\omega} t = \text{Cos} \omega t \quad \therefore \quad \bar{\omega} t = 2\pi n \pm \omega t$$

این پاسخ فقط در فاصله  $t \leq t_1$  و یا  $\bar{\omega} t \leq \pi$  صادق است.

$$\bar{\omega} t = 2\pi - \omega t \quad \therefore \quad \bar{\omega} t \left(1 + \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right) = 2\pi$$

$$\bar{\omega} t < \pi$$

$$\therefore \bar{\omega}t = \frac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}}}, \quad \beta < 1 \quad \text{و یا}$$

$$\text{مثلا اگر } \bar{T} = t_1 = \frac{3}{4}T \quad \text{و یا} \quad \beta = \frac{T}{\bar{T}} = \frac{1}{6} = 0.67 \quad \text{آنگاه:}$$

$$\bar{\omega}t = \frac{2\pi}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{4}{5}\pi$$

$$R_{\max} = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \left[ \text{Sin} \frac{4}{5}\pi - \frac{2}{3} \text{Sin} \left( \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{3}{2} \right) \right] = 1.77$$

در حالتی که  $\beta > 1$  باشد دیگر این رابطه درست نیست. یعنی  $\bar{\omega}t > \pi$  است و از این رو پاسخ اوج

در زمان  $t > t_1$  رخ می دهد و داریم:

$$X(t_1) = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} (0 - \beta \text{Sin} \frac{\pi}{\beta})$$

$$V(t_1) = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{\bar{\omega}}{1 - \beta^2} (-1 - \text{Cos} \frac{\pi}{\beta})$$

دامنه ارتعاش آزاد برابر است با:

$$\rho = \left[ \left( \frac{V_0}{\omega} \right)^2 + X_0^2 \right]^{1/2} = \frac{P_0/K}{1 - \beta^2} \cdot \beta \cdot \sqrt{2 + 2 \text{Cos} \frac{\pi}{\beta}}$$

$$\therefore R_{\max} = \frac{\rho}{P_0/K} = \frac{2\beta}{1 - \beta^2} \cdot \text{Cos} \frac{\pi}{2\beta} \quad \beta > 1, \quad t > t_1$$



مثلا اگر  $\beta = \frac{4}{3}$  باشد ( $t_1 = \frac{3}{8}T_0$ )

$$R_{\max} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} \text{Cos} \frac{\pi}{2(\frac{4}{3})} = 1.31$$

در حالتی که  $\beta = 1$  باشد معادله حرکت تشدید حاکم است:

$$X(t) = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{2} (\text{Sin } \omega t - \omega t \text{Cos } \omega t)$$

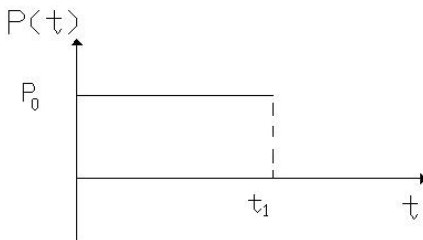
$$R(t) = \frac{1}{2} (\text{Sin } \omega t - \omega t \text{Cos } \omega t)$$

$$\omega t = \frac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\omega}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$R_{\max} = \frac{1}{2} (0 - \pi(-1)) = \frac{\pi}{2} = 1.57$$

مطالعه کتاب توسط دانشجویان در مورد انواع ضربه و نحوه تعیین پاسخ اوج

ضربه مستطیل یا بار پله ای - [Step Loading]



$$X_h(t) = A \text{Sin} \omega t + B \text{Cos} \omega t$$

$$X_p(t) = \frac{P_0}{K}$$

$$X(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{K}$$

$$X(0) = \dot{X}(0) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} X(t) = \frac{P_0}{K}(1 - \cos \omega t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ X(t) = \frac{V(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + X(t_1) \cos \omega \bar{t} & 0 \leq \bar{t} = t - t_1 \end{cases}$$

واضح است که اگر  $t_1 > \frac{T}{2}$  باشد یعنی  $\omega t_1 > \pi$  ،  $R_{\max}$  همواره در فاصله  $t \leq t_1$  رخ می دهد و

مقدار آن برابر است با:

$$\omega t = \pi \quad \therefore R_{\max} = 1 + 1 = 2$$

اگر زمان اعمال بار پله ای کوتاه باشد یعنی  $t_1 < \frac{T}{2}$  پاسخ اوج پس از اتمام بارگذاری رخ می دهد و

داریم:

$$\rho_{\max} = \sqrt{\left(\frac{V(t_1)}{\omega}\right)^2 + (X(t_1))^2}$$

$$\therefore V(t_1) = \frac{P_0}{K} \omega \sin \frac{2\pi}{T} t_1$$

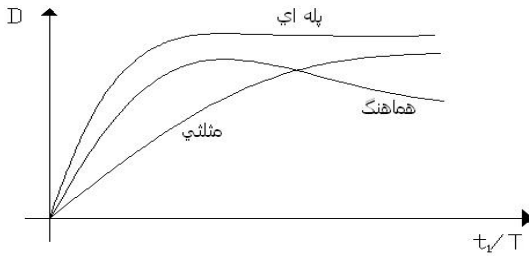
$$\therefore \rho_{\max} = \frac{P_0}{K} \left[ \sin^2 \frac{2\pi}{T} t_1 + \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t_1\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\therefore R_{\max} = \frac{\rho_{\max}}{(P_0/K)} = \left[ 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t_1\right) \right]^{1/2} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T}$$

$$\rho_{\max} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T} \quad , \quad t_1 < \frac{T}{2}$$

## طیف پاسخ ، طیف ضربه – [Response Spectra , Shock Spectra]

دیدیم که مقدار  $R_{max}$  (که با  $D$  یا ضریب تشدید دینامیکی هم نشان داده میشود) برای یک ضربه خاص فقط به مقدار  $\frac{t_1}{T}$  بستگی دارد و از این رو می توان آنرا به شکل زیر رسم کرد که آنرا طیف ضربه یا پاسخ می خوانند.



(برای طیف انواع ضربه ها به کتاب مراجعه شود)

توضیح: برای ضربه مثلثی به معادله  $P(t) = at + b$  داریم:

$$m\ddot{X} + kX = at + b$$

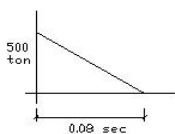
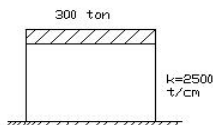
$$\therefore X_p = \alpha t + \beta \quad \therefore k(\alpha t + \beta) = at + b$$

$$\therefore X_p = \frac{1}{K}(at + b)$$

$$X_h = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad X(t) = X_h + X_p$$

با ارضا شرایط اولیه حرکت  $A$  و  $B$  بدست می آیند.

مثال: جابجایی قاب شکل روبرو تحت ضربه ناشی از انفجار را محاسبه کنید.



$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{2500 \times 9.8 \times 100}{300}} = 90.4$$

$$T_0 = 0.069$$

$$t_1 = 0.08 \quad \therefore \frac{t_1}{T_0} = 1.15$$

از نمودار ص ۸۰ کتاب کلاف (طیفهای پاسخ ضربه ای) برای بار مثلی داریم :

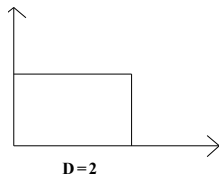
$$D = 1.6 \quad \therefore \frac{X_{\max}}{\rho_0 / K} = 1.6$$

$$X_{\max} = \frac{500}{2500} \times 1.6 = 0.32 \text{ cm}$$

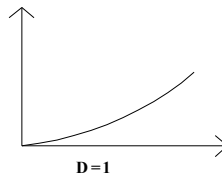
### روش تخمین اثر ضربه

۱) برای ضربه های طویل (مثلا  $\frac{t_1}{T} > 1$ ) عمدتاً به نحوه رسیدن نیرو به اوج خود بستگی دارد .

برای بار پله ای مقدار  $D$  برابر ۲ و برای بار استاتیکی برابر ۱ می باشد.



بار پله ای



بار استاتیکی

۲) برای ضربه های سریع جابجایی سازه به طور عمده به مقدار ضربه و نیز فرم ضربه بستگی دارد .

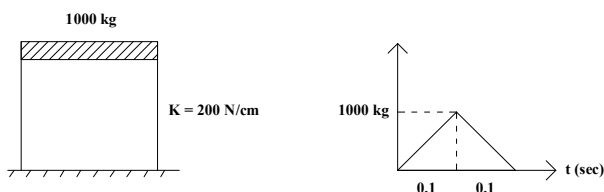
$$m\Delta v = \int_0^{t_1} p(t).dt = I \quad \therefore \Delta v = \frac{I}{m} \quad \text{زیرا:}$$

$$x(t) = \frac{I}{m\omega} \text{Sin}(\omega t) \quad \therefore x_{\max} = \frac{I}{m\omega}$$

البته مقدار  $D$  به فرم ضربه بستگی دارد زیرا  $D = \frac{x_{\max}}{P_0 / K}$  و  $P_0$  برای یک مقدار ضربه ثابت به فرم

ضربه بستگی دارد .

مثال : در سازه مقابل اثر ضربه ( جابجایی قاب ) را حساب کنید .



$$I = \frac{1}{2} \times 1000 \times 0.2 = 100 \text{ kg} \cdot \text{sec} = \underline{981 \text{ N} \cdot \text{sec}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200 \times 100}{1000}} = 4.41 \quad \therefore T_0 = 1.4 \text{ sec}$$

$$\frac{t_1}{T} = \frac{.2}{1.4} \ll 1 \quad \therefore x_{\max} = \frac{I}{m\omega} = \frac{981}{1000 \times 4.47} = 0.22 \text{ m}$$

$$D = \frac{x_{\max}}{P_0/K} = \frac{0.22}{1000/200} = 0.044$$

تمرین. خطای پاسخ فوق را در مقایسه با پاسخ دقیق محاسبه کنید.

فصل ۵ - مسائل ضربه : ۱ ، ۲ و ۵

5-1. Consider the basic dynamic system of Fig. 2-1a with the following properties:

$W = 600 \text{ lb}$  ( $m = W/g$ ) and  $k = 1,000 \text{ lb/in}$ . Assume that it is subjected to a half sine-wave impulse (Fig. 5-2) of amplitude  $p_0 = 500 \text{ lb}$  and duration  $t_1 = 0.15 \text{ sec}$ . Determine:

- The time at which the maximum response will occur.
- The maximum spring force produced by this loading; check this result with that obtained by use of Fig. 5-6.

5-2. A triangular impulse that increases linearly from zero to the peak value is expressed as  $p(t) = p_0(t/t_1)$  ( $0 < t < t_1$ ).

- Derive an expression for the response of a SDOF structure to this loading, starting from "at rest" conditions.
- Determine the maximum response ratio

$$R_{\max} = \frac{v_{\max}}{p_0/k}$$

resulting from this loading if  $t_1 = 3\pi/\omega$ .

5-3. A quarter cosine-wave impulse is expressed as

$$p(t) = p_0 \cos \bar{\omega} t \quad 0 < t < \frac{\pi}{2\bar{\omega}}$$

- (a) Derive an expression for the response to this impulse, starting from rest.  
 (b) Determine the maximum response ratio

$$R_{\max} = \frac{v_{\max}}{p_0/k} \quad \text{if } \bar{\omega} = \omega$$

5-4. The basic SDOF system of Fig. 2-1a, having the following properties,  $k = 20 \text{ kips/in}$  and  $m = 4 \text{ kips} \cdot \text{sec}^2/\text{in}$ , is subjected to a triangular impulse of the form of Fig. 5-5 with  $p_0 = 15 \text{ kips}$  and  $t_1 = 0.15 T$ .

- (a) Using the shock spectra of Fig. 5-6, determine the maximum spring force  $f_{S\max}$ .  
 (b) Using Eq. (5-21), compute approximately the maximum displacement and spring force; compare with the result of part a.

5-5. The water tank of Fig. P5-1a can be treated as a SDOF structure with the following properties:  $m = 4 \text{ kips} \cdot \text{sec}^2/\text{in}$ ,  $k = 40 \text{ kips/in}$ . As a result of an explosion, the tank is subjected to the dynamic-load history shown in Fig. P5-1b. Compute approximately the maximum overturning moment  $M_0$  at the base of the tower using Eq. (5-21) and evaluating the impulse integral by means of Simpson's rule:

$$\int p \, dt = \frac{\Delta t}{3} (p_0 + 4p_1 + 2p_2 + 4p_3 + p_4)$$

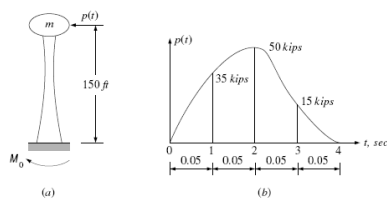
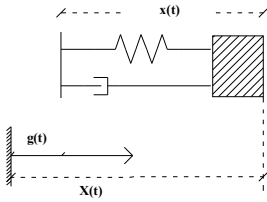


FIGURE P5-1

## پاسخ دستگاه به حرکت پی



$$X = x + g$$

$$f_s = kx$$

$$f_D = c \dot{x}$$

$$f_s + f_D = m \ddot{x} \quad \therefore \quad -kx - c \dot{x} = m(\ddot{x} + \ddot{g}(t))$$

$$\therefore \quad \underline{m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = -m \ddot{g}(t)}$$

البته می توانستیم این معادله را از همان ابتدا با استفاده از اصل دالامبر بنویسیم.

تذکر : ۱.  $X$  در معادله فوق بیانگر جابجایی سازه نسبت به پی است.

۲.  $\ddot{x}(t)$  شتاب مطلق نیست بلکه  $\ddot{X}(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{g}(t)$  شتاب مطلق میباشد که در عمل می توان

آنها چنین تعیین نمود :

$$m \ddot{x} = f_s + f_D \approx f_s \quad \text{اگر میرایی کم باشد}$$

$$\therefore \quad m \ddot{x} = -kx \quad \therefore \quad \underline{\ddot{x} \approx -\omega^2 x}$$

این رابطه در لحظه پاسخ اوج کاملا درست است و به طور تقریبی می توان سرعت نسبی اوج را در لحظه

انرژی پتانسیل صفر بدست آورد :

$$\frac{1}{2} \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} k x_{\max}^2$$

$$\dot{x}_{\max} = \omega x_{\max}$$

بنابراین در این نوع حرکت مقادیر مورد توجه عبارتند از :  $x$  ،  $\dot{x}$  ،  $\ddot{X}$  ،  $X$  و اهمیت چندانی ندارند

زیرا مقادیر نسبی سرعت و جابجایی در نیروها موثرند ، نه مقادیر مطلق آنها .

## طیف پاسخ زلزله

اگر دستگاه تکدرجه تحت شتاب پی  $g(t)$  قرار گیرد ، داریم :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t -m \ddot{g}(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau$$

برای بدست آوردن پاسخ اوج یک دستگاه تکدرجه با ویژگیهای دینامیکی  $\xi$  و  $\omega$  در زلزله  $g(t)$  ، باید

$x_{\max}$  ،  $\dot{x}_{\max}$  ،  $\ddot{x}_{\max}$  را بدست آورد . برا تعیین  $x_{\max}$  باید انتگرال دوهمامل فوق حل شود .

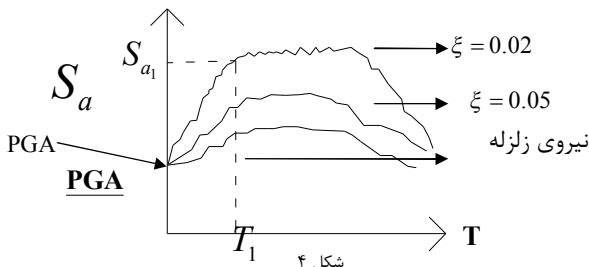
$S_d = x_{\max}$  : جابجایی طیفی Spectral displacement

$S_v = \dot{x}_{\max} \cong \omega S_d$  : سرعت طیفی Spectral velocity

$S_a = \ddot{x}_{\max} \cong \omega^2 S_d$  : شتاب طیفی Spectral acceleration

این مقادیر نه تنها به  $g(t)$  بلکه به  $\xi$  و  $\omega$  هم بستگی دارند . با داشتن شتابنگاشت زلزله می توان

نمودار این طیفها را بر حسب تغییرات  $T$  و برای  $\xi$  های مختلف رسم نمود .



$$P = mS_{a1}$$

و نیروی زلزله برابر است با

با داشتن طیف پاسخ شتاب ، برای تعیین نیروی حداکثر ایجاد شده در سازه نیازی به انجام تحلیل

دینامیکی نیست .



تمرین : با استفاده از برنامه ای که نوشته اید طیف پاسخ شتاب اسمی و واقعی و جابجایی  
زلزله های طبس ، منجیل و ناغان را بصورت عددی برای میرایی ۰ ، ۰.۰۲ ، ۰.۰۵ بدست  
آورید . ( به صورت جدول نیز در آورید )  
سوال: توضیح کلی در مورد نحوه انجام این مساله ارائه شود؟  
سوال: تفاوت بین شتاب اسمی و واقعی؟

## سیستم تکدرجه تعمیم یافته Generalized

به نقل از فصل ۸ - ص ۱۳۳ کلاف - چاپ جدید

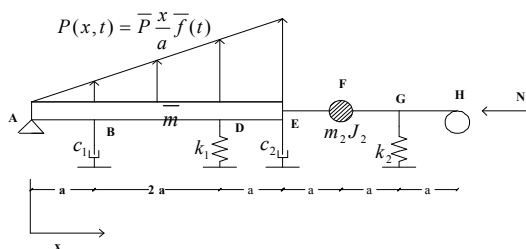
سیستم تعمیم یافته بر دو قسمند :

۱. سازه صلب با سختی ( فنرهای بی وزن ) و میرایی متمرکز

۲. سیستم با سختی گسترده .

### سیستم با سختی و میرایی متمرکز

مثال : نمونه سیستم صلب با فنرهای متمرکز در شکل زیر دیده می شود .



شکل ۵

جابجایی کلیه نقاط این سیستم با جابجایی قائم نقطه E تعریف می شود :

$$Z(t) = \Delta Z_E \quad \text{فرض}$$

$$\Delta Z_B = \frac{1}{4} Z \quad \Delta Z_D = \frac{3}{4} Z \quad \Delta Z_F = \frac{2}{3} Z$$

در مورد نیروها ، چنانچه عجلالتا نیروی N را نادیده بگیریم داریم :

$$f_{I_1} = \int \ddot{Z}(x,t) dm = \int \frac{x}{L} \ddot{Z} \bar{m} dx = \frac{\bar{m}}{L} \ddot{Z} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{m}L}{m_1} \right) \ddot{Z}$$

$$\therefore f_{I_1} = \frac{1}{2} (\bar{m} \times 4a) \ddot{Z}(t) = 2a \bar{m} \ddot{Z}(t)$$

$$M_{J_1} = J_1 \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_1 = \frac{\ddot{Z}}{L} = \frac{\ddot{Z}}{4a} \quad J_1 = m_1 \frac{L^2}{12} = \bar{m} \frac{L^3}{12}$$

$$M_{J_1} = \left( m \frac{L^3}{12} \right) \left( \frac{\ddot{Z}}{L} \right) = \frac{mL^2}{12} \ddot{Z} = \frac{4}{3} m a^2 \ddot{Z}$$

$$f_{I_2}(t) = m_2 a_2 = m_2 \left( \frac{2}{3} \ddot{Z} \right)$$

$$M_{J_2} = J_2 \ddot{\theta}_2 = J_2 \left( \frac{-\ddot{Z}}{L_{EH}} \right) = -J_2 \left( \frac{\ddot{Z}}{3a} \right) ; \theta_2 = -\frac{Z}{3a}$$

$$f_{D_1}(t) = c_1 \frac{dZ_D}{dt} = c_1 \frac{\dot{Z}}{4}$$

$$f_{D_2}(t) = c_2 \dot{Z}(t)$$

$$f_{s_1} = k_1 Z_D = k_1 \frac{3}{4} Z(t)$$

$$f_{s_2} = k_2 Z_G = k_2 \frac{1}{3} Z(t)$$

نیرو بر واحد طول

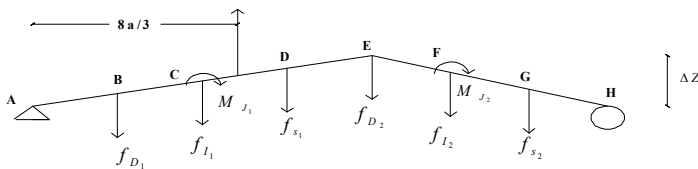
برایند نیروهای خارجی وارد به سیستم برابر است با :

$$P_1(t) = \int_0^{L_1} P(x, t) . dx = \int_0^{4a} \frac{\overline{P} x}{a} f(t) . dx = \frac{\overline{P}}{a} f(t) \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{4a}$$

$$P_1(t) = 8a \overline{P} f(t)$$

استفاده از روش کار مجازی برای تعیین معادله حرکت

در یک جابجایی مجازی دلخواه در نقطه E، جمع کار نیروهای مختلف باید برابر صفر باشد .



$$\delta w(t) = -f_{D_1} \delta_B - f_{I_1} \delta_C - M_{J_1} \theta_{AE} + P_1(t) \left( \frac{8a/3}{4a} \right) \delta_E - f_{s_1} \delta_D - f_{D_2} \delta_E - f_{I_2} \delta_F + M_{J_2} \theta_{EH} - f_{s_2} \delta_G = 0$$

$$\delta_F = \frac{2\delta_Z}{3} \quad \delta_E = \delta_Z, \quad \delta_D = \frac{3\delta_Z}{4}, \quad \delta_C = \frac{\delta_Z}{2}, \quad \delta_B = \frac{\delta_Z}{4},$$

$$\theta_{EH} = \frac{\delta z}{3a} \quad \theta_{AE} = \frac{\delta z}{4a}, \quad \delta_G = \frac{\delta z}{3},$$

$$\delta w(t) = -2a\bar{m}\ddot{z}(t)\frac{\delta z}{2} - \frac{4}{3}a^2\bar{m}\ddot{z}(t)\frac{\delta z}{4a} - m_2\frac{2\ddot{z}}{3}\frac{2}{3}\delta z - j_2\frac{\ddot{z}}{3a} - c_1\frac{\dot{z}}{4}\frac{\delta z}{4} - c_2\dot{z}\delta z - k_1\frac{3}{4}z\frac{3}{4}\delta z - k_2\frac{z}{3}\frac{\delta z}{3} + 8\bar{\rho}af(t)\frac{2}{3}\delta z = 0$$

رابطه (۱) [ رابطه a صفحه ۱۳۷ کلاف ]

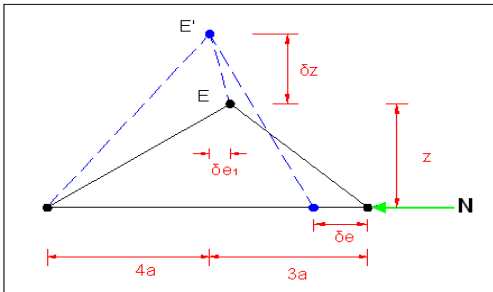
و یا

$$\left[ \frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 + \frac{j_2}{9a^2} \right] \ddot{z} + (c_1 + c_2)\dot{z} + \left( \frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9} \right) z = \frac{16}{3}\bar{\rho}af(t)$$

$$m^*\ddot{z} + c^*\dot{z} + k^*z = p^*(t)$$

جرم و میرایی و سختی و نیروی تعمیم یافته (generalized) می باشند.

اکنون اگر نیروی محوری N را در نظر بگیریم:



$$\delta e_1 = \left( \frac{z}{4a} \right) \delta z \quad \delta e = \delta e_1 + \left( \frac{z}{3a} \right) \delta z = \frac{7}{12} \frac{z}{a} \delta z$$

$$\delta w' = \frac{7}{12} \frac{nz}{a} \delta z$$

اگر این رابطه را با  $\delta w$  در رابطه (۱) جمع کنیم:

$$\delta w + \delta w' \therefore \overline{k^*} = k^* - \frac{7}{12} \frac{p}{a} = \frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2 - \frac{7N}{12a}$$

می بینیم که تاثیر  $N$  بصورت کاهش سختی سیستم است. برعکس اگر  $N$  کششی باشد مقدار  $k^*$  افزایش می یابد.

در حالت بحرانی ( برای نیروی محوری فشاری )

$$\bar{k}^* = 0 \therefore \frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2 + -\frac{7}{12} \frac{N_{cr}}{a} = 0$$

$$N_{cr} = \left( \frac{27}{28}k_1 + \frac{4}{21}k_2 \right) a$$

بار بحرانی

تمرین: مسائل ۸.۳ ۸.۴ ۸.۵

راهنمایی

۱. در برخی از مسائل دینامیک سازه برای کاهش درجات آزادی میتوان از خاصیت جرم صفر استفاده نمود (مانند مساله ۸.۵).

۲. در مساله ۸.۴ به شکل زیر عمل میشود...

- کشیدگی اولیه فنر برابر نیروی ناشی از وزن تیر

- نوشتن معادله حرکت تیر با توجه به اینرسی پیچشی مقاوم تیر

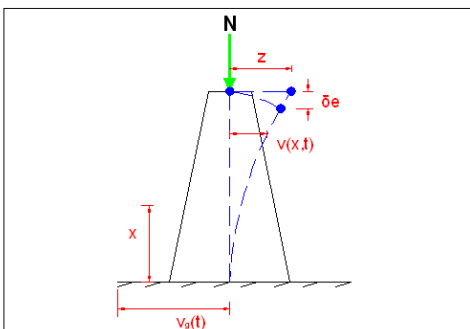
- حرکت تیر تا حدی که دامنه نوسان از حد کشیدگی اولیه بیشتر نشود درست است

- برای دامنه های بیش از کشیدگی اولیه باید معادله حرکت را با حذف کابل، قرقره و فنر

نوشت و اثر سرعت و جابجایی سیستم را در آستانه ورود به این فاز با آن جمع کرد.

سیستم های با سختی گسترده

اگر تغییر شکل یک سیستم با جرم و سختی گسترده را بتوان با یک پارامتر تعریف کرد می توان آنرا بصورت سیستم تکدرجه در نظر گرفت .



فرض کنیم که حرکت کلی هر نقطه سازه نسبت به پی برابر باشد با :

$$v(x, t) = \psi(x)z(t) \quad (1)$$

$$\psi(x) = \frac{v(x, t)}{z(t)} \quad (2) \quad \text{تابع شکل}$$

برای چنین سیستمی در یک جابجایی مجازی کار مجازی نیروی مجازی  $\delta w_E$  که توسط نیروی خارجی انجام می شود با کار مجازی نیروهای داخلی  $\delta w_I$  که توسط نیروهای داخلی در اثر این جابجایی مجازی صورت می گیرد برابر است . پس:

$$\delta w_E = \delta w_I \quad (3)$$

اگر سیستم تحت شتاب پی قرار گیرد نیروی موثر خارجی ،  $p_{eff}$  برابر است با :

$$p_{eff} = -m(x)\ddot{v}_g(t) \quad (4)$$

کار خارجی شامل نیروی  $p_{eff}$  و نیروی اینرسی . مقدار نیروی اینرسی برابر است با :

$$f_I = m(x)\ddot{v}(x, t) \quad (5)$$

این نیرو در  $\dot{v}$  به سازه وارد میشود . پس کار این نیرو برابر است با :  $[-\int f_I(x)\delta v(x)dx]$  در نتیجه کار کل برابر است با :

$$\delta w_E = -\int_0^l f_I(x)\delta v(x)dx + \int_0^l p_{eff}(x, t)\delta v(x)dx + N\delta_e \quad (6)$$

کار نیروی داخلی برای یک عضو خمشی برابر است با:

$$\delta w_I(t) = \int_0^l M(x, t)\delta v''(x)dx \quad (7)$$

$$v''(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

می توان فرض کرد که میرایی با  $\epsilon$  متناسب است .

$$\sigma = E[\epsilon + a_1\epsilon] \quad (8)$$

اکنون با فرض ثابت ماندن صفحات در خمش داریم :

$$M(x, t) = EI(x)[v''(x, t) + a_1\dot{v}''(x, t)] \quad (9)$$

حال با انتخاب یک تابع شکل فرضی  $\psi(x)$  ، کلیه مقادیر فوق بر حسب تابع  $z(t)$  و مشتقات آن قابل بیان هستند زیرا :

$$v(x, t) = \psi(x)z(t)$$

$$\begin{aligned}
 v'(x,t) &= \psi'(x)z(t) & v'''(x,t) &= \psi'''(x)z(t) \\
 \ddot{v}(x,t) &= \psi(x)\ddot{z}(t) & \ddot{v}''(x,t) &= \psi''(x)\ddot{z}(t) \\
 \delta v(x,t) &= \psi(x)\delta z & \delta v''(x,t) &= \psi''(x)\delta z
 \end{aligned}$$

همچنین

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [v'(x,t)]^2 dx$$

$$\delta e = \int_0^l v'(x,t) \delta v'(x) dx$$

از جایگزینی این مقادیر در روابط قبلی:

$$\delta w_E = \left[ -\ddot{z}(t) \int_0^l m(x) [\psi'(x)]^2 dx - \ddot{v}_g \int_0^l m(x) \psi(x) dx + Nz \int_0^l [\psi'(x)]^2 dx \right] \delta z \quad (10)$$

$$\delta w_I = \left[ z \int_0^l EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + a_1 \dot{z} \int_0^l EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \right] \delta z = 0 \quad (11)$$

کار نیروی فنر                      کار میرایی

از برابری کارهای خارجی و داخلی داریم:

معادله حرکت دستگاه نکدرجه تعمیم یافته

$$m^* \ddot{z} + c^* \dot{z} + (k^* - k_G^*) z = p^*_{eff}$$

که در آن :

$$m^* = \int_0^l m(x) \psi^2(x) dx \quad \text{جرم تعمیم یافته}$$

$$c^* = a_1 \int_0^l EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \quad \text{میرایی تعمیم یافته}$$

$$k^* = \int_0^l EI [\psi''(x)]^2 dx \quad \text{سختی تعمیم یافته}$$

$$k_G^* = \int_0^l \psi'^2(x) dx \quad \text{سختی هندسی تعمیم یافته}$$

$$p^*_{eff} = -\ddot{v}_g(t) \int_0^l m(x) \psi(x) dx \quad \text{نیروی موثر تعمیم یافته}$$

$$\overline{k^*} = k^* - k_G^*$$

و بدین ترتیب می توان یک سختی موثر تعریف کرد:

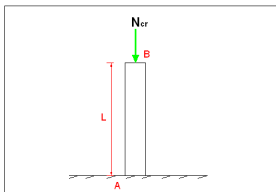
در حالی که نیروی محوری N به حد بحرانی برسد ، سختی موثر صفر می شود ، پس :

$$\overline{k^*} = k^* - k^*_G \therefore N_{cr} = \frac{\int_0^l EI [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^l [\psi'(x)]^2 dx} \quad (13)$$

روش فوق [حل تقریبی سیستم بروش دستگاه تکدرجه برای تعیین بار بحرانی] به روش ریلی موسوم است ( Rayleigh's method )

دقت مقدار بدست آمده برای  $N_{cr}$  بستگی به تابع شکل  $\psi(x)$  دارد. در هر حال چنانچه تابع  $\psi$  شرایط حدی هندسی ( تکیه گاه ) را کاملاً ارضا کند  $N_{cr}$  با دقت مناسبی بدست خواهد آمد.

مثال - تیر طره مقابل را تحلیل کنید و بار بحرانی را بدست آورید.



ثابت  $EI, \bar{m}$

$$\sigma = E\epsilon$$

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$$

انتخاب تابع شکل مناسب

ملاحظه می شود که :

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0$$

( شرایط حدی هندسی در A )

$$M_B = EI\psi''(l) = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

( شرایط حدی هندسی در B )

پس شرایط هندسی به نحو مناسبی ارضا شده اند. از این رو :

$$m^* = \bar{m} \int_0^l \psi^2 dx = \bar{m} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = 0.228 \bar{m} l$$

$$c^* = a_1 \int_0^l EI(x) \psi''(x)^2 dx = \left(a_1 \pi^4 EI\right) / (32l^3)$$

$$k^* = \int_0^l EI \psi''(x)^2 dx = \left(\pi^4 EI\right) / (32l^3)$$

$$k^*_G = N \int_0^l \psi'(x)^2 dx = \left(N \pi^2\right) / (8l)$$

$$P_{eff} = -\ddot{v}_g(t) \int_0^l m(x) \psi(x) dx = -\bar{m} \ddot{v}_g(t) \int_0^l \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) dx = 0.364 \bar{m} l \ddot{v}_g(t)$$

با جایگزینی این مقادیر در معادله دیفرانسیل حرکت :



$$(0.228\bar{m}l)\ddot{z} + \left(\frac{a_1\pi^4 EI}{32l^3}\right)\dot{z} + \left(\frac{\pi^4 EI}{32l^3} - \frac{N\pi^2}{8l}\right)z = -0.364\bar{m}l\ddot{v}_g(t)$$

معادله حرکت تیر طره تحت شتاب پی

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

همچنین با استفاده از رابطه (۱۳) داریم :

ملاحظه می شود که این با مقدار دقیق بار بحرانی تیر طره یکی است . علت این امر این است که تابع شکل انتخاب شده با شکل واقعی کمانش عضو یکی است . اگر توابع دیگری انتخاب کنیم به نتایج

$$\psi(x) = \frac{x^2}{l^2}$$

متفاوتی می رسیم . مثلاً اگر

این تابع شرایط حدی هندسی در تکیه گاه  $A$  ( $x=0$ ) را ارضا می کند یعنی :

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0$$

اما شرط حدی در  $B$  یعنی  $\psi''(L) = 0$  برقرار نیست. با استفاده از این تابع داریم:

$$(0.200\bar{m}L)\ddot{Z} + \left(\frac{4a_1 EI}{L^3}\right)\dot{Z} + \left(\frac{4EI}{L^3} - \frac{4N}{3L}\right)Z = -\frac{\bar{m}L}{3}\ddot{v}_g(t)$$

$$N_{cr} = \frac{3EI}{L^2}$$

ملاحظه می شود که ۲۲٪ خطا دربار بحرانی بوجود آمده است.

**معادله حرکت سیستم تکدرجه تعمیم یافته در حالت کلی**

در حالت کلی که یک عضو خمشی با تکیه گاههای متعدد، تحت نیروهای خارجی گسترده و متمرکز

قرار گیرد معادله زیر برقرار است. در اینجا فرض شده سختی سیستم، علاوه بر سختی خمشی، به

صورت سختی های گسترده و متمرکز خارجی نیز وجود دارد.

توزیع مشابهی نیز برای میرایی در نظر گرفته شده است.

$$\bar{m}\ddot{Z} + c\dot{Z} + kZ = p(t)$$

$$\bar{m} = \int_0^L m(x)\psi(x)^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 + \sum J_i \psi_i'^2$$

(توجه  $\psi_i' = \theta_i$ )

اینرسی متمرکز      جرم متمرکز

$$\dot{c} = \int_0^L c(x) \psi(x)^2 dx + a_1 \int_0^L EI(x) \psi''(x)^2 dx + \sum C_i \psi_i^2$$

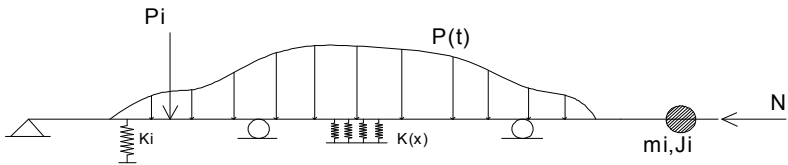
میرایی متمرکز      میرایی کرنشی      میرایی گسترده خارجی

$$\bar{k} = \int_0^L k(x) \psi(x)^2 dx + \int_0^L EI \psi''(x)^2 dx + \sum k_i \psi_i^2 - \int_0^L N \psi'(x)^2 dx$$

سختی هندسی      سختی متمرکز خارجی      سختی خمشی      سختی گسترده خارجی

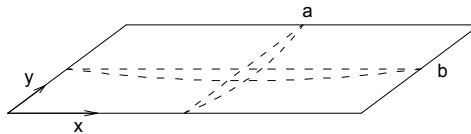
$$\dot{p} = \int_0^L p(x,t) \psi(x) dx + \sum p_i(t) \psi_i(x)$$

نیروی متمرکز      نیروی گسترده



## ارتعاش ورق

همین روش را می توان برای بررسی ارتعاش ورق بکار برد. برای این کار لازم است که تابع شکل ارتعاش ورق را حدس بزنیم.



تابع شکل ارتعاش ورق:  $w(x,y,t) = \psi(x,y)z(t)$

برای یک ورق خمشی، مقادیر تعمیم یافته جرم، سختی و میرایی برابرند با:

$$m^* = \int_0^a \int_0^b m(x,y) \psi(x,y)^2 dx dy$$

$$k^* = D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}$$

$$p^*(t) = \int_0^a \int_0^b p(x,y) \psi(x,y) dx dy$$

که در آن

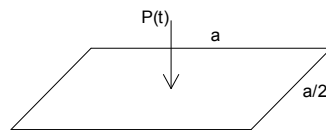
$$D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$$

$\nu$  ضریب پوسان و  $h$  ضخامت ورق میباشد. برای یک صفحه با تکیه گاههای لبه ای ساده، می توان تابع شکل زیر را اختیار نمود.

$$\psi(x,y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

همین روش را می توان برای سازه های سه بعدی [گنبد، پوسته و ...] تعمیم داد. البته باید دانست که انتخاب شکل صحیح ارتعاش برای این سازه ها به مراتب مشکل تر است (شکل ارتعاش حتی الامکان باید شرایط هندسی حدی را ارضا نماید).

**تمرین.** جابجایی مرکز صفحه زیر را زیر اثر نیروی وارده بدست آورید.



$$p(t) = \begin{cases} p_0 & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

از اثر میرایی صرف نظر شده و  $\nu = 0.3$  اختیار شود. کلیه بعدها مفصلی می باشد.

## روش ریلی

دیدیم که برای سیستم تعمیم یافته میتوان با انتخاب یک شکل ارتعاش فرضی (معمولا شکل کمانش یافته سازه) مقادیر تعمیم یافته جرم، سختی و میرایی را محاسبه نمود و معادله دیفرانسیل حرکت را تشکیل داد و علاوه بر آن بار بحرانی (کمانش) را محاسبه کرد. این روش را روش ریلی، مینامند. با تعمیم این روش میتوان فرکانس سازه را نیز حساب کرد. بنابر این:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

که  $k^*$  و  $m^*$  سختی و جرم تعمیم یافته اند.

محاسبه فرکانس را میتوان به روش دیگری انجام داد که اول بار توسط ریلی ارائه گردید. اساس این روش بر بقاء انرژی استوار است (حالت نامیرا). مثلا برای یک سیستم تکدرجه، در حالت ارتعاش آزاد نامیرا داریم:

### نقل از ص ۵۳ جزوه

ملاحظه میشود که در لحظه  $wt = \pi/2$  انرژی پتانسیل حداکثر، و انرژی صفر است. همچنان در لحظه  $wt = \pi$  انرژی پتانسیل صفر، و انرژی جنبشی حداکثر میگردد.

### نقل از ص ۵۳ جزوه

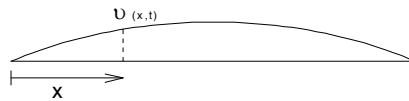
با فرض ثبات انرژی:

$$V + T = \text{const.}$$

$$V_{\max} = T_{\max}$$

بدین ترتیب همان رابطه  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  بدست می آید. میتوان این روش را برای یک سیستم چند درجه آزادی نیز بکار گرفت:

۱. مؤلفه های مکان و زمان از هم جدا می شوند:



$$v(x,t) = \psi(x)f(t)$$

برای ارتعاش آزاد داریم:

$$v(x,t) = \psi(x)z_0 \sin \omega t$$

۲. انرژی پتانسیل ذخیره شده در هر لحظه برابرست با :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$V_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \int_0^L EI [\psi''(x)]^2 dx$$

۳. انرژی جنبشی در هر لحظه:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{v})^2 dx$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int_0^L m(x) \psi(x)^2 dx$$

$$4. \quad T_{max} = V_{max} \quad \therefore \omega^2 = \frac{\int_0^L EI \psi''^2 dx}{\int_0^L m(x) \psi^2 dx}$$

ملاحظه می شود که این همان رابطه ای است که قبلاً با استفاده از روش جرم و سختی تعمیم یافته

به دست آمد یعنی :

$$\omega^2 = \frac{k^*}{m^*}$$

مثال : برای محاسبه فرکانس یک تیر ساده از رابطه تابع شکل زیر استفاده کنید و فرکانس را به روش

ریلی بدست آورید.

$$\psi = \frac{x}{L} \left( \frac{x}{L} - 1 \right)$$

حل. ملاحظه می شود که تابع شکل داده شده شرط  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  را ارضا می کند اما شرط

$\psi''(0) = \psi''(L) = 0$  را ارضا نمی کند زیرا  $\frac{2}{L^2} \neq 0$  با استفاده از روش ریلی

$$\omega^2 = \frac{k^*}{m^*} = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{2}{L}\right)^2 dx}{\int_0^L \bar{m} \left[\frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]^2 dx}$$

### روش ریلی *Rayleigh's Method*

دیدیم که برای سیستم تعمیم یافته می توان با انتخاب یک شکل ارتعاشی فرضی (معمولاً شکل کمانش

یافته سازه) مقادیر تعمیم یافته جرم، سختی و میرایی را محاسبه نمود و معادله دیفرانسیل حرکت را

تشکیل داد و علاوه بر آن بار بحرانی (کمانش) را محاسبه نمود. این روش را روش ریلی می نامند. با

تعمیم این روش می توان فرکانس سازه را نیز حساب کرد. بنابراین:

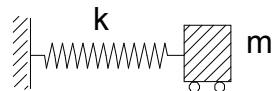
$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

که  $k^*$  و  $m^*$  جرم تعمیم یافته اند.

محاسبه فرکانس را می توان بروش دیگری انجام داد که اولین بار توسط ریلی بیان شد. اساس این روش

بر بقاء انرژی، استوار است (حالت نامیرا). مثلاً برای یک سیستم تکدرجه، در حالت ارتعاش آزاد نامیرا

داریم:



$$v = v_0 \sin \omega t \quad \dot{v} = v_0 \omega \cos \omega t$$

$$V = \frac{1}{2} K v^2 = \frac{1}{2} K v_0^2 \sin^2 \omega t \quad \text{انرژی پتانسیل}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \quad \text{انرژی جنبشی}$$

ملاحظه می شود که در لحظه  $wt = \frac{\pi}{2}$  (یا  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ) انرژی جنبشی برابر صفر و انرژی پتانسیل حداکثر

می شود. همچنان در لحظه  $\omega t = \pi$  انرژی پتانسیل صفر و انرژی جنبشی حداکثر است.

$$wt = \frac{\pi}{2} \quad \therefore V = V_{\max} = \frac{1}{2} K v_o^2, \quad T = 0$$

$$wt = \pi \quad \therefore T = T_{\max} = \frac{1}{2} m v_o^2 \omega^2, \quad V = 0$$

با فرض ثبات انرژی :

$$T + V = \cos t \quad \therefore V_{\max} = T_{\max} \quad \therefore w^2 = \frac{k}{m}$$

می توان همین روش را برای یک سیستم چند درجه آزادی نیز به کار گرفت:

$$\therefore w^2 = \frac{4 \frac{EI}{L^3}}{\frac{\bar{m}L}{30}} = \frac{120EI}{\bar{m}L^4} \quad \therefore w \cong \frac{10.96}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

اگر تابع شکل را تابع هماهنگ فرض کنیم:

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\psi''(x) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$w^2 = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx}{\int_0^L \bar{m} \left[\sin \frac{\pi}{L} x\right]^2 dx} = \frac{\pi^4 EI}{\bar{m}L^4} \quad \therefore w = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

این جواب دقیق است که در مقایسه با جواب تقریبی قبلی، ملاحظه می شود که فقط ۱٪ خطا داشته

ایم. هر انتخاب نادرستی برای  $\psi$  منجر به محاسبه فرکانسی بزرگتر از واقع خواهد شد.

برای محاسبه انرژی ذخیره شده بجای استفاده از رابطه  $\int EI \psi'' dx$  می توان به شکل زیر عمل نمود:

کار نیروی اینرسی = انرژی ذخیره شده



$$\begin{cases} P_c(x) = m(x)a = m(x)\psi_c(x)\ddot{z}_{\max} \\ v(x,t) = \psi_c(x)z(t) \end{cases}$$

چنانچه  $\psi_c(x)$  تابع شکل دقیق ارتعاش باشد، نیروی اینرسی دقیق،  $P_c(x)$  مطابق فوق محاسبه می شود

و جابجایی استاتیکی حاصل از این نیرو برای جابجایی مفروض یعنی  $v_c(x,t) = \psi_c(x)z$  است. پس

می توان گفت که نیروی اینرسی با  $m'(x)\psi_c(x)$  متناسب است. اکنون بجای تابع شکل دقیق، یک

مقدار تقریبی اختیار شود، رابطه قبلی [ کار نیروی اینرسی = انرژی ذخیره شده ] با کمی تقریب همراه

خواهد بود اما بهر حال خیلی بهتر از  $\int_0^L EI \psi''^2 dx$  است.

بدین ترتیب برای یک تابع شکل ارتعاشی فرضی مانند  $\bar{\psi}(x)$  می توان فرض کرد که نیروی اینرسی

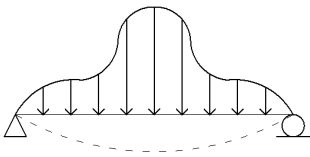
تقریبی وارد به سازه برابر است با :

$$\bar{P}(x) = m(x)\bar{\psi}(x)\ddot{z}_{\max}$$

این نیروی اینرسی را به صورت یک نیروی استاتیکی به سازه اعمال می کنیم و جابجایی حاصل را

بدست می آوریم .

نیروی اینرسی مفروض :



$$\rightarrow \bar{P}(x) = m(x)\bar{\psi}(x)\ddot{z}_{\max}$$

جابجایی محاسبه شده تحت  $\bar{P}(x)$  :

$$\rightarrow v_d(x) = \psi(x)\ddot{z}_{\max} = \omega^2 \psi(x)Z_{\max}$$

اگر بطور اختیاری  $Z_{\max} = 1$  اختیار شود ، می توان گفت افت انرژی پتانسیل نیروی مزبور که بصورت

انرژی کرنشی در سازه ذخیره شده است ، برابر است با :



$$V = \frac{1}{2} \int [\bar{P} dx] v_d(x) = \frac{1}{2} \int m(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) dx$$

انرژی جنبشی سازه، با تابع شکل  $\psi(x)$  برابر است با :

$$T = \frac{1}{2} Z_{\max}^2 \omega^2 \int m(x) [\psi(x)]^2 dx ; Z_{\max} = 1$$

$$T = V \quad \therefore \omega^2 = \frac{\int \bar{P}(x) \psi(x) dx}{\int m(x) \psi^2(x) dx} = \frac{\int m(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) dx}{\int m(x) \psi^2(x) dx}$$

یک حالت ساده آنستکه  $\bar{P}(x)$  برابر وزن سازه فرض شود، یعنی  $\bar{P}(x) = m(x)g$  که در آن  $\psi(x)$  جابجایی سازه تحت وزن است

$$\therefore \omega^2 = \frac{g \int m(x) \psi(x) dx}{\int m(x) \psi^2(x) dx}$$

باید توجه داشت که در این روابط  $\psi(x)$  جابجایی واقعی تحت نیروی مفروض  $\bar{P}(x)$  است.

چنانچه بخواهیم  $\psi_1(x)$  بدون بعد تعریف شود، آنگاه

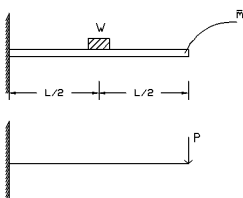
$$\psi(x) = z_0 \psi_1(x)$$

$$\omega^2 = \frac{z_0 \int \bar{P}(x) \psi_1(x) dx}{z_0^2 \int m(x) [\psi_1(x)]^2 dx} = \frac{\int \bar{P}(x) \psi_1(x) dx}{z_0 \int m(x) [\psi_1(x)]^2 dx}$$

برای حالت ساده  $\bar{P}(x) = m(x)g$  :

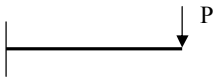
$$\omega^2 = \frac{g}{z} \cdot \frac{\int m \psi_1 dx}{\int m \psi_1^2 dx}$$

**تذکر:** لازم نیست  $\psi(x)$  حتما جابجایی تحت نیروی اینرسی باشد بلکه هر شکل دلخواهی را می توان انتخاب نمود.



**مثال:** زمان تناوب تیر طره مقابل را بر روش ریلی محاسبه کنید.

حل: اگر  $\psi$  را برابر جابجایی تیر مقابل بگیریم:



$$v(x) = \frac{PL^3}{3EI} \cdot \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}$$

$$\therefore \psi(x) = \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}; \quad z = \frac{PL}{3EI}$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} P v(L) = \frac{1}{2} P z$$

$$T_{1\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L \bar{m} v^2 dx = \frac{\bar{m}}{2} \omega^2 z^2 \int_0^L \psi^2 dx = \frac{33}{140} \frac{\bar{m} L}{2} \omega^2 z^2 \quad \text{در تیر}$$

$$T_{2\max} = \frac{1}{2} \frac{W}{g} \omega^2 v^2(L/2) = \frac{25}{256} \frac{W}{2g} \omega^2 z^2 \quad \text{در وزنه } W$$

$$T_{\max} = T_{1\max} + T_{2\max} = \left( \frac{33}{140} + \frac{25}{256} \frac{W}{\bar{m} L g} \right) \frac{\bar{m} L}{2} \omega^2 z^2$$

$$T_{\max} = V_{\max} \rightarrow \therefore \omega^2 = \frac{3}{\frac{33}{140} + \frac{25}{256} \frac{W}{\bar{m} L g}} \cdot \frac{EI}{\bar{m} L^4}$$

### طبقه بندی روش اصلاح شده ریلی

با استفاده از ایده بارگذاری تحت نیروی اینرسی، می توان روش ریلی را بشکل زیر اصلاح نمود و بهبود بخشید. ساده ترین حالت را همانطور که قبلا دیدیم روش  $R_0$  می گویند.

### روش $R_{00}$

در این روش یک شکل فرضی برای ارتعاش سازه انتخاب می شود.

$$v^{(0)}(x, t) = \psi_0(x) Z_0^{(0)} \sin \omega t$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int EI (v''(0))^2 dx = \frac{[Z_0^{(0)}]^2}{2} \int EI [\psi''^{(0)}]^2 dx \quad \text{انرژی پتانسیل اوج}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int m(x) [\dot{v}^{(0)}]^2 dx = \frac{[Z_0^{(0)}]^2}{2} \omega^2 \int m(x) [\psi^{(0)}(x)]^2 dx \quad \text{انرژی جنبشی}$$

$$T = V \therefore \omega^2 = \frac{\int EI[\psi^{(0)}]^2 dx}{\int m(x)[\psi^{(0)}(x)]^2 dx} \mapsto R_{00}$$

**روش  $R_{01}$**

دیدیم که  $\int \omega^{n2} dx$  دارای خطاست (بعلت مشتق گیری). برای کاهش این خطا می توان انرژی پتانسیل

را از کار نیروی اینرسی بدست آورد. قبلا دیدیم که نیروی اینرسی برابرست با

$$\bar{P}(x) = m(x)\bar{\psi}(x)\ddot{Z}_{\max}$$

حال اگر  $\bar{\psi} = \psi^{(0)}$  و  $\ddot{Z}_{\max} = Z^{(0)}\omega^2$  بگیریم :

$$\bar{P}_0(x) = Z_0^{(0)}\omega^2 m\psi^{(0)}$$

اگر جابجایی ناشی از اعمال نیروی  $\bar{P}_0/\omega^2 = Z_0^{(0)}m\psi^{(0)}$  برابر  $\psi^{(1)}\bar{Z}_0^{(1)}$  شود، جابجایی ناشی از  $\bar{P}_0$

برابر است با

$$v^{(1)} = \omega^2 \psi^{(1)} \bar{Z}_0^{(1)}$$

انرژی پتانسیل برابر است با کار نیروی  $\bar{P}_0$  در اثر جابجایی  $v^{(1)}$  :

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int \bar{P}_0 v^{(1)} dx = \frac{Z_0^{(0)} \cdot \bar{Z}_0^{(1)}}{2} \omega^4 \int m \psi^{(0)} \psi^{(1)} dx$$

و انرژی جنبشی که از تغییر شکل مفروض اولیه حساب شده برابر است با

$$T_{\max} = \frac{[Z_0^{(0)}]^2}{2} \omega^2 \int m [\psi^{(0)}]^2 dx \rightarrow$$

$$V = T \therefore \omega^2 = \frac{Z_0^{(0)}}{\bar{Z}_0^{(1)}} \cdot \frac{\int m [\psi^{(0)}]^2 dx}{\int m \psi^{(0)} \psi^{(1)} dx} \mapsto R_{01}$$

**روش  $R_{11}$**

اگر انرژی جنبشی از تابع تغییر شکل  $\psi^{(1)}$  حساب شود، دقت بهتری حاصل می گردد.

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int m [v^{(1)}]^2 dx = \frac{1}{2} \int m [\omega^2 \psi^{(1)} (\omega \bar{Z}_0^{(1)})]^2 dx$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^6 [\bar{Z}_0^{(1)}]^2 \int m[\psi^{(1)}]^2 dx \quad V = T$$

$$\text{روش } \omega^2 = \frac{Z_0^{(0)}}{\bar{Z}_0^{(1)}} \cdot \frac{\int_0^L m(x) \psi^{(0)} \psi^{(1)} dx}{\int_0^L m(x) [\psi^{(1)}]^2 dx} \mapsto R_{11}$$

تمرینات فصل ۸ : ۱ تا ۴، ۶، ۷، ۹ تا ۱۲

- 8-1.** For the uniform cantilever tower of Example E8-3, the following expressions for the generalized mass and stiffness were determined:

$$m^* = 0.228 \bar{m} L$$

$$k^* = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3}$$

Based on these expressions, compute the period of vibration for a concrete tower 200 ft high, with an outside diameter of 12 ft and wall thickness of 8 in, for which the following properties may be assumed:

$$\bar{m} = 110 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{ft}^2$$

$$EI = 165 \times 10^9 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2$$

- 8-2.** Assuming that the tower of Prob. 8-1 supports an additional point weight of 400 kips at the top, determine the period of vibration (neglecting the geometric stiffness effect).
- 8-3.** For the system shown in Fig. P8-1, determine the generalized physical properties  $m^*$ ,  $c^*$ ,  $k^*$ , and the generalized loading  $p^*(t)$ , all defined with respect to the displacement coordinate  $Z(t)$ . Express the results in terms of the given physical properties and dimensions.

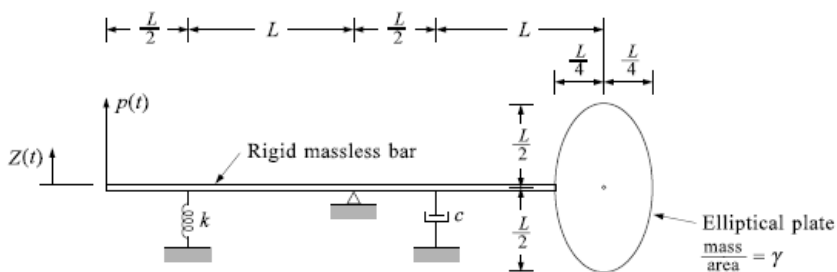


FIGURE P8-1

8-4. Repeat Prob. 8-3 for the structure shown in Fig. P8-2.

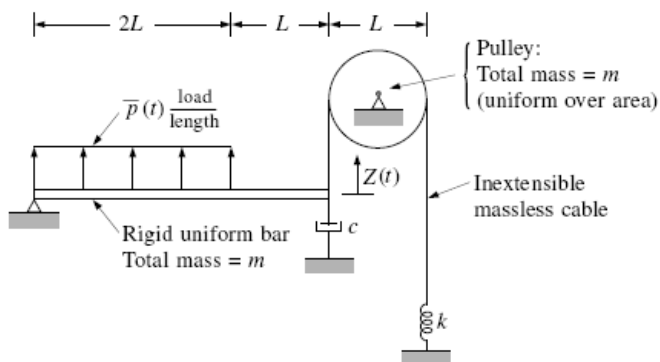


FIGURE P8-2

8-5. Repeat Prob. 8-3 for the structure shown in Fig. P8-3. (*Hint*: this system has only one dynamic degree of freedom; this is associated with the rotational inertia of the rigid bar of mass  $m$ .)

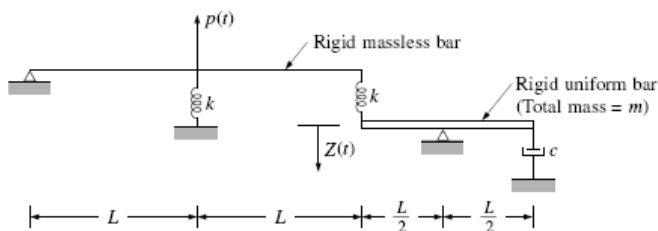


FIGURE P8-3

8-6. The column of Fig. P8-4 is to be treated as a SDOF system by defining its displaced shape as

$$\psi(x) = \frac{v(x, t)}{Z(t)} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2L}\right)$$

Denoting the uniformly distributed mass per unit length by  $\bar{m}$ , the uniform stiffness by  $EI$ , and the uniformly distributed load per unit length by  $\bar{p}(t)$ , evaluate the generalized physical properties  $m^*$  and  $k^*$  and the generalized loading  $p^*(t)$ .

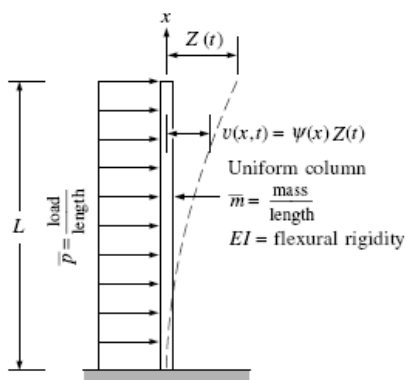


FIGURE P8-4

- 8-7. (a) If a downward load  $N$  is applied at the top of the column of Prob. 8-6, evaluate its combined generalized stiffness  $\bar{k}^*$  using the same shape function  $\psi(x)$ .
- (b) Repeat part *a* assuming that the axial force in the column varies linearly along its length as  $N(x) = N(1 - x/L)$ .

8-8. Assume that the uniform slab of Fig. 8-4 is square, with side length  $a$ , and is simply supported on all four edges.

- (a) If its mass per unit area is  $\gamma$  and its flexural rigidity is  $D$ , determine its generalized properties  $m^*$  and  $k^*$  in terms of the central displacement coordinate  $Z(t)$ . Assume the displacement function is

$$\psi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

- (b) The uniformly distributed external loading per unit of area is  $\bar{p}(t)$ . Determine the generalized loading  $p^*(t)$  based on the displacement function of part *a*.

- 8-9. The outer diameters, height, and material properties of a conical concrete smokestack are shown in Fig. P8-5. Assuming a uniform wall thickness of 8 in and that the deflected shape is given by

$$\psi(x) = 1 - \frac{\cos \pi x}{2L}$$

compute the generalized mass  $m^*$  and stiffness  $k^*$  of the structure. Dividing the height into two equal segments, use Simpson's rule to evaluate the integrals, including in the summations the integrand values for the bottom, middle, and top sections. For example

$$m^* \doteq \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

where  $y_i = m_i \psi_i^2$  evaluated at level "i."

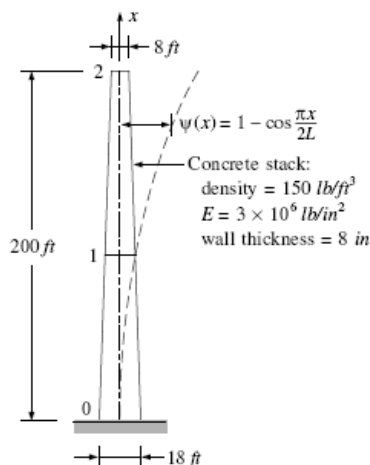


FIGURE P8-5

- 8-10. By Rayleigh's method, compute the period of vibration of the uniform beam supporting a central mass  $m_1$  shown in Fig. P8-6. For the assumed shape, use the deflection produced by a central load  $p$ ; i.e.,  $v(x) = px(3L^2 - 4x^2)/48EI$  for  $0 \leq x \leq L/2$ , symmetric with respect to  $x = L/2$ . Consider the cases: (a)  $m_1 = 0$ , and (b)  $m_1 = 3\bar{m}L$ .

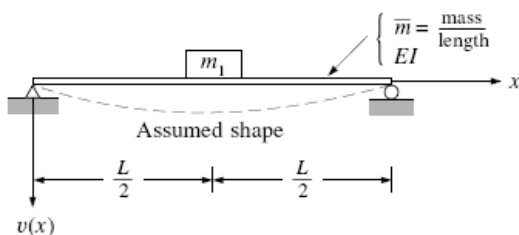


FIGURE P8-6

- 8-11. (a) Determine the period of vibration of the frame shown in Fig. P8-7, assuming the girder to be rigid and the deflected shape of the columns to be that due to a lateral load  $p$  acting on the girder  $v(x) = p(3L^2x - x^3)/12EI$ ;  
 (b) What fraction of the total column weight assumed lumped with the girder weight will give the same period of vibration as was found in part a?

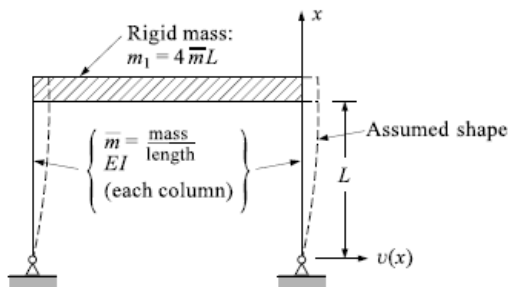


FIGURE P8-7

- 8-12. The shear building of Fig. P8-8 has its entire mass lumped in the rigid girders. For the given mass and stiffness properties, and assuming a linear initial shape (as shown), evaluate the period of vibration by:
- Rayleigh method  $R_{00}$
  - Rayleigh method  $R_{01}$
  - Rayleigh method  $R_{11}$

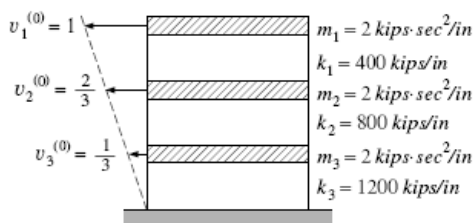
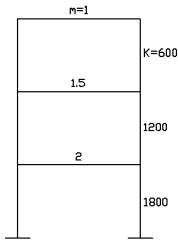


FIGURE P8-8





## مثال (روش ریلی)

حل :

در سازه برشی مقابل سختی ها بر حسب  $k/in$  و جرم  $(k/in)s^2$  میباشد. مطلوب است محاسبه زمان تناوب به روش ریلی.

روش  $R_{00}$

در این روش  $\psi_0(x)$  را فرض می کنیم :

$$\psi_0(x) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ فرض} \quad , \quad m = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad , \quad v_0 = Z_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \sum K_i \Delta \psi_i^2 = \frac{1}{2} Z_0^2 (600 \times 0^2 + 1200 \times 0^2 + 1800 \times 1^2)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 Z_0^2 \sum m_i \psi_i^2 = \frac{1}{2} \times 4.5 \omega^2 Z_0^2 \quad V_{\max} = \frac{1}{2} \times 1800 Z_0^2$$

$$T_{\max} = V_{\max} \quad \therefore \omega^2 = \frac{\frac{1}{2} \times 1800 Z_0^2}{\frac{1}{2} \times 4.5 Z_0^2} = 400 \quad \therefore \omega = 20$$

روش  $R_{01}$

$$\psi_0(x) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ فرض} \quad \therefore P = Z_0 \omega^2 [m] \{\psi\} = Z_0 \omega^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{نیروی اینرسی}$$

محاسبه جابجایی تحت نیروی اینرسی :

$$\therefore v_{13} = Z_0 \omega^2 \times \frac{(1+1.5+2)}{1800} \quad v_{12} = Z_0 \omega^2 \frac{(1+1.5)}{1200} + v_{13}$$

$$v_{13} = \frac{9Z_0}{3600} \omega^2 \quad v_{12} = \frac{16.5Z_0}{3600} \omega^2$$

$$v_{11} = v_{12} + Z_0 \omega^2 / 600 = \frac{22.5Z_0}{3600} \omega^2$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \sum P_i v_i = \frac{1}{2} (1 \times 22.5 + 1.5 \times 16.5 + 2 \times 9) \cdot \left(\frac{Z_0 \omega^2}{3600}\right) Z_0 \omega^2$$

$$V_{\max} = 906 \times 10^{-5} Z_0^2 \omega^4 \quad \text{از قبل} \rightarrow T_{\max} = \frac{1}{2} \times 4.5 \omega^2 Z_0^2$$

$$V_m = T_m \therefore \omega^2 = 248.3 \Rightarrow \omega = 15.76 \mapsto R_{01}$$

روش  $R_{11}$

در این روش با فرض  $\psi_0$ ، نیروی اینرسی حساب می شود، با اعمال این نیرو، جابجایی بدست می

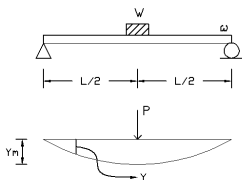
آید، انرژی پتانسیل از کار نیروی اینرسی در این جابجایی بدست می آید و انرژی جنبشی از آخرین

جابجایی بدست آمده محاسبه می شود.

$$T_{\max} = \frac{1}{2} [m_1 (\omega v_{11})^2 + m_2 (\omega v_{12})^2 + m_3 (\omega v_{13})^2] =$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{Z_0^2 \omega^6}{(3600)^2} [1 \times 22.5^2 + 1.5 \times 16.5^2 + 2 \times 9^2] = 4.1536 \times 10^{-5} Z_0^2 \omega^6$$

$$V_{\max} = 906 \times 10^{-5} Z_0^2 \omega^4 \quad (\text{از قبل}) \quad V_m = T_m \therefore \omega = 14.77 \mapsto R_{11}$$



مثال: فرکانس تیر مقابل را بر روش ریلی حساب کنید.

حل: نیروی اینرسی را به صورت یک نیروی متمرکز در وسط تیر

فرض می کنیم:

$$y = \frac{PL^3}{48EI} \cdot \frac{X}{L} \left(3 - 4\left(\frac{X}{L}\right)^2\right)$$

جابجایی ناشی از نیروی اینرسی مفروض برابر است با

$$y = y_m Z(3 - 4Z^2) \quad Z = X/L, \quad y_m = PL^3/48EI$$

انرژی جنبشی سیستم برابر است با

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \left[ \int \dot{y}^2 dm + \frac{W_1}{g} \dot{y}^2 (L/2) \right]$$

$$T_{\max} = \frac{17}{35} \cdot \frac{WL}{2g} \dot{y}_m^2 + \frac{W_1}{2g} \dot{y}_m^2 = \frac{W_{\text{eff}}}{2g} \omega^2 y_m^2$$

$$W_{\text{eff}} = W_1 + 0.486mL$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} P y_m \quad T_{\max} = V_{\max} \quad \therefore \omega^2 = \frac{P}{M_e y_m}, \quad M_e = \frac{W_{\text{eff}}}{g}$$

$$M_e = M_1 + 0.486mL \quad ; \quad K_e = \frac{P}{y_m} = 48EI/L^3$$

$$\omega = \sqrt{K_e/M_e} = \sqrt{48EI/M_e L^3} \quad ; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M_e L^3}{48EI}}$$

در حالی که  $m = 0$  باشد (تیر بدون جرم) این پاسخ دقیق یک سیستم تکدرجه است. در حالی که

$M_1 = 0$  باشد داریم  $T = 0.632 \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$  می دانیم که در این حالت، شکل دقیق ارتعاش تابع هماهنگ

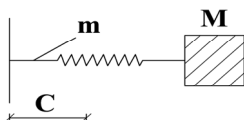
$\psi = \text{Sin} \frac{\pi \cdot x}{L}$  است و قبلاً به روش ریلی پاسخ دقیق را برای  $\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{mL^4}$  بدست آورده ایم:

$$T_{\text{exact}} = \frac{2\pi}{\omega} = 0.637 \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$$

پس ملاحظه می شود که جواب فوق فقط ۱٪ خطا دارد.

جرم مؤثر: در این مثال دیدیم که جرم مؤثر  $M_e$  برابر  $M_1 + 0.486mL$  بدست آمد. پس می توان

نتیجه گرفت که  $\frac{1}{6} \cdot 48\%$  از جرم تیر در ارتعاش مشارکت دارد.



مثال) جرم مؤثر و تناوب ارتعاش دستگاه تکدرجه را  $b v$

بیابید.

حل) اگر جابجائی جرم  $M$  را با  $x$  نشان دهیم، جابجائی هر نقطه فنر به فاصله  $c$  از ابتدای فنر، برابر است با:

$$x_c = \frac{cx}{L}$$

در نتیجه انرژی جنبشی خود فنر :

$$T_1 = \int \frac{1}{2} \dot{x}_c^2 dm = \int \frac{1}{2} \left(\frac{cx}{L}\right)^2 m dc = \frac{m\dot{x}^2}{2} \int \left(\frac{c}{L}\right)^2 dc = \frac{\dot{x}^2}{2} \left(\frac{mL}{3}\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

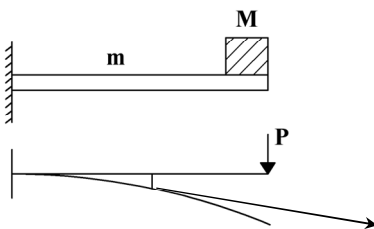
$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{mL}{3}\right) \dot{x}^2 = \frac{\omega^2}{2} M_e x^2$$

$$V = \frac{1}{2} K x^2$$

$$T = V \therefore \omega = \sqrt{\frac{K}{M_e}}; M_e = M + \frac{mL}{3}$$

بنابراین، برای در نظر گرفتن تأثیر جرم فنر، باید  $1/3$  آن را در نظر گرفت. مقایسه پاسخ دقیق با مقدار فوق برای  $mL=M/2$  نشان می دهد که خطا حدود  $0/5\%$  است و برای  $mL=M$  این خطا به  $0/8\%$  می رسد. برای  $mL=2M$  این خطا به  $0/3\%$  می رسد که هنوز قابل قبول است (تیموشنکو/ص ۳۲).

مثال)



$$y = y_m (1.5z^2 - 0.5z^3), z = \frac{x}{L}, y_m = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$V = \frac{1}{2} P y_m$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \int m \dot{y}^2 dx = \frac{33}{140} mL \frac{\dot{y}_m^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} M \dot{y}_m^2$$

$$\therefore T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M_e \dot{y}_m^2 = \frac{1}{2} \omega^2 M_e y_m^2$$

$$M_e = M + \frac{33}{140} mL = M + 0.236 mL$$

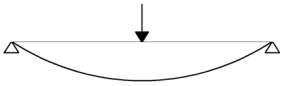
$$T = V \therefore \omega^2 = \frac{P y_m}{M_e y_m^2} = \frac{P / y_m}{M_e} \therefore K_e = \frac{P}{y_m} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.567} \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$$

در مقایسه با پاسخ دقیق این مسأله ( $T = \frac{2\pi}{3.515} \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$  / تیموشنکو ص ۳۵) حدود ۱.۵٪ خطا داشته

ایم .

تأثیر شکل انتخاب شده :



$$y = y_m z(3 - 4z^2), z = \frac{x}{L}, y_m = \frac{PL^3}{48EI}$$

در مثال تیر ساده قبلی دیدیم که انتخاب شکل حاصل از جابجائی تحت بار متمرکز به جواب زیر

انجامید :

$$T = 0.632 \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$$

اکنون اگر بجای نیروی متمرکز، یک نیروی گسترده (وزن تیر) را در نظر بگیریم :

جواب دقیق مسأله تا سه رقم اعشار نیز  $T = 0.637 \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$  است.

ملاحظه می شود که مقدار تقریبی  $T = 0.632 \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$  که با استفاده از فرض یک نیروی اینرسی مت

بر وسط تیر بدست آمد، دقت کاملاً قابل قبولی را دارد.

### دستگاه چند درجه

در یک دستگاه چند درجه آزادی، نیروهای وارد به جرم  $m_j$  در هر لحظه از رابطه زیر بدست می آید:

### شکل

پس در هر لحظه وضعیت تعادل نیروها رابطه زیر را بدست میدهد:

$$m_j \ddot{v}_j + f_{Dj} + f_{sj} = P_j(t)$$

$$m_j \ddot{v}_j + (c_{j1} \dot{v}_1 + c_{j2} \dot{v}_2 + \dots + c_{jn} \dot{v}_n) + (k_{j1} v_1 + k_{j2} v_2 + \dots + k_{jn} v_n) = P_j(t)$$

بدین ترتیب برای کلیه جرمها میتوان معادلات مشابه ای نوشت. نمایش این معادلات ب

فرمت ماتریس مطابق زیر میباشد:

$$\bar{v} = P(t)$$

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{Bmatrix}, \bar{P}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_m(t) \end{Bmatrix}$$

که در آن

(۱)

دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱)، بر دستگاه حاکم است. هر یک از این معادلات عبارت است از :

$$m_1 \ddot{v}_1 + (c_{11} \dot{v}_1 + c_{12} \dot{v}_2 + \dots + c_{1n} \dot{v}_n) + (k_{11} v_1 + k_{12} v_2 + \dots + k_{1n} v_n) = P_1(t)$$

...

$$m_j \ddot{v}_j + (c_{j1} \dot{v}_1 + c_{j2} \dot{v}_2 + \dots + c_{jn} \dot{v}_n) + (k_{j1} v_1 + k_{j2} v_2 + \dots + k_{jn} v_n) = P_j(t)$$

ملاحظه می شود که این دستگاه معادلات دیفرانسیل از نوع درگیر (Coupled) می باشد .

### ارتعاش آزاد دستگاه نامیرا

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = 0$$

اگر فرض شود که بتوان تابع  $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$  را به شکل زیر نمایش داد :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \varphi(\mathbf{x})f(t)$$

و یا :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \varphi(\mathbf{x})z \sin \omega t$$

$$\therefore \bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\varphi}z \sin \omega t$$

$$\therefore -\omega^2 \mathbf{M}\bar{\varphi} \sin \omega t + \mathbf{k}\bar{\varphi} \sin \omega t = 0$$

(۲)

$$\therefore [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}]\bar{\varphi} = 0$$

جواب ساده معادله فوق صفر است، یعنی  $\bar{\varphi} = 0$  (سکون). برای بدست آوردن جواب غیر صفر باید

دترمینان ضرائب این معادلات صفر باشد، یعنی :

$$(۳) \quad |\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$

این معادله دارای  $n$  جواب برای  $\omega$  است که نظیر مدهای  $n$  گانه ارتعاش است :

$$(\omega_1, \bar{\varphi}_1), (\omega_2, \bar{\varphi}_2), \dots$$

### خاصیت تعامد مدهای ارتعاش

از معادله (۳) جواب برای  $\omega$  بدست آمد. برای هر یک از این جوابها داریم :

$$[\bar{k}_i - \omega_i^2 \bar{M}] \bar{\varphi}_i = 0 \quad (۴)$$

و یا :

$$\omega_i^2 \bar{M} \bar{\varphi}_i = \bar{k}_i \bar{\varphi}_i$$

$$\omega_i^2 \bar{\varphi}_j^T \bar{M} \bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_j^T \bar{k} \bar{\varphi}_i$$

(۵)

و بطور مشابه :

$$\omega_j^2 \bar{\varphi}_i^T \bar{M} \bar{\varphi}_j = \bar{\varphi}_i^T \bar{k} \bar{\varphi}_j \quad (۶)$$

می دانیم که :

$$\begin{aligned} (\bar{A}\bar{B})^T &= \bar{B}^T \bar{A}^T \\ [\omega_j^2 \bar{\varphi}_i^T \bar{M} \bar{\varphi}_j]^T &= [\bar{\varphi}_i^T k \bar{\varphi}_j]^T \\ \therefore \omega_j^2 \bar{\varphi}_j^T \bar{M}^T \bar{\varphi}_i &= \bar{\varphi}_i^T \bar{k}^T \bar{\varphi}_i \end{aligned}$$

بدلیل تقارن :

$$\begin{aligned} k^T &= k, M^T = M \\ \therefore \omega_j^2 \bar{\varphi}_j^T M \bar{\varphi}_i &= \bar{\varphi}_i^T k \bar{\varphi}_i \end{aligned} \quad (۷)$$

از تفاضل روابط (۷) و (۵)

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) \bar{\varphi}_j^T \bar{M} \bar{\varphi}_i = 0 \quad (۸)$$

و اگر روابط (۵) و (۷) را به ترتیب بر  $\omega_j^2$  و  $\omega_i^2$  تقسیم کنیم و از هم کسر نمائیم :

$$\left(\frac{1}{\omega_j^2} - \frac{1}{\omega_i^2}\right) \bar{\varphi}_j^T \bar{k} \bar{\varphi}_i = 0 \quad (۹)$$

در روابط (۸) و (۹) چون  $\omega_i \neq \omega_j$  پس :

$$\bar{\varphi}_j^T \bar{M} \bar{\varphi}_i = 0 \quad (۱۰)$$

$$\bar{\varphi}_j^T \bar{k} \bar{\varphi}_i = 0 \quad (۱۱)$$

روابط تعامد مدها نسبت به ماتریس جرم و سختی

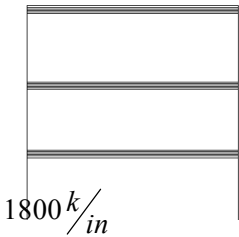
### تعیین فرکانس و شکل مدهای ارتعاش

روش مستقیم: با کمک رابطه (۳)، مقادیر  $\lambda = \omega^2$  را بدست می آوریم و با نهادن در رابطه (۴) اشکال مدی بدست می آیند.

$$\begin{aligned} |\bar{k} - \omega^2 \bar{M}| &= 0 \\ [\bar{k} - \omega_i^2 \bar{M}] \bar{\varphi}_i &= 0 \end{aligned}$$



مثال . مطلوبست تعیین فرکانس و شکل مد سازه مقابل .



$$m_1 = 1$$

$$600 \frac{k}{in} \quad m_2 = 1.5$$

$$m_3 = 2 \quad 1200 \frac{k}{in}$$

شکل اصلاح شود

حل . داریم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \bar{K} - \lambda \bar{M} \quad |\bar{A}| = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 600 - \lambda & -600 & 0 \\ -600 & 1800 - 1.5\lambda & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 - 2\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(600 - \lambda) [(1800 - 1.5\lambda)(3000 - 2\lambda) - 1200^2] - (-600) [-600(3000 - 2\lambda) + 0] = 0$$

$$f(2.10) = -1.27 \quad f(2.11) = 0.17 \quad \therefore z_1 = 2.11 \quad z_2 = 9.63 \quad z_3 = 21.26$$

$$\omega = \sqrt{100z} \quad \therefore \omega_1 = 14.53, \quad \omega_2 = 31.03, \quad \omega_3 = 46.11$$

با نهادن  $\lambda$  در رابطه (۱) و فرض نمودن  $\varphi_1 = 1$  میتوان از سه معادله موجود، دو معادله را به دلخواه انتخاب و حل کرد:

$$\overline{A} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\varphi_1 = 1 \quad \therefore \begin{cases} (600 - \lambda) - 600\varphi_2 = 0 \\ -1200\varphi_2 + (3000 - 2\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \varphi_2 = 1 - \lambda/600 \quad \varphi_3 = \frac{2(600 - \lambda)}{3000 - 2\lambda}$$

$\lambda$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
211	1	0.648	0.302
963	1	-0.605	-0.676
2126	1	-2.543	2.438

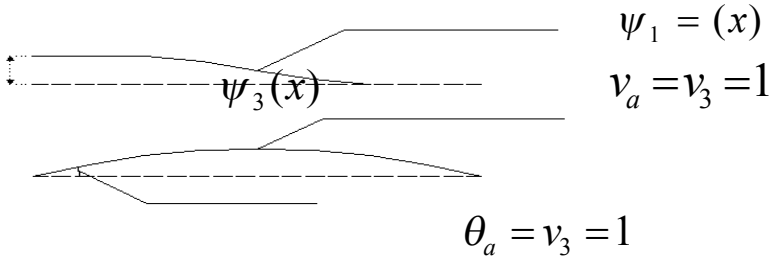
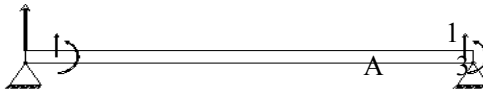
$$\overline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.302 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.605 \\ -0.676 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.543 \\ 2.438 \end{bmatrix}$$

بر آورد ماتریس خواص سازه

$$v(x) = \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \quad B$$



$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_a \\ v_b \\ \theta_a \\ \theta_b \end{Bmatrix}$$

توابع شکل  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  می توانند به صورت دلخواه اختیار شوند (هر تابعی که شرایط حدی را ارضا نماید تابع قابل قبولی است). برای حالت EI ثابت می توان از کثیر الجمله درجه سه استفاده نمود:

$$\psi_1 = 1 - 3z^2 + 2z^3$$

$$\psi_2 = 3z^2 - 2z^3$$

$$\psi_3 = z(1 - z)^2$$

$$\psi_4 = z^2(z - 1)$$

$$z = x/l$$

پس شکل کلی عضو از تابع زیر به دست می آید:

$$v(x) = \psi_1 v_1 + \psi_2 v_2 + \psi_3 v_3 + \psi_4 v_4$$

در اثر جابجایی مجازی  $\delta v_a$  کار نیروی ناشی از  $k_{13}$  (نیروی ایجاد شده در اثر جابجایی ۳) برابر است با

$$w_E = \delta v_a \cdot p_a = \delta v_1 \cdot k_{13}$$

و انرژی ذخیره شده در عضو:

$$w_I = \delta v_1 \int M(x) \psi_1'' dx$$

که در آن

$$M(x) = \left[ EI(x) \psi_3''(x) \right] \theta_a = EI \psi_3''$$

$$\therefore W_I = \delta v_1 \int EI \psi_1'' \psi_3'' dx$$

$$W_I = W_E \quad \therefore k_{13} = \int EI \psi_1'' \psi_3'' dx$$

و به همین ترتیب می توان نشان داد که :

$$k_{ij} = \int EI \psi_i'' \psi_j'' dx$$

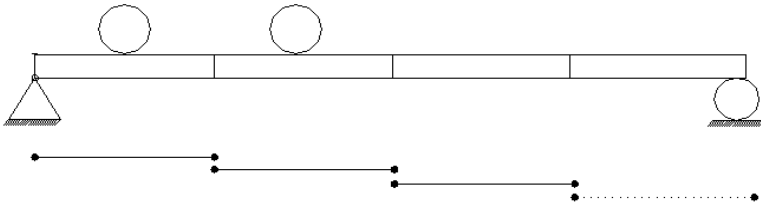
با استفاده از رابطه فوق و روابط شکل مذکور :

$$\begin{Bmatrix} f_{s_1} \\ f_{s_1} \\ f_{s_1} \\ f_{s_1} \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

## جرم

### ۱. جرم متمرکز

در این حالت سازه به قطعاتی تقسیم می شود و جرم هر قطعه بین گره های انتهایی آن قطعه به صورت متمرکز تقسیم میگردد. به این ترتیب در هر گره یک جرم متمرکز داریم که برابر است با جمع جرم های انتقالی از قطعات مجاور:



شکل اصلاح شود

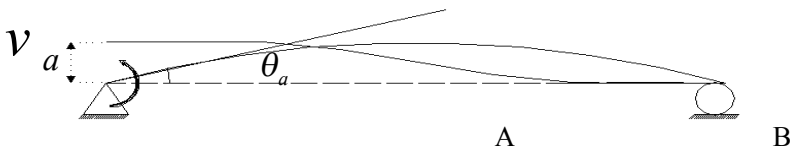
$$M_1 = M_{1a} + M_{1b}$$

به این ترتیب یک ماتریس قطری برای جرم به دست می آید. این جرم ها همگی به صورت انتقالی اثر می کنند و فاقد اینرسی دورانی (به علت متمرکز بودن جرم ها)

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & m_{i=j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

علت اینکه  $m_{ij} = 0$  است (برای  $i \neq j$ ) این است که هر یک از جرم های متمرکز یک نیروی اینرسی در همان نقطه ایجاد می کند و بس.

ماتریس جرم همساز (consistent-mass matrix)  
فرض کنیم عضوی زیر یک چرخش  $\theta_a$  قرار گیرد، داریم



$$\ddot{v}(x) = \psi_3(x) \ddot{v}_3$$

نیروی اینرسی ناشی از ارتعاش برابر است با

$$f_I(x) = m(x) \ddot{v}(x) = m(x) \psi_3(x) \ddot{v}_3$$

تاثیر این نیروی اینرسی بر نیروهای گرهی به صورت زیر قابل محاسبه است. مثلاً تاثیر اینرسی ناشی از حرکت در جهت درجه آزادی ۳ بر نیروی گرهی در راستای درجه آزادی ۱ را اگر  $P_a$  بگیریم، کار این نیرو در اثر جابجایی  $\delta v_a$  برابر است با

$$P_a \delta v_a = \int f_I \delta v(x) dx$$

$$P_a \delta v_a = m_{13} \ddot{v}_3 \delta v_a = \int [m(x) \psi_3(x) \ddot{v}_3] \psi_1(x) \delta v_a dx$$

$$m_{13} = \int m(x) \psi_1(x) \psi_3(x) dx$$

$$m_{ij} = \int m(x) \psi_i \psi_j dx \quad \text{و یا}$$

حاصل انتگرال گیری فوق برای یک عضو خمشی با مقطع یکنواخت با توجه به شکل‌های  $\psi$  که قبلاً بدست آمد برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} f_{I_1} \\ f_{I_2} \\ f_{I_3} \\ f_{I_4} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{v}_4 \end{Bmatrix}$$

### ماتریس میرایی همساز

به طور مشابه می توان نشان داد که

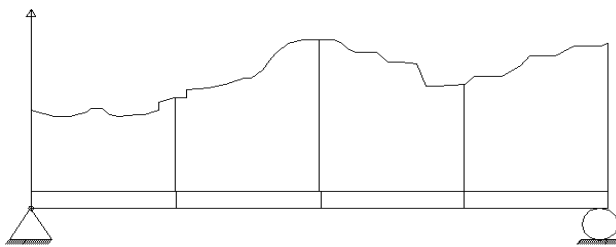
$$C_{ij} = \int C(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

اما معمولاً میرایی را به صورت محاسباتی نمی آورند. بلکه با انجام آزمایش، درصد میرایی بحرانی را تعیین میکنند. در این مورد بعداً سخن خواهیم گفت.

نیروهای گرهی همساز

می توان به طور مشابه نشان داد که نیروی گرهی در جهت درجه آزادی  $1$  برابر است با

$$P_i(t) = \int P(t)\psi_i(t)dt$$



اگر تیر به صورت صلب در نظر گرفته شود،

$$\psi_1 = 1 - x / l$$

$$\psi_2 = x / l$$

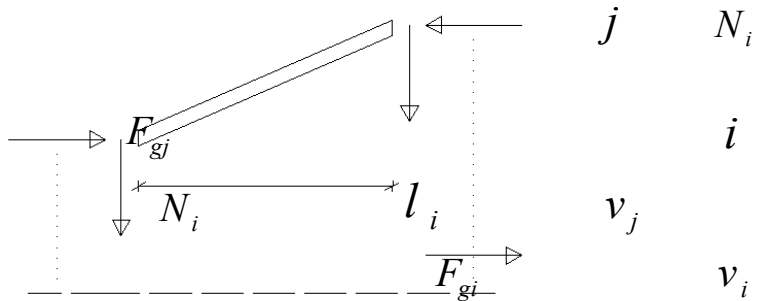
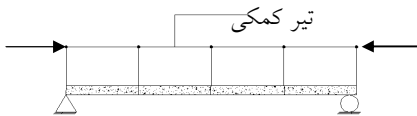
در این حالت نیروهای تکیه گاهی به صورت عکس العمل استاتیکی تکیه گاه در خواهند آمد.

سختی هندسی (geometric stiffness)

روش تقریب خطی (linear approximation)

در این روش فرض می شود که نیرو به یک تیر کمکی مطابق شکل وارد می شود که لولاها در محل گره ها قرار گرفته اند. تعادل تیر کمکی در برابر اثر  $P - \Delta$  به کمک مقاومت ناشی از تیر اصلی انجام می شود. نیروی وارد شده از سوی تیر اصلی به تیر کمکی برای آنکه تیر در تعادل با نیروی محوری  $N$  قرار گیرد، در هر گره به صورت  $f_{Gi}$  نمایش داده شده است، بنا بر این واکنش این نیرو از سوی تیر کمکی به تیر

اصلی به صورت یک نیروی کشاننده و نه باز گرداننده اعمال میشود. به همین دلیل همانطور که بعداً می بینیم ماتریس سختی مربوط به این نیروها در معادلات دیفرانسیل حرکت به صورت منفی ظاهر خواهد شد. از تعادل قطعه  $i, j$ ، نیروهایی این قطعه برابر است با:



$$f_{G_i} = \frac{v_i - v_j}{l_i} N_i$$

$$f_{G_j} = -f_{G_i} = \frac{v_j - v_i}{l_i} N_i$$

و یا

$$\begin{Bmatrix} f_{G_i} \\ f_{G_j} \end{Bmatrix} = \frac{N}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{G_1} \\ f_{G_2} \\ \vdots \\ f_{G_i} \\ \vdots \\ f_{G_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_0}{L_0} + \frac{N_1}{L_1} & -\frac{N_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{N_1}{L_1} & \frac{N_1}{L_1} + \frac{N_2}{L_2} & -\frac{N_2}{L_2} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{N_{i-1}}{L_{i-1}} + \frac{N_i}{L_i} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$



پس به طور کلی

$$\overline{f_G} = \overline{k_G v}$$

$$\overline{mv} + \overline{cv} + \overline{kv} - \overline{k_G v} = \overline{p}$$

اگر  $\overline{k} = \overline{k} - \overline{k_G}$  آنگاه

$$\overline{mv} + \overline{cv} + \overline{k} \overline{v} = \overline{p}$$

### سختی هندسی همساز

اگر مولفه عرضی ناشی از نیروی محوری در تکیه گاه

a برابر  $f_{G_a}$  باشد، کار ناشی از این نیرو در یک جابجایی

مجازی  $\delta v_a$  برابر است با :

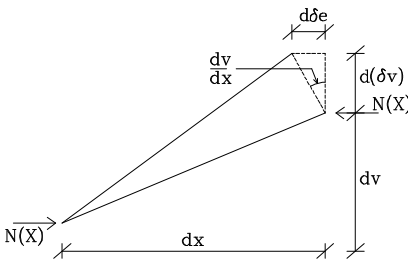
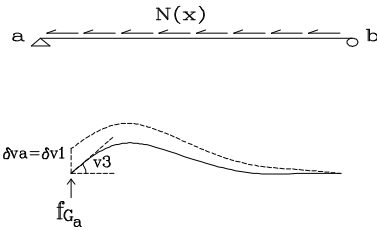
$$W_E = f_{G_a} \delta v_a = k_{G_{13}} \delta v_1$$

که در این رابطه  $k_{G_{13}}$  نیروی ایجاد شده در اثر جابجایی

۳ در درجه آزادی ۱ میباشد

از طرف دیگر کار نیروی محوری  $N(x)$  در اثر جابجایی

$\delta v_1$  برابر است با :



$$dW_I = N(x) d(\delta e)$$

$$d(\delta e) = \frac{dv}{dx} d(\delta v)$$

$$\therefore d(\delta e) = \frac{dv}{dx} \delta \left( \frac{dv}{dx} dx \right)$$

$$\therefore dW_I = N(x) \frac{dv}{dx} \delta \left( \frac{dv}{dx} dx \right)$$

$$W_I = \delta v_1 \int N(x) \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_1(x)}{dx}$$

و از برابری کار نیروهای داخلی و خارجی

$$k_{G_{13}} = \int N(x) \psi_3 \psi_1' dx$$

سختی ساز گار هندسی

$$k_{G_{ij}} = \int N(x) \psi_i \psi_j' dx$$

در حالتی که قطع تیر ثابت باشد و تحت نیروی محوری ثابت نیز قرار گیرد :

$$\begin{bmatrix} f_{G_1} \\ f_{G_2} \\ f_{G_3} \\ f_{G_4} \end{bmatrix} = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -36 & 3L & 3L \\ -36 & 36 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 4L^2 & -L^2 \\ 3L & -3L & -L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$



تمرین : مسائل فصل ۱۰ کلاف ۱ / تا ۴

- 10-1.** Using the hermitian polynomials, Eq. (10-16), as shape functions  $\psi_i(x)$ , evaluate by means of Eq. (10-21) the finite-element stiffness coefficient  $k_{23}$  for a beam having the following variation of flexural rigidity:  $EI(x) = EI_0(1 + x/L)$ .
- 10-2.** Making use of Eq. (10-28), compute the consistent mass coefficient  $m_{23}$  for a beam with the following nonuniform mass distribution:  $m(x) = \bar{m}(1 + x/L)$ . Assume the shape functions of Eq. (10-16) and evaluate the integral by Simpson's rule, dividing the beam into four segments of equal length.
- 10-3.** The distributed load applied to a certain beam may be expressed as

$$p(x, t) = \bar{p} \left( 2 + \frac{x}{L} \right) \sin \bar{\omega} t$$

Making use of Eq. (10-34a), write an expression for the time variation of the consistent load component  $p_2(t)$  based on the shape function of Eq. (10-16).

- 10-4.** Using Eq. (10-42), evaluate the consistent geometric stiffness coefficient  $k_{G24}$  for a beam having the following distribution of axial force:  $N(x) = N_0(2 - x/L)$ . Make use of the shape functions of Eq. (10-16) and evaluate the integral by Simpson's rule using  $\Delta x = L/4$ .

## تراکم استاتیکی

فرض شود که به حضور تعداد از درجات آزادی نیازی نباشد (مثلا به علت نبود جرم در این نقاط)، برای حذف این درجات، اگر آنها را با  $v_E$  نشان دهیم و بردار جابجائی را طوری آرایش دهیم که به صورت زیر درآید:

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} v_P \\ v_E \end{Bmatrix}$$

آنگاه

$$\begin{bmatrix} k_{PP} & k_{PE} \\ k_{EP} & k_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_P \\ v_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{SP} \\ f_{SE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{SP} \\ 0 \end{bmatrix}$$

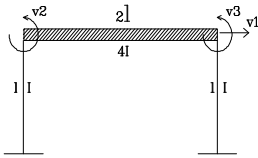
در واقع درجات محذوف آنهایی هستند که در آن جرم فعال نداریم، مثلا اگر اینرسی چرخشی برابر صفر باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t\theta} \\ k_{t\theta} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_t \\ v_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{st} \\ f_{s\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{st} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \overline{k_{t\theta}} v_t + \overline{k_{\theta\theta}} v_\theta = 0$$

$$\therefore \overline{v_\theta} = -\overline{k_{\theta\theta}}^{-1} \overline{k_{t\theta}} v_t$$

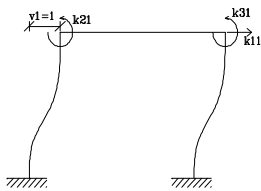
$$(\overline{k_{tt}} - \overline{k_{t\theta}} \overline{k_{\theta\theta}}^{-1} \overline{k_{t\theta}}) \overline{v_t} = \overline{f_{st}}$$



عبارت داخل پرانتز را ماتریس تراکم می نامیم و با  $\bar{k}_t$  نمایش میدهم.

مثال. در سازه مقابل درجات آزادی  $v_3$  و  $v_2$  را حذف نمایم.

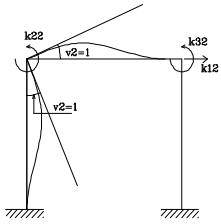
حل. با استفاده از روابط مربوط به ماتریس سختی اعضا که قبلا نمایش داده شد داریم:



$$k_{11} = \left( \frac{2EI}{L^3} \times 6 \right)^2$$

$$k_{21} = \frac{2EI}{L^3} (3L)$$

$$k_{31} = \frac{2EI}{L^3} (3L)$$



$$k_{22} = \frac{2EI}{L^3}(2L)^2 + \frac{2(4EI)}{(2L)^3}(2)(2L)^2 = \frac{2EI}{L^3}(6L^2)$$

$$k_{32} = \frac{2(4EI)}{2L^3}(2L)^2$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{L^3}(3L)$$

$$k_{33} = k_{22} = \frac{2EI}{L^3}(6L^2)$$

وبه دلیل تقارن

$$\begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{k}_t = \bar{k}_u - \bar{k}_{t\theta} \bar{k}_{\theta\theta}^{-1} \bar{k}_{\theta t} \quad k_u = 12k_0 \quad k_\theta = \frac{2EI}{L^3}$$

$$\bar{k}_{\theta\theta} = k_0 \begin{bmatrix} 6L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} \quad \bar{k}_{t\theta} = k_0 [3L \quad 3L] \quad \bar{k}_{\theta t} = k_0 \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}_{\theta\theta}^{-1} = \frac{1}{k_0} \times \frac{1}{16L^2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}_t = \bar{k}_u - \bar{k}_{t\theta} \bar{k}_{\theta\theta}^{-1} \bar{k}_{\theta t} = k_0 \left\{ 12 - \frac{1}{6L^2} [3L \quad 3L] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} \right\}$$

$$\bar{k}_t = k_0 \left( 12 - \frac{36L^2}{16L^2} \right) = \left( \frac{2EI}{L^3} \right) \frac{39}{4} = 19.5 \frac{EI}{L^3}$$

در حالی که چنانچه سختی تیر بی نهایت باشد، درجه آزادی چرخشی وجود ندارد و سختی جانبی سازه برابر است با :

$$k = 2 \times \frac{12EI}{L^3} = \frac{24EI}{L^3}$$

$$\bar{f}_{s_1} = \bar{k}_t v_1 \quad \therefore f_{s_1} = 19.5 \frac{EI}{L^3} v_1$$

و بالاخره

### همپایه کردن مدها

برای همپایه کردن مدها میتوان شکل مد را طوری بدست آورد که :

$$\varphi_i^T \bar{m} \varphi_i \quad (1)$$

اگر  $\psi_i$  را به عنوان شکل مد نام به دست آورده باشیم ، داریم :

$$M_n = \overline{\overline{\psi_i}}^T m \overline{\overline{\psi_i}} \quad (2)$$

$$\overline{\overline{\varphi_i}} = \frac{1}{\sqrt{M_n}} \overline{\overline{\psi_i}}$$

بدین ترتیب با به دست آوردن  $\varphi_i$  از رابطه ۲ ، رابطه ۱ ارضا خواهد شد.

### تعیین فرکانس ها و شکلهای مدی به روش استودولا Stodola

در معادله ارتعاش آزاد دستگاه داریم:

$$-\omega^2 \overline{\overline{M}} \overline{\overline{v}} + \overline{\overline{k}} \overline{\overline{v}} = 0 \quad \overline{\overline{v}} = \text{بردار جابجایی}$$

$$+ \frac{1}{\omega^2} \overline{\overline{v}} = k^{-1} \overline{\overline{M}} \overline{\overline{v}} \quad ; \quad D = k^{-1} M = \overline{\overline{fM}}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \overline{\overline{v}} = \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{v}}$$

پس:

$$\frac{1}{\omega^2} \overline{\overline{\varphi_i}} = \overline{\overline{D}} \overline{\overline{\varphi_i}}$$

$$\overline{\overline{D}}^n \overline{\overline{\varphi_i}} = \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}} \dots \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{\varphi_i}} = \frac{1}{\omega_i^{2n}} \overline{\overline{\varphi_i}}$$

اکنون اگر یک شکل اختیاری در نظر بگیریم که در آن:

$$v_0 = A_1 \overline{\overline{\varphi_1}} + A_2 \overline{\overline{\varphi_2}} + \dots$$

$$D^n v_0 = \frac{A_1}{\omega_1^{2n}} \overline{\overline{\varphi_1}} + \frac{A_2}{\omega_2^{2n}} \overline{\overline{\varphi_2}} + \dots$$

چون داریم:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$$

پس در هر بار ضرب  $\overline{\overline{D}}$  در شکل اختیاری  $\overline{\overline{N}}$  ، نسبت به پایه با کمترین  $\omega$  نسبت به سهم سایر مدها افزایش می یابد و بالاخره به صورت مد غالب بدست می آید.

اکنون اگر  $v_0$  اولین شکل انتخاب شده باشد

$$\frac{1}{\omega^2} \overline{\overline{v}}_0 = \overline{\overline{D}} \overline{\overline{v}}_0 = \overline{\overline{u}}_0$$

اگر  $\overline{\overline{v}}_0$  دقیقاً همان  $\overline{\overline{\varphi_1}}$  باشد در این صورت کلیه جملات  $\overline{\overline{u}}_0, \overline{\overline{v}}_0$  با هم متناسبند و:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{oi}}{u_{oi}}$$

که  $\mathbf{\bar{a}}$  هر یک از نقاط  $n$  گانه است. اما در عمل اینطور نیست و برای هر کدام از جملات مقدار متفاوتی برای  $\omega^2$  به دست می‌آید و:

$$\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$$

مثال- فرکانس و شکل مد N-0 سازه مقابل را به روش استدلا حساب کنید.

$$m = 1.0 \text{ ks}^2 / m$$

$$\longrightarrow k = 600 \text{ k/in}$$

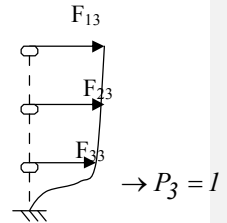
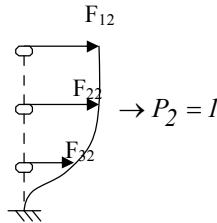
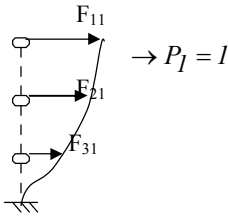
$$m = 1.5$$

$$\longrightarrow k = 1200 \text{ k/in}$$

$$m = 2.0 \text{ ks}^2 / m$$

$$\longrightarrow k = 1800 \text{ k/in}$$

### ۱. محاسبه ماتریس انعطاف



$$\begin{cases} f_{11} = \frac{1}{600} + \frac{1}{1200} + \frac{1}{1800} = \frac{11}{3600} \\ f_{21} = \frac{1}{1200} + \frac{1}{1800} = \frac{1}{3600} \\ f_{31} = \frac{1}{1800} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{22} = \frac{5}{3600} \\ f_{32} = \frac{2}{3600} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{33} = \frac{2}{3600} \end{cases}$$

به دلیل تقارن  $f_{ij} = f_{ji}$ ، پس محاسبه ضرایب نیمی از ماتریس انعطاف کافی می‌باشد.

$$\bar{f} = k^{-1} = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 11 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in/k}$$

$$\bar{D} = \bar{f} \cdot \bar{M} = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 11 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 11 & 7.5 & 9 \\ 2 & 7.5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{فرض:}$$

$\bar{v}_2$	$\bar{u}_2$	$\bar{v}_3$	$\bar{u}_3$	$v_4$	$u_4$	
1	17.26	1	17.08	1	17.04	
67	11.26	65	11.08	646	11.04	
31	5.25	3	5.15	301	5.14	

$$\bar{D}\bar{v}_o = \begin{bmatrix} 11 & 7.5 & 4 \\ 2 & 7.5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.5 \\ 16.5 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 18.1 \\ 73 & 12.1 \\ 40 & 5.8 \end{bmatrix}$$

$$\omega_I^2 = \frac{v_{4i}}{u_{4i}} \Rightarrow [\omega_I^2]_I = \frac{1}{\frac{1}{3600} \times 17.04} = 211$$

$$[\omega_I^2]_3 = \frac{301}{\frac{1}{3600} \times 5.14} = 210.8$$

ملاحظه می‌شود که در هر نقاط تعداد فرکانس  $\omega$  تقریباً یکی است. اگر می‌خواستیم در همان مرحله اول فرکانس را حساب کنیم:

$$[\omega_I^2]_I = \frac{1}{\frac{1}{3600} \times 225} = 160 \quad [\omega_I^2]_3 = \frac{1}{\frac{1}{3600} \times 9} = 400$$

$$160 < \omega_I^2 < 400$$

برای افزایش دقت میتوان به روش متوسط گیری عمل نمود:

$$\omega_I^2 = \frac{\frac{1}{3600} [22.5 \quad 16.5 \quad 9] \bar{M} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{3600} [22.5 \quad 16.5 \quad 9] \bar{M} \times \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 22.5 \\ 16.5 \\ 9 \end{bmatrix}} = 218$$

ناگفته نماند که این همان روش ریلی است ( $R_{II}$ ):

$$\omega_I^2 = \frac{\int m \phi_0 \psi_I dx}{\int m \psi_I^2 dx}$$

محاسبه بار بحرانی بروش ضرب مکرر<sup>۱</sup> (روش ویانلو) با استفاده از معادله حرکت ارتعاش آزاد داریم

$$\bar{k}\bar{v} = \omega^2 \bar{M}\bar{v}$$

$$\bar{v} = \omega^2 k^{-1} \bar{M}\bar{v}$$

$$v_I^{(1)} = \omega_I^2 Dv_I^{(0)}$$

$$\bar{D} = \bar{k}^{-1} \bar{M}$$

در این رابطه:

$$\bar{k} = \bar{k}_I - K_{GO}$$

ماتریس بدون اثر نیروی محوری

ماتریس سختی هندسی

نیروی محوری موجب کاهش سختی و افزایش زمان تناوب می شود به طوری که در حالت حدی تناوب به سمت بی نهایت، و  $\omega$  به سمت صفر میل می کند.

$$\bar{k}\bar{v} = 0$$

$$(\bar{k}_I - \lambda_G k_G) \bar{v} = 0$$

اگر این رابطه را در  $\frac{1}{\lambda_G} \bar{k}_I^{-1} = \frac{1}{\lambda_G} \bar{f}$  پیش ضرب کنیم:

$$\frac{1}{\lambda_G} \bar{v} = \bar{G} \bar{v} \quad ; \quad \bar{G} = \bar{k}_I^{-1} K_{GO} = \bar{f} K_{GO}$$

این معادله نیز به روش ضرب مکرر  $\bar{G}$  در یک شکل اختیاری  $v_I$  قابل حل است (مثل روش استدلای).

$$\frac{1}{\lambda_{GI}} \bar{v}_I^{(1)} = \bar{G} \bar{v}_I^{(0)}$$

این روش به نام ویانلو (Vianello) خوانده می شود (ص ۲۷۶۵ کلاف)

چنانچه به محاسبه مدهای بالاتر کمانش نیاز باشد می توان از شرط تعامد زیر استفاده نمود:

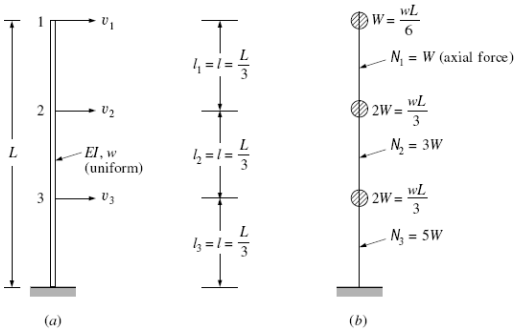
$$\bar{\Phi}_i T_{k_{Go}} \bar{\Phi}_j = 0 \quad i \neq j$$

(اما معمولاً نیازی به محاسبه مدهای بالاتر نمی باشد)

مثال: بار بحرانی ستون زیر با مقطع یکنواخت زیر اثر وزن خودش را بروش ویانلو به دست آورید.

<sup>۱</sup> این واژه را بجای تکرار ماتریسی با matrix iterative method آوردیم / ۹/۹/۱۶





$$\rightarrow v_1 \xrightarrow{L/3} \omega L / 6$$

$$\rightarrow v_2 \xrightarrow{L/3} 2 \times \omega L / 6$$

$$\rightarrow v_3 \xrightarrow{L/3} 2 \omega L / 6$$

$$W = wL / 6$$

$$N_1 = wL / 6 = W$$

$$N_2 = wL / 2 = 3W$$

$$N_3 = 3W + 2wL / 6 = 5W$$

$$k_G = \begin{bmatrix} \frac{N_1}{l_1} & -\frac{N_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{N_1}{l_1} & \frac{N_1}{l_1} + \frac{N_2}{l_2} & -\frac{N_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{N_2}{l_2} & \frac{N_2}{l_2} + \frac{N_3}{l_3} \end{bmatrix} = \frac{W}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

که در آن  $l = L/3$

$$y = \frac{PL^3}{EI} \cdot \frac{x^2}{L^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{x}{L} \right)$$

$$f_{11} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{1 \times (3L_1)^3}{3EI} = 9 \frac{L_1^3}{EI} = 9A, \quad A = \frac{L_1^3}{EI}$$

$$f_{21} = y(x = 2L_1) = \frac{1 \times 27L_1^3}{3EI} \left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{14}{3} A$$

$$f_{31} = y(x = L_1) = \frac{1 \times 27L_1^3}{EI} \left( \frac{1}{3} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} A$$

$$\bar{f} = \frac{I^3}{6EI} \begin{bmatrix} 54 & 28 & 8 \\ 28 & 16 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \bar{f} \cdot k_{Go} = \frac{WI^2}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & 34 & -20 \\ 12 & 21 & -8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون با استفاده از یک شکل مفروض  $\bar{v}_o$  می‌توان شکل  $\bar{u}_o$  را به دست آورد، یعنی:

$$\bar{G} \bar{v}_o = \bar{u}_o = \left( \frac{I}{\lambda_{G_I}} \right) \bar{v}_I \quad \bar{G} \bar{v}_I = (I/\lambda_{G_I}) \bar{v}_2 - \dots$$

برای شروع، شکل اولیه کمانش را یک خط راست فرض می‌کنیم:

$$\bar{v}_o = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} \bar{v}_o = \frac{WI^2}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & 34 & -20 \\ 12 & 21 & -8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ 1 \\ .67 \\ .33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ 42.11 \\ 23.3 \\ 7.3 \end{bmatrix} = 42.11 \begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ .559 \\ .174 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & u_1 & 1 \\ 1 & 41.36 & .538 \\ .554 & 22.2 & .157 \\ .174 & 6.50 & \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda_c} = \frac{41.36WI^2}{6EI}$$

و پس از نهادن  $l = L/3$

$$\therefore \lambda_c = 1.306 \frac{EI}{WL^2}$$

$$W = wL/6 \quad \therefore w = 6W/L$$

$$\therefore w_c = 6\lambda_c W/L$$

$$\therefore w_c = 7.834 \frac{EI}{L^3}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ .538 \\ .157 \end{bmatrix}$$

جواب دقیق این مسأله برابر  $W_{Cr} = 7.83 \frac{EI}{L^3}$  است که تطابق بسیار خوبی را نشان می‌دهد. برای محاسبه فرکانس سازه در حالت کلی میتوان از ماتریس سختی اصلاح شده استفاده کرد:

$$\bar{K} = \frac{6}{26} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 7 & -16 & 12 \\ -16 & 44 & -46 \\ 12 & -46 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_G = \frac{W}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & +4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

با جایگزینی  $W = wL/6 = wl/2$  در ماتریس  $\bar{K}_G$  داریم

$$\bar{K}' = \bar{K} - \bar{K}_G = \frac{6EI}{26l^3} \begin{bmatrix} 7 & -16 & 12 \\ -16 & 44 & -46 \\ 12 & -46 & 80 \end{bmatrix} - \frac{w}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & +4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

بدهی است اگر وزن برابر مقدار بحرانی  $w = w_c = 7.834 \frac{EI}{L^3}$  باشد فرکانس برابر صفر بدست خواهد

آمد اما اگر درصدی از این بار بحرانی را وارد کنیم در این صورت فرکانس نسبت به حالت بدون وزن

کاهش یافته اما برابر صفر نخواهد شد. در هر حال برای هر مقدار دلخواه  $w$  می‌توان ماتریس  $\bar{K}'$  را

بدست آورد و محاسبات را دنبال کرد. به عنوان مثال برای وقتی که وزن برابر ۷۹٪ بار بحرانی باشد

داریم

$$w = 0.79w_c = 6.188 \frac{EI}{L^3} = 0.229 \frac{EI}{l^3}$$

از جایگزینی آن در ماتریس فوق

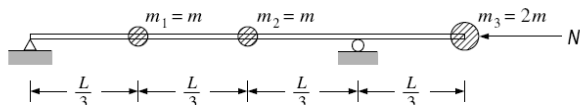
$$\bar{K}' = \bar{K} - \bar{K}_G$$

$$\bar{K}' = \frac{6EI}{26l^3} \begin{bmatrix} 7 & -16 & 12 \\ -16 & 44 & -46 \\ 12 & -46 & 80 \end{bmatrix} - \frac{0.115EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & +4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \frac{0.115EI}{l^3} \begin{bmatrix} 13 & -31 & 24 \\ -31 & +84 & -89 \\ 24 & -89 & 152 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب با داشتن ماتریس سختی میتوان به روش استدولا فرکانس سازه را حساب کرد.

[تمرینات فصل ۱۳. ۱۳.۱، ۱۳.۲، ۱۳.۴، ۱۳.۶] پ

- 13-1.** Evaluate the fundamental vibration-mode shape and frequency for the building of Prob. 8-12 using the matrix iteration method. Note that the flexibility matrix may be obtained from the given story shear stiffness either by inverting the stiffness matrix or by applying a unit load successively at each story, and evaluating the resulting displacements at each story.
- 13-2.** Evaluate the highest mode shape and frequency for the building of Prob. 13-1 by matrix iteration, using the stiffness form of the dynamic matrix Eq. (13-45).
- 13-4.** Evaluate the second mode shape and frequency for the shear building of Prob. 12-4 by matrix iteration. To form the first mode sweeping matrix  $S_1$ , use the given first mode shape  $\phi_1$  and Eq. (13-30).
- 13-6.** A beam with three lumped masses is shown in Fig. P13-1; also shown are its flexibility and stiffness matrices. By matrix iteration, determine the axial force  $N_{CR}$  that will cause this beam to buckle. In this analysis, use the linear approximation, Eq. (10-36), to express the geometric stiffness of the beam.



$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{L^3}{243EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 & -8 \\ 7 & 8 & -10 \\ -8 & -10 & 24 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 92 & -88 & -6 \\ -88 & 128 & 24 \\ -6 & 24 & 15 \end{bmatrix} \frac{243}{168} \frac{EI}{L^3}$$

پاسخ ارتعاش دستگاه چند درجه آزادی در حالت کلی

اگر پاسخ کلی یک دستگاه چند درجه آزادی را با بردار  $\bar{v}$  نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\bar{v} = \bar{\phi}_1 \cdot y_1(t) + \bar{\phi}_2 \cdot y_2(t) + \dots + \bar{\phi}_n \cdot y_n(t)$$

و حرکت هر نقطه  $i$  عبارت است از :

$$v_i(t) = \phi_{i1} y_1(t) + \dots + \phi_{in} y_n(t)$$

و اگر بردار  $\bar{\Phi}$  را طبق زیر تعریف کنیم :

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 & \bar{\phi}_2 & \dots & \bar{\phi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1i} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & & \phi_{2i} & & \phi_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{ni} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\bar{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{ni} \end{bmatrix}$$

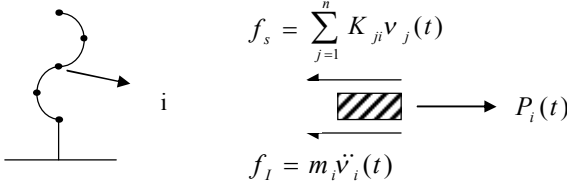
آنگاه :

$$\bar{v}(t) = \bar{\Phi} \cdot \bar{Y}(t) \quad , \quad \bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

### دستگاه معادلات حرکت

در حالت نامیرا، و زیر اثر نیروهای خارجی معادلات حرکت سازه به شکل زیر است

$$m_i \ddot{v}_i(t) + \underbrace{\left[ K_{1i} v_1(t) + K_{2i} v_2(t) + \dots + K_{ni} v_n(t) \right]}_{f_s} = P_i(t)$$



و نمایش ماتریسی دستگاه معادلات حرکت به صورت زیر خواهد بود :

$$\bar{M} \cdot \ddot{\bar{v}}(t) + \bar{K} \bar{v}(t) = \bar{P}(t) \quad (2)$$

دستگاه معادلات (2) از نوع "درگیر" Coupled است و برای جداسازی اثر جابجایی نقاط مختلف از هم (decoupling) از خاصیت تعامد مدهای ارتعاش نسبت به ماتریس جرم و سختی استفاده می‌کنیم :

$$(\bar{\phi}_i^T \bar{M}) \bar{\Phi} = \left[ \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_2 + \dots + \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i + \dots \right]$$

$$\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_j = 0 \quad i \neq j$$

$$\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\Phi} = \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i \quad (3)$$

$$\bar{\phi}_i^T \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{\phi}_i^T \bar{K} \bar{\phi}_i = \omega_i^2 \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i \quad (4)$$

از این رو، اگر معادله (2) را در  $\bar{\phi}_i^T$  ضرب کنیم، با استفاده از روابط (3) و (4) داریم:

$$\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i \ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i y_i(t) = \bar{\phi}_i^T \bar{P}(t)$$

$$M_i = \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i \quad (5) \quad \text{جرم مد } i$$

نیروی مد  $i$  ام

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{1}{M_i} \underbrace{\bar{\phi}_i^T \bar{P}(t)}_{P_i(t)} = \frac{1}{M_i} \vec{P}_i(t) \quad (6)$$

معادله (۶) دامنه حرکت مد  $i$  را برحسب زمان بدست می‌دهد و با محاسبه  $y_i(t)$  داریم :

$$\bar{v}(t) = \bar{\Phi} \cdot \bar{Y}(t) \quad (7)$$

اگر ماتریس میرایی متناسب با ماتریس‌های جرم و سختی باشد، یعنی :

$$\bar{C} = \alpha \bar{M} + \beta \bar{K}$$

می‌توان ثابت نمود که مدها نسبت به ماتریس میرایی نیز متعامدند، یعنی :

$$\bar{\phi}_i^T \bar{C} \bar{\Phi} = \bar{\phi}_i^T \bar{C} \bar{\phi}_i$$

$$= (2\xi_i \omega_i) \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i \quad \text{و طبق تعریف}$$

پس معادله حرکت مد  $i$  در حالت با میرایی، به صورت زیر خواهد بود :

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{P_i(t)}{M_i} \quad (8)$$

جرم مدی  $M_i$  از رابطه (۵) بدست می‌آید و نسبت استهلاك مد  $i$  ( $\xi_i$ ) را حدس می‌زنند

(بر اساس آزمایش‌های انجام شده در مورد دستگاه‌های چند درجه آزادی)

در واقع تأثیر استهلاك در حالت کلی به صورت زیر است :

$$\overline{M}\ddot{\overline{v}} + \overline{C}\dot{\overline{v}} + \overline{K}\overline{v} = \overline{P}(t)$$

$$\therefore \overline{\phi}_i^T \overline{M}\overline{\Phi}\ddot{y} + \overline{\phi}_i^T \overline{C}\overline{\Phi}\dot{y} + \overline{\phi}_i^T \overline{K}\overline{\Phi}y = \overline{\phi}_i^T \overline{P}(t)$$

$$\overline{\phi}_i^T \overline{M}\overline{\phi}_j = 0 \quad , \quad \overline{\phi}_i^T \overline{K}\overline{\phi}_j = 0 \quad \text{اگر } i \neq j \text{ آنگاه دیدیم که :}$$

$$\overline{\phi}_i^T \overline{M}\overline{\phi}_i = M_i \quad , \quad \overline{\phi}_i^T \overline{K}\overline{\phi}_i = K_i = \omega_i^2 M_i \quad \text{از قبل :}$$

$$\overline{\phi}_i^T \overline{C}\overline{\phi}_j = 0 \quad i \neq j \quad , \quad \overline{\phi}_i^T \overline{C}\overline{\phi}_i = C_i \quad \text{اکنون اگر فرض شود :}$$

$$\therefore M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = P_i(t) \quad , \quad P_i(t) = \overline{\phi}_i^T \overline{P}(t)$$

پس می‌توان چنین نوشت :

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{M_i} P_i(t) \quad (9)$$

$$\xi_i = C_i / (2\omega_i M_i)$$

البته باید دانست که معمولاً دستیابی مستقیم به ماتریس استهلاک  $\overline{C}$  مقدور نیست اما می‌توان  $\xi_i$  را با انجام آزمایش، و به ارتعاش درآوردن مدهای مختلف تعیین نمود.  
پاسخ معادله حرکت فوق (رابطه (۹)) را می‌توان بوسیله انتگرال دوهمال بدست آورد :

$$y_i(t) = \int_0^t P_i(\tau) \cdot h_i(t-\tau) \cdot d\tau \quad (10)$$

$$h_i(t-\tau) = \frac{1}{M_i \omega_{Di}} \sin \omega_{Di}(t-\tau) \cdot e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \quad 0 < \xi_i < 1$$

(11)

(unit impulse function) تابع ضربه واحد  $h_i(t-\tau)$  :



در صورتی که دستگاه علاوه بر نیروی  $\bar{P}(t)$ ، زیر اثر جابجایی اولیه نیز قرار گیرد باید زیر را به  $y_i$  اضافه کرد:

$$y_i(t) = \left[ y_i(0) \cos \omega_{Di} t + \left( \frac{\dot{y}_i(0) + y_i(0) \xi_i \omega_i}{\omega_{Di}} \right) \sin \omega_{Di} t \right] e^{-\xi_i \omega_i t}$$

$$y_i(0) = \frac{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{v}(0)}{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i}, \quad \dot{y}_i(0) = \frac{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \dot{\bar{v}}(0)}{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i} \quad \text{که در آن:}$$

اثبات:

$$\bar{v} = \bar{\Phi} \bar{y}, \quad \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{v} = \bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\Phi} \bar{y} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ \dots \\ y_n(0) \end{bmatrix}$$

$$= M_i y_i(0) \quad \therefore y_i(0) = \frac{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{v}(0)}{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i}$$

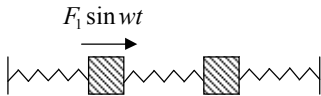
$$\dot{y}_i(0) = \frac{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \dot{\bar{v}}(0)}{\bar{\phi}_i^T \bar{M} \bar{\phi}_i}$$

به طور مشابه:

### دستگاه دو درجه

**تمرین:** نشان دهید که اگر در دستگاه دو درجه نامیرای زیر، نیروی هماهنگ  $F_1 \sin \omega t$  به جرم  $m_1$  وارد

شود پاسخ ماندگار سازه یک تابع هماهنگ با فرکانس  $\omega$  و دامنه زیر میباشد

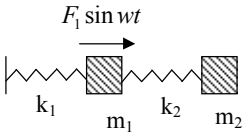


$$x_1 = \frac{(k_{22} - m_2 \omega^2) F_1}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2)}$$

$$x_2 = \frac{-k_{12} F_1}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2)}$$

## جاذب ارتعاشی<sup>۲</sup>

دو درجه زیر را در نظر بگیرید که در آن فرکانس جاذب ارتعاشی با جرم  $m_2$  و سختی  $k_2$  با فرکانس نیروی محرک هماهنگ<sup>۳</sup> شده است ( $k_2/m_2 = w^2$ ). نشان دهید وجود چنین جاذب باعث خواهد شد پاسخ ماندگار سازه اصلی ( $m_1$ ) زیر اثر محرک مزبور صفر شود.

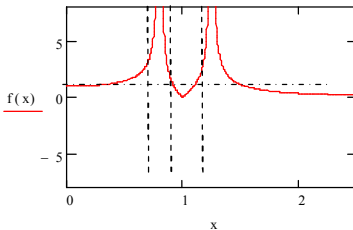


جواب.

$$\frac{x_1 k_1}{F_1} = \frac{(1 - \frac{w^2}{w_{22}^2})}{(w_1^2 - w^2)(w_2^2 - w^2)}$$

$$w_{11}^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad ; \quad w_{22}^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

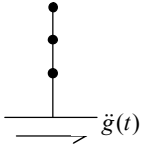
ملاحظه میشود که پاسخ همواره به ازای  $w/w_{22} = 1$  برابر صفر میشود. اگر در حالت  $m_2 = 0.2m_1$  و  $w_{22}/w_{11} = 1$  این تابع را برحسب  $w/w_{22}$  رسم کنیم به شکل زیر در می آید. این تابع در نقاط  $w/w_{22} = 0.8$  و  $w/w_{22} = 1.25$  به حالت تشدید میرسد. این نقاط بیانگر فرکانسهای طبیعی مدهای اول و دوم میباشند. همانطور که در شکل میبینیم با نزدیک شدن  $w/w_{22}$  به یک پاسخ به صفر نزدیک میشود و این نشاندهنده عملکرد میراگر ارتعاشی میباشد.



<sup>۱</sup> به نقل از Thomson, W. T., 1988, Theory of vibration, 3<sup>rd</sup> edition, p136  
<sup>۲</sup> tuned

## حرکت دستگاه تحت شتاب پی

در این حالت داریم:



$$\bar{P}(t) = -\bar{M} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{g}(t)$$

پس سمت راست معادله (۸) برابر است با :

$$\frac{1}{M_i} \bar{\phi}_i^T \bar{P}(t) = -\frac{L_i}{M_i} \ddot{g}(t)$$

و معادله (۸) به این صورت در می‌آید:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = -(L_i / M_i) \ddot{g}(t) \quad (12)$$

که در آن

$$L_i = \sum_{j=1}^n m_j \phi_{ji}, \quad M_i = \sum_{j=1}^n m_j \phi_{ji}^2 \quad (13)$$

برای محاسبه جابجایی  $\bar{v}(t)$  می‌توان به رابطه (۷) مراجعه نمود و باید توجه داشت که  $\bar{v}(t)$  جابجایی‌های نسبی است نه مطلق.

### • محاسبه (تحلیل) مدی

با استفاده از رابطه (۱۲) می‌توان دریافت که برای تحلیل حرکت ارتعاشی دستگاه چند درجه آزادی، زیر اثر شتاب پی نیازی به تحلیل کامل حرکت زمانی نمی‌باشد، بلکه کافی است مقدار اثر اوج در هر مد را بدست آورد و به کمک روش‌هایی که بعداً تشریح خواهند شد، ترکیب نمود. با استفاده از طیف پاسخ  $\ddot{g}(t)$  می‌توان شتاب طیفی را برای هر مد خاص حساب کرد.

$$S_a^{(i)} = \frac{L_i}{M_i} \cdot A_i \quad (14)$$

$A_i$ : مؤلفه شتاب طیفی دستگاه تکدرجه نظیر [ با فرکانس  $\omega_i$  و استهلاک  $\xi_i$  ]

$L_i$  و  $M_i$  قبلاً تعریف شده‌اند.

نیروی اینرسی وارد به طبقه  $i$  در مد  $i$  برابر است با :

شتاب مطلق

طبقه  $i$  در مد  $i$

$$q_{ji} = m_j \ddot{v}_j(t)$$

$$\therefore q_{ji} = m_j \left[ \phi_{ji} \left( \frac{L_i}{M_i} \cdot A_i \right) \right] \quad (15)$$

چون مقادیر  $L_i$  و  $M_i$  و  $A_i$  برای هر مد ثابت هستند، پس نیروی اینرسی در هر مد به نسبت  $m_j \phi_{ji}$  توزیع می‌شود:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n q_{ji} = \frac{L_i A_i}{M_i} \sum_{j=1}^n m_j \phi_{ji}$$

$$\therefore Q_i = \frac{L_i^2}{M_i} \cdot A_i = \frac{\left( \sum m_j \phi_{ji} \right)^2}{\sum m_j \phi_{ji}^2} \cdot A_i \quad (16) \quad \text{برش پایه در مد } i \text{ ام}$$

برش پایه به نسبت  $m_j \phi_{ji}$  در طبقات توزیع می‌شود.

$$q_{ji} = \frac{m_j \phi_{ji}}{\sum_{j=1}^n m_j \phi_{ji}} \quad (17)$$

برای محاسبه جابجایی طبقات، داریم:

$$\begin{aligned} v_{ji} &= \phi_{ji} Y_i = \phi_{ji} \dot{y}_i / \omega_i^2 = \frac{\phi_{ji} L_i}{\omega_i^2 M_i} A_i \\ \therefore v_{ji} &= \frac{1}{m_j \omega_i^2} (m_j \phi_{ji} \frac{L_i}{M_i} A_i) = q_{ji} / (m_j \omega_i^2) \quad (18) \\ \therefore v_{ji} &= \frac{q_{ji}}{(m_j \omega_i^2)} \end{aligned}$$

این رابطه را می‌توان به روش ساده‌تری نیز به دست آورد: چون تمام طبقات با فرکانس  $\omega_i$  در ارتعاش‌اند،

شتاب هر نقطه برابر است با:

$$\ddot{v}_{ji} = \omega_i^2 v_{ji}$$

$$q_{ji} = m_j \ddot{v}_{ji} = m_j \omega_i^2 v_{ji}$$

$$\therefore v_{ji} = \frac{q_{ji}}{(m_j \omega_i^2)}$$

باید دانست که  $v_{ji}$  جابجایی اوج نقطه  $j$  در مد  $i$ ام نسبت به پی است و برای محاسبه جابجایی دو طبقه متوالی، داریم:

$$\Delta_{ji} = v_{ji} - v_{(j-1)i} \quad (19)$$

### پاسخ کل (ترکیب مدها)

روشهای تقریبی ( $..., CQC, SRSS$ )

برای ترکیب اثر دقیق مدها در مورد هر مؤلفه باید آن مؤلفه را به صورت تابعی از زمان در نظر

گرفت. مثلاً تلاش برشی پی در مد  $i$ ام برابر است با:

$$Q_i = \frac{[\sum m_j \phi_{ji}]^2}{\sum m_j \phi_{ji}^2} A_i(t)$$

که در آن  $A_i(t)$  شتاب لحظه‌ای دستگاه تکدرجه نظیر زیر اثر شتاب پی  $\ddot{g}(t)$  می‌باشد. بدیهی است:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t)$$

تعداد کل مدها

چون همه مدها در یک لحظه به نقطه اوج نمی‌رسند:  $Q_{\max} < \sum (Q_i)_{\max}$

پس ترکیب مدها به روش تقریبی انجام شود. مثلاً به روش SRSS:  $\therefore Q_{\max} = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + \dots}$

## خلاصه روش تحلیل مدی

۱- تعیین فرکانس ها و اشکال مدی  $\omega_i$  و  $\bar{\varphi}_i$

۲- تهیه طیف پاسخ شتاب زمین  $\ddot{g}(t)$

۳- تعیین شتاب طیفی برای هر مد ( $A_i$ ) بر حسب  $\omega_i$  و  $\xi_i$

۴- محاسبه برش پایه در هر مد

$$Q_i = \frac{L_i^2}{M_i} A_i$$

ضمناً  $L_i^2/M_i$  را جرم موثر مدی ( $M_i^*$ ) می نامند . پس :

$$Q_i = M_i^* A_i$$

۵- محاسبه نیروی طبقات

$$q_{ji} = \frac{m_i \varphi_{ji}}{\sum m_i \varphi_{ji}} Q_i$$

و در صورت لزوم جابجایی طبقات از رابطه مربوطه حساب می شود .

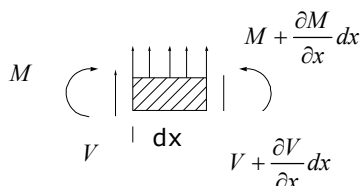
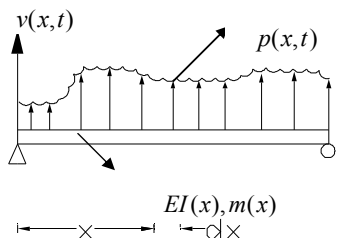
۶- ترکیب اثر مدها

$$\text{روش SRSS} \quad r = [r_1^2 + r_2^2 + \dots]^{1/2}$$

→ روش CQC به آیین نامه ۲۸۰۰ مراجعه شود یا کتاب مهندسی زلزله

## دستگاه با جرم و سختی گسترده

تعیین معادله دیفرانسیل حرکت



$$\sum F_y = ma_y$$

$$\therefore p(x,t)dx - \frac{\partial V}{\partial x} dx = (mdx) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x} = p(x,t) - m \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = p - m \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}) + m \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = p(x,t)$$

معادله پاره‌ای حرکت:

## ارتعاش آزاد تیر

اگر \$EI\$ ثابت باشد، داریم

$$p(x,t) = 0, \quad EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

اگر تابع جابجایی  $v$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$v(x, t) = \varphi(x, t)y(t)$$

آنگاه:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \cdot y(t) + \frac{m}{EI} \cdot \varphi(x) \ddot{y}(t) = 0$$

$$\therefore \frac{\varphi^{iv}(x)}{\varphi(x)} = -\frac{m}{EI} \frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = C$$

سمت راست معادله فوق فقط تابع زمان است و برای نقاط مختلف (Xهای مختلف) ثابت است.

سمت چپ این معادله نیز فقط تابع مکان (X) است و نسبت به زمان ثابت می ماند. پس اگر:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - a^4 \varphi(x) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{EI}{m} a^4\right) y(t) = 0 \quad \therefore \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (2)$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{EI}{m} a^4$$

معادله (۲) همان معادله حرکت آزاد دستگاه تکدرجه است و پاسخ آن عبارت است از:

$$y(t) = \frac{\dot{y}(0)}{\omega} \sin \omega t + y(0) \cos \omega t \quad (3)$$

پاسخ معادله (۱) را می توان بصورت توابع نمایی نوشت.

$$\varphi(x) = C e^{rx}$$

$$\therefore (r^4 - a^4) C e^{rx} = 0 \quad \therefore r = \pm a, \quad \pm ai$$

$$\therefore \varphi(x) = C_1 e^{iax} + C_2 e^{-iax} + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}$$

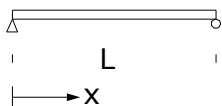
و یا:

$$\varphi(x) = A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \sinh ax + A_4 \cosh ax \quad (4)$$



شکل‌های ارتعاش از معادله (۴) بدست می‌آید. ضرایب  $A_1$  تا  $A_4$  در این رابطه به کمک شرایط تکیه‌گاهی بدست می‌آیند.

مثال: تیر دو سر مفصل



شرایط تکیه‌گاهی عبارتند از

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

$$M(0) = M(L) = 0 \therefore EI\varphi''(0) = 0 \quad EI\varphi''(L) = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \therefore A_1 \times 0 + A_2 \times 1 + A_3 \times 0 + A_4 \times 1 = 0 \quad \therefore A_2 + A_4 = 0$$

$$\varphi''(0) = 0 \quad \therefore a^2(A_1 \times 0 - A_2 \times 1 + A_3 \times 0 + A_4 \times 1) = 0 \quad \therefore -A_2 + A_4 = 0$$

$$\varphi(L) = 0 \quad \therefore A_1 \sin aL + A_3 \sinh aL = 0$$

$$\varphi''(L) = 0 \quad \therefore a^2(-A_1 \sin aL + A_3 \sinh aL) = 0$$

$$\therefore A_3 \sinh aL = 0 \quad \sinh aL \neq 0 \quad \therefore A_3 = 0$$

$$\therefore A_1 \sin aL = 0 \quad A_1 = 0 \Rightarrow \quad A_1 \neq 0$$

$$\therefore \sin aL = 0 \quad aL = n\pi \quad \therefore a = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{EI}{m} a^4 \quad \omega = a^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\therefore \varphi_n(x) = A_1 \sin \frac{n\pi}{L} x$$