$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

یک تیم k نفره به همراه سرگروه

$k\binom{n}{k}$ اول تیم بعد سرگروه

$n\binom{n-1}{k-1}$ اول سرگروه بعد بقیه تیم

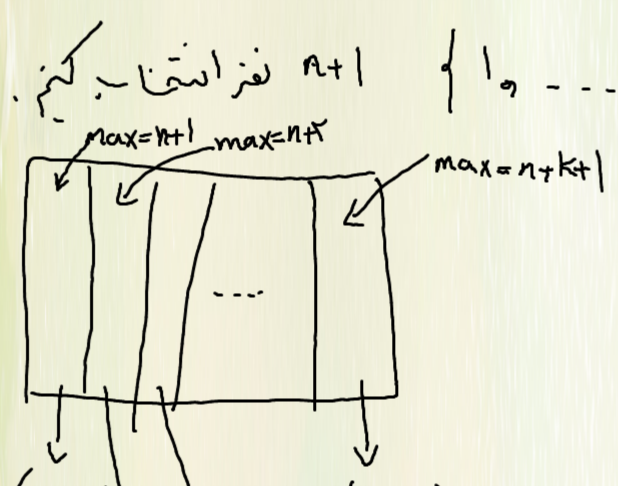
$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}\overset{?}{=}\binom{n+k+1}{k}$$

چوبشی چی

$\{1,\ldots,n+k+1\}$ k نفر می خواهیم انتخاب کنیم.

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}\overset{?}{=}\binom{n+k+1}{n+1}$$

$\{1,\ldots,n+k+1\}$ $n+1$ نفر انتخاب کنیم.



$\binom{n}{n}$ $\binom{n+1}{n}$ $\binom{n+2}{n}$ $\binom{n+k}{n}$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$A=\{1,\ldots,n+1\}$

تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی = ?

$\binom{n+1}{2}$ (1)

(2) $\rightarrow$ $max=2 \rightarrow 1$

$max=3 \rightarrow 2$

$\vdots$

$max=n+1 \rightarrow n$

$$1+\cdots+n=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\{1,\ldots,n+1\}$ (x,y,z) ← تعداد ?

به شرطی که $x,y<z$

$z=2 \rightarrow 1^2$

$z=3 \rightarrow 2^2$

$z=4 \rightarrow 3^2$

۳ حالت برای x

۳ حالت برای y

$z=n+1$

$\rightarrow n^2$

روش دوم :

$x=y \rightarrow \binom{n+1}{2}$

$x\neq y$

$2\binom{n+1}{3}$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

محاسبات جبری

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=?$$

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$$

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

$$n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}=$$

$$n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=n2^{n-1}$$

$n \rightarrow$ اول سرگروه

2^{n-1} اعضای گروه

تعداد اعضا $=1 \rightarrow 1\binom{n}{1}$

$=2 \rightarrow 2\binom{n}{2}$

$=3$

$\vdots$

$=n \rightarrow n\binom{n}{n}$

$$\binom{n}{0}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}=\binom{2n}{n+1}$$

$$\binom{2n}{n+1}=\binom{n}{1}\binom{n}{n}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{1}$$

$n\in\mathbb{N},\ n>1$

$$1\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-4\binom{n}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$$

$$n\binom{n-1}{0}-n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}-n\binom{n-1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n-1}{n-1}$$

$$n\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i}$$

$\{1,\ldots,n\}$

تعداد تیم های فرد عضوی به همراه سرگروه = تعداد تیم های زوج عضوی به همراه سرگروه

$$2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+\cdots=1\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+\cdots$$

$\{1,\ldots,n-1\}$

همه تیم ها با سرگروه

$\{\ \ \}\ \overset{x}{O} \xrightarrow{\cup\{n\}} \{\ \ ,n\}\ \overset{x}{O}$

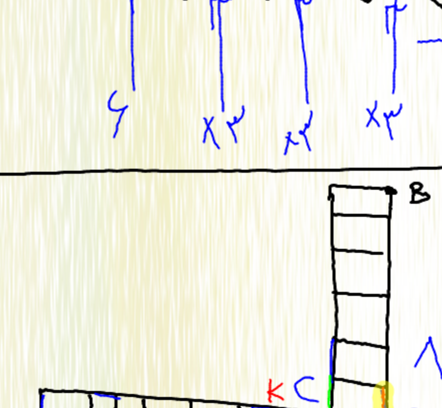
$\{\ \ \}\ O$

$\vdots$

$\{\ \ \}\ \overset{x}{O} \xrightarrow{\cup\{n\}} \{\ \ ,n\}\ \overset{x}{O}$

$\emptyset \xrightarrow{\cup\{n\}} \{n\}\ n$

راه حل کامل نیست.



$C\ \cancel{\emptyset}$

$C\ D$

$D\ C$

$D\ \cancel{\emptyset}$

$A\rightarrow C: 2^7$