بسمه تعالی

آزمایشگاه فیزیک پایه ۱

گزارش کار آزمایش شماره ۷

« آونگ ساده و مرکب »

گروه ۲

محمدرضا مهدیه

تاریخ آزمایش : ۱۳۹۰/۸/۲۹

تاریخ تحویل گزارش کار: ۱۳۹۰/۹/۶

استاد: آقای روزبه ترکی

تئوری آزمایش:

دید کلی

حرکت تناوبی و نوسانی یکی از مهمترین انواع حرکت می‌باشد. اهمیت این حرکت به دلیل کاربرد آن در مطالعه ساختار اتمها می‌باشد. *آونگ ساده* ، یک مثال ساده است که برای توصیف حرکتها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در زندگی روزمره نمونه‌های زیادی از نوع آونگ ساده وجود دارد. به عنوان مثال ، می‌توان به ساعتهای شماته‌دار قدیمی اشاره کرد که معمولا در بعضی از خانه‌های قدیمی ، هنوز هم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

آونگ عبارت است از جسم آویخته‌ای که طول محور افقی گذرنده از نقطه‌ای از جسم (به جز مرکز جرم) آزادانه می‌چرخد. شاید اولین کسی که متوجه حرکت آونگ گونه شده است گالیله در سال ۱۵۸۱ باشد. کریستیال هویگنس در سال ۱۶۵۶ ساعت آونگی را اختراع کرد. (آیزاک نیوتن نیز بر روی مطالعات هویگنس و مقالات او کار کرده است.) «آونگ ساده» آونگی است که از گلوله سنگین به نام وزنه، که از نخ نازکی با جرم ناچیز آویزان است «در آونگ فیزیکی» (یا آونگ مرکب) هر گونه توزیع جرم قابل قبول است. «آونگ دوطرفه» آونگی با دو وزنه است که دارای دو محور دوران می‌باشد و معمولاً برای اندازه‌گیری شدت جاذبه از آن استفاده می‌شود. (اولین بار حدود سال ۱۸۱۸ توسط کاپیتان هنری کارتر) بنجامین رانیز انگلیسی مؤلف کتاب اصول توپ‌خانه (۱۷۴۲) برای اولین بار «آونگ بالستیک» را ابداع کرد. این آونگ قطعه‌ای آویخته از جنس چوب است یا جسم دیگر است که می‌توان گلوله یا هر پرتابه‌ای را به آن شلیک کرد. از این آونگ برای تعیین سرعت گلوله‌ها استفاده می‌شده است. «آونگ فوکو» یکی از جالب‌ترین و گیراترین دلایل این واقعیت است که ما در چارچوب مرجع چرخان و ؟؟؟ به سر می‌بریم. ژان فوکو (مخترع ژیروسکوپ) این آونگ را در سال ۱۸۵۱ به عنوان یکی از نشانه‌های چرخش زمین ابداع نمود.

حرکت نوسانی چیست؟

هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود حرکت تناوبی است .جابجایی هر ذره در حرکت تناوبی را همیشه می‌توان بر حسب توابع سینوسی «کسینوسی (بیان کرد. چون اصطلاح هماهنگ (هارمونیک) به عبارتهایی اطلاق می‌شود که شامل این توابع‌اند، حرکت تناوبی را غالبا حرکت هماهنگ می‌گویند. اگر ذره‌ای که حرکت تناوبی دارد روی یک مسیر واحد پس و پیش برود، حرکت آن را نوسانی یا ارتعاشی می‌نامند. جهان پر از حرکتهای نوسانی است که از آن جمله می‌توان به نوسانهای رقاصک ساعت ، سیم ویولن ، جرم متصل به فنر و ...اشاره کرد .

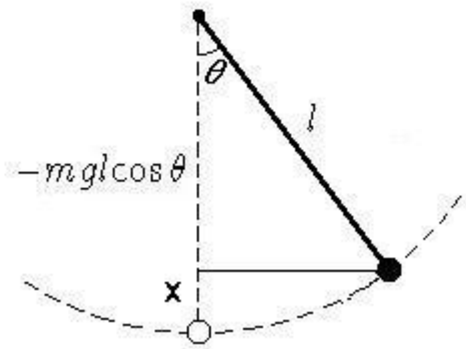
مشخصات حرکت هماهنگ

مدت زمان لازم برای انجام یک رفت و برگشت را دوره تناوب حرکت هماهنگ نامیده و آنرا با T نمایش می دهند. به عبارت دیگر دوره تناوب زمان لازم برای یک نوسان یا چرخه کامل است .

تعداد نوسانها (یا چرخه‌ها) در واحد زمان را فرکانس نامیده و با v نشان می‌دهند. بنابراین فرکانس عکس دوره تناوب است .یکای فرکانس در دستگاه SI دور بر ثانیه یا هرتز می‌باشد .

موضعی که در آن هیچ نیرویی به ذره در حال نوسان وارد نمی‌شود، موضع تعادل می‌نامند و جابجایی «خطی یا زاویه‌ای (عبارت است از فاصله (خطی یا زاویه‌ای) ذره نوسان کننده از موضع تعادل آن در هر لحظه .

مکانیزم کار



ذره ای را که در امتداد یک خط راست میان دو حد ثابت نوسان می‌کند در نظر می‌گیریم. اگر جابجایی ذره را با X ، سرعت ذره را با V و شتاب ذره را با aنشان دهیم که سرعت و شتاب از نظر بزرگی و جهت به طور متناوب تغییر می‌کنند ، در این صورت نیروی وارد بر ذره با توجه به رابطه F=ma تغییر خواهد کرد. از لحاظ انرژی می‌توان گفت که ذره‌ای که حرکت هماهنگ دارد، حول نقطه‌ای (موضع تعادل) که در آن انرژی پتانسیل ذره کمینه است نوسان می‌کند. آونگ در حال نوسان مثال خوبی در این باره است، زیرا انرژی پتانسیل آن در پایینترین نقطه مسیر حرکت یعنی در موضع تعادل کمینه است .نیروی وارد بر ذره در هرحالت از تابع انرژی پتانسیل یعنی رابطه زیر تبعیت می کند .

$$F=-du/dx$$

جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که به فنر ایده‌آلی با ثابت K بسته شده‌است و می‌تواند آزادانه روی یک سطح افقی بدون اصطکاک حرکت کند. انرژی پتانسیل ذره از رابطه $U(x) = kx^2/2$ به دست می‌آید. که در آن Kثابت فنر بوده و x مقدار تراکم یا فشردگی فنر «ایده‌آل» می باشد. نیروی وارد بر ذره از رابطه $F(x) = -kx$ به دست می‌آید. حرکت هماهنگ نه تنها تناوبی است بلکه کراندار نیز هست. فقط توابع سینوسی و کسینوسی)یا ترکیباتی از آنها) هستند که این هر دو خاصیت را همزمان دارند. حرکت یک نوسانگر هماهنگ ساده براساس معادله زیر بیان می‌شود .

$$A=A.\cos \omega t+\Phi$$

کمیت $(\omega t+\Phi)$ را فاز حرکت ، ثابت Φ را ثابت فاز و) A که برابر با بیشترین جابجایی ذره از موضع تعادلش می باشد) را دامنه نوسان می‌نامند. امکان دارد حرکتهایی با دامنه یکسان ولی فاز متفاوت وجود داشته‌باشند .

کاربردهای حرکت نوسانگر هماهنگ ساده

آونگ ساده

آونگ ساده دستگاه ایده‌آلی است شامل یک جرم نقطه‌ای که توسط یک نخ سبک و غیر قابل کشش آویزان شده‌است. هرگاه آونگ را در موضع تعادلش به یک طرف کشیده و رها کنیم، آونگ در اثر نیروی گرانشی در یک صفحه قائم شروع به نوسان می‌کند. این حرکت یک حرکت تناوبی یا نوسانی است. دوره تناوب یک آونگ ساده هنگامی که دامنه‌اش کوچک باشد برابر است با

$$T=2\pi\sqrt{L/g}$$

آونگ پیچشی :آونگ پیچشی شامل قرصی است که به وسیله سیمی که به مرکز قرص متصل است آویخته‌شده‌است.این سیم از طرف به یک آویزگاه صلب و از طرف دیگر به یک قرص محکم بسته‌شده‌است. اگر قرص را اندکی چرخانده و رها

کنیم سیم پیچیده و گشتاور نیرویی به قرص وارد می‌کند و کوشد که آن را به موضع تعادلش بر گرداند. این گشتاور نیرو یک گشتاور نیروی بازگرداننده است.

به این ترتیب حرکت قرص یک حرکت نوسانی خواهد بود.شایان ذکر است که در اینجا بر خلاف آونگ ساده جابجایی به صورت زاویه‌ای می باشد، اما هر دو از قانون هوک پیروی می‌کنند. دوره تناوب آونگ پیچشی مانند آونگ ساده است، با این تفاوت که در این مورد بجای کمیت) L طول آونگ) ، کمیت» I لختی دورانی جسم) قرار می‌گیرد .

آونگ فیزیکی :

هر جسم صلبی که بتواند در یک صفحه قائم حول محوری که از آن صفحه می‌گذرد تاب بخورد، آونگ فیزیکی نامیده می‌شود. این تعریف تعمیم تعریف آونگ ساده‌ای است که در آن نخ بدون وزنی یک ذره منفرد را نگه می‌دارد. عملا تمام آونگهای واقعی فیزیکی هستند .

شُعاع دَوَران یا شعاع ژیراسیون کمیتی است که در مکانیک کاربرد فراوان دارد. شعاع دوران یک مفهوم فیزیکی مشخص و بدیهی نمی‌باشد، اما می‌توان آن را به عنوان فاصله‌ای از یک محور مرجع در نظر گرفت که اگر تمام سطح مورد نظر در آن فاصله متمرکز گردد، گشتاور ماند سطح به دست آمده حول محور مختصات برابر گشتاور ماند سطح اولیه باشد. به عبارتی : حاصل مساحت (A)ضربدر شعاع ژیراسیون (فاصله‌ای از یک محور مرجع= d) به توان دو همان ممان اینرسی یا گشتاور ماند خواهد بود.

شعاع دوران یک سطح عبارت است از جذر نسبت گشتاور ماند سطح به مساحت آن، یعنی:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

که در آن A بیانگر مساحت سطح، r_x و r_y به ترتیب شعاع دوران حول محورهای x و y و I_x و I_y به ترتیب گشتاور ماند سطح حول محور x و y می‌باشد. از آنجا که واحد گشتاور ماند توان چهارم واحد طول و واحد مساحت توان دوم آن می‌باشد، شعاع دوران با واحد طول بیان می‌گردد.

حرکت آونگ ساده

کل سیستم آونگ ساده را که از نخ و جسمی به جرم m تشکیل شده است، می‌توان به عنوان یک جسم صلب تلقی کرد. جرم را بوسیله نخ از جایی آویزان می‌کنیم، وقتی که جرم m را از حالت قائم اندکی منحرف کنیم، جسم در روی قوسی از یک دایره ، به راست و چپ حرکت می‌کند. حرکت آونگ با یک حرکت دایروی در یک صفحه قائم حول محوری که از نقطه آویز آونگ گذشته و بر صفحه مذبور عمود است، هم ارز می‌باشد.

محدودیتهای حرکت آونگ ساده

همانطوری که در تعریف آونگ ساده ذکر شد، فرض می‌کنیم نخ آونگ ساده سبک و غیر قابل کشش است. به گونه‌ای که جرم نخ بسیار ناچیز بوده و لذا حرکت آن مورد توجه قرار نمی‌گیرد و نیز فرض می‌کنیم که در اثنای حرکت ، طول نخ آونگ ثابت باقی می‌ماند، چون در غیر این صورت نمی‌توان کل سیستم آونگ را به عنوان یک جسم صلب در نظر گرفت.

مشخصات حرکت آونگ ساده

معادله حرکت آونگ ساده

اگر حرکت آونگ ساده در صفحه **xy** صورت گیرد، در این صورت فرض می‌کنیم که محور **x** در امتداد قائم (نخ آونگ) و محور **y** به صورت افقی باشد، همچنین مبدا مختصات را منطبق بر جسم با جرم **m** که از آونگ آویزان است، فرض می‌کنیم. حال اگر تمام نیروهای موجود را که شامل نیروی کشش نخ آونگ و نیروی وزن جرم متصل به نخ است، در این دو امتداد تجزیه کنیم، با فرض این که میزان انحراف از حالت قائم به حدی کوچک است که می‌توان از تقریب $\sin\theta \simeq \theta$ استفاده کرد، در این صورت معادله حرکت آونگ ساده بر حسب θ ، زاویه انحراف ، به صورت زیر خواهد بود:

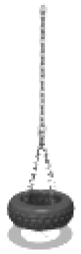
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

در رابطه فوق θ زاویه انحراف ، **g** شتاب گرانش و **l** طول آونگ است. با استفاده از قوانین معادلات دیفرانسیل به راحتی می‌توان معادله فوق را حل کرد.

فرکانس و دوره تناوب

اگر چنانچه معادله حرکت آونگ ساده با معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده مقایسه کنیم، ملاحظه می‌شود که این معادله درست مانند نوسانگر هماهنگ ساده است. بنابراین با مشابهت این دو معادله در می‌یابیم که کمیت $\frac{g}{l}$ برابر ω^2 می‌باشد، که **ω** در فرکانس زاویه‌ای چرخش است و چون رابطه بین دوره تناوب (**T**) و فرکانس زاویه‌ای (ω)، به صورت $T = \frac{2\Pi}{\omega}$ می‌باشد، بنابراین رابطه دوره تناوب چرخش آونگ ساده برحسب طول آونگ و شتاب گرانش زمین (**g**) ، به صورت $T = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ خواهد بود. فرکانس نیز عکس دوره تناوب می‌باشد.

دلیل کوچک فرض کردن θ



دیدیم که معادلات فوق با فرض این که θ، زاویه انحراف آونگ از حالت قائم کوچک باشد، حاصل شد. در این صورت است که می‌توانیم از تقریب $\sin\theta \simeq \theta$ استفاده کنیم. اگر چنانچه این شرط برقرار نباشد، در این صورت زمان تناوب طولانی‌تر خواهد بود. در واقع رابطه دوره تناوب به صورت یک سری توانی خواهد بود که برحسب توانهای $\frac{l}{g}$ بسط داده می‌شود.

ساختمان آونگ مرکب

جسم صلبی را در نظر بگیرید که از یک نقطه آویزان شده است و می‌تواند آزادانه حول آن نقطه دوران کند. فرض کنید محور دوران از مرکز جرم جسم عبور نمی‌کند و مکان هر نقطه روی جسم صلب به وسیله زاویه θ بین خط قائم و خط واصل بین آن نقطه و نقطه o که دوران حول آن صورت می‌گیرد، مشخص می‌شود. زاویه θ را به خطی اختصاص می‌دهیم که از مرکز جرم و نقطه ثابت o می‌گذرد و با محور قائم ساخته می‌شود .

تشریح نوسان آونگ مرکب

فاصله مرکز جرم از نقطه ثابت o را با h نشان می‌دهیم. در راستای خط واصل بین مرکز جرم و نقطه ثابت ، در روی جسم و در طرف دیگر مرکز نقطه دیگری به نام o\prime که به فاصله h\prime از مرکز جرم قرار دارد، را اختیار می‌کنیم. تنها نیرویی که بر جسم اعمال می‌شود، نیروی وزن آن (Mg) است که در امتداد قائم و بر نقطه مرکز جرم وارد می‌شود.
نیروی ثقل یا نیروی وزن جسم صلب گشتاور نیرویی را اعمال می‌کند که سبب دوران یا نوسان جسم حول نقطه o می‌گردد . بنابراین به راحتی می‌توانیم با استفاده از روابط دینامیک دورانی جسم صلب ، معادله حرکت آونگ مرکب را بر حسب مشتقات θ به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{Mgh}{I}\sin\ = 0$$

فرض می‌کنیم که تعداد نوسان یا دامنه نوسان به اندازه‌ای .، ممان اینرسی یا لختی دورانی جسم صلب است I در رابطه فوق کوچک باشد که بتوانیم از تقریب \sin θ \simeq θ استفاده کنیم. در این صورت معادله حرکت به فرم ساده $\frac{d^2}{dt^2} + \frac{Mgh}{I} = 0$ در می‌آید.

دوره تناوب و فرکانس نوسان آونگ مرکب

از آنجا که حرکت آونگ مرکب یک حرکت نوسانی بوده و از نوع حرکت نوسانگر هماهنگ ساده است، لذا در مقایسه با معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده می‌توانیم دوره تناوب آونگ مرکب را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$T = 2\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

البته این رابطه را می‌توان با استفاده از تعریف دوره تناوب)زمان لازم برای یک نوسان با رفت و برگشت کامل) و با تشکیل یک تناسب بدست آورد. همچنین می‌دانیم که فرکانس نوسان به صورت f = \frac{۱}{T} با دوره تناوب (T) رابطه دارد. بنابراین فرکانس نوسان آونگ مرکب که به صورت تعداد نوسان کامل در مدت زمان T تعریف می‌شود، به صورت زیر قابل بیان است:

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Mgh}{I}}$$

مرکز نوسان آونگ مرکب

با استفاده از قضایای مربوط به تعیین ممان اینرسی یا گشتاور لختی) قضیه محورهای موازی (می‌توان گشتاور لختی آونگ مرکب را به صورت زیر نوشت:

$$I = I_c.m + Mh^2$$

در رابطه فوق I ، گشتاور لختی نسبت به محور دوران و I_c.m گشتاور لختی نسبت به محوری که از مرکز جرم عبور می‌کند، است. اگر شعاع چرخش را K و شعاع چرخش حول مرکز جرم را با K_c.m نشان دهیم، رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$MK^2 = MK_c.m^2 + Mh^2$$

حال اگر این مقادیر را در رابطه دوره تناوب قرار دهیم، دوره تناوب به صورت $T = 2\sqrt{\frac{K_c.m^2 + h^2}{gh}}$ در می‌آید و اگر فرض کنیم که محور دوران به جای نقطه o که به فاصله h از مرکز جرم قرار دارد، به نقطه o\prime منتقل شود، در این صورت دوره تناوب به صورت $T' = 2\sqrt{\frac{K_c.m^2 + h'}{gh'}}$ در می‌آید. با این شرط که T = T\prime باشد، نقطه o\primeرا مرکز نوسان نقطه o می‌گویند. بدیهی است که از مساوی قرار دادن T و T\prime به رابطه $hh' = K_c.m^2$ می‌رسیم که به عنوان شرط مرکز نوسان بودن یک نقطه بیان می‌شود .

معرفی شعاع چرخش

در عبارت فوق K و K_c.m را به عنوان شعاع چرخش معرفی کردیم. تعریف شعاع چرخش به تعریف گشتاور لختی برمی‌گردد. می‌دانیم که اگر دوران حول محور ثابت در نقطه o صورت گیرد، ممان اینرسی یا گشتاور لختی به صورت حاصل‌ضرب جرم در مجذور فاصله عمودی از محور دوران تعریف می‌شود. به صورت سمبولیک گشتاور لختی را به فرم MK^۲تعریف می‌کنند و K را *شعاع چرخش* می‌نامند.

به عنوان مثال ، یک میله یکنواخت نازک به طول l را در نظر بگیرید که در حال نوسان است. اگر این میله را به عنوان یک

آونگ مرکب در نظر بگیریم که حول یک انتهای خود نوسان کند، در این صورت گشتاور لختی برابر $I = \frac{1}{3}Ml^2$ خواهد بود. بنابراین شعاع چرخش $K^2 = \frac{l^2}{3}$ است. در صورتی که می‌دانیم اگر میله حول محوری که از مرکز جرم آن گذشته است، نوسان کند، گشتاور لختی مربوط به صورت $I_c.m = \frac{1}{12}Ml^2$ و شعاع چرخش حول مرکز جرم $K_c.m^2 = \frac{l^2}{12}$ است .

دوره تناوب آونگ مرکب در حالت کلی

در نوشتن معادلات حرکت آونگ مرکب فرض کردیم که نوسان به صورتی باشد که بتوانیم از تقریب **Sinθ \simeq θ** استفاده کنیم و لذا اگر دامنه نوسان به قدری بزرگ باشد که تقریب فوق اعتبار خود را از دست بدهد، در این صورت فرمول دوره تناوب درست نخواهد بود. در این صورت می‌توان مسئله را با توسل به قواعد انتگرالگیری بیضوی بحث نموده و رابطه‌ای به صورت $T = 4\sqrt{\frac{I}{mgh}}F(K, \frac{\pi}{2})$ برای دوره تناوب بدست آورد. تابع **F(K , {π \over ۲})** که در این عبارت ظاهر می‌شود به انتگرال بیضوی نوع اول معروف است که مقدار آن به ازای مقادیر مختلف **K** به صورت جدول در کتابهای ریاضی ارائه می‌شود.هنگامی که دامنه نوسان به سمت ۱۸۰ درجه میل کند، مقادیر انتگرال بیضوی واگرا خواهد بود و تناوب به سمت بینهایت میل خواهد کرد. از لحاظ نظری این مطلب بدین معنی است که اگر یک آونگ مرکب مانند یک جسم صلب دقیقا در موقعیت قائم با سرعت اولیه‌ای که مقدار مطلق آن صفر است، قرار گرفته باشد، در همان وضعیت ناپایدار به صورت نامحدود باقی خواهد ماند .

وسایل آزمایش:

جرم فلزی و پلاستیکی، متر فلزی، آونگ میله ای

شرح عملی آزمایش:

الف) آونگ فلزی با طول های ۲۰،۴۰،۶۰ و ۸۰ آویزان شد و سپس با انحرافات کمتر از ۶ درجه به نوسان در آورده شد و رمان ۵۰ نوسان آن یادداشت و در جدول (۱) ثبت شد.

ب) دو آونگ با دو جنس متفاوت ولی با یک طول و با یک زاویه کوچک برابر به نوسان در آورده شد و مدت زمان ۵۰ نوسان آن ثبت شدو در جدول (۲) یادداشت شد.

ج)آونگی به طول **l** نامعلوم به سقف آزمایشگاه متصل شد و ارتفاع کف زمین تا ابتدای آونگ اندازه گیری شد سپس اندازه ارتفاع اونگ تا زمین چهار مرتبه تغییر کرد و در هر مرحله مدت ۳۰ نوسان در جدول (۳) ثبت شد.

د) مرکز جرم یک اونگ میله را حساب کرده سپس به صورت عمودی آویزان کرده که فاصله مرکز جرم از محل آویز اندازه گیری و در جدول (۴) ثبت شدو زمان۲۰ نوسان آن اندازه گیری و دوره محاسبه ودر جدول (۴) ثبت شد.

جداول:

دفعات آزمایش	T^2	T(S)	زمان ۵۰ نوسان(S)	L(cm)
۱	۰.۸۸۳۶	۰.۹۴	۴۷	۲۰
۱	۱.۶۳۸۴	۱.۲۸	۶۴	۴۰
۱	۲.۳۷۱۶	۱.۵۴	۷۷	۶۰
۱	۳.۲۴	۱.۸	۹۰	۸۰

جدول (۱)

T	زمان ۵۰ نوسان	جنس گلوله(به طول Cm۶۰)
۱.۵۴	۷۷	فلزی
۱.۵۶	۷۸	پلاستیکی

جدول (۲)

T^2	T(s)	مدت ۳۰ نوسان(s)	h(cm)
۳.۲۴	۱.۸	۵۴	۱۰۵.۳
۱.۸۷۶۹	۱.۳۷	۴۱	۱۴۰.۳
۴.۶۶۵۶	۲.۱۶	۶۵	۷۴.۸
۴.۸۴	۲.۲	۶۶	۶۴.۳

جدول (۳)

$\Delta(T^2d)$	$\Delta(d^2)$	$T^2d(s^2m)$	$d^2(m^2)$	T(s)	t میانگین برای ۲۰ نوسان(s)	$t_3(s)$	$t_2(s)$	$t_1(s)$	d(cm)
۰.۰۴	$۱.۹*۱۰^{-۳}$	$۲۲.۷۸*۱۰^{-۲}$	$۷.۹*۱۰^{-۳}$	۱.۶	۳۱.۹	۳۲.۳	۳۱.۴	۳۲	۸.۹
۰.۰۸	$۷.۸*۱۰^{-۳}$	$۸۷.۷۵*۱۰^{-۲}$	۰.۱۵۲	۱.۵	۳۰.۸	۳۰.۴	۳۰	۳۲	۳۹
۰.۰۶	$۴.۸*۱۰^{-۳}$	$۵۴*۱۰^{-۲}$	$۵۷۶*۱۰^{-۴}$	۱.۵	۳۰.۳	۳۰.۵	۳۰.۵	۲۹.۹	۲۴

جدول (۴)

محاسبات و خطاها:

برای جدول (۱) داریم:

$$T_۱ = \frac{t_۱}{n} = \frac{۴۷}{۵۰} = ۰.۹۴s \qquad T_۲ = \frac{t_۲}{n} = \frac{۶۴}{۵۰} = ۱.۲۸s \qquad T_۳ = \frac{t_۳}{n} = \frac{۷۷}{۵۰} = ۱.۵۴s \qquad T_۴ = \frac{t_۴}{n} = \frac{۹۰}{۵۰} = ۱.۸\ s$$

$$T_۱^۲ = ۰.۹۴^۲ = ۰.۸۸۳۶S^۲ \qquad T_۲^۲ = ۱.۲۸^۲ = ۱.۶۳۸۴S^۲$$

$$T_۳^۲ = ۱.۵۴^۲ = ۲.۳۷۱۶S^۲ \qquad T_۴^۲ = ۱.۸^۲ = ۳.۲۴S^۲$$

برای نمودار به خطای $T^۲$ نیاز داریم که داریم:

$$T=\frac{t}{n}\xrightarrow{\ln\ \text{میگیریم}} LnT=Lnt-Lnn\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}}\frac{dT}{T}=\frac{dt}{t}-\frac{dn}{n}\Rightarrow\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta t}{t}\Rightarrow\ \Delta T=\frac{\Delta t}{t}T$$

$$T^{۲}=(T)^{۲}\ \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dT^{۲}=۲TdT\quad\Rightarrow\ \Delta(T)^{۲}=۲T\Delta T$$

با توجه به اینکه خطای دستگاه زمان برابر یک ثانیه بود داریم:

$$\Delta T_{۱}=\frac{۱}{۴۷}(۰.۹۴)=۰.۰۲s\quad;\ \Delta T_{۲}=\frac{۱}{۶۴}(۱.۲۸)=۰.۰۲s\quad;\ \Delta T_{۳}=\frac{۱}{۷۷}(۱.۵۴)=۰.۰۲s\quad;\ \Delta T_{۴}=\frac{۱}{۹۰}(۱.۸)=۰.۰۲s$$

$$\Delta(T)^{۲}_{۱}=۲(۰.۹۴)(۰.۰۲)=۰.۰۳۷۶\,s^{۲}\qquad;\qquad\Delta(T)^{۲}_{۲}=۲(۱.۲۸)(۰.۰۲)=۰.۰۵۱۲\,s^{۲}$$

$$\Delta(T)^{۲}_{۳}=۲(۱.۵۴)(۰.۰۲)=۰.۰۶۱۶\,s^{۲}\qquad;\qquad\Delta(T)^{۲}_{۴}=۲(۱.۸)(۰.۰۲)=۰.۰۷۲\,s^{۲}$$

حال به کمک نمودار $T^۲$ بر حسب L می توانیم مقدار g را محاسبه کرد:

البته می دانیم که خطای دستگاه اندازه گیری طول برابر ۰.۱ سانتی متر می باشد.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\quad\Rightarrow\quad T^{۲}=۴\pi^{۲}\frac{l}{g}\quad\Longrightarrow g=۴\pi^{۲}\frac{l}{T^{۲}}$$

بهترین شیب $\qquad\frac{l}{T^{۲}}=\frac{۰.۸-.۲}{۳.۲۴-۰.۸۸۳۶}=۰.۲۵۵m/s^{۲}\qquad\Longrightarrow\quad g=۴\pi^{۲}\times۱.۱۵۷=۴۵.۶۳m/s^{۲}$

بیشترین شیب $\qquad\frac{l}{T^{۲}}=\frac{۰.۸۱-۰.۱۹}{۳.۳۱۲-۰.۸۴۶}=۰.۲۵۱m/s^{۲}$

کمترین شیب $\qquad\frac{l}{T^{۲}}=\frac{۰.۷۹-۰.۲۱}{۳.۱۶۸-۰.۹۲۱۲}=۰.۲۵۸m/s^{۲}$

حال خطای شیب نمودار برابر است با بیشترین اختلاف شیب از بهترین شیب:

$$\delta_{۱}\left(\frac{l}{T^{۲}}\right)=\left|\text{کمترین شیب}-\text{بهترین شیب}\right|=|۰.۲۵۵-۰.۲۵۸|=۰.۰۰۳$$

$$\delta_{۲}\left(\frac{l}{T^{۲}}\right)=\left|\text{بیشترین شیب}-\text{بهترین شیب}\right|=|۰.۲۵۵-۰.۲۵۱|=۰.۰۰۴$$

پس خطای شیب نمودار برابر است با:

$$\Delta\left(\frac{l}{T^{۲}}\right)=۰.۰۰۴$$

اکنون می توانیم خطای مطلق g را نیز حساب کنیم:

$$g=۴\pi^{۲}\frac{l}{T^{۲}}\quad\Longrightarrow\Delta g=۴\pi^{۲}\,\Delta\left(\frac{l}{T^{۲}}\right)\quad\Longrightarrow\Delta g=۴\pi^{۲}\times۰.۰۰۴=۰.۱۵۷m/s^{۲}$$

جدول (۲): در این جدول مقدار T مقدار فلزی را داریم و برای حالت پلاستیکی داریم:

$$T_{P}=\frac{t_{P}}{n}=\frac{۴۸}{۵۰}=۰.۹۶s$$

همانطور که با مشخص است مقدار دوره تناوب برای هردو گلوله تقریبا برابر می باشد و برای خطای آن داریم:

$$\Delta T=\frac{\Delta t}{t}T\qquad\Delta T_{۱}=\frac{۱}{۴۷}(۰.۹۴)=۰.۰۲s\quad;\ \Delta T_{۲}=\frac{۱}{۴۸}(۰.۹۶)=۰.۰۲s$$

جدول (۳):

برای محاسبه دوره تناوب و توان دوم آن همان روش قبلی را به کار می بریم :

$$T_۱ = \frac{t_۱}{n} = \frac{۵۴}{۳۰} = ۱.۸s \qquad T_۲ = \frac{t_۲}{n} = \frac{۴۱}{۳۰} = ۱.۳۷s \qquad T_۳ = \frac{t_۳}{n} = \frac{۶۵}{۳۰} = ۲.۱۷s \qquad T_۴ = \frac{t_۴}{n} = \frac{۶۶}{۳۰} = ۲.۲\ s$$

$$T_۱^۲ = ۱.۸^۲ = ۳.۲۴S^۲ \qquad T_۲^۲ = ۱.۳۷^۲ = ۱.۸۷۶۹S^۲$$

$$T_۳^۲ = ۲.۱۷^۲ = ۴.۷۰۸۹S^۲ \qquad T_۴^۲ = ۲.۲^۲ = ۴.۸۴S^۲$$

حال به کمک اطلاعات جدول (۳) و رابطه زیر داریم:

$$T^۲ = \frac{۴\pi^۲}{g}(H - h)$$

$$T_۱{}^۲ = \frac{۴\pi^۲}{g}(H_۱ - h_۱) \Longrightarrow ۳.۲۴ = ۳.۹(H - ۱.۰۵۳) \Longrightarrow H = ۱.۸۸۳m$$

$$T_۲{}^۲ = \frac{۴\pi^۲}{g}(H_۲ - h_۲) \Longrightarrow ۱.۸۸ = ۳.۹(H - ۱.۴۰۳) \Longrightarrow H = ۱.۸۸۵m$$

$$T_۳{}^۲ = \frac{۴\pi^۲}{g}(H_۳ - h_۳) \Longrightarrow ۴.۷ = ۳.۹(H - ۰.۷۴۸) \Longrightarrow H = ۱.۹۵۳m$$

$$T_۴{}^۲ = \frac{۴\pi^۲}{g}(H_۴ - h_۴) \Longrightarrow ۴.۸۴ = ۳.۹(H - ۰.۶۴۳) \Longrightarrow H = ۱.۸۸۴m$$

هرچند این مقادیر با واقعیت تفاوت دارد ولی به هر حال محاسبات طبق این داده ها انجام می شود:

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{t}T$$

$$\Delta T_۱ = \frac{۱}{۵۴}(۱.۸) = ۰.۰۳s \quad ; \quad \Delta T_۲ = \frac{۱}{۴۱}(۱.۳۷) = ۰.۰۳s \quad ; \quad \Delta T_۳ = \frac{۱}{۶۵}(۲.۱۷) = ۰.۰۳s \quad ; \quad \Delta T_۴ = \frac{۱}{۶۶}(۲.۲) = ۰.۰۳s$$

$$\Delta(T)^۲ = ۲T\Delta T$$

$$\Delta(T)_۱^۲ = ۲(۱.۸)(۰.۰۳) = ۰.۱۰۸\ s^۲ \quad ; \quad \Delta(T)_۲^۲ = ۲(۱.۳۷)(۰.۰۳) = ۰.۰۸۲۲\ s^۲$$

$$\Delta(T)_۳^۲ = ۲(۲.۱۷)(۰.۰۳) = ۰.۱۳۰۲\ s^۲ \quad ; \quad \Delta(T)_۴^۲ = ۲(۲.۲)(۰.۰۳) = ۰.۱۳۲\ s^۲$$

محاسبه خطای نمودار:

$$T^۲ = \frac{۴\pi^۲}{g}(H - h) \Longrightarrow H = \frac{T^۲g + ۴\pi^۲h}{۴\pi^۲}$$

بهترین شیب: $H = \frac{.۶۴\times۹.۸+۴\pi^۲ ۰.۴۱}{۴\pi^۲} = ۰.۵۷$

کمترین شیب: $H = \frac{.۶۱\times۹.۸+۴\pi^۲ ۰.۴۰}{۴\pi^۲} = ۰.۵۵$

بیشترین شیب: $H = \frac{.۶۸\times۹.۸+۴\pi^۲ ۰.۴۲}{۴\pi^۲} = ۰.۵۹$

جدول (۴)

$T_۱ = \frac{t_۱}{n} = \frac{۳۱.۹}{۲۰} = ۱.۶s \qquad T_۲ = \frac{t_۲}{n} = \frac{۳۰.۸}{۲۰} = ۱.۵۴s \qquad T_۳ = \frac{t_۳}{n} = \frac{۳۰.۳}{۲۰} = ۱.۵۱s$

$T_۱^۲ = ۱.۶^۲ = ۲.۵۶S^۲ \qquad T_۲^۲ = ۱.۵۴^۲ = ۲.۳۷S^۲ \qquad T_۳^۲ = ۱.۵۱^۲ = ۲.۲۸۰۱S^۲$

$T_۱^۲ d_۱ = ۲.۵۶ \times ۰.۰۸۹ = ۰.۲۳ \qquad T_۲^۲ d_۲ = ۲.۳۷ \times ۰.۳۹ = ۰.۹۲۴۳ \qquad T_۳^۲ d_۳ = ۲.۲۸ \times ۰.۲۴ = ۰.۵۴۷۲$

$\Delta(d)^۲ = ۲d\Delta d$

$\Delta(d)_۱{}^۲ = ۲d_۱\Delta d = ۲ \times ۰.۰۸۹ \times ۰.۰۱ = ۱.۹ \times ۱۰^{-۳}$

$\Delta(d)_۲{}^۲ = ۲d_۲\Delta d = ۲ \times ۰.۳۹ \times ۰.۰۱ = ۷.۸ \times ۱۰^{-۳}$

$\Delta(d)_۳{}^۲ = ۲d_۳\Delta d = ۲ \times ۰.۲۴ \times ۰.۰۱ = ۴.۸ \times ۱۰^{-۳}$

$\Delta(T^۲d) = ۲Td\Delta T + T^۲\Delta d$

$\Delta T_۱ = \frac{۱}{۳۱.۹}(۱.۶) = ۰.۰۵s \quad ; \quad \Delta T_۲ = \frac{۱}{۳۰.۸}(۱.۵۴) = ۰.۰۵s \quad ; \quad \Delta T_۳ = \frac{۱}{۳۰.۳}(۱.۵۱) = ۰.۰۵s$

$\Delta(T^۲d)_۱ = ۲ \times ۱.۶ \times ۰.۰۸۹ \times ۰.۰۵ + ۲.۵۶ \times ۰.۰۱ = ۰.۰۴$

$\Delta(T^۲d)_۲ = ۲ \times ۱.۵۴ \times ۰.۳۹ \times ۰.۰۵ + ۲.۳۷ \times ۰.۰۱ = ۰.۰۸$

$\Delta(T^۲d)_۳ = ۲ \times ۱.۵۱ \times ۰.۲۴ \times ۰.۰۵ + ۲.۲۸ \times ۰.۰۱ = ۰.۰۶$

از روی نمودار داریم:

$$T^۲d = \frac{۴\pi^۲}{g}\mathrm{k}^۲ + \frac{۴\pi^۲}{\mathrm{g}}\mathrm{d}^۲$$

بهترین شیب: $\frac{۰.۰۵۷۶-۰.۰۰۷۹}{۰.۰۲} = ۲.۴۸۵ \Longrightarrow g = \frac{۴\pi^۲}{۲.۴۸۵} = ۱۵.۸$

بیشترین شیب: $\frac{۰.۰۶۲۴-۰.۰۰۶}{۰.۰۲} = ۲.۸۲ \Longrightarrow g = \frac{۴\pi^۲}{۲.۸۲} = ۱۴.۰$

کمترین شیب: $\frac{۰.۰۵۲۸-۰.۰۰۹۸}{۰.۰۲} = ۲.۱۵ \Longrightarrow g = \frac{۴\pi^۲}{۲.۱۵} = ۱۸.۳۶$

$\Delta g = \max\{\delta g\} = ۲.۵۶$

نتیجه گیری:

براحتی می توان به کمک حرکت آونگ مقدار گرانش را بدست آوریم.

پرسشها:

۱) آیا در آونگ ساده، جنس واندازه گلوله در آزمایش اثر دارد؟ توضیح دهید.

خیر همانطور که در قسمت دوم بررسی شد جنس در تناوب ربطی ندارد. البته اندازه در صورتی موثر نخواهد بود که باعث ایجاد اصطکاک زیاد نشود. همانطوری که در تعریف آونگ ساده ذکر شد، فرض می‌کنیم نخ آونگ ساده سبک و غیر قابل کشش است. به گونه‌ای که جرم نخ بسیار ناچیز بوده و لذا حرکت آن مورد توجه قرار نمی‌گیرد و نیز فرض می‌کنیم که در اثنای حرکت ، طول نخ آونگ ثابت باقی می‌ماند، چون در غیر این صورت نمی‌توان کل سیستم آونگ را به عنوان یک جسم صلب در نظر گرفت.

۲) چگونه می توان اثر فوق را کاهش داد؟

کاهش اصطکاک به کمک کوچک کردن گلوله و یا در شرایطی مانند خلا فراهم کرد.

۳) چرا در آونگ ساده باید دامنه نوسان کمتر از ۶ درجه باشد؟ توضیح دهید.

دلیل کوچک فرض کردن θ

دیدیم که معادلات فوق با فرض این که θ ، زاویه انحراف آونگ از حالت قائم کوچک باشد، حاصل شد. در این صورت است که می‌توانیم از تقریب $\sin\theta \simeq \theta$ استفاده کنیم. اگر چنانچه این شرط برقرار نباشد، در این صورت زمان تناوب طولانی‌تر خواهد بود. در واقع رابطه دوره تناوب به صورت یک سری توانی خواهد بود که برحسب توانهای $\frac{l}{g}$ بسط داده می‌شود

۴) تفاوت های کلی آونگ ساده و مرکب را بیان کنید.