دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران مرکز
دانشکده فنی و مهندسی
گروه کامپیوتر

عنوان:

مدلسازی و ارزیابی سیستم‌های کامپیوتری پیشرفته

استاد:
جناب آقای دکتر علی هارون آبادی

دانشجو:
فاطمه اسمعیل نصیبی کار

۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

(1) جلسه دوم مدلسازی

دکتر هارون آبادی

۱۳۹۲/۷/۱۱

بنام خدا :

* جلسه قبل تا سر اندازه گیری خوندیم.

تا سر Measurment صحبت کردیم. گفتیم ارزیابی به چند صورت اتفاق میفته؟ ۲ گونه. گونه ی اول گفتیم ارزیابی بر روی مدلینگ (modeling) داره اتفاق میفته. که گفتیم modeling به ۳ دسته تقسیم بندی میشه: ۱- Analytic modeling ۲- Simulation ۳- تلفیقی (Hybrid).

* گونه ی دوم: اندازه گیری یا Measurment: مثل ترافیک که بخوایم در یک بزرگراه اندازه گیری بکنیم. به ۳ تقسیم بندی میشه: ۱- تحت آماری ۲- عدم آماری و ۳- تلفیقی.

(1) * که در روش Hard ware (تحت آماری)، جمع آوری اطلاعات و جمع بندی اطلاعات بصورت تحت آماری انجام می شود. دو واژه ی جمع آوری و جمع بندی اطلاعات رو در اسلایدهاتون مشاهده می کنید. ما اول اطلاعات رو جمع آوری می کنیم ثانیاً اونا رو جمع بندی می کنیم. بحث جمع آوری که مطرح می شود یعنی اینکه شما sample ها رو فرض کنید ۱۰۰۰ سمپل رو جمع می کنید و می کنید ۲ سمپل. مثلاً می گیم ترافیک بزرگراه از ساعت ۷ صبح تا ۹ صبح، ۱۰۰۰ تا سمپل (نمونه) جمع آوری کردیم ولی اون رو با یک Average (میانگین) نشون می دیم، می گیم ترافیک بزرگراه در حد ۷۰ می باشد. یعنی اطلاعات جمع آوری می شود و هم جمع بندی می شود.

مزایا :

(1) روش تحت آماری مزیتی که خواهد داشت این است که سرعتش بالا است، و سرعت بالا جزء مزایای او داره حساب میشه.

(2) مزیت دوم (صفحه ی بعدی)

ایرادات (معایب) ایرادی که به این روش وارد است این است که انعطاف‌پذیر نیست. به عبارت دیگر اگر بخواهیم مسئله رو تغییر بدیم مجبوریم با بردهای سخت افزاری مرتباً بازی کنیم که اولاً شاید خیلی برای ما جالب نباشه.

مزیت دوم (۲): ۲ مزیت داره و یک عیب. این است که: Arti fact نداره یعنی به معنی تأثیرگذاری است. ما در درس مهندسی نرم افزار، معمولاً Arti fact رو فرآورده‌های یک متدولوژی نام می‌بریم ولی اینجا منظور تأثیرگذاری است. تأثیرگذاری چی بر چی؟ measuring system بر measured system*. measuring system چه سیستمی هست؟ سیستمی که اندازه‌گیری را انجام می‌دهد. measured system* چه سیستمی هست؟ سیستمی که اندازه‌گیری می‌شود. به نظر میاد در روش سخت افزاری این دو تأثیر چندانی بر روی یکدیگر نخواهند داشت. (۴)* در روش نرم افزاری به نظر میاد ولی Arti fact زیادی خواهد داشت. ما در روشی که می‌گوییم measured system و measuring system بر روی هم تأثیر خواهند داشت. مثال: یک قطعه برنامه رو در نظر بگیرید که در اون ۱۰۰۰ خط وجود داره. خطوطی رو (۴ خط) رو بالای اون اضافه می‌کنیم، برای اینکه مثلاً حساب کنیم چند بار این برنامه داره اجرا میشه. یا Response time برنامه رو اجرا بکنیم. اون ۴ خطی که اضافه کردیم measuring system ما است. کل برنامه چی هستش؟ measured system هستش. این ۴ خط چه تأثیراتی رو می‌تونه روی اون خطوط بذاره؟ ۳ تا تأثیر.

می‌تونه ۳ نوع تأثیر بذاره ظاهراً. (۱) یکی می‌تونه خود این هم یه زمان اجرایی داره و می‌تونه زمان پاسخ رو بالا ببره.

(۲) overhead (سربار) ی داشته باشه. توی حافظه سربارهای مختلفی می‌تونند داشته باشند. و Response time واقعی نده

③ Bug یا خطایی داشته باشد. یعنی خطایی که داشته باشه ، خطای measuring system می‌تواند

منجر به (خطای) measured system بشود و این نشون میده که اینجا Artifact وجود داره ،

به هر حال تاثیرپذیری که مطلوب ما هست وجود داره. در روش تست افزاری این Artifact به مراتب

کمتر داره رو می‌بینیم. البته نکته‌ی دیگری هم که وجود داره اینه که در واقع در روش تلفیقی (۴) از سرعت تست افزار

و انعطاف‌پذیری نرم‌افزار استفاده کنیم تا این دو مورد رو باهم داشته باشیم. تا می‌تونید روی ۳ شنبه‌ها زوم کنید.

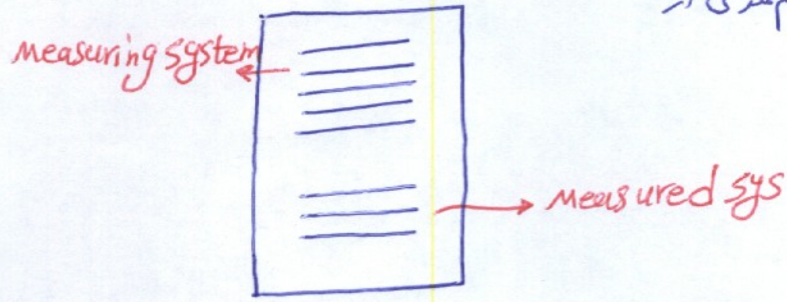
انگلیسی سرچ کنید :

civilica

petri software Architecher

مثلی که داشتیم Measurement بود. و گفتیم یک measuring system داریم و یک measured system .

به نظر میاد measuring system ی که داریم صحبت می‌کنیم حجم کمتری از قضیه رو به خودش اختصاص داره.



زمان پاسخ برنامه توسط measuring system محاسبه می‌شود.

②★ در بحث نرم‌افزاری

معایب : نرم‌افزاری

۱- زمان اجرای بیشتر ↑ (سرعت پایین)

۲- تاثیرپذیری بالا
- زمان پاسخ بیشتر
- سربار مشغله در حافظه (over head)
- Bug

وجود Bug یا خطا در measuring system منجر به بروز خطا در measured system می‌شود به هر حال

مطلوب ما نیست.

مزایا :

- انعطاف پذیری بالا :

۱ دیدگاه سخت افزاری :

معایب :

۱- انعطاف پذیری پایین

مزایا :

۱- سرعت بالا

۲- تأثیر پذیری پایین

۳ دیدگاه تلفیقی :

از مزایای دو روش داریم استفاده می کنیم.

(بهره برداری از سرعت سخت افزار و انعطاف نرم افزار)

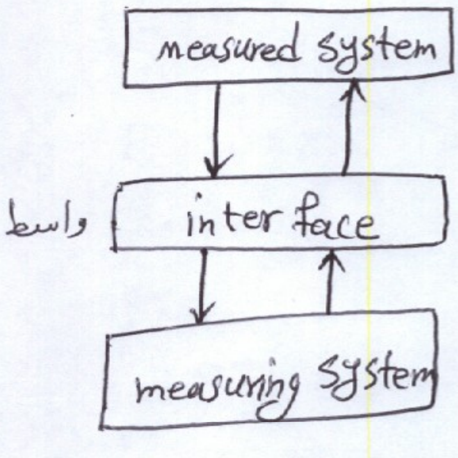
سؤال : در measurement با اینکه نرم افزاری هست و وابسته به سخت افزار نیست ما می تونیم این رو به عنوان یک مزیت براش تعریف کنیم؟ من وابسته به سخت افزار نمی گم ها! تکه ای از نرم افزار به تکه های دیگر نرم افزار (وابسته باشد). اصلاً وابستگی در measured system و measuring system هر دو نرم افزاری است و ربطی به سخت افزار ندارد.

دانشجو سؤال: وقتی خودش داره optimize می کنه خودش داره بهبود می کنه کد ما رو، مثلاً فرض کن من یه خط اضافه می کنم این باعث می شه برنامه ی من یه بهبودی داشته باشه. حالا این تأثیر پذیری

که داره کم می‌شه و سرعت اجرا میره بالا ... سؤال استاد: مثلاً یه قطعه کد optimal می‌کنید کارشون رو. بعد از اون می‌خواید یک دستورالعمل اقدام کنید به محاسبه‌ی Responser در اول برنامه‌تون. یه قطعه کدی اضافه می‌کنید قطعه کدی که اضافه می‌کنید Responser time کم می‌شه؟ دانشجو: احتمال قطع نشن. استاد: نرم‌افزارهایی که می‌گی می‌تونیم تطور بدیم و استشناپذیر هستش. خیر. شما قطعه کدی که دارید اضافه می‌کنید، دارید over heady به سیستم اضافه می‌کنید. این که دارید شما می‌گید داره بهینه می‌کنه شما دارید یه چیزی رو اضافه می‌کنید در بدترین حالت می‌تونه مشکل هم باشه.

* حالت تلفیقی:

در کتاب آقای کاشانی: سخت‌افزاری / نرم‌افزاری



* خواندن اطلاعات ← برای نرم‌افزار

* ثبت اطلاعات ← برای سخت‌افزار

* خواندن اطلاعات ← برای نرم‌افزار

آیا می‌توان فرایندهای سریع سخت‌افزاری رو با نرم‌افزار مانیتور کنیم؟ این کار امکان‌پذیر؟ نه.

بدیهیه که نه دیگه. بدیهیه توی چنین مواردی پاسخ شما منفیه ما نمی‌توانیم فرایند سریع سخت‌افزار رو با روشهای نرم‌افزاری مانیتور (monitor) کنیم. (چون سرعت سخت‌افزاری نسبت به نرم‌افزاری خیلی بیشتر است)

monitor: یعنی سیستم را در یک بازه‌ی زمانی بررسی می‌کنیم.

اگر سؤالی نیست بریم سراغ اصول سیستم‌های صف.

سؤال ۵: استاد، مانیتور کردن یعنی چی؟ یعنی بررسی کردن. تو بازه‌ی زمانی می‌تونیم ما بررسیش کنیم؟

توی بازه‌ی زمانی بررسی میشه ولی اینجا بازه‌ی زمانی مطرح نیست ولی بله توی بازه‌ی زمانی. شما یک سیستم رو در یک بازه‌ی زمانی داریم trace می‌کنیم، مانیتور می‌کنید، ردیابی می‌کنید که عملکردش رو مورد توجه قرار بدید.

سؤال ۶: سخت‌افزار اسیلوسکوپ رو در نظر بگیرید ما با اسیلوسکوپ عملاً داریم مانیتور می‌کنیم. اسیلوسکوپ هم یه بخشیش نرم‌افزاریه و زمان واقعی رو تقریباً به ما میده. جواب: اینجا شما دارید اسیلوسکوپ رو که نگاه می‌کنید یک قطعه‌ی سخت‌افزاری به هر حال جلوتون دیده میشه باز به قول شما ممکنه خودش اول هم یک خطایی رو به ما تحمیل بکند.

ولی به نظر من اینجا Artifact که جدا از یک قطعه سخت‌افزاری داره روی یک چیزی اندازه‌گیری رو انجام میده. ما در سخت‌افزار نمی‌گیم Artifact اصلاً نداریم مبناهایی که داریم و مبناهایی که اسیلوسکوپ‌های مختلف ممکنه بعضیاً کار رو برگردونن به نرم‌افزار و Artifact شدن بیشتر باشه. این اول چیزی که ما می‌گیم رو به هر چه گونه‌ای ...

Handle

سؤال: سر FPGA یه چیزی مطرح میشه که اول قضیه رو هندل کنن و اول ناخودآگاه این قضیه رو انجام میده؟ آیا خودارزیابی می‌کنه یعنی self check (سلف چک) داره؟

FPGA میذارن ۲، ۳ لایه میذارن که این قضیه رو انجام بدهد. که چه قضیه‌ای رو انجام بدهد؟ مثلاً زمان ۱۰ تا ۱۲ رو برای محافظ نداشته باشه. آیا FPGA خودش سلف‌چکی داره؟ ما باید عملکرد سؤال اول رو بدونید.

* اصول سیستم های صف :

مبحثا رو با Formal model ها یا مدل‌های رسمی دنبال می‌کنیم .

انواع مدلها :
- واقعی : pragmatic model
- رسمی : formal model

معمولاً در بیان نیازهای حسی functional یک معکرد در جایی صنعت عملکرد می‌شوند.

مثال ① : البته uml رو به عنوان یک مدل شبه رسمی هم ازش نام می‌برند ولی در واقع نمونه بارزی از مدلهای pragmatic هست واقعی هست و در واقع با مدلهای Formal کاملاً متفاوت هستش . مدلهای Formal (فرمال) یک بیس ریاضی خواهند داشت ما امروز با اصول سیستم های صف آشنا می‌شیم که این بیس ریاضی رو ببینیم . مدلهای فرمال دیگری که شاید بیشتر مدنظر باشد مدلهای فرمالی هستند مبحث آتاماتا که در دوره‌های قبلی داشتید یا مبحث شبکه ی petric است که احتمالاً بعضی هاتون در این دوره باهاش آشنا شدید و مثالهای دیگری که می‌ترسیم نام ببریم .

مبحث Stimator برای انتهای کار

مثال ② : نمونه‌های مدل رسمی : بیس ریاضی دارند . مثل شبکه‌های صف ، شبکه ی پتری ، آتاماتاها (ها)

عنوان مبحث بعدی : اصول سیستم های صف : " funamental of queuing system "

شما یک صف عادی رو اگر در نظر بگیرید ، خصوصیت این صف عادی می‌بینید : Job (مشتری) که وارد می‌شود ، ابتدا وارد می‌شود و در یک صفی قرار می‌گیرد . اول صف خالی است و بعد Job هایی که مثلاً آروم آروم به اول

اضافه میشن. صفی که تشکیل شده است job ها به ترتیبی که وارد شده اند به هر حال به همان ترتیب از آن

صف هم خارج می شوند. روالی که اینجا وجود داره ما یک سری station (ایستگاه) رو در نظر می گیریم در یک سیستم.

station یا ایستگاه. بین station ها و job ها می تونن جابجا بشن، و اون یکی job می تونه

از یک station به station دیگه بره. به نظر میاد با یک چنین روندی ما میخوایم اقدام کنیم به مدل کردن

رفتار سیستم ها. یعنی بتونیم masure های کارایی رو به گونه ای اندازه گیری کنیم. masure های

کارایی چی هستن؟ بعنوان مثال: Response time (مثال ۱:) هست. مدت زمانی که wait (صبر) می کنه و

مدت زمانی که کار خودش طول می کشه بهش می گیم Responsetime. یا مثلاً طول صف: (مثال ۲:) اون masure های ۵ گانه‌ای

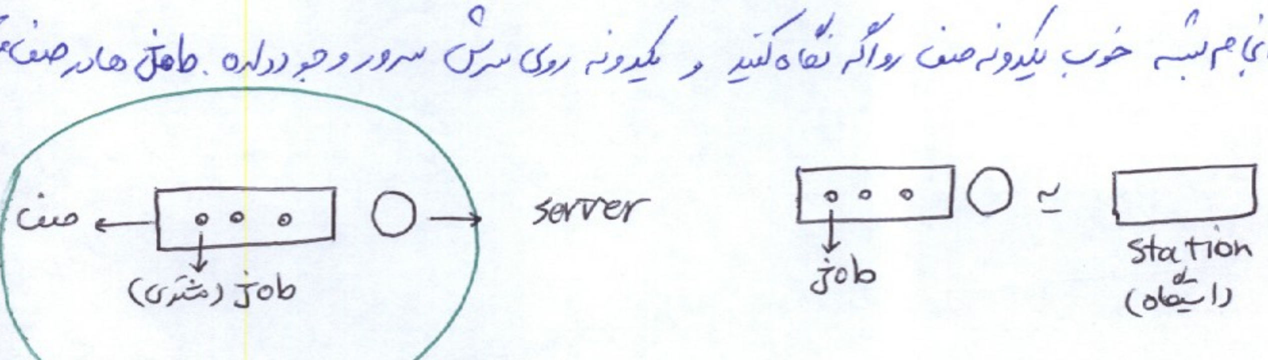
که با هم دیدیم در واقع job هایی که در طول یک صف قرار می گیرن. یا مثلاً بهره وری: (مثال ۳:) یعنی میگه منبع من چقدر در اون

station، منبع یا منابع من، چقدر utilization (بهره وری) یا Throughput (گذردهی) شون خواهد بود. یا مثلاً

(U) (λ)

بحث Relibility (مثال ۴:) بحث MTTF (مثال ۵:) همه اونها رو به نظر می رسه که در این قسمت می تونیم دنبال بکنیم. برای اینکه

اینجا مشخصه خوب یکدونه صف رو اگه نگاه کنید و یکدونه روی سرش سرور وجود داره. job ها در صف قرار می گیرن.

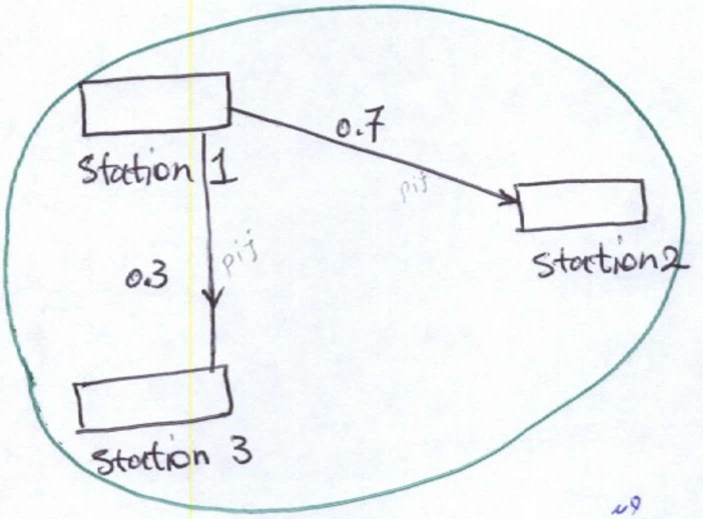


job رو می تونید یک شخص در نظر بگیرید که وارد شعبه بانک میشه و کارشو دنبال می کنه. این job های شما

بعد از اینکه نوبتش شد از صف خارج میشه.

ما برای سادگی سیستم رو بر می داریم و هر (ایستگاه) station رو بصورت یک مستطیل نشان می دهیم.

بدیهیه که یک سیستمی رو که در نظر می گیریم تعدادی در داخلش station وجود خواهد داشت.



⇒ M = 3 تعداد ایستگاه

job ما موقعی که خارج می شود با یک احتمالی می تواند به احتمال ۰٫۷ به Station 2 برود. بدیهیه که اگر به ۲ نره station می خواهد برود، احتمال بعدی ۰٫۳ خواهد شد (چون جمع احتمالات آنها باید ۱ شود)

خطوطی که بین station ها داریم نگاه می کنیم رو می تونیم با $[P_{ij}]$ نشون بدیم.

P_{ij} یعنی چی؟ احتمال اینکه job از station i ام خارج شده و به station j ام برود.
(ایستگاه i ام) (ایستگاه j ام)

که بدیهیه این احتمال عددی بین ۰ و ۱ است.

خوب معیاری که در این قسمت وجود داره اینه که ما یک نوتیشنی رو می بینیم که به اون می گیم: kendall notation. از کتاب آقای کانت می تونید موارد رو ملاحظه بفرمایید.

kendall notation می گویند:

M / M / 1 / FCFS / k / M

M (اولی) : راجع به نحوه‌ی ورود افراد به سیستم صف داره صحبت می‌کند که تأکید می‌کند بصورت توزیع پواسون که البته بصورت نمایی خواهد بود. شما می‌دونید برای مواردی که ما وارد مبحث های مکانی یا زمانی می‌شیم، توزیع ما توزیع چی هستش؟ توزیع پواسون. توزیع Diterminestic است وقتی افراد بصورت interminestic وارد می‌شوند یعنی بصورت قطعی وارد می‌شوند قطعی یعنی چه؟ یعنی مثلاً در هر 15 دقیقه یک نفر وارد می‌شود. یه سیستم دانشگاه اگر در هر 5 دقیقه 1 نفر وارد بشه، نفر اول دقیقه‌ی شروع اتفاق بیفته، نفر دوم دقیقه پنجم، نفر سوم دقیقه دهم، ... نفر دهم، بیستم و غیره. ولی در سیستم های واقعی Diterminestic اتفاق نمی‌افتد. توی سیستم دانشگاه یا سیستم دیگه نگاه کنید این نیست که در دقیقه‌های مشخص افراد وارد بشوند، به طور میانگین یک rate ی (نرخی) دارند وارد می‌شن. در توزیع پواسون شما یک rate ی رو خواهید داشت که یه جاهایی می‌تونه یک میانگین λ ای اونجا بره که در بعضی از جاها می‌تونه این λ زیاد باشه و نشون دهنده‌ی اینه که نرخ ورودشون بالاست و یه جاهایی می‌تونه λ کم باشه که نشون دهنده‌ی اینه که نرخ ورود پایین می‌باشد. خوب: M (اول) نحوه‌ی ورود افراد رو داره میگه یا فاصله‌ی بین آمدن ها رو داریم اینجا صحبت می‌کنیم. ورود بصورت توزیع نمایی در نظر می‌گیریم، پواسون در نظر می‌گیریم و البته بصورت تصادفی در نظر می‌گیریم چون افرادی که دارند میان می‌بینید بصورت λ ای شما به صورت تصادفی در سیستم تشریف فرما می‌کنند.

(قطعی و ثابت) Diterminestic

دنیای (تصادفی و واقعی) stock astic

M (دومی) : زمان سرویس مشتری به صورت توزیع نمایی پواسون

l : تعداد سرور یا سرویس دهنده ها در station یا در سیستم ۳ ست؟ در Station ها (ست)

الان دقت کنید در شکل بالا ما ۳ تا Station داریم پس M=3 است. M : تعداد ایستگاه ها رو (داره) نشون میده. در واقع سرویس دهنده ها در داخل هر station رو صحبت می کنیم.

بدیهی است که هرچه تعداد سرویس دهنده ها بیشتر باشد، Data time کم می شود.

FCFS : استراتژی زمان بندی یا خط مشی زمانبندی را نشان می دهد.

FCFS : First com First served

می تواند، LCFS باشد که ما در نظر نمی گیریم.

LCFS : last com First served

k : ظرفیت کل سیستم را بیان می کند.

M : تعداد مشتریانی که می توانند از سیستم استفاده نمایند. ما واژه ی مشتریان را با job هم مترادف می دانیم در طول ترم.

سؤال : k ظرفیت کل سیستم از نظر station ست؟ نه، تعداد jobها مثلا دانشگاه ۱۰۰۰ تا کارمند داره و چندتا اتوبوس داره. مثلا ۲ تا اتوبوس داره. هر اتوبوس ۶۰ نفر جا می گیرن ولی چند نفر می توانند از این اتوبوس استفاده کنند؟ بی نهایت (∞)

اگر ما بیائیم خط مشی‌ی زمان بندی را FCFS در نظر بگیریم که همواره اینگونه نیست، بیائیم k و m را بینهایت در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم اینها رو. غالباً اینگونه است ولی تأکید می‌کنیم ممکن است موارد نقضش باشد، به این سیستم‌ها به اختصار می‌گوئیم، سیستم های M/M/1

یعنی سه قسمت بعدیش را ذکر نمی‌کنیم. اگر من به شما بگویم که یک سیستم M/M/4 داریم، M/M/1 داریم، M/M/5 داریم؛ منظور اینه که خط مشی زمانبندی من FCFS است. شرح گذشته M/M/4 یه قسمتی از سئوالها شون بود. اینها رو که می‌گیریم، در واقع می‌گیم که خط مشی زمان بندی ما FCFS است و k و m را هم بی‌نهایت در نظر می‌گیریم.

خوب شما سیستم های دیگری رو هم می‌توانید بحث کنید. بعضی از سیستم های شما می‌توانند بصورت D/D/1 یعنی Deterministic باشد منظور قطعی و ثابت باشد. یعنی نحوه‌ی ورود افراد به صورت توزیع پواسون نیست در رأس یا نحوه‌ی سرویسی که سرور داره میدهد در موارد خاصی اتفاق می‌افتد.

والبته G/M/1 که G نشان دهنده‌ی General یعنی عمومی است. یعنی خارج یعنی ضابطه‌ی خاصی را دنبال نمی‌کند و در واقع به هر طریقی می‌تواند باشد.

سؤال : D/D/1 یا D/D/2 و غیره باشد فقط در زمان اجرا، زمان انتظار بی‌نهایت می‌شود؟

نه. بینهایت می‌شود. یعنی ما چه محدودیتی را می‌خواستیم برداریم. می‌خواستیم بگیم که نه بینهایت در سیستم شما باشد. اگر بینهایت در سیستم شما باشد، اون سیستم Stable (پایدار) نیست. خواستیم چه محدودیتی را برداریم؟ می‌خواستیم بگیم که ما نگران گنجایش سیستم‌مان نیستیم. عملاً در سیستم‌تان تعداد افرادی که وجود دارند، قابل شمارش اند. اگر این تعداد افراد در زمان طولانی، غیرقابل شمارش باشند؛ یعنی شما نرخ ورودتون از نرخ سرویستون بیشتر باشد، به این سیستم ما می‌گیم : پایدار نیستن. unstable هستند. (ناپایدارند) که ما وارد این مبحث نمی‌شیم و این سیستم‌ها برای ما ارزشمند نخواهند بود.

خوب حالا شبکه‌ی صف به دو صورت می‌تونن دیده شوند. یکیش از شبکه‌های صف‌مان می‌تواند باز باشند و یکیش می‌تواند بسته باشند.

از شبکه‌ی باز چه برداشتی دارید؟ یعنی می‌تونه افراد وارد صف شوند و خارج شوند.

اگر شبکه بسته باشد چی؟ به نظرم میاد که اصلاً ورودی هم نمیشه و خارج هم نمیشه. یعنی ورود و خروج نداره یعنی شما فقط از یه Station به Station دیگری جابجا می‌شوید.

سیستم هایی که از خودشان یک رفتار مشخص نشون میدن که در واقع یک Token داره در بین

قسمت ها می چرخه، این رو در واقع می تونیم بگیم که شبکه بسته است.

شما این طبقه رو در نظر بگیرید. در این طبقه فرض کنید که جلوی پله های ورودی و خروجی رو گرفتن.

در این طبقه چند تا کلاس وجود داره؟ فرض کنید ۱۵ تا. پس M=15 . چند نفر دانشجو یا

Job وجود دارد؟ فرض کنید ۱۴۰ نفر وجود دارد. ۱۴۰ میشه تعداد Job های که در

سیستم شما نه در Station خاصی، بلکه در سیستم شما وجود دارد. این تعداد Job ها

رو برای N نشون می دهیم. برای N می توانید بنویسید تعداد افراد موجود در سیستم، نه در ایستگاه؛

موقعی که من سیستم میگم یعنی کل این کلاس ها رو در نظر بگیرید.

سؤال: N معمولاً برای شبکه باز مطرح می شود؟ بله. N اگر بخواهد برای شبکه بسته مطرح بشه..

سیستم بسته: تعداد مشتریان موجود در سیستم Fix یا ثابت هستند.

سیستم باز: تعداد مشتریان موجود در سیستم هر تعدادی می تواند باشد. یعنی شما ورود دارید و

خروج. به قول دوستان N بینهایت است، یعنی سیستم بازه" معمولاً N بزرگ رو برای

سیستم باز استفاده می کنن. یعنی شما اگر N بزرگ رو جایی ملاحظه فرمودید، سیستم بسته است.
سیستم بسته است.

$N = \infty \Rightarrow$ سیستم بسته

چندتا فرض را بررسی می‌کنیم :

* اولین فرضی که وجود داره : سیستم‌هایی که دنبال می‌کنیم در یک زمان طولانی اونها رو بررسی می‌کنیم که این

زمان طولانی رو اصطلاحاً گفتیم observation period یا زمان مشاهده که با T بزرگ نشون

میدیم. یعنی تمام درواقع نمونه برداری‌های ما در زمان observation period هست و ما اونها

رو در این زمان بررسی می‌کنیم.

* فرض بعدی ما: سیستم رو نهش می‌کنیم پایدار یا Stable که در زمان بی‌نهایت، تعداد مشتریان

ما محدود باشد نه اینکه ثابت باشد. محدود یعنی قابل شمارش. که این سیستم را پایدار یا

Stable می‌گوییم. به نظر میاد برای اینکه این شرط برقرار باشد، نرخ ورود ما اندکی از نرخ

سرویس کمتر باشد. * به نظر میاد نرخ ورود آهسته از نرخ سرویس کمتر باشد که صفی بوجود نمیاد! چرا این توزیع

پواسون است چون در توزیع پواسون به صورت Random میشه $\lambda = 5$ یعنی حمله یک نفر

در ۴٫۸۲ وارد شود که Random تولید می‌شود. به عبارت دیگر یکسری از موارد حمله صفی هم وجود

داشته باشد. یه جاهای محدودی حمله صف وجود نداشته باشه ولی شما شاهد صف هستید

چون بصورت توزیع پواسون داریم نگاه می‌کنیم، خود خیمران هم نرخ سرویس و کارهای پرداز نذمون

روهم به صورت پواسون داریم نگاه می‌کنیم.

فرض بعدی: سیستم ها رو بصورت همه ی موارد در نظر می گیریم. یعنی می گیم نرخ ورود همگنه یا نرخ سرویس همگنه. در سیستم ها معمولاً شاهد این گونه موارد که نرخ ورود و نرخ سرویس همگن باشه، (هستیم)

* همگن یعنی چی؟ زمانی اتفاق میفته، که تعداد افراد موجود در سیستم ما، تأثیری در نرخ ورود یا نرخ سرویس نداشته باشند. یعنی نرخ ورود و نرخ سرویس، مستقل باشند. یعنی نرخ ورود و نرخ سرویس به صورت همگن است.

مثلاً شما به بانکی دارید می رید که ۵ تا شعبه داره. شما وقتی وارد شعبه ی A می شید و می بینید که شعبه شلوغ است، مسیرتون عوض نمیشه که برید شعبه ی دیگه. یعنی تعداد افراد موجود در سیستم تأثیرگذار در تصمیم شما نیست. این مثالی برای نرخ ورود بود.

برای نرخ سرویس مثلاً متصدی بانک که داره سرویس میده، تعداد افراد روی تصمیم گیری آن دخلی ندارد. یعنی طول صف را نگاه کند و ببیند ۱۵ نفره. پس تندتر کار کند یا ببیند ۱ نفره و کند کار کند (اینطور نیست) یعنی تعداد افراد موجود در صف در کارش تأثیرگذار نیست.

*) فرضیه هم تعریفش با فرض بنویسید. فرضیه یعنی ادعایی که می خواهید به آن برسید. در تزهاتون و فرض اول چیزی است که شما می دانید)

* فرض ۱: محاسبات ما در حالت Steady State (حالت دائمی) صورت می‌پذیرد یعنی حالت پایدار یا Stable. جهت محاسبه‌ی آمار نیز از زمان‌های طولانی استفاده می‌نمائیم.

* فرض ۲: اصل همگنی یا Homogenity: مطابق این اصل در مواردی همانند نرخ ورود و یا نرخ سرویس، تعداد افراد موجود در ایستگاه، تأثیرگذار در نرخ‌های فوق نخواهند بود.

* فرض ۳: اصل توازن یا جریان Flow Balance (جریان): در سیستم‌های پایدار در زمانهای طولانی، نرخ ورود برابر نرخ خروج می‌باشد.

ما در سیستم‌های پایدار در نظر می‌گیریم. اگر سیستم پایدار نباشد، نرخ ورود با نرخ خروج در زمان طولانی یکسان نیست. وقتی من میگم نرخ ورود و خروج یکسان است، در سیستم دانشگاه اگر نگاه کنید، افرادی که در طول یک ماه وارد می‌شوند و خارج می‌شوند یکسانند و باهم برابرند.

* Measure ها یا پارامترهای سیستم صف:

۱- Average Service Time: متوسط زمان سرویس که با ($\bar{s}$) نشان می‌دهیم.

این $\bar{s}$، در واقع اندیس است. میانگین زمان یا متوسط زمان سرویس است. تمام صحبت‌هایی که می‌کنیم در زمان T است: observation Time.

سؤال: چگونه آن را حساب کنیم؟

زمان هر نفر که سرویس می ده

سؤال : عکس سرویس تایم یا معکوس آن می شود چی؟ μ_i (میوی i) . یعنی نرخ سرویس

در ایستگاه i ام معکوسش :

$$\frac{1}{S_i} = \mu_i$$

مثلاً یک کارمند بانک در یک ساعت ، کار ۴ نفر را انجام می دهد. نرخ سرویسش چند؟ ۴

به طور متوسط کار هر شخص چقدر طول می کشد؟ $\frac{1}{4}$ واحد زمان . واحد زمان در اینجا ساعت

به نظر میاد کار هر شخص به طور متوسط کارش در $\frac{1}{4}$ (ساعت) انجام می شود یعنی میانگین متوسط

زمانش ۴ است. پس :

$$S_i = \frac{1}{\mu_i} \Rightarrow S_i = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

۲- External Arrival Rate : یعنی ترافیکی که از دنیای بیرون داره وارد شبکه می شه .

برای سیستم های باز معنی میده . به عبارتی ترافیکی که از دنیای بیرون ، وارد ایستگاه i ام می شود و با

λ_i نشان می دهند. (این λ در واقع Throughput است) نا بلدن؟

۳- Routing propabilities : که با P_{ij} یا q_{ij} نشان می دهیم. احتمال

اینکه از ایستگاه i ام خارج بشه و به ایستگاه j ام بره (P یعنی احتمالات) هم با P_{ij}

و هم با q_{ij} نشان می دهند. اگر از ایستگاه i ام به ایستگاه j ام نرود، احتمالشون صفر است.

۴- Throughput: با λ_i نشان می‌دهیم. اینجا اگر موافق باشید تفکیک کنیم:

λ_i $\lambda_i(N)$

هر وقت N را دارید نگاه می‌کنید، منظور سیستم بسته است یعنی i همیشه اندیس است. یعنی نرخ

گذردهی یا توان عملیاتی در ایستگاه iام با زهم تمام اینها در زمان T یعنی: observation period

یعنی چی در زمان T؟ یعنی در واحد زمان، چند سرویس از ایستگاه iام رد می‌شود.

نکته* هر وقت N را هر جا دیدید در جزوه یا پروژه توان، سیستم بسته است.

۵- Average Response Time:

Response time چی رو میگه؟ میانگین زمان پاسخ که با $R_i(N)$ و یا R_i نشان می‌دهیم.

$R_i(N)$ ↓ برای سیستم بسته

R_i ↓ برای سیستم باز

* همه‌ی این پارامترها در زمان مشاهده بررسی می‌شوند یعنی در همان بازه زمان T.

میانگین زمان پاسخ برای job، در station بیان می‌شود.

۶- Average waiting Time: متوسط زمان انتظار که با $W_i(N)$ و یا W_i بیان می‌شود.

$W_i(N)$ ↓ برای سیستم بسته

W_i ↓ برای سیستم باز

۷- Average queue length: متوسط طول صف با احتساب سرویس گیرنده که با

$Q_i(N)$ و یا Q_i نمایش می‌دهیم.

$Q_i(N)$ ↓ بسته

Q_i ↓ باز

با احتساب سرویس گیرنده یعنی وقتی داریم طول صف رو می‌گیریم ، اونی هم که داره سرویس می‌گیره ،

جزء محاسبه ی طول صف حساب می‌شه یعنی اگر ۲ تا سرور هم دارید و مشغول باشند، حساب می‌شود.

یعنی آن چیزی که در طول صف مدّنظر است معمولاً خود طول صف را نشان می‌دهد. مثلاً اگر در واقع

۶ نفر در صف هستند و یک نفر هم داره سرویس می‌گیره Q_i می‌شود ۷. یا ۲ سرور دارید که مشغول

است مثلاً ۲ نفر دارند سرویس می‌گیرند و ۶ نفر در صف هستند، پس ۸ می‌شود.

سرویس گیرنده یعنی اونی که نوبتش است و داره سرویس می‌گیره و سرویس دهنده یعنی Server که

سرور یعنی متصدی بانک و سرویس گیرنده یعنی Job ها که Job های شما به مدّت منتظر می‌شوند

تا نوبتشان شود و بعد سرویس می‌گیرند.

۸- Queue Length Distribution:

به صورت جزء طول هر صف مقید است

یعنی $P_i(n|N)$ ، $P_i(n)$ یا $P_i(n|N)$

به شرط

احتمال اینکه در ایستگاه i ام ، n نفر حضور داشته باشند. احتمال بین صفر و یک با n کوچک. یعنی

احتمال اینکه n کوچک نفر وجود دارند با فرض اینکه در کل سیستم N بزرگ. یعنی قسمت دوم شرط را بیان می‌کند.

مثال: احتمال اینکه در ایستگاه دوم ۵ نفر وجود دارند ، درحالیکه ظرفیت کل ۴۰ نفر می‌باشد برابر است

با 0.7 یعنی:

$$P_2(n|N) = P(5|40) = 0.7$$

۹- utilization : بهره‌وری که با U_i و یا $U_i(N)$ (کار مفید در واحد زمان) نشان می‌دهند. U_i یعنی چی رو میگه؟ درصد زمانی که ایستگاه i ام مشغول (Busy) که در کل زمان، T بزرگ می‌گیریم. باید T تموم بشه بعد ارزیابی‌ها رو انجام دهیم.

با توجه به سرعت‌هایی که داشتیم سراغ بحث‌های بعدی‌مون می‌رویم.

هم اکنون به بررسی پارامترهای دیگر در سیستم‌های صف می‌پردازیم:

$A_i(n)$ چی رو میگه؟ هرجا A دیدید به معنای Arrival است یعنی ورود.

هرجا A دیدید ← به معنای ورود Arrival

هرجا D دیدید ← به معنای خروج Departure

هرجا P دیدید ← به معنای احتمالات probabilities

۱- $A_i(N)$ یعنی چی؟ تعداد مشتریانی که وقتی وارد ایستگاه i ام می‌شوند، ملاحظه نمایند که در ایستگاه i ام، n نفر حضور دارند در زمان T. یعنی من یک دوربین گذاشتم در اینجا و می‌خواهم بگیریم $A_{201}(0)=17$ یعنی در زمان یک ماه مثلاً ۱۷ نفر که وقتی وارد اتاق 201 شدن، دیدن که اتاق خالی است یا $A_{201}(6)=17$ یعنی ۱۷ نفر که وقتی وارد اتاق ۲۰۱ شدند، دیدند که ۶ نفر حضور دارد.

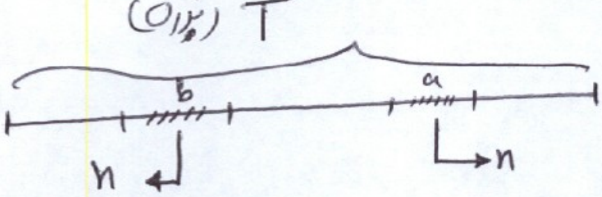
تعداد مشتریانی که وقتی وارد ایستگاه i ام می‌گردند ملاحظه نمایند در زمان ورود، n نفر در ایستگاه مذکور وجود دارد (در زمان T). تمام بحث‌هایی که مطرح می‌شود در زمان observation period یا زمان T است.

۲- $D_i(n)$ چی رو میگه؟

تعداد افرادی که در زمان خروج ایستگاه i ام، وقتی پشت سرشان را نگاه می‌کنند می‌بینند که $n-1$ نفر وجود دارد. آقای کاف در زمان خروج، خود شخص را هم حساب می‌کند ولی در زمان ورود، خود شخص را حساب نمی‌کند.

۳- $T_i(n)$ چی رو میگه؟

زمانی که در ایستگاه i ام، n نفر حضور دارند، پس کل زمان را T بنام می‌گذاریم.



$T_i(n) =$ مجموع اینها

اگر این کل زمان T باشد، این زمان یعنی a و این زمان یعنی b، n نفر حضور داشته باشد؛ $T_i(n)$ چی می‌شود؟

$$\Rightarrow T_i(n) = a + b$$

$T_i(n)$: برای سیستم‌های باز و بسته برای هر دو تایشان می‌تواند وجود داشته باشد، مشکلی ندارد.

A_i: یعنی کل ورودی‌ها به ایستگاه i ام

$A_i(1)$ چی رو میگه؟ تعداد مشتریانی که وقتی وارد ایستگاه i ام می‌شوند، می‌بینند که یک نفر در ایستگاه i هست.

$A_i(0)$ چی رو میگه؟ تعداد مشتریانی که وقتی وارد ایستگاه i ام می‌شوند، می‌بینند که ایستگاه خالی است.

سوال: تا چند می‌توانیم بیاییم. وقتی که تو سیستم که بسته است n نفر وجود دارد؟ (تا) $n-1$ نفر

به نظر می‌آید که همه رو با هم جمع کنیم می‌شود:

$$A_i = \sum_{n=0}^{N-1} A_i(n)$$

$A_i(0) \rightarrow$ زمانی که شخص اول وارد می‌شود و کسی توی ایستگاه نیست

$A_i(1)$

$\vdots$

$A_i(N-1) \rightarrow$ زمانی که شخص آخر در رو باز می‌کند و $N-1$ نفر باشد

بنابراین خودش حساب نمی‌شود.
(شخص آخر)

D_i چی رو میگه؟ مجموع کل خروجی از ایستگاه i ام به تفسیری باید بدیم پس می‌شود:

$$D_i = \sum_{n=1}^{N} D_i(n)$$

$D_i(1) \Rightarrow$ از 1 شروع می‌شود چون حداقل باید یک نفر در ایستگاه وجود داشته باشد که خارج بشه

$D_i(2)$

$\vdots$

$D_i(N) \Rightarrow$ زمانی که کل N نفر خارج می‌شوند

پایان جلسه دوم

جلسه سوم مدلسازی
دکتر هارونآبادی
۱۳۹۲/۷/۱۸

بنام خدا

۲۶

$X_i(N)$: میانگین یا متوسط نرخ ورود (نرخ ورود کلی) به ایستگاه i اُم

$$X_i(N) = \frac{A_i}{T}$$

A_i → کل ورودی ها

T → کل زمان

مثال : ۱۰۰ نفر در زمان ۱۰۰۰ ساعت

$$\leftarrow \frac{100}{1000} \leftarrow \frac{1}{10}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{کل}}{\text{زمان}}$$

$\lambda_i(N)$: نرخ گذردهی کلی، خروج کلی یا متوسط نرخ خروج

گذردهی یعنی چند تا سرویس داره ازش رد میشه؟

گذردهی به معنی Throughpu

$$\lambda_i(N) = \frac{D_i}{T}$$

T ← کلی

$Y_i(n|N)$: نرخ ورود مشروط

$$* \; Y_i(n|N) = \frac{A_i(n)}{T_i(n)}$$

$T_i(n)$ → مدت زمانی که در ایستگاه n نفر وجود دارد.

پس : نرخ ورود مشروط به اینکه n نفر در ایستگاه i اُم باشد.

$\mu_i(n|N)$:

$0 \leqslant n \leqslant N-1$ ← من کد

نرخ سرویس مشروط یا نرخ گذردهی مشروط یا نرخ خروج مشروط.

$$\Rightarrow * \; \mu_i(n|N) = \frac{D_i(n)}{T_i(n)}$$

* سرویس رو با μ نشان می دهیم. (مو)

$\bar{S}_i(n|N)$: متوسط زمان سرویس مشروط.

* $$\bar{S}_i(n|N) = \frac{1}{\mu_i(n|N)} = \frac{T_i(n)}{D_i(n)}$$

«همیشه نسبت عکس دارد»

مثال * اگر من بگم در یک ساعت ۴ نفر سرویس گرفتن، یعنی نرخ سرویس ۴ نفره. هر نفر به طور متوسط $\frac{1}{4}$ ساعت سرویس گرفتن.

$$\Rightarrow \bar{S}_i = 4 \Rightarrow \mu_i = \frac{1}{4}$$

* حال اگر $\bar{S}_i$ را از ما بخواهید و حالتی μ_i را به ما داده می‌شوند، می‌شود:

$$\Rightarrow \bar{S}_i = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$PA_i(n|N)$: (مثلاً A_i نفر در ایستگاه بودن و تعداد افرادی که وارد شدن، دیدن (که) چند نفر در ایستگاه هستند ($A_i(n)$)) تعریف ⟸ $A_i(n)$

$$PA_i(n|N) = \frac{A_i(n)}{A_i}$$

احتمال اینکه در زمان ورود به ایستگاه i ام، n نفر وجود دارند با فرض اینکه در کل سیستم N نفر در کل وجود دارند.

که : $0 \le n \le N$

مثال: اتاق ۱۰۳ که n (کوچک) صفر و تعداد کل یعنی N (بزرگ)، ۴۰ نفر بوده. احتمال اینکه در زمان ورود به ایستگاه i ام رو ملاحظه کنم، می‌بینم کل سیستم من، ۱۰۰ نفر وجود داره. پس احتمال اینکه ۷ نفر در ایستگاه i ام وارد شوند و ببینند ایستگاه خالی است می‌شود: $\frac{7}{100}$

? $P_{A_{103}}(0|100) = \frac{7}{100}$

مثال: وقتی که وارد ایستگاه ۳ می‌شویم، احتمال اینکه ۵ نفر در ایستگاه باشد ۰/۷ است، مشروط بر اینکه ۴۰ نفر در کل باشند:

$$PA_3(5|40)=0.7$$

$PD_i(n|N)$: احتمال اینکه در زمان خروج از ایستگاه i اُم، n (دیگر) نفر در ایستگاه وجود داشته باشند.

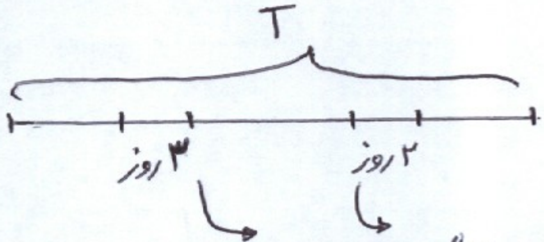
$$PD_i(n|N)=\frac{D_i(n+1)}{D_i}$$

نکته: خودش رو هم حساب می‌کند.

پس میتونم خود مورد رو هم بشمارم.

$P_i(n|N)$:

$$P_i(n|N)=\frac{T_i(n)}{T}$$



$T_i(n)$: n نفر در ایستگاه حضور دارند.

زمان کل: ← ۷۰ ساعت

مثال: ساعت $T_3(5)=30$، یعنی: 30 ساعت در ایستگاه شماره‌ی 3، 5 نفر بودند. کل زمان 70 ساعت بوده.

احتمال اینکه Random در رو باز کنم و ببینم توی اون اتاق ۵ نفر باشند: $\frac{30}{70}$ است.

* $PA_i(n|N)=PD_i(n|N)$: احتمال ورود و احتمال خروج در زمان T با یکدیگر برابر هستند.

$$PA_i(n|N)=PD_i(n|N)$$

در حالت کلی برای شبکه‌های باز و بسته صادق است.

در زمان T داریم : $A_i = D_i$ یعنی کل ورودیها به سیستم با کل خروجی ها به سیستم برابر است.

نکته مهم : در سیستم پایدار، نرخ ورود با نرخ خروج باید برابر باشد.

* حالت flow balance : (اصل توازن جریان)

$$\frac{A_i}{T} = \frac{D_i}{T} \Rightarrow \text{flow balance}$$

$\Downarrow$

اصل توازن جریان که برای پایداری سیستم لازم است.

* B_i : مدت زمانی که ایستگاه i اُم، سرورش مشغول است.

$B_i \Rightarrow$ Busy period

$$B_i = T - T_i(0)$$

T : کل زمان

$T_i(0)$: زمانی که ایستگاه i اُم خالی است.

مثال : (یعنی) اگر کل زمان را ۳۰ ساعت فرض کنید، اگر ۲ ساعت ایستگاه من خالی است، مدت زمانی که سرور مشغول است، می‌شود :

$$B_i = ۳۰ - ۲ = ۲۸$$

* U_i : زمان مشغول بودن تقسیم بر کل زمان $\Leftarrow$ مدت زمان بهره وری یا نرخ مشغول بودن

$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{T - T_i(0)}{T} = 1 - \frac{T_i(0)}{T} = 1 - P_i(0|N)$$

U_i : نرخ مشغول بودن

$\frac{B_i}{T}$: نرخ زمان مشغول بودن

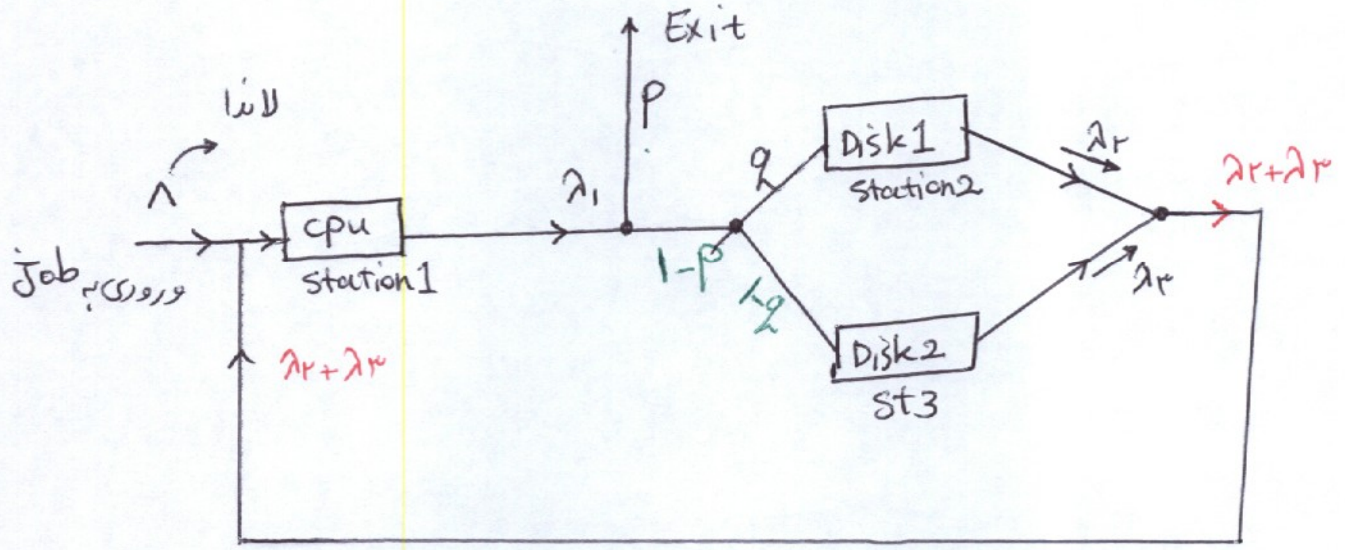
$P_i(0|N)$: احتمال خالی بودن ایستگاه i اُم

$U_i \Rightarrow$ مدت زمان بهره وری

$U_i \rightarrow$ نرخ مشغول بودن

مثال : اصل توازن جریان (شبکه صورت باز)

ص ۸۵ کتاب کانت (مقدمه ای بر ارزیابی کارایی سیستم های کامپیوتری)



فرض :
$$\begin{cases} P = 0.1 \\ q = 0.8 \\ \lambda = 10 \ \text{Jobs/sec} \end{cases}$$

حکم : مطلوبست می شود : λ_1 و λ_2 و $\lambda_3 = ?$

حل :

λ : یعنی ترافیکی از دنیای بیرون وارد سیستم می شود (فقط در سیستم باز)

در سیستم باز جواب منحصر به فرد است.

$M = 3$ و $N =$ بینهایت

سیستم باز است : با احتمال دیگر ، احتیاج به حل قطع دارد (چون ورود و خروج دارد)

$\lambda \leftarrow$ نرخ خروج $\leftarrow$ بعضی از مواقع λ را نرخ ورود هم می گوییم ، نرخ ورود و خروج برابر است

⇓

در اصل توازن جریان

سیستم باز $M = 3$

(ورودی) آنچه که وارد می شود   آنچه که خارج می شود.

① $St1: \lambda_1 = \Lambda + \lambda_2 + \lambda_3$

ترافیکی که از بیرون وارد سیستم می شود.

② $St2: \lambda_2 = \lambda_1 (1-p) q$

③ $St3: \lambda_3 = \lambda_1 (1-p)(1-q)$

$\Rightarrow$ (طبق) اصل توازن جریان flow Balance

داخل دستگاه می گذاریم (۳ معادله و ۳ مجهول)

طبق اصل توازن جریان: آنچه که وارد می شود را با آنچه که خارج می شود برابر می دهیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\Lambda}{p} = 100 \ \dfrac{jobs}{sec} \\ \lambda_2 = \dfrac{\Lambda (1-p) q}{p} = ۷۲ \ \dfrac{jobs}{sec} \\ \lambda_3 = \dfrac{\Lambda (1-p)(1-q)}{p} = ۱۸ \ jobs/sec \end{cases}$$

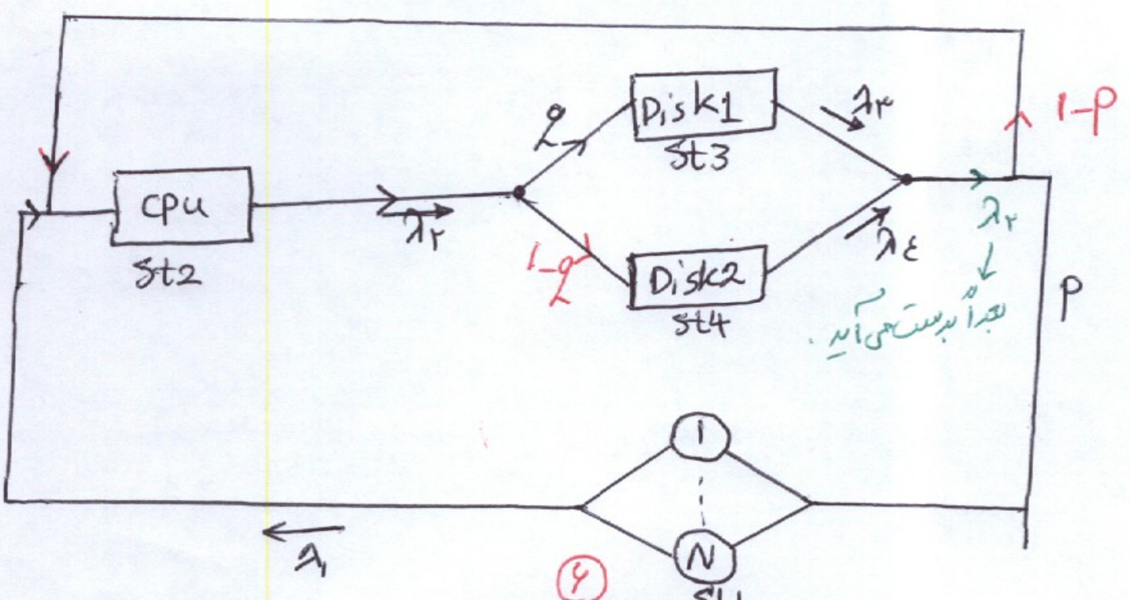
چون حل دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهول سخت به نظر می رسد

بنابراین سعی در یافتن λ_1 می کنیم که در هر ۳ معادله وجود دارد.

$۱۰۰(۱ - ۰/۱) ۰/۸ = (۱۰۰ - ۱۰) ۰/۸ = ۹۰ \times \frac{۸}{۱۰} = ۷۲$

$۱۰۰(۱ - ۰/۱)(۱ - ۰/۸) = (۱۰۰ - ۱۰)(۱۰۰ - ۸۰) = ۱۸$

مثال: اصل توازن جریان در شبکه های بسته (در شبکه های بسته با پارامتر آزادی بدست می آید)



(۳۵)

M : تعداد ترمینال $=4$

N : تعداد مشتری‌ها که در سیستم وجود دارند.

فرض : P و q (را داریم)

حکم) مطلوبست : λ_4 و λ_3 و λ_2 و λ_1

حل : از هر ایستگاهی باید یک معادله بدست آوریم.

$m=4$

* نتیجه‌گیری از

$$St1: \quad \lambda_1 = (\underbrace{\lambda_3+\lambda_4}_{\lambda_2})P \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 P$$

$$St2: \quad \lambda_2 = \lambda_1 + (\underbrace{\lambda_3+\lambda_4}_{\lambda_2})(1-P) \Rightarrow \cancel{\lambda_2} = \lambda_1 + \cancel{\lambda_2}(1-P) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 P$$

$$\left.\begin{array}{ll} St3: & \lambda_3 = \lambda_2 q \\ St4: & \lambda_4 = \lambda_2(1-q) \end{array}\right\} \oplus \Rightarrow \lambda_3+\lambda_4 = \cancel{\lambda_2 q} + \lambda_2 - \cancel{\lambda_2 q} \Rightarrow \lambda_3+\lambda_4 = \lambda_2 \rightarrow *$$

$$St1, * \rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 P}$$

$$St2, * \rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2(1-P) \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 P}$$

$\Rightarrow$ دقت کنید: یکسان شدند.

نکته: در شبکه بسته چون حلقه داریم، یکی از معادلات به معادلات دیگر وابسته است و با پارامتر آزادی بدست می‌آید.

یعنی ظاهراً ۴ معادله و ۴ مجهول می‌باشد ولی چون یکی از معادلات به دیگر معادلات وابسته است، پس:

۳ معادله داریم و ۴ مجهول $\Leftarrow$ جواب منحصر به فرد نداریم.

* جواب‌ها براساس λ_2 بدست می‌آید.

(۳)

پارامتر آزادی

$$\lambda_1 = \lambda_2 p$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_3 = \lambda_2 q$$

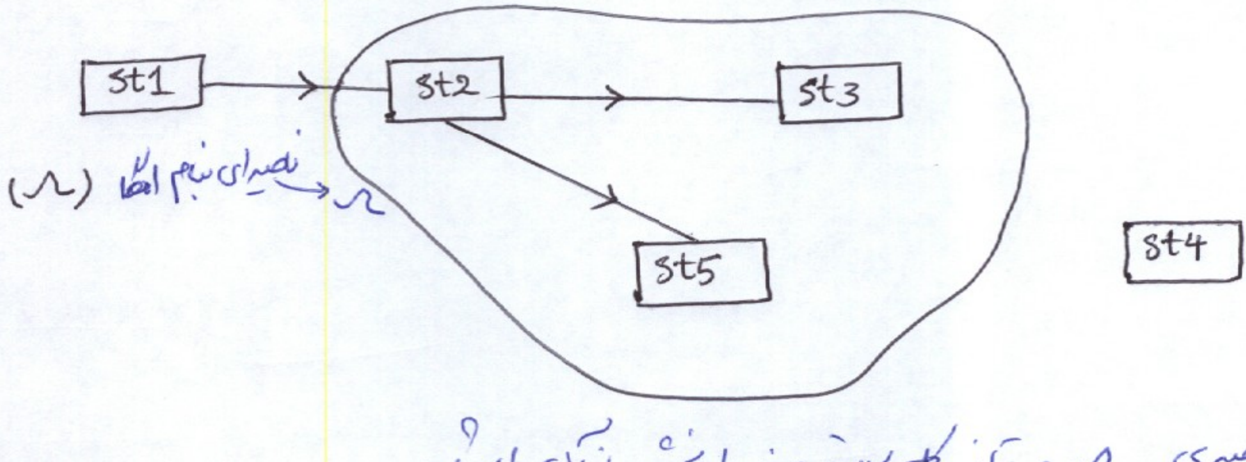
$$\lambda_4 = \lambda_2 (1-q)$$

$\Rightarrow$ جواب‌ها براساس λ_2 بدست می‌آید یعنی پارامتر آزادی ما λ_2 است.

وقتی می‌گوئیم پارامتر آزادی، یعنی براساس یک متغیر بدست می‌آوریم. یعنی متغیرهای λ_1 و λ_3 و λ_4، همگی براساس λ_2 می‌سنجه می‌شوند.

همانگونه که ملاحظه کردید، در شبکه‌های بسته، Through put (λ) با یک پارامتر آزادی بدست آمده و بصورت مطلق بدست نمی‌آید. با توجه به زمان سرویس و N پارامتر آزادی نیز ملاحظه می‌گردد.

* قضیه لیتل: (Little's formula)



- ناحیه‌ی Ω می‌تواند کل سیستم صف یا بخشی از آن باشد.
- این قضیه برای هر دو شبکه باز و بسته صادق است.

λ_Ω : نرخ خروج از محدوده‌ی Ω

مثال: اگر 1000 تعداد از محدوده Ω خارج شوند، نرخ خروج از محدوده‌ی Ω چقدر است؟

$T \rightarrow 1000 \rightarrow$ job خارج شده

$$\Rightarrow \lambda_\Omega = \frac{1000}{T} =$$

یعنی تعداد تقسیم بر T می‌شود نرخ خروج از محدوده‌ی Ω

* R_r : متوسط زمان حضور یا ماندگاری در محدوده‌ی r

Response time → زمان پاسخ

job 1 : زمان خروج − زمان ورود = t_1

job 2 : 〃 = t_2

⋮

job n : 〃 = t_n

$\frac{\text{جمعشان}}{n}$ = جمعشان تقسیم بر n

که میانگین یا Average را به ما می‌دهد.

* Q_r : متوسط تعداد مشتریان در محدوده‌ی r

$t_1 \rightarrow k_1$
$t_2 \rightarrow k_2$
⋮
$t_n \rightarrow k_n$

→ job در محدوده‌ی r

تمام k ها را جمع و سپس تقسیم بر n می‌کنیم.

نکته مهم : R_r و Q_r با هم رابطه دارند.

فرمول لیتل : $\downarrow Q_r = \downarrow \underset{\text{نرخ خروج}}{\lambda_r} \downarrow \underset{\text{زمان انتظار}}{R_r}$

با هم رابطه‌ی مستقیم دارند یعنی :

* اگر R_r یا همان زمان ماندگاری کمتر شود ، Q_r هم کمتر می‌شود.

* اگر λ_r کم شود نیز ، Q_r متوسط تعداد مشتریان کم می‌شود.

طبق اصل توازن جریان:

نرخ خروج = نرخ ورود

$$\uparrow Q_{ave} = \lambda_{ave} \uparrow R_{ave} \uparrow$$

اگر نرخ ورود زیاد شود، تعداد متوسط مشتریان که در آن محدوده زیاد می‌شود.

نکته: قضیه‌ی لیتل برای مسیر یابی پویا هم صادق است.

ص ۱۵۷: روابط زیر در شبکه‌های صف ملاحظه می‌گردد:

* با توجه به پارامترهای موجود در سیستم صف و روابط ذکر شده، معادلات زیر را مشاهده می‌نمائیم:

نرخ خروج متوسط

نرخ گذردهی در ایستگاه i ام (در ادامه اثبات می‌شود)

$$\lambda_i(N) = \frac{\overbrace{D_i}^{\text{کل خروجی}}}{\underbrace{T}_{\text{کل زمان}}} = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{N} D_i(n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{D_i(n)}{T_i(n)} * \frac{T_i(n)}{T}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mu_i(n|N)\, P_i(n|N)$$

نرخ گذردهی در ایستگاه i ام

(۱)

بهره وری

یادآوری: سرویس همگن: نرخ سرویس به تعداد مشتریان (کارها) در ایستگاه بستگی ندارد.

$$\mu_i(n|N) = \mu_i(N) \Rightarrow$$

نرخ سرویس ثابت

آن گاه داریم:

$$\lambda_i(N) = \mu_i(N) \sum_{n=1}^{N} P_i(n|N) = \mu_i(N)\,(1-P_i(0|N))$$

چون مستقل از n شده، از سیگما (Σ) می‌تواند بیرون بیاید

$$\Rightarrow \frac{\lambda_i(N)}{\mu_i(N)} = 1-P_i(0|N) \Rightarrow U_i(N) = \frac{\lambda_i(N)}{\mu_i(N)}$$

با توجه به اصل توازن جریان:

$$\frac{\text{نرخ ورود (یا خروج)}}{\text{نرخ سرویس}} \rightarrow \text{بهره وری}$$

(۲۶) $\text{بهره‌وری} = \dfrac{\text{نرخ ورود}}{\text{نرخ سرویس}}$

یعنی در شبکه‌ی باز که در مثال قبلی داشتیم چون نرخ ورود را بدست آوردیم، اگر نرخ سرویس هم بدن، می‌

به راحتی می‌توان بهره‌وری را بدست آورد.

$$X_i(N) = \frac{A_i}{T} = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} A_i(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A_i(n)}{T_i(n)} \cdot \frac{T_i(n)}{T}$$

کل ورودی

کل زمان

دو طرف رابطه‌ی فوق عبارتست از:

نرخ ورود مشتری

$$\Rightarrow X_i(N) = \sum_{n=0}^{N-1} Y_i(n|N)\, P_i(n|N)$$

(۲)

معادل دوم

$$Y(n|N) = Y_i(N)$$

یادآوری: ورودی همگن

(وقتی مشتری داره در رو باز می‌کنه که وارد بشه، تعداد افراد روی تصمیم‌گیری مشتری تأثیری نمی‌گذاره)

$$\Rightarrow \underbrace{Y_i(N)\sum_{n=0}^{N-1} P_i(n|N)}_{X_i(N)} = Y_i(N)\,(1-\underbrace{P_i(N|N)}_{\text{احتمال اینکه در ایستگاه iام همه باشند.}})$$

(۳۵)

$$\left\{\begin{aligned} P_{A_i}(n|N) &= \frac{A_i(n)}{A_i} \\ P_{D_i}(n|N) &= \frac{D_i(n+1)}{D_i} \end{aligned}\right\}$$

شبکه‌های باز و بسته همواره باهم برابرند

+

$A_i = D_i$ از آنجایی که از طرفی

$\Rightarrow$

(۳) $$\boxed{\Rightarrow A_i(n) = D_i(n+1)}$$ مهم

(۳) و (۴) و ...

$$P_i(n|N) = \frac{T_i(n)}{T} = \frac{T_i(n)}{D_i(n)} \cdot \frac{D_i(n) \rightarrow A_i(n-1)}{T_i(n-1)} \cdot \frac{T_i(n-1)}{T}$$

$$= \frac{1}{\mu_i(n|N)} \, Y_i(n-1|N) \, P_i(n-1|N)$$

ملاحظه می‌گردد برای $P_i(n|N)$ یک رابطهٔ بازگشتی حاصل شد که $P_i(n|N)$ را از روی آن می‌توان بدست آورد.

* بصورت عددی (پارامتری) یک مسأله می‌دهند و میگن که باید حل کنید (اثبات نمی‌آید)

ملاحظه می‌گردد در یک رابطهٔ بازگشتی برای $P_i(n|N)$ حاصل شد

(۴)

$$P_{A_i}(n|N) = \frac{A_i(n)}{A_i} = \frac{A_i(n)}{T_i(n)} \cdot \frac{T_i(n)}{D_i(n)} \cdot \frac{D_i(n) \rightarrow A_i(n-1)}{A_i}$$

$$= Y_i(n|N) \frac{1}{\mu_i(n|N)} \, P_{A_i}(n-1|N)$$

رابطهٔ بازگشتی

احتمال اینکه در ورود به ایستگاه i اُم، n نفر وجود دارد.

(۵)

$$P_{D_i}(n|N) = \frac{D_i(n+1)}{D_i} = \frac{D_i(n+1)}{T_i(n+1)} \cdot \frac{T_i(n+1)}{T} \cdot \frac{T}{D_i}$$

$$= \mu_i(n+1|N) \, P_i(n+1|N) \frac{1}{\lambda_i(N)}$$

احتمال اینکه در هنگام خروج از ایستگاه iام n نفر حضور دارند.

$$PA_i(n|N) = \frac{A_i(n)}{A_i} = \frac{A_i(n)}{T_i(n)} \cdot \frac{T_i(n)}{T} \cdot \frac{T}{A_i} = Y_i(n|N)\, P_i(n|N) \cdot 1/X_i(N) \qquad (۶)$$

$$(۴), (۶) \Rightarrow PA_i(n-1|N)\, X_i(N) = P_i(n|N)\, \mu_i(n|N)$$

توی مثال جلسه قبل $\lambda_1 = 100$ شده بود اگر μ رو هم می‌داد، ما می‌توانستیم بهره‌وری را بدست آوریم. توی امتحان، اثباتی نمی‌دهند مسئله‌ای که از ما می‌خواهد. اگر سؤال بیاید از فصل اول تعاریف می‌باشد و لو هم شاید ولی تا اینها را تفهمید، بقیه رو نخواهید فهمید.

طبق مدل (۴)

$$PA_i(n|N) = \frac{A_i(n)}{A_i} = \overbrace{\frac{A_i(n)}{T_i(n)}}^{y_i(n|N)} \cdot \overbrace{\frac{T_i(n)}{D_i(n)}}^{\frac{1}{\mu_i(n|N)}} \cdot \overbrace{\frac{D_i(n) \to A_i(n-1)}{A_i}}^{PA_i(n-1|N)}$$

بنام خدا

جلسه چهارم:

مدل‌سازی سه‌شنبه: ۱۳۹۲/۷/۲۵

استاد دکتر هارون آبادی

زنجیره‌ها و کلاس‌ها: chains & classes

یک job در طول مسیر حرکت خود در هر حالتی تجربه‌های متفاوتی داره. یعنی هر جا یک lable خاص داره که به هر کدام یک کلاس می‌گویند. پس یک job در طول مسیر کلاس‌های مختلفی را طی می‌کند (زنجیره‌ای از کلاس‌ها)

مثال: فرض کنید می‌خواهیم موارد قابل اهمیت در شبکه را اندازه‌گیری کنیم، مواردی مانند میانگین زمان سرویس، از لحاظ موارد امنیتی و.... ممکن است مشتری در بخشی از شبکه از جنس پروتکل FTP

* بدیهی است که میانگین زمان سرویس در این دو مورد متفاوت است همین طور شبکه ها برخورد متفاوتی با این مسائل خواهند داشت که به این موضوع در شبکه های چند کلاسه بیشتر خواهیم پرداخت

با زمان سرویس زیاد و در بخش دیگری از شبکه از جنس پروتکل HTTP با زمان سرویس کم باشد.

(۳۷) مثال : مثلاً یک ماشین ممکنه توی شهر یک سرعت را داشته باشد، امّا توی جاده یک سرعت دیگر. راننده همان راننده است امّا رفتارها بستگی به موقعیت داره و متفاوت است.

در برخی موارد می خواهیم این قابلیّت را داشته باشیم که مشتری بتواند در طول مسیر خود در شبکه، کلاس خود را عوض کند، همانند مثال بالا. این مجموعه تغییر کلاسها تشکیل یک زنجیره را می دهد. مثال ص ۱۰۷ کتاب آقای کاظمی.

*می خواهیم اصل توازن جریان را در این مثال بنویسیم. می دانیم شبکه باز و $M=4$ می باشد. ۶ حالت مختلف را در طول مسیرش تجربه می کند که اینها تشکیل زنجیره رو می دهند.

برای نوشتن اصل توازن جریان مراحل زیر را دنبال می کنیم :

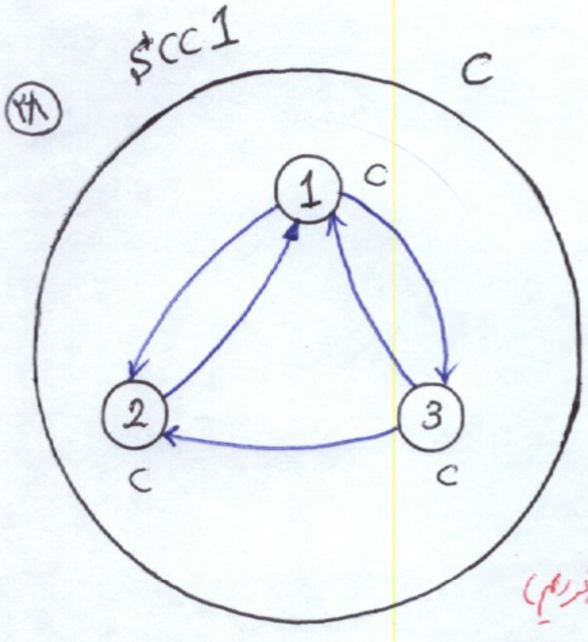
(در این جا برای اصل توازن جریان مثل قبل این طور نیست که همه ی ورودیها را با همه ی خروجیها مساوی قرار بدهیم، بلکه برای هر کلاس باید ورودیهای آن کلاس را برابر خروجیهای آن کلاس قرار بدهیم)

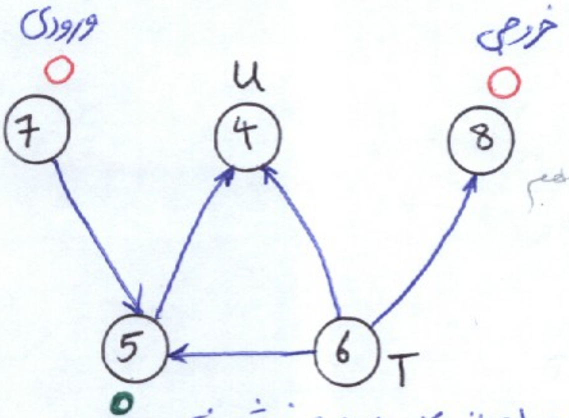
یعنی ورودیهایی که فقط از یک دسته هستند با ورودیهایی که از کلاس دیگر هستند، مساوی هم قرار می دهیم.

۱- گراف دسترسی (reachabilty graph

گرافی است که نودهایش برابر با تعداد کلاسها در سیستم شماست.

(۳۸)





« SCC نیست چون از ۴ به ۵ یا ۶ نمی‌شه رفت »

(از سبد خودمان این دو گره را اضافه کردیم)
به عنوان ورودی و خروجی

O : گره های تحودی (7 و 8)

O : گره open (5) و 7 و 8

T : گره های گذرا

u : unstable (ناپایدار)

c : گره های ایزوله (closed)

۲- گره های تحودی : dummy node

گره هایی که وارد و خارج می‌شوند شماره هاشو خودمان می‌گذاریم : یعنی ۷ و ۸)

- گره های تحودی در سیستم های باز ، معنا دارند.

در شکل با گره‌ی ۵ وارد ، و با گره‌ی ۶ خارج می‌شود که به ۸ می‌رسد.
جلسه گذشت

۳- تشخیص SCC ؛ (Strongly Connected Component)

هرجا که ما بتوانیم چه بصورت مستقیم و چه بصورت غیر مستقیم از هر نود به اون یکی بریم ، رابطه‌ی SCC برقرار است.

- هر SCC به یک گره تبدیل می‌شود.

۴- open : گره ها را برچسب گذاری می‌کنیم.

گره های ۷ و ۸ که گره های ورودی هستند را برچسب "O" می‌گذاریم. "O" مخفف واژه ی open است.

۵- closed : گره های ایزوله (با دیگران رابطه ندارند) را برچسب C می‌گذاریم.

نکته مهم: وقتی گرهی C شد، تمامی nodeهای درونی آن نیز C می‌شود.

۶- Transient یا گذرا: چنانچه به یک نودی چیزی وارد نمی‌شود و فقط خارج می‌شود، چون این نود که فقط خروجی دارد ناپایدار است و آن را با T نشان می‌دهیم.

۷- اگر نودی دارای ورودی و خروجی باشد (یعنی حداقل یک کمان ورودی و یک کمان خروجی داشته باشد) چنانچه تمام ورودیها گذرا باشند، T برچسب گذرا و در غیراینصورت برچسب "O" می‌گیرد. یعنی نود یا گره O.

۸- unstable : چنانچه به یک نودی فقط دارای ورودی باشیم و از آن خروجی نداشته باشیم، چنانچه تمام ورودیها T باشد، برچسب را C و در غیراینصورت برچسب را U می‌گذاریم.

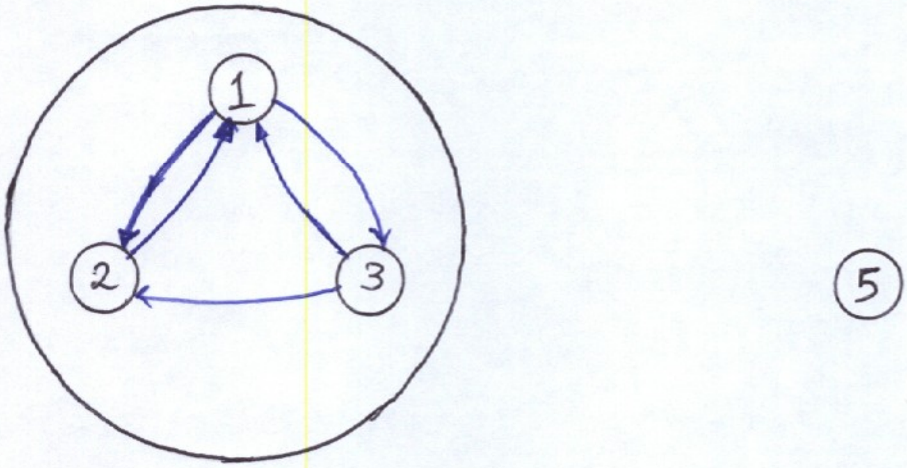
تعریف سیستم ناپایدار:

ه

۹- ابتدا گره های تحودی و سپس گره های گذرا (T) و (U) unstable را حذف می‌کنیم.

ملاحظه می‌نماییم که در حالت پایدار، یک زنجیره‌ی open شامل کلاس 5 داریم و یک زنجیره‌ی

شکل جدید بعد از حذف گره های تحودی (۷و۸) و T و U :



close شامل کلاس های 1 و 2 و 3 خواهیم داشت. پس از بدست آوردن موارد فوق، در یک زنجیره

برای هر کلاس می‌توان قانون توازن جریان را نوشت: (نرخ خروج = نرخ ورود)

* فرض می‌شود در ایستگاه iام حضور داریم و در مورد کلاس r صحبت می‌نماییم. در ایستگاه مربوطه می‌توان نوشت:

$$\lambda_{ir} = \Lambda_{ir} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{jr}\, q_{jir}$$

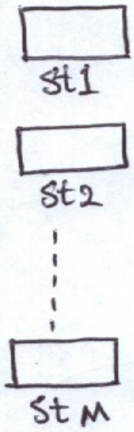
λ_{ir} : نرخ خروج از ایستگاه iام با کلاس r

Λ_{ir} : ترافیکی که از دنیای بیرون وارد ایستگاه iام با کلاس r می‌گردد.

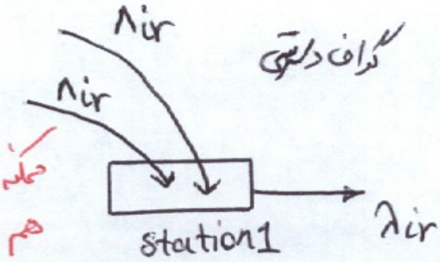
λ_{jr} : نرخ خروج از ایستگاه jام با کلاس r

q_{jir} : احتمال اینکه از ایستگاه jام خارج و به ایستگاه iام بدون تغییر کلاس (کلاس r) برویم. (در این جا کلاس ثابت و ایستگاه‌ها متغیرهستند)

(41)



گراف دلتی



حمله با کلاس K هم وارد شویم .

فرآیند تصادفی : Random process

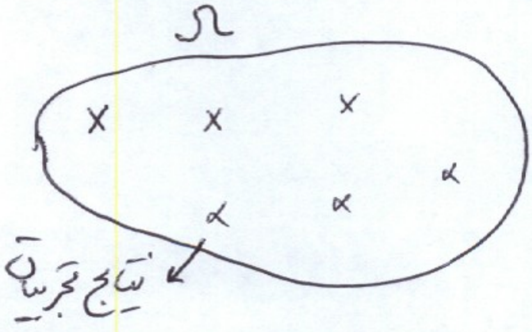
عدم قطعیت → احتمال

عدم قطعیت → فازی (با فازی کاری نداریم)

* تمام مواردی مانند ورودی خروج و سرویس و... با احتمال بیان می شوند.

متغیر تصادفی : Random variable

یعنی ما را از یک ناحیه Ω به R می برد.



فضای نمونه : Sample space
(مربوط به تاس)

پیشامد : out come ← نتیجه ی یک تجربه است. (عناصر موجود در Samplespace (فضای نمونه))

رخداد : مجموعه ای از پیشامدها را رخداد می گوییم.

متغیر تصادفی :
- گسسته (برد محدود) ← پرتاب سکه
- پیوسته (برد نامحدود) ← تنظیم دما و اندازه‌گیری زمان

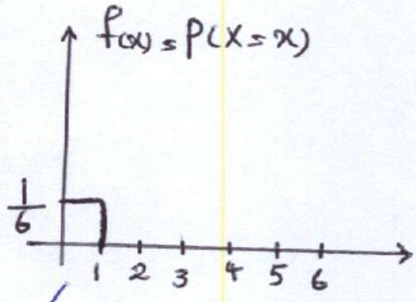
↓

نحوه‌ی بیان تجربه با استفاده از اعداد حقیقی

مثال : اندازه‌گیری زمان، نامحدود است.

تابع توزیع :

$$F(x) = P(X=x)$$



«نمودار پرتاب تاس»

$P(1) = \frac{1}{6}$

مثال :

$$P(X=\tfrac{1}{2}) = 0$$

یعنی احتمال اینکه عدد $\frac{1}{2}$ در پرتاب تاس بیفتد، صفر است.

$$P(X=2) = \frac{1}{6}$$

فضای نمونه = {۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶}

$$\Rightarrow P(X=2) = \frac{n(2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

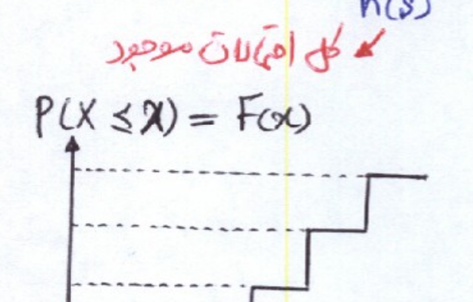
حالتی که ۲ ممکن است بیفتد

کل احتمالات موجود

توضیح :

* در حالت پیوسته بصورت منحنی است ⟸

$$P(X \le x) = F(x)$$



تابع توزیع تجمعی :

در حالت پیوسته : مشتق $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ → پیوسته

در حالت گسسته : بصورت پلکانی

non deterministic

هر وقت بحث Random مطرح شد، باید بریم سراغ عدم قطعیت

عدم قطعیت ← احتمالات ، فازی

احتمال رخداد: آنکه در پرتاب تاس عدد زوج بیاید $\rightarrow \frac{1}{2}$

توضیح: $S =$ فضای نمونه ای کل $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

$A =$ فضای نمونه ای خواسته شده (در پرتاب زوج تاس) $= \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

* متغیر تصادفی: نحوه ی بیان تجربه را با استفاده از اعداد حقیقی را متغیر تصادفی گوییم.

$$X : \underset{\text{از ناحیه ی}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\text{اعداد حقیقی}}{\mathbb{R}}$$

مثال: اندازه گیری دما در ساعت 14:00 ← متغیر تصادفی پیوسته

مثال: پرتاب سکه ← متغیر تصادفی گسسته

فرآیند تصادفی: متغیر تصادفی یک تجربه را مدل می نماید و فرآیند تصادفی یک فرآیند را مدل می نماید. (تئوری زمان بیان می کند). وقتی متغیر تصادفی را در scope زمان بیاوریم یک فرآیند تصادفی داریم.

فرآیند: مجموعه ای از تجارب در طول زمان

زمان $T = \{1, 2, \ldots\}$

$t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad \ldots$

پرتاب تاس در زمان t_1

$$X = \{X(t_1), X(t_2), X(t_3), X(t_4), \ldots\}$$

$$X = \{X(t), t \in T\} \Rightarrow$$ فرآیند تصادفی

فرآیند تصادفی
- پارامتر زمان
  - گسسته
  - پیوسته
- فضای حالت
  - گسسته
  - پیوسته

مثال: * پرتاب تاس در زمانهای مختلف:

پرتاب تاس رأس هرساعت ⇐ فضای حالت گسسته - زمان گسسته

اندازه گیری دما رأس هر ساعت ⇐ فضای حالت پیوسته - زمان گسسته

«فرآیند مجموعه‌ای از تجربه‌ها در طول زمان است»

* ویژگی «Correlation» (همبستگی): چنانچه در فرآیند تصادفی متغیرهای تصادفی از یکدیگر مستقل باشند خواهیم داشت: correlation = 0

مثال: پرتاب تاس. correlation = 0 است. در دما correlation بالا است. مثلاً اگر ساعت 1 بعدازظهر دما را بگیریم 13° باشد در زمان 5 بعدازظهر می‌شود دما را تخمین زد، اما برای پرتاب تاس correlation صفر است. (correlation برای دما ضعیف است)

* تغییرپذیری یا Variability: برخی فرآیندها در زمانهای مختلف رفتار متفاوتی دارند.

به عنوان مثال: فرآیند ورود افراد به دانشگاه یا ترافیک در بزرگراه چنین خصوصیتی دارند، چنانچه فرآیند

تغییرپذیر نباشد ، فرآیند را ایستا (Stationary) و در غیر اینصورت (اگر تغییرپذیر باشد)،

۴۵

فرآیند را غیرایستا (Nonstationary) می گوئیم.

(وقتی تاس را صبح بیندازیم یا شب فرقی نمی کند)

فرآیند مارکوف : (یک فرآیند تصادفی است) اینکه گذشته چگونه است هیچ تأثیری در تصمیم گیری ما ندارد. این فرآیند بدون حافظه است. (آینده فقط به حال بستگی داره و به گذشته ربطی نداره)

تعریف ریاضی فرآیند مارکوف :

اگر فرآیند تصادفی $X = \{x(t) , t \in T\}$ را در نظر بگیریم ، فرآیند فوق را مارکوف

می گوئیم اگر و تنها اگر :

به ازای زمانهای : $t_1 , t_2 , \dots , t_n \in T$

به گونه ای که : $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

و به ازای حالات $i_1 , i_2 , \dots , i_n$ داشته باشیم :

کاملی اندیس لواصی

$$P [x(t_n) = i_{n-1} , x(t_{n-1}) = i_{n-2} , \dots , x(t_2) = i_1 , x(t_1) = i_0$$

$$P [x(t_n) = i_n \mid x(t_{n-1}) = i_{n-1} , x(t_{n-2}) = i_{n-2} , \dots x(t_1) = i_1] =$$

$$= P [x(t_n) = i_n \mid x(t_{n-1}) = i_{n-1}]$$

* correlation در اینجا صفر نیست بلکه از درجه ی 1 بود و ضعیف می باشد.

* correlation صفر نیست چون به آینده بستگی دارد.

فرآیند مستقل : Independent process

مستقل یعنی شرطی نداره.

تعریف ریاضی: فرآیند تصادفی $X = \{x(t), t \in T\}$ را در نظر بگیرید فرآیند فوق را مستقل گوییم

اگر و تنها اگر:

به ازای زمانهای $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$

و به گونه‌ای که $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

و به ازای جملات $x_1, x_2, \ldots, x_n$

داشته باشیم:

$$P(X(t_1) \leq x_1 \overset{\text{and}}{\wedge} X(t_2) \leq x_2 \wedge \ldots \wedge x(t_n) \leq x_n) =$$

$$= P(X(t_1) \leq x_1) \times P(X(t_2) \leq x_2) \times \ldots \times P(X(t_n) \leq x_n)$$

correlation در این صفر است.

مثال: کسی با احتمال 0.3 از درب **1** وارد می‌شود و با احتمال 0.2 از درب **2** وارد می‌شود. احتمال خارج شدن چقدر می‌شود؟

جواب:

چون از هم مستقلند احتمالهای آن در همدیگر ضرب می‌شود.
(گسسته)

احتمال خارج شدن $= 0.2 \times 0.3$
(گسسته)

۰/۰۶ کم‌تر می‌شود

جلسه پنجم مدل سازی

۱۳۹۲،۸،۹ دکتر هارون آبادی

بنام خدا

Renewal counting Process

۴۷ فاطمه اسمعیل نفیسی کار

فرآیند شمارشی تجدید پذیری :

زمان $T = \{1, 2, \dots, n\}$

$t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ \dots,\ t_n = n$

$X(t_1) \equiv X(1)$ زمان ورود نفر اول

$X(t_2)$ زمان میان ورود نفر اول و دوم

⋮

$X(t_n)$ زمان میان ورود نفر n-1 ام و n ام

زمان ورود نفر n ام ← $S_n = X(1) + X(2) + \dots + X(n)$

تصادفی $= X(t_1) + X(t_2) + \dots + X(t_n)$

S_n : متغیر تصادفی

$P(S_n \le \tau)$

$P(X(1) + X(2) + \dots + X(n) \le \tau)$

$N(t)$: تعداد آمدن ها در بازه زمانی $(0, t]$

هرچه t بیشتر باشد، $N(t)$ هم بیشتر است.

می توان یک فرآیند تصادفی بصورت مقابل نوشت : $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$

به فرآیند تصادفی $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$ فرآیند شمارشی تجدید پذیر گوییم.

چرا شمارشی ؟ چون اولاً تعداد ورودیها را می شماریم و ثانیاً تعداد آمدن ها مرتباً تکرار می شود.

فرایندی که با N(t) نمایش دهیم شمارشی تجدید پذیری می‌گویند.

سؤال: این جمله ها درستند؟

$$P(N(t) \geq n) \overset{?}{\equiv} P(S_n \leq t)$$ ✓

(تمام زمان های ورود را می‌شماریم تا به آخرین نفر برسد) درسته

هم ارز

در زمان $[0,t]$ حداقل n نفر وارد شده است.

نفر n ام قبل یا مساوی زمان t وارد شده است. (زمان ورود نفر n ام کمتر یا مساوی t است)

سؤال: چرا میگن تجدید پذیر؟ چون ورود مهمون داره تجدید و تکرار میشه.

سؤال: چرا میگن شمارشی؟ چون داریم می‌شماریم.

فرآیند زمان توزیع پواسون:

فرآیند شمارشی تجدید پذیری (تصادفی) $\{N(t), t \in R\}$ را پواسون می‌گوییم، اگر و تنها اگر:

فرمول فرآیند پواسون ←
$$P(N(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$$

λ: میانگین تعداد موفقیت در فاصله‌ی زمانی (منظور نرخ ورودی باشد)

λ میانگین نرخ موفقیت ← در فاصله زمانی

⇐ نرخ موفقیت یعنی نرخ ورود

دراینصورت به فرآیند شمارشی تجدید پذیر فوق فرآیند پواسون و به توزیع آن، توزیع پواسون می‌گوییم.

* هرجا مکان و زمان را می‌بینیم توزیع پواسون است.

یادآوری: توزیع پواسون

اگر نتایج حاصل از آزمایش تعداد وقایعی باشد که در فواصل زمانی یا در ناحیه‌ی مکانی مشخص رخ می‌دهد، چنین آزمایشی را آزمایش پواسون می‌نامند.

متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی تعداد موفقیت در یک آزمایش پواسون بوده که آنرا متغیر تصادفی پواسون و توزیع آنرا توزیع پواسون گوییم. رابطه‌ی زیر در توزیع پواسون برقرار است:

فرمول توزیع پواسون

$$P(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} \qquad e=2.72$$

تعداد ، زمان

$x=0,1,2,\dots,n$

نرخ ورود، نرخ سرویس

نکته: هر وقت بازه‌ی زمانی یا مکانی مد نظر باشد ⇐ توزیع پواسون است.

* در فرمول بالا λ، میانگین تعداد موفقیت در فاصله‌ی زمانی یا ناحیه‌ی مکانی است و همواره باید معلوم باشد که ما فقط به λ در فاصله‌ی زمانی کار داریم و x هم تعداد موفقیت است.

مثال: فرض کنید میانگین تعداد تلفن هایی که به یک شرکت می‌شود، $\lambda=120$ تلفن در ساعت است. مطلوبست احتمال اینکه در یک فاصله‌ی ۱ دقیقه‌ای تلفنی زده نشود؟

$$\begin{cases}\lambda=2\\ x=0\end{cases} \Rightarrow P(x,\lambda)=P(0,2)=\frac{2^{0}e^{-2}}{0!}=\frac{1}{e^{2}}\simeq 0.1353$$

تلفنی زنگ زده نشود معادل $x=0$ است.

ساعت	دقیقه
1	60
λ	120

$\Rightarrow \lambda=\frac{120}{60}=2$

$$\xrightarrow[x=0]{\lambda=2} \boxed{P(0,2)=0.1353}$$

$\lambda=120$ یعنی در یک ساعت ۱۲۰ تا تلفن بهش میشه.

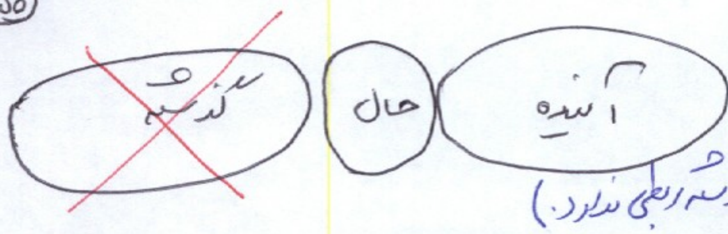
* ۱ دقیقه چند تلفن بهش میشه؟ ۲ تا ← جواب ما همان λ: ⟸ $\boxed{\lambda=\frac{120}{60}=2}$

λ ی هر دقیقه

۲ ساعت چند تلفن بهش میشه؟ $2\times120=240$ تا

مثال: اگر بگیم در ۱ دقیقه، ۶ تلفن زده میشه، پس x میشه ۶.

* فرآیند مارکوف :



مارکوف می‌گفت آینده به حال بستگی دارد (و به گذشته ربطی ندارد.)

فضای حالت را در این فرآیند، گسسته در نظر گرفته، ولی زمان را بصورت گسسته یا پیوسته در نظر می‌گیریم. در ابتدا ما زمان را بصورت گسسته و در ادامه بصورت پیوسته در نظر می‌گیریم. سپس در قسمت بعدی مؤلفه زمان را تفکیک می‌کنیم.

* فضای حالت گسسته است ولی زمان اهمیت ندارد.

فرآیند مارکوف فضاهای زیر را در نظر بگیرید :

$$X = \{x(t),\ t \in T\}$$

یا $\mathbb{R}$

داریم :

$$\pi_j(t) = P(X(t) = j)$$

احتمال اینکه در زمان t در state (حالت) j باشیم.

در فرآیند مارکوف با زمان‌های پیوسته و گسسته، احتمال آنکه در زمان t در حالت j باشیم را ملاحظه می‌باشیم. غالباً زمان شروع سیستم برای ما بصورت فرض داده می‌شود بدین طریق می‌توانیم حالات آتی را برحسب زمان اولیه بدست آوریم. بدیهی است روابط زیر را می‌توان ملاحظه نمود :

فرض $\pi_i(0) = P(X(0) = i)$

که احتمال اینکه در زمان صفر ممن در state i باشیم.

احتمال گذار ← $P_{ij}(u,t) = P(X(t)=j \mid X(u)=i)$, $u \le t$

چنانچه در زمان u در حالت i باشیم، با احتمال فوق، در زمان t در حالت j هستیم. $P_{ij}(u,t)$ را

احتمال گذار می‌نامیم و در مسائل از آن استفاده می‌کنیم.

همان طور که در جلوتر مشاهده خواهیم کرد تمامی احتمالات را در یک ماتریس بنام ماتریس گذار قرار می‌دهیم.

بدیهی است که ماتریس فوق مربعی بوده و تعداد سطرهای آن برابر تعداد Node های گراف است.

$$P(X(t)=j) = \sum_{\substack{i=0 \\ u\le t}}^{\infty} P\left(\overset{A}{X(t)=j} \wedge \overset{B}{X(u)=i}\right) \quad , \quad u \le t$$

یادآوری: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$

$$\Rightarrow P(X(t)=j) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\underbrace{P(X(t)=j \mid X(u)=i)}_{P_{ij}(u,t)}\cdot \underbrace{P(X(u)=i)}_{\pi_i(u)}\right]$$

$$\underbrace{P(X(t)=j)}_{\pi_j(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}(u,t)\cdot \pi_i(u)$$

که در حالت اولیه داریم: $\pi_i(0) \Leftarrow$ احتمال آنکه در زمان صفر در حالت i ام باشیم.

پس خواهیم داشت:

$$\underline{\Pi(t)} = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \ldots)$$

خط زیر آن نماد بردار است.

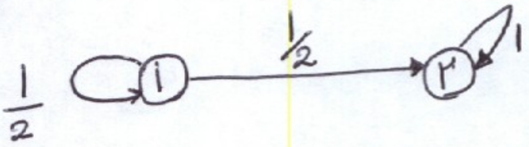
بردار احتمال حالات در زمان t

احتمال آنکه در زمان t، در حالت 0 باشیم.

احتمال آنکه در زمان t، در حالت 1 باشیم.

نکته: معمولاً در زمان صفر بصورت فرض ~~$\Pi(t)$~~ $\Pi(0)$ را داریم.

مثال ۳: زمان گسسته



$\Pi(0) = (0, 1)$

مجموع اعداد باید ۱ شود مثلاً ($\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$)

ماتریس احتمال گذار:

$$\underbrace{H(u,t)}_{\text{ماتریس احتمال گذار}} = \left[P_{ij}(u,t)\right]_{\infty\times\infty}$$

chapman kolmogorov

$$\underbrace{\Pi(t)}_{\text{بردار}} = \Pi(u)\, H(u,t), \quad u \le t$$

حالت خاص آن:

$$\underbrace{P(X(t)=j)}_{\text{عدد}} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}(u,t)\, \Pi_i(u)$$

حالت خاص معادله‌ی
chapman kolmogorov

حالت خاص یعنی بردار نیست و بصورت عدد می‌باشد.

نکته‌ی مهم: این اثبات مهم نیست و فقط رابطه‌ی Chapman اهمیت دارد ولی اثبات خوانده شود

ابتدا است.

فرآیند مارکوف در حالت گسسته:

زمان این بار گسسته است:

$$\Pi(t) = \Pi(u)\, H(u,t) \xrightarrow[t=n+1]{u=n} \Pi(n+1) = \begin{cases} \Pi(n)\, \underbrace{H(n, n+1)}_{Q(n)} \\ Q(n) = \left[q_{ij}(n)\right]_{\infty\times\infty} \end{cases}$$

ماتریس احتمال گذار تک مرحله‌ای ← $Q(n)$

طبق تعریف $H(u,t)$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} H(u,t) = \left[P_{ij}(u,t)\right]_{\infty \times \infty} & (1) \\ \\ Q(n) = \left[q_{ij}(n)\right]_{\infty \times \infty} & (2) \end{cases}$$

از طرفی داریم :

اگر $\begin{cases} u=n \\ t=n+1 \end{cases}$ باشد در آن صورت $H(u,t) = Q(n)$ و بنابراین خواهیم داشت :

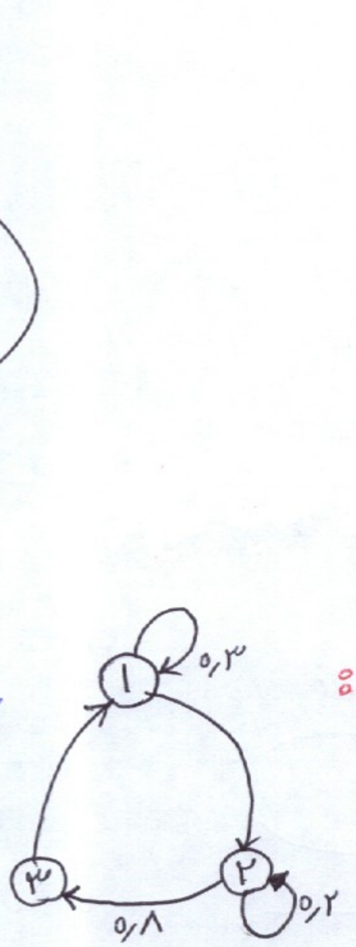
$$H(u,t)\Big|_{\begin{cases} u=n \\ t=n+1 \end{cases}} = Q(n) \Rightarrow \left[P_{ij}(u,t)\right]_{\infty \times \infty} = \left[q_{ij}(n)\right]_{\infty \times \infty}$$

با شرط $\begin{cases} u=n \\ t=n+1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow P_{ij}(n, n+1) = q_{ij}(n)$$

پس خواهیم داشت : $\Rightarrow$ $\boxed{\pi(n+1) = \pi(n)\, Q(n)}$

مثال :



اگر در هر زمانی در حالت ۲ قرار بگیریم ، با چه احتمالی به حالت ۳ می رویم ؟

جواب : ۰٫۸ . چون خروجی اش باید ۱ شود. (۱−۰٫۲=۰٫۸)

فرآیند مارکوف همگن :

در بسیاری از موارد $Q(n)$ ، به n بستگی ندارد یعنی در هر زمان که در حالت i باشیم ، در زمان بعد با احتمال ثابت به حالت j می‌رویم . به چنین فرآیندهایی ، فرآیند مارکوف همگان می‌گوییم .

به بیان دیگر :

در بسیاری از موارد اگر در زمان t ، در حالت i باشیم ، در زمان بعدی با احتمال ثابت به حالت j می‌رویم . در واقع مستقل از زمان . به چنین فرآیندهایی ، فرآیند مارکوف همگن می‌گوییم و داریم :

$$Q(n) = Q$$

بنابراین خواهیم داشت :

در مارکوف همگن

$$\Pi(n+1) = \Pi(n)\,Q(n) \Rightarrow \Pi(n+1) = \Pi(n)\,Q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=0} \Pi(1) = \Pi(0)\,Q \\ \xrightarrow{n=1} \Pi(2) = \underbrace{\Pi(1)}_{\Pi(0)Q}\,Q = \Pi(0)\,Q^{2} \\ \vdots \\ \Pi(n) = \Pi(0)\,Q^{n} \end{cases}$$

عنصر $\Pi(n)$

$$(\Pi_0(n), \Pi_1(n), \Pi_2(n), \ldots)$$

بهتر بود اینطور نوشته شود :

یعنی اگر بخواهیم بدست آوریم ، n را نگذاریم و بگوییم مثلاً
$$\begin{cases} \Pi_1(n) = 2^{-n} \\ \Pi_0(n) = \ldots \\ \vdots \end{cases}$$

با چه احتمالی در حالت ۱ هستیم و دیگر لازم نیست ماتریس را n بار به توان برسانیم.

در فرمول $\Pi(n) = \Pi(0)\, Q^n$ چون به فرمول بسته نرسیدیم، برای n های کوچک، ماتریس را به توان می‌رسانیم ولی برای زمان‌های بزرگ یا n های بزرگ، اگر بخواهیم برحسب n بدست آوریم، راه حل ما، تبدیل Z است. یعنی اول به فضای پیوسته و بعد با جدول معروف تبدیل Z به زمان گسسته می‌رویم.

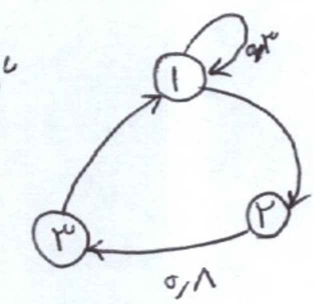
مثال:

بردار حالات در زمان صفر

با داشتن $\Pi(0) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ ، خواهیم داشت:

$\Pi_1(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow$ با احتمال $\frac{1}{3}$ در گره ۱

$\Pi_2(0) = \frac{2}{3}$



*(فرآیند مارکوف) در زمان پایداری (زمان ∞):

* از این به بعد $\Pi(\infty)$ را با Π نشان می‌دهیم:

$$\underline{\Pi(n+1)} = \underline{\Pi(n)}.\underline{Q} \xrightarrow{t=\infty} \Pi(\infty) = \Pi(\infty).Q$$

بردار

$\underline{\Pi} = \Pi . \underline{Q}$

بردار — عدد

n معادله و n مجهول

که یکی از معادلات به دیگران وابسته است.

ولی یکی از معادلات به دیگران وابسته بود پس معادله‌ی روبرو را جایگزین می‌کنیم.

$$\Pi . e = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1$$

$e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$

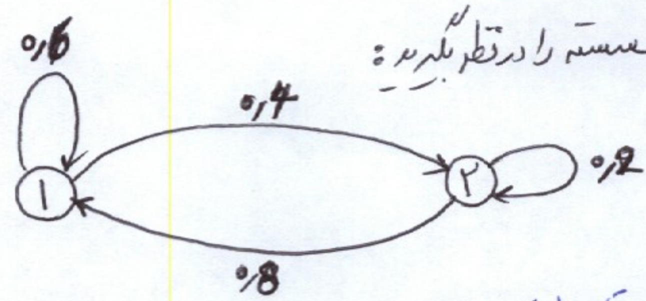
یا:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = \Pi . e = 1$$

ماتریس ستونی که تعداد یک‌های آن به node ها بستگی دارد

پس $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots = 1$. پس در زمان پایداری این معادلات را داریم.

مهم **مثال:** فرآیند مارکوف زیر با زمان گسسته را در نظر بگیرید:



با فرض اینکه زمان شروع در حالت 1 قرار داریم:

فرض: $\underline{\pi(0)} = (1, 0)$

حکم: الف) $\underline{\pi(3)} = ?$

ب) $\underline{\pi(\infty)} = ?$

یافتن Q:

$$\begin{array}{ccc} & \text{ستون ۱} & \text{ستون ۲} \\ \text{سطر ۱} & & \\ \text{سطر ۲} & & \end{array} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Q_{21}: ۲ به ۱

روش اول: حل از طریق chapman:

$$\underline{\pi(n+1)} = \underline{\pi(n)} . \underline{Q}$$

طبق فرض

$$\Rightarrow \quad \underline{\pi(1)} = \underline{\pi(0)}\, \underline{Q} = (1, 0) * \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = (0.6, 0.4)$$

$$\underline{\pi(2)} = \underline{\pi(1)}\, \underline{Q} = (0.6, 0.4) * \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = (0.68, 0.32)$$

$$\underline{\pi(3)} = \underline{\pi(2)}\, \underline{Q} = (0.68, 0.32) * \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = (0.664, 0.336)$$

مثال ضرب ماتریس $\pi(1)$:

$$\underline{\pi(1)} = \underline{\pi(0)}\, \underline{Q} = [1, 0] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\text{I}}{*} & \overset{\text{II}}{*} \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

(1×2) — (2×2)

سطر — ستون

باید مثل هم باشند تا ضرب صورت بگیرد.

ابعاد ماتریس حاصل (1×2)

یافتن (I) :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \;,\; 0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}0.6 \\ 0.8\end{matrix}} & \begin{matrix}0.4 \\ 0.2\end{matrix} \end{bmatrix}$$

سطر اول

ستون اول

برای یافتن درایه سطر اول و ستون اول :

(I) : $1\times 0.6 + 0\times 0.8 = \boxed{0.6}$

یافتن (II) :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \;,\; 0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix}0.6 \\ 0.8\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0.4 \\ 0.2\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

(II) : $1\times 0.4 + 0\times 0.2 = \boxed{0.4}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \;,\; 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \;,\; 0.4 \end{bmatrix} = (0.6 \;,\; 0.4)$$

حل ب : حالت پایداری :

$$\Pi(\infty) = \overbrace{\Pi(\infty)}^{\Pi} \cdot Q \xRightarrow{\text{طبق توافق}} \underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \underline{Q}$$

$$\Rightarrow \underset{1\times 2}{(\pi_1 , \pi_2)} = \underset{1\times 2}{\boxed{(\pi_1 , \pi_2)}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}} =$$

ماتریس ۱×۲ به ما می دهد.

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0.6\pi_1 + 0.8\pi_2 \\ \pi_2 = 0.4\pi_1 + 0.2\pi_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ حال به دستگاه ۲ معادله و ۲ مجهول رسیدیم. (هر دو معادله مثل هم هستند)

بنابراین باید از معادله کمکی استفاده کنیم.

معادله دوم را به دلخواه حذف می‌کنیم (یک معادله وابسته بوده و حذف می‌شود) و داریم:

معادله کلی:

$$\Pi \cdot e = 1 \Rightarrow \overbrace{(\Pi_1, \Pi_2)}^{\Pi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \boxed{\Pi_1 + \Pi_2 = 1}$$

$$\begin{cases} 1 \times \Pi_1 = 0.6\,\Pi_1 + 0.8\,\Pi_2 \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +0.4\,\Pi_1 = 0.8\,\Pi_2 \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0.4\,\Pi_1 + 0.8\,\Pi_2 = 0 \\ 0.4 \quad \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-0.4\,\Pi_1} + 0.8\,\Pi_2 = 0 \\ \cancel{+0.4\,\Pi_1} + 0.4\,\Pi_2 = 0.4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1.2\,\Pi_2 = 0.4 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{0.4}{1.2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\Pi_2 = \frac{1}{3}}$$

از طرفی: $\Pi_1 + \Pi_2 = 1 \Rightarrow \Pi_1 + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{\Pi_1 = \frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow \underline{\Pi}(\infty) = \underline{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

حل الف از روش شهودی:
و ب

$\Pi(0) = (1, 0)$

با احتمال ۰٫۶ از گره ۱ به ۱ می‌رویم.

$\Pi(1) = (0.6, 0.4)$

با احتمال ۰٫۴ از گره ۱ به گره ۲ می‌رویم.

$\Pi(2) = (0.68, 0.32)$

برای نود ۱ — برای نود ۲

$0.6 \times 0.6 \leftarrow 0.36$

$0.8 \times 0.4 \leftarrow +\ 0.32$

0.68

0.08 ← با احتمال ۰٫۴ در نود ۲ هستیم و با احتمال ۰٫۲ در نود ۲ می‌مانیم

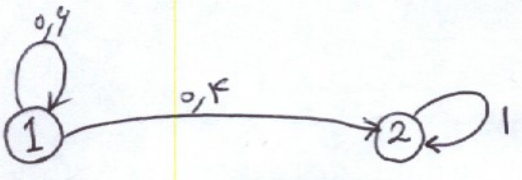
$+\ 0.24$ ← با احتمال ۰٫۶ در نود ۱ هستیم و با احتمال ۰٫۴ در نود ۲ می‌رویم

0.32

با احتمال ۰٫۶ در نود ۱ هستیم و با احتمال ۰٫۶ در نود ۱ می‌مانیم.

با احتمال ۰٫۴ به نود ۲ می‌رویم و با احتمال ۰٫۸ به نود ۱ برمی‌گردیم.

مثال : فرآیند مارکوف با زمان گسسته ی زیر را در نظر بگیرید :



مطلوبست :

فرض : $\pi(0) = (1, 0)$

حکم : $\pi(\infty) = ?$ (الف

$\pi(n) = ?$ (ب

حل الف : از روش پایداری chapman (چون $\pi(\infty)$ را می‌خواهیم) :

$$\underline{\pi(\infty)} = \underline{\pi(\infty)}\,\underline{Q} \Rightarrow \underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot\underline{Q}$$

$$\Rightarrow (\pi_1, \pi_2)\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (\pi_1, \pi_2)$$

بدست آوردن Q :

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس ۲×۲ است چون ۲ گره داریم.

$$\Rightarrow 0.6\pi_1 + 0\times\pi_2 = \pi_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 = 0.6\pi_1} \quad (1)$$

$$\boxed{0.4\pi_1 + 1\times\pi_2 = \pi_2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0.6\pi_1 \\ \pi_2 = 0.4\pi_1 + \pi_2 \end{cases} \Rightarrow$$

معادله اول را به دلخواه حذف می‌کنیم

(دلیل اینکه $\cancel{\pi_1} = 0.6\cancel{\pi_1} \Leftarrow 1 = 0.6$ که نتیجه‌ی نادرستی است)

$$\sum_{i=1}^{2}\pi_i = 1 \Rightarrow \pi_1 + \pi_2 = 1$$

و یا

$$\underline{\pi}\cdot\underline{e} = 1 \Rightarrow (\pi_1, \pi_2)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_1 + \pi_2 = 1} \quad (3)$$

حال از معادله‌های (۲) و (۳) خواهیم داشت :

$$(2),(3) \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\pi_2} = 0.4\pi_1 + \cancel{\pi_2} \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.4\pi_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = 0} \\ \underset{0}{\pi_1} + \pi_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = 1} \end{cases}$$

(۶۵)

$$\Rightarrow \underline{\Pi}(\infty) = \underline{\Pi} = (\Pi_1 , \Pi_2) = (0 , 1) = [0 , 1]$$

شهودی :

حل الف از روش شهودی :

$$\begin{cases} \underline{\Pi} = \underline{\Pi}\,\underline{Q} \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\Pi_1 , \Pi_2) \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \Pi(\infty) = (0 , 1)$$

بالاخره بابک احتمالاً می رود و بر نمی گردد.

یا $\sum_{i=1}^{2} \Pi_i = 1 \Rightarrow \Pi_1 + \Pi_2 = 1$

حل قسمت ب) : با حالت شهودی جواب می دهد پس نیاز به تبدیل Z نیست.

شهودی :

$\Pi_1(1) = 0.6$ در زمان ۱ در نود ۱ — $\Pi_2(1) = 1 - 0.6$ در زمان ۱ در نود ۲

$\Pi_1(2) = (0.6)^2$ در زمان ۲ در نود ۱

$\vdots$

$\Pi_1(n) = (0.6)^n$ در زمان n در نود ۱ — $\Pi_2(n) = 1 - (0.6)^n$ در زمان n در نود ۲

چون جواب باید عدد ۱ شود، پس منهای ۱ کردیم.

$$\Pi_2(n) = 1 - (0.6)^n \Rightarrow \Pi(n) = \left((0.6)^n , (1 - (0.6)^n) \right)$$

چون باید جواب ۱ شود. مثلاً $(0 , 1)$ یا $(0.6 , 0.4)$

$0 + 1 = 1$

$0.6 + 0.4 = 1$

تبدیل Z : (Z-Transform) :

فرض کنیم تابعی بنام $f(n)$ از فضای گسسته داریم، آنگاه تبدیل Z این تابع مذکور برابر است با :

$$f(z) = Z(f(n)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) . z^{k} \qquad (1)$$

تابعی از فضای پیوسته

تابعی از فضای گسسته

تابعی از یک مقدار گسسته را می توان به تابعی از مقادیر پیوسته تبدیل نمود.

مطلوبست : $\Pi_i(n)$

$$\underline{\Pi} = (\Pi_1(n), \Pi_2(n), \ldots)$$

تبدیل Z تابع $\Pi_i(n)$ بصورت زیر بدست می آید :

تبدیل Z
$$\boxed{\Phi_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\Pi_i(k)}^{f_k \; (1)} * \overset{z^k \; (1)}{z^{k}}}$$

ابتدا تبدیل Z را بدست آورده و سپس عکس آن را بدست می آوریم.

می دانیم : $\underline{\Phi}(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots)$

از طرفی طبق رابطه ی فرآیند مارکوف همچنین داریم :

$$\underline{\Pi}(n+1) = \underline{\Pi}(n) . \underline{Q}$$

۶۴

$$\underline{\Pi(n+1)} = \underline{\Pi(n)}\ \underline{Q}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} * z^{n+1}} \quad \underline{\Pi}(n+1)\cdot z^{n+1} = \underline{\Pi}(n)\ \underline{Q}\ z^{n+1}$$

$$z^{n+1} \rightarrow z^{n}\cdot z^{1}$$

$$\xrightarrow[\text{به طرفین}]{\sum_{n=0}^{\infty}\ \text{آوردن}} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi(n+1)\,z^{n+1}}_{1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi(n)\,z^{n+1}\,Q}_{2}$$

برای طرف دوم تساوی یعنی (۲) خواهیم داشت:

$$(2) = \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\underline{\Pi(n)\,z^{n}}}^{\Phi(z)}\cdot zQ = \Phi(z)\cdot zQ$$

از طرفی طبق فرمول ص ۱۵ داریم:

$$\Phi_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\Pi_i(k)\cdot z^{k}$$

و با حذف و در نظر نگرفتن اندیس i خواهیم داشت:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\Pi(k)\cdot z^{k} \Rightarrow \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Pi(n)\cdot z^{n}$$

$$(1)=(2) \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi(n+1)\,z^{n+1}}_{1} = \underbrace{\Phi(z)\cdot zQ}_{\text{طبق خلاصه‌ی } (2)} \rightarrow \text{طبق خلاصه‌ی رابطه‌ی } (2)$$

خلاصه‌ی رابطه‌ی (۲) را نوشتیم. حال برای یافتن $\Phi(z)$ باید رابطه‌ی (۱) را نیز خلاصه کنیم.

۶۳

① رابطه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n+1)\, z^{n+1} = \begin{cases} n=0 \rightarrow \pi(1)\, z^1 \\ n=1 \rightarrow \pi(2)\, z^2 \\ \vdots \end{cases}$$

از طرفی داریم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n)\, z^{n} = \Phi(z)$$

$$= \begin{cases} n=0 \rightarrow \pi(0)\, z^0 \\ n=1 \rightarrow \pi(1)\, z^1 \\ n=2 \rightarrow \pi(2)\, z^2 \\ \vdots \end{cases}$$

اختلاف این دو رابطه

مثل هم هستند

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n+1)\, z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n)\, z^{n} - \underbrace{\pi(0)\, z^{\overset{1}{0}}}_{\pi(0)}$$

با مقایسه‌ی روابط بالا مشخص می‌گردد که $\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n+1) z^{n+1}$ به اندازه‌ی $\pi(0)$ از $\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) z^{n}$ کمتر است. پس برای اینکه رابطه‌ای برحسب $\Phi(z)$ برای $\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n+1) z^{n+1}$ پیدا شود باید به آن مقدار $\pi(0)$ را اضافه و کم کنیم یعنی :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n+1)\, z^{n+1} + \pi(0)}_{\Phi(z)} - \pi(0) = \underbrace{\Phi(z) \cdot z Q}$$

ضمیمه‌ی رابطه‌ی ① $\Phi(z)$

ضمیمه‌ی رابطه‌ی ②

$$\Rightarrow \Phi(z) - \pi(0) = \Phi(z) \cdot z Q$$

جهت فاکتورگیری باید $\Phi(Z)$ را به یک طرف تساوی ببریم.

$$\Phi(Z) - \Phi(Z)\,Z\,Q = \Pi(0)$$

$$\Rightarrow \Phi(Z)\,(I - Z\,Q) = \Pi(0)$$

فاکتورگیری

(۴۴)

چون $Q(Z)$ بردار است پس زمانی که فاکتور می‌گیریم جواب 1 نمی‌شود و می‌شود ماتریس یک.

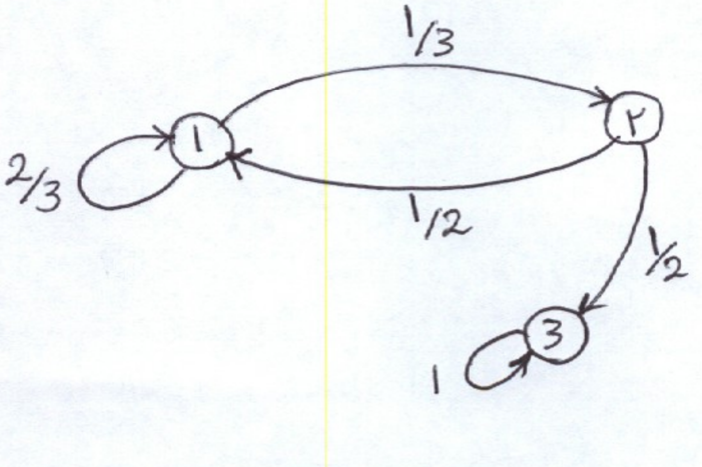
I : ماتریس همانی است یعنی ماتریسی که قطر اصلی آن 1 است و بقیه درایه‌ها صفر هستند.

$$\Rightarrow \Phi(Z) = \Pi(0)\,(I - QZ)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی 1

مثال: فرآیند مارکوف با ۳ حالت زیر را در نظر بگیرید با فرض آنکه در زمان شروع در نود 1 باشیم. $\Pi(\infty)$ و $\Pi(n)$ را بدست آورید.



فرض: $\Pi(0) = (1\,,0\,,0)$

حکم: الف: $\Pi(\infty) = ?$

ب: $\Pi(n) = ?$

حل الف از راه شهودی:

شهودی: $\Pi(\infty) = (0\,,0\,,1)$

یعنی Q:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

شهودی:

(۴۵)

$$\begin{cases} \underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \underline{Q} \Rightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1) \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + 0\times\pi_3 = \boxed{\frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2} \quad (1) \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + 0 + 0 = \boxed{\frac{1}{3}\pi_1} \quad (2) \\ \pi_3 = 0 + \frac{1}{2}\pi_2 + 1\times\pi_3 = \boxed{\frac{1}{2}\pi_2 + \pi_3} \quad (3) \end{cases}$$

$$\boxed{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1} \quad (4)$$

از معادله‌های ① و ② و ③ حتماً یکی باید حذف شود و یا جواب غیر منطقی به ما می‌دهد که آن معادله را نمی‌توانیم در نظر بگیریم.

با فرض استفاده از معادله‌های ② و ③ و ④ خواهیم داشت:

$$(2) \rightarrow \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = 3\pi_2 \longrightarrow \pi_1 = 3\times 0 = 0$$

$$(3) \rightarrow \cancel{\pi_3} = \frac{1}{2}\pi_2 + \cancel{\pi_3} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = 0} \qquad \Rightarrow \boxed{\pi_1 = 0}$$

$$(4) \rightarrow \underset{0}{\pi_1} + \underset{0}{\pi_2} + \pi_3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_3 = 1}$$

$$\Rightarrow \underline{\Pi}(\infty) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0, 0, 1)$$

(46)

حل الف از روش Chapman :

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}\cdot\underline{Q} \Rightarrow (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)\cdot\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1)\ \Pi_1 = \frac{2}{3}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2 \\ (2)\ \Pi_2 = \frac{1}{3}\Pi_1 \\ (3)\ \Pi_3 = \frac{1}{2}\Pi_2 + \cancel{\Pi_3} \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف معادله‌ی (3)}} \Pi\cdot e = 1 \Rightarrow \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1$$

(4) با حذف معادله‌ی

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \\ -\frac{1}{3}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\Pi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Pi_2 = 0},\ \boxed{\Pi_1 = 0}$$

Π_1 از معادله‌ی (1)

Π_3 از معادله‌ی (3)

$$\Rightarrow 0 + 0 + \Pi_3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_3 = 1}$$

$$\Rightarrow \underline{\Pi}(\infty) = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = (0, 0, 1)$$

«بنام خدا»

جلسه ششم مدلسازی
۱۳۹۲/۸/۱۶ دکتر هارون آبادی مفرح

حل ب: از روش شهودی نمی‌شود و باید از تحلیل Z بدست آوریم:

قطر اصلی

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ماتریس‌های I قطر اصلی ۱ است و بقیه عناصر (درایه‌های آن) صفر هستند)

و $\Phi(Z) = \Pi(0)\,(I - QZ)^{-1}$

$(\varphi(Z))$

$$= (1, 0, 0)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot Z\right)^{-1}$$

طبق فرض

توضیح:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot Z = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}Z & \frac{1}{3}Z & 0 \\ \frac{1}{2}Z & 0 & \frac{1}{2}Z \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} = QZ$$

۲۷

$$\Rightarrow \Phi(z) = (1,0,0)\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{2}{3}z & \frac{1}{3}z & 0\\ \frac{1}{2}z & 0 & \frac{1}{2}z\\ 0&0&z\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\Phi(z) = [1,0,0]_{1\times 3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}1-\frac{2}{3}z & -\frac{1}{3}z & 0\\ -\frac{1}{2}z & 1 & -\frac{1}{2}z\\ 0 & 0 & 1-z\end{bmatrix}^{-1}_{3\times 3}}_{\text{ماتریس } A}$$

$$= [A_{11}^{-1}+0+0,\ A_{12}^{-1}+0+0,\ A_{13}^{-1}]$$

$$= [A_{11}^{-1},\ A_{12}^{-1},\ A_{13}^{-1}]$$

$\Phi_1(z)$ $\Phi_2(z)$ $\Phi_3(z)$

ماتریس A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix}1-\frac{2}{3}z & -\frac{1}{3}z & 0\\ -\frac{1}{2}z & 1 & -\frac{1}{2}z\\ 0 & 0 & 1-z\end{bmatrix}$$

برای یافتن A^{-1} : (یا : $((I-QZ)^{-1}$)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^T$$

برای یافتن تک تک درایه های ماتریس A^{-1} از روش زیر استفاده می کنیم:

$$(A^{-1})_{ik} = (\mathrm{Det}(A))^{-1} \cdot (-1)^{i+k}\ B_{ki}$$

$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{\det(A)}$

دترمینان ماتریس A

همواره عدد +1 یا -1 است.

با حذف سطر و ستون مربوطه با این ماتریس به راحتی می رسیم.

* $\det(A)$ را از روش ساروس بدست می آوریم.

روش ساروس:

۲۸

$$\left[\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{array}$$

ضرب عناصر قطر فرعی و جمع آنها (فقط ۳ تایی ها)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{array}$$

ضرب عناصر قطر اصلی و جمع آنها (فقط ۳ تایی ها)

$$= (a_1 a_5 a_9 + a_2 a_6 a_7 + a_3 a_4 a_8) - (a_3 a_5 a_7 + a_1 a_6 a_8 + a_2 a_4 a_9)$$

* توجه: اگر مقدار دترمینان صفر شود، ماتریس مورد نظر معکوس پذیر نخواهد بود.

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1-\frac{2}{3}z & -\frac{1}{3}z & 0 \\ -\frac{1}{2}z & 1 & \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1-z \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1-\frac{2}{3}z & -\frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{2}z & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

دترمینان A

$$= \left[(1-\tfrac{2}{3}z)(1)(1-z)+0+0\right] - \left[0+0+\underbrace{\overbrace{(-\tfrac{1}{2}z)(-\tfrac{1}{3}z)}^{\frac{1}{6}z^2}(1-z)}_{\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}z^3}\right]$$

ضرب و جمع عناصر قطر اصلی ۳ تایی

ضرب و جمع عناصر قطر فرعی ۳ تایی

$$= 1 - z - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = \frac{6-6z-4z+4z^2-z^2+z^3}{6}$$

۴۹

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{z^3+3z^2-10z+6}{6}$$

نکته * چون مخالف صفر است ← ماتریس معکوس دارد

$$\Rightarrow \frac{1}{\det(A)} = \frac{6}{6-10z+3z^2+z^3}$$

نکته * فرم نمایش در z بدین صورت است که توانهای بزرگتر z سمت راست هستند.

همانطور که گفتیم برای یافتن تک تک درایه های A^{-1} از روش زیر استفاده می کنیم:

$$(A^{-1})_{ik} = (\mathrm{Det}(A))^{-1} \cdot \underbrace{(-1)^{i+k} B_{ki}}_{\text{co factor}}$$

بنابراین برای محاسبه‌ی $(A^{-1})_{11}$ خواهیم داشت:

$$(A^{-1})_{11} = (\mathrm{Det}(A))^{-1} \cdot (-1)^{1+1} B_{11}$$

سطر ۱ — ستون ۱

برای Φ_1 حساب می کنیم و $\Phi_{2,3}$ مشابه است.

حذف سطر ۱ — حذف ستون ۱ — برای محاسبه‌ی B_{11}

$$A = \begin{bmatrix} 1-\frac{2}{4}z & -\frac{1}{3}z & 0 \\ -\frac{1}{2}z & 1 & -\frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1-z \end{bmatrix} \Rightarrow B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}z \\ 0 & 1-z \end{vmatrix}$$

ماتریس — دترمینان

$$\Rightarrow B_{11} = 1\times(1-z) - 0\times\left(-\frac{1}{2}z\right) = \boxed{1-z}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})_{11} = \frac{6}{6-10z+3z^2+z^3} \cdot \underbrace{(1-z)}_{B_{11}}$$

۷۵

$$\Rightarrow (A^{-1})_{11} = \frac{6(1-z)}{6-10z+3z^2+z^3}$$

* دقت کنید در $z=1$ ، صورت و مخرج صفر می‌شوند

⇐ بنابراین در مخرج عامل $z=1$ شدن یعنی $(1-z)$ وجود دارد:

یک روش یافتن این موضوع، تقسیم آنها بر یکدیگر است:

استاندارد سازی $\Rightarrow$ (از توان بیشتر به کمتر)

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{z^3}+3z^2-10z+6 & -z+1 \\
\hline
-(\cancel{z^3}-z^2) & -z^2-4z+6 \\
\quad 4z^2-10z & \\
\quad -(\cancel{4z^2}-4z) & \\
\qquad -6z+6 & \\
\qquad -(\cancel{-6z}+6) & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow A^{-1}_{11} = \frac{6\cancel{(1-z)}}{\cancel{(1-z)}(-z^2-4z+6)} = \frac{6}{6-4z-z^2}$$

حال باید از روش تجزیه کسرهای جزئی مسئله را حل کنیم. بنابراین در مخرج کسر، از توانهای بالاتر

به پائین مثل روشهای قدیم استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow A^{-1}_{11} = \frac{6}{-(z^2+4z-6)} = \frac{-6}{z^2+4z-6}$$

حل درجه ۲ با استفاده از روش Δ

۷۱

$$\Rightarrow A_{11}^{-1} = \frac{A}{(Z - \underbrace{\text{ریشه اول}}_{Z_1})} + \frac{B}{(Z - \underbrace{\text{ریشه دوم}}_{Z_2})}$$

* درصورتی که $\Delta > 0$ باشد، ۲ ریشه حقیقی خواهد داشت و داریم:

$$\Rightarrow \underbrace{1}_{a}Z^2 + \underbrace{4}_{b}Z \underbrace{-6}_{c} = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -6 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-6) = 16 + 24 = 40$$

$$Z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-\cancel{4}^{\,2} \pm \cancel{2}^{\,1}\sqrt{10}}{\cancel{2}_{\,1}}$$

$$\Rightarrow Z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{Z_1 = -2 + \sqrt{10}} \\ \boxed{Z_2 = -2 - \sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{11}^{-1} = \phi_1(Z) = \frac{-6}{Z^2 + 4Z - 6} = \frac{A}{Z - \underbrace{Z_1}_{-2+\sqrt{10}}} + \frac{B}{Z - \underbrace{Z_2}_{-2-\sqrt{10}}} \Rightarrow$$

$$\frac{-6}{\cancel{Z^2 + 4Z - 6}} = \frac{A(Z - Z_2) + B(Z - Z_1)}{\cancel{(Z - Z_1)(Z - Z_2)}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A}_{\text{عدد}}(Z - \underbrace{Z_2}_{\text{عدد}}) + \underbrace{B}_{\text{عدد}}(Z - \underbrace{Z_1}_{\text{عدد}}) = -6 + 0.Z$$

$$\Rightarrow AZ - AZ_2 + BZ - BZ_1 = -6 + 0.Z$$

$$\Rightarrow z(A+B) - Az_2 - Bz_1 = -6 + 0.z$$

$$\Rightarrow \text{۲ معادله و ۲ مجهول}: \begin{cases} A+B=0 \quad (1) \longrightarrow A=-B \ \text{یا}\ B=-A \\ -Az_2 - Bz_1 = -6 \quad (2) \end{cases}$$

با قرار دادن $A=-B$ در معادله (۲) خواهیم داشت :

$$\Rightarrow -(-B)z_2 - Bz_1 = -6 \Rightarrow Bz_2 - Bz_1 = -6$$

$$\Rightarrow B(z_2 - z_1) = -6$$

از طرفی :

$$\begin{cases} z_1 = -2+\sqrt{10} \\ z_2 = -2-\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow z_2 - z_1 = \cancel{-2} - \sqrt{10} - (\cancel{-2} + \sqrt{10})$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 - z_1 = -2\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow B(z_2-z_1) = B(-2\sqrt{10}) = -6 \Rightarrow B = \frac{\cancel{+6}^{\,3}}{\cancel{+2}\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad , \quad A = -B = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \Phi_1(z) = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} = \frac{-\frac{3}{\sqrt{10}}}{z-z_1} + \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{z-z_2}$$

$$\Rightarrow \Phi_1(z) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z-z_1}\right)$$

فاکتورگیری از $\frac{\sqrt{3}}{10}$

ولی به فرمی می‌نویسیم که توانهای بالاتر z ، سمت راست باشند .

$$\Rightarrow \Phi_1(z) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{-1}{z_2 - z} + \frac{1}{z_1 - z}\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{\underset{\downarrow\, -2+\sqrt{10}}{z_1} - z} - \frac{1}{\underset{\downarrow\, -2-\sqrt{10}}{z_2} - z}\right) \Rightarrow$$

جهت منطبق کردن با جدول
صفحه ۵۸۸ کتاب

مطابق جدول داریم :

$$\frac{1}{a^{n+1}} \Longleftrightarrow \frac{1}{a - z}$$

مشابهند

پس خواهیم داشت $\Longrightarrow$: $\dfrac{1}{z_1 - z} \equiv$ معادل $\dfrac{1}{z_1^{\,n+1}}$

$z_1 \equiv a$

بنابراین :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{z_1 - z} &\Longrightarrow \frac{1}{z_1^{\,n+1}} \\ \frac{1}{z_2 - z} &\Longrightarrow \frac{1}{z_2^{\,n+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_1(z) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z}\right) \underset{\text{معادل}}{\equiv} \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{z_1^{\,n+1}} - \frac{1}{z_2^{\,n+1}}\right)$$

$$\boxed{\pi_1(n) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(z_1^{-n-1} - z_2^{-n-1}\right)} \Longleftarrow \Phi_1(z) \Longleftarrow$$

را باید بدست آوریم. Φ_2 و Φ_3 $\Rightarrow$ $\Phi_3 = 1 - (\Phi_1 + \Phi_2)$

* فرآیند مارکوف زمان پیوسته (حالات نیز پیوسته است) :

$$\Pi(t) = \Pi(u)\, H(u,t) \qquad u \leq t \qquad \text{chapman}$$

در زمان گسسته : $\begin{cases} u = n \\ t = n+1 \end{cases}$

در زمان پیوسته : $\begin{cases} u = t-\Delta t \\ t = t \end{cases}$

در زمان پیوسته خواهیم داشت $\Longrightarrow \Pi(t) = \Pi(t-\Delta t)\, H(t-\Delta t, t)$

lim گیری از طرفین $\Longrightarrow \lim \Pi(t) = \lim \Pi(t-\Delta t)\, H(t-\Delta t, t)$

$-\Pi(t-\Delta t)$ طرفین و در انتها تقسیم بر Δt $\Longrightarrow$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pi(t) - \Pi(t-\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pi(t-\Delta t)\, H(t-\Delta t, t) - \Pi(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

ماتریس همانی

$$\Rightarrow \frac{\partial \Pi(t)}{\partial t} = \lim \frac{\Pi(t-\Delta t)\left[H(t-\Delta t, t) - I\right]}{\Delta t}$$

$Q(t)$ (ماتریس نرخ گذار)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi(t)}{\partial t} = \Pi(t)\, Q(t)}$$

ماتریس نرخ گذار $\quad Q(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(t-\Delta t, t) - I}{\Delta t}$, $\quad \underline{Q(t)} = \left[q_{ij}(t) \right]_{\infty \times \infty}$

$$\Rightarrow q_{ij}: \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_{ij}(t-\Delta t, t) - 1}{\Delta t} & i = j \quad (1) \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_{ij}(t-\Delta t, t) - 0}{\Delta t} & i \neq j \quad (2) \end{cases}$$

نرخ گذار

نکته: همانگونه که قبلاً ملاحظه نمودیم، در فرآیند مارکوف با زمان گسسته، دارای ماتریس احتمال گذار بودیم که مجموعه عناصر هر سطر آن برابر 1 بود. در فرآیند مارکوف با زمان پیوسته، اولاً به جای احتمال از واژه‌ی نرخ استفاده نموده، ثانیاً همانگونه که ملاحظه می‌باشد، مجموع عناصر هر سطر، مقدار صفر را ایجاد می‌نماید به عبارتی قطر اصلی این ماتریس، همواره برابر با منفی مجموع سایر عناصر سطر خواهد بود. این موضوع در روابط زیر ملاحظه گردیده و نهایتاً مثال آن را مشاهده خواهیم نمود.

$$q_{ii} = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$$ ← قطر اصلی ماتریس نرخ گذار

اثبات:

$$\sum_{i \neq j} q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_{ij}(t-\Delta t, t)}{\Delta t}$$

طرفین تساوی را با $q_{ii}(t)$ جمع می‌کنیم:

$$q_{ii}(t) + \sum_{i \neq j} q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_{ij}(t-\Delta t, t)}{\Delta t} + q_{ii}(t)$$

امّا از رابطه (1) $(i=j)$ خواهیم داشت:

$$q_{ii}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ii}(t-\Delta t, t) - 1}{\Delta t}$$

$q_{jj}(t)$

$$\Rightarrow q_{ii}(t) + \sum_{i\neq j} q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\cancel{1}-P_{ij}(t-\Delta t, t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \overbrace{\frac{P_{ii}(t-\Delta t, t)-\cancel{1}}{\Delta t}}^{q_{ii}(t)}$$

P_{ii}

$$\Rightarrow q_{ii}(t) + \sum_{i\neq j} q_{ij}(t) = 0$$

$$\Rightarrow q_{ii}(t) = -\sum_{i\neq j} q_{ij}$$

نکته: در فرآیند مارکوف با زمان گسسته، مجموع عناصر در سطر، برابر ۱ می‌باشد و دارای ماتریس احتمال گذار می‌باشیم، لیکن در فرآیند مارکوف با زمان پیوسته، به جای ماتریس احتمال گذار که همان ماتریس نرخ گذار خواهیم بود و مجموع عناصر هر سطر، برابر صفر می‌باشد.

بطور کلی در فرآیند مارکوف حالت پیوسته، به معادله‌ی زیر می‌رسیم که $q(t)$ $(Q(t))$ و حالت اولیه را داریم و باید معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل نماییم:

$$\frac{\partial \pi(t)}{\partial t} = \pi(t)\, Q(t)$$

در حالت پایداری، زمان ∞ (بی‌نهایت) است و

مشتق ندارم

$$0 = \pi(t)\, Q(t) \Rightarrow 0 = \pi\, Q(t)$$

سیستم به حالت سکون یا پایداری می‌رسد. (حالت پایداری = حالت بی‌نهایت)

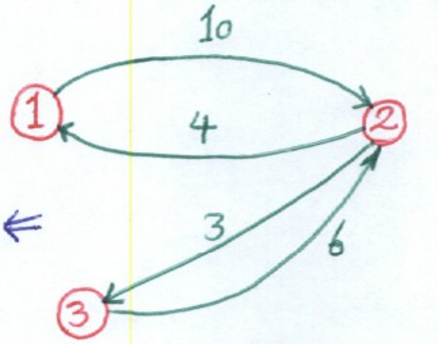
نکته: می‌دانیم در فرآیند مارکوف همگن، $\boxed{Q(t) = Q}$

لذا رابطه‌ی مقابل را جایگزین می‌نماییم:

$$\Pi \cdot e = 1 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1}$$

حالت پایداری، معادله‌ی مقابل را شاهد هستیم. n معادله و n مجهول داریم لیکن یکی از معادلات به دیگران وابسته است.

مثال: یک فرآیند مارکوف در زمان پیوسته، دارای ۳ حالت است. نرخ گذار این فرآیند توسط گراف زیر نمایش داده شده است. با فرض اینکه در زمان شروع سیستم، با احتمال ۱، در نود ۱ باشیم، مطلوبست محاسبه‌ی احتمالات حالات در حالت پایداری.



هر سطر باید برابر صفر شود ⇐

$$\pi(0) = \overset{\pi_1}{(1},\ \overset{\pi_2}{0},\ \overset{\pi_3}{0})$$

$$\pi(\infty) = ?$$ در حالت پایداری

حل: (راه حل اول)

$\pi Q = \pi$ ← زمان گسسته

$\pi Q = 0$ ← زمان پیوسته

زمان n ← تبدیل لاپلاس

$$\sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$$

↓

$$(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1)$$

1 0 0

فقط در نقاط مشخص شده (سلول‌ها) اجازه داریم منفی را وارد کنیم.

$$0 = \pi Q \Rightarrow 0 = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 4 & -7 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

↓ (در زمان ∞، زمان را کنار می‌گذاریم و برابر صفر است)

← چون هر سطر باید برابر صفر شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -10\pi_1 + 4\pi_2 & ✓ \quad ① \\ 0 = 10\pi_1 + 6\pi_3 - 7\pi_2 & ✓ \quad ② \\ 0 = 3\pi_2 - 6\pi_3 & ✗ \quad ③ \end{cases}$$

حال یکی از معادلات را به دلخواه حذف کرده (معادله وابسته را) و معادله زیر را جایگزین می‌نماییم:

$$\underline{\pi} \cdot e = 1 \Rightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1}$$ به جای معادله ③ ✓

← با ۳ معادله و ۳ مجهول به جواب می‌رسیم.

راه حل دوم: با توجه به اصل توازن جریان: شار ورودی = شار خروجی

نود 1: $10\pi_1 = 4\pi_2$ → $(4\pi_2 + 3\pi_2)$

نود 2: $7\pi_2 = 6\pi_3 + 10\pi_1$

نود 3: $3\pi_2 = 6\pi_3$

حال یکی را به دلخواه حذف و از $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ استفاده کرده و آن را جایگزین می‌کنیم و π ها را بدست می‌آوریم.

نکته: پس در فرآیند مارکوف در زمان پیوسته، به نظر می‌آید که ما می‌توانیم به جای $\pi Q = 0$، از اصل توازن جریان استفاده کنیم.

جلسه هفتم مدلسازی

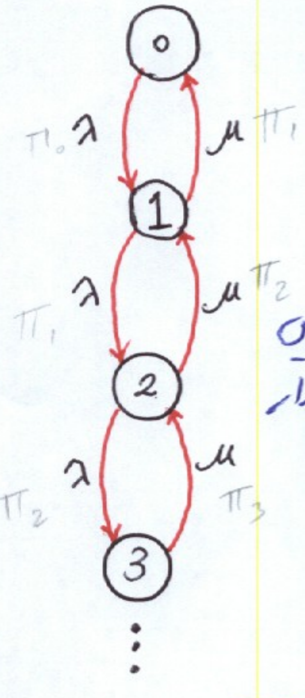
دکتر هارون آبادی ۱۳۹۲/۸/۳۰

«به نام خدا»

مثال: دیاگرام نرخ گذار مقابل را فرض نمائید. مطلوبست:

الف) ماتریس نرخ گذار (ماتریس نرخ گذار را بدست آورید)

ب) اگر حالت پایداری مورد نظر باشد، احتمال اینکه n نفر در سیستم باشند چقدر است؟



نکته * مسأله M/M/1 است.

حل:

الف)

ماتریس نرخ گذار =

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 1 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \cdots \\ 2 & 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \\ \vdots & 0 & 0 & & \end{array}_{\infty\times\infty}$$

جمع خروجی ها با علامت منفی : قطر اصلی

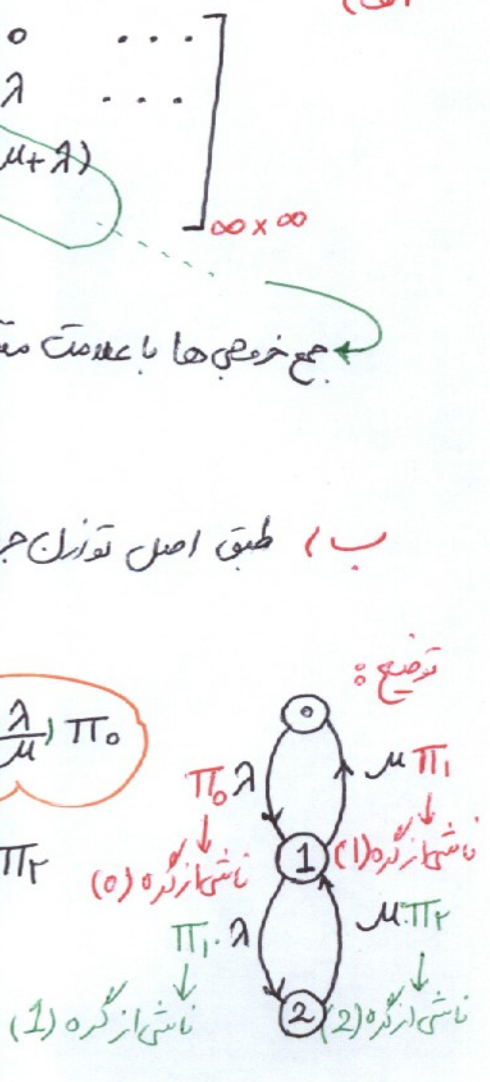
ب) طبق اصل توازن جریان:

شار ورودی = شار خروجی

نود 0 : $\longrightarrow \quad \pi_0\lambda = \pi_1\mu \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$

نود 1 : $\longrightarrow \quad \lambda\pi_1 + \mu\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2$

توضیح:



(۸۵) $\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } \pi_1}$ $(\mu+\lambda)\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0}$

اثبات :

توضیح و اثبات :

$$\lambda\pi_1 + \mu\pi_1 \overset{*}{=} \lambda\pi_0 + \mu\pi_2$$

$$\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{\lambda\cdot\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0}_{\pi_1}\Big) + \Big(\underbrace{\cancel{\mu}\cdot\left(\tfrac{\lambda}{\cancel{\mu}}\right)\pi_0}_{\pi_1}\Big) \overset{*}{=} \lambda\pi_0 + \mu\pi_2$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu}\pi_0 + \cancel{\lambda\pi_0} = \cancel{\lambda\pi_0} + \mu\pi_2$$

$$\Rightarrow \mu\pi_2 = \frac{\lambda^2}{\mu}\pi_0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\pi_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0}$$

$$\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$$

$$\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\pi_0}$$

چون مقدار π_0 را باید مشخص کنیم ، پس از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\text{لاندا} \leftarrow \lambda, \quad \text{مو} \leftarrow \mu$$

شدت ترافیک : ρ ← $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ → رُ

$$\sum_{i=0} \pi_i = 1$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \cdots = 1 \Rightarrow \pi_0 \, (\underbrace{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots}) = 1 \quad *$$

(۸۱)

طبق رابطهٔ هندسی داریم: (اگر $\rho < 1$ باشد):

$$\text{if } \rho < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\rho}$$

$$* \Rightarrow \pi_0 \cdot \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1$$

* نکته: $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

* نکته: در سیستم پایدار باید: نرخ سرویس > نرخ ورود باشد.

بنابراین: $\underline{\rho < 1} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \lambda < \mu$

شرط ρ در حالت پایداری: تعداد job های سیستم محدود باشد

$$\Rightarrow \pi_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_0 = 1 - \rho}$$

بنابراین طبق فرمول محاسبهٔ π_n خواهیم داشت:

$$\pi_n = (\underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{\rho})^n \pi_0 \quad \text{و} \quad \pi_0 = 1 - \rho$$

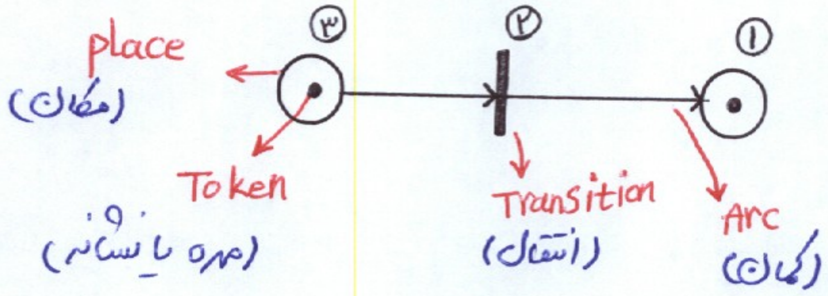
از ترکیب آنها خواهیم داشت $\Longrightarrow$ $\boxed{\pi_n = (\rho)^n (1-\rho)}$ $\Rightarrow$ و به یک رابطهٔ نسبتاً ساده‌ای می‌رسیم.

شبکه های پتری :

مدل

- pragmatic model
  - ← غالباً برای تشخیص نیازهای وظیفه مندی
  - مثال : uml (شبکه رسمی)
- Formal model
  - ← غالباً برای تشخیص نیازهای غیر وظیفه مندی
  - مثال : شبکه صف ، شبکه پتری ، آتاماتا و ...

مدلسازی رفتار سیستم :



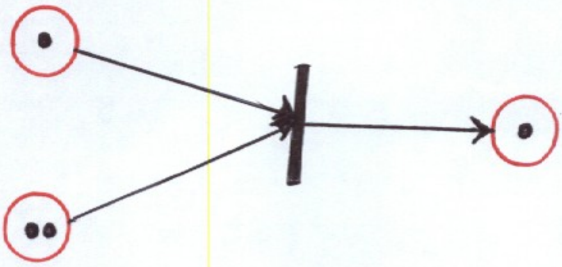
در این شکل ۳ نود داریم : ۲ تا place و یک Transition

در واقع گراف نودها به ۲ دسته تقسیم بندی می شود :

① place (مکان) 

② Transition (انتقال) 

اگر در ورودیها Token باشد ، انتقال توان enable می شود و آتش می نماید.



شبکه صف ← مبحث زنجیره ها

شبکه پتری ← color petri net

$$\begin{cases} \text{Server} \equiv \text{Transmition} \\ \text{Quere} \equiv \text{place} \\ \text{Job} \equiv \text{Token} \end{cases}$$

تعداد افراد صف = تعداد Token

(Time petri net)

CPN	LGSPN
TPN	OOPN
SPN	FPN
GSPN	

FPN ← فازی است. صفر و یک نداریم
هر می‌تواند به یک درجه‌ای تعلق داشته باشد.

* Time های Transmition :

* تبدیل Pragmatic model به Formal model :

در مدلهای واقعی غالباً نیازهای وظیفه‌مندی مورد توجه قرار می‌گیرند. برای آنکه بتوانیم به ارزیابی کارائی

به این مدلها بپردازیم، ۲ رویکرد را می‌توانیم ملاحظه نمائیم.

۸٤

الف) مستقیماً بر روی نمودارهای uml ، اقدام به ارزیابی کارایی نمائیم.

ب) با تبدیل مدل واقعی به مدل رسمی به انجام این مدل نیاز داریم.

omg در سال ۲۰۰۲ ، تعدادی نمایه (پروفایل) معرفی نمود که یکی از آنها به نام PST ، کلیشه‌هایی را بر روی کارایی سیستم اطلاعاتی بیان می‌نمود. زیر نمایه‌ی کارایی (Performance) دارای تعدادی کلیشه و هر کلیشه دارای تعدادی تعریف برچسب دار است.

«بنام خدا»

جلسه هشتم مدلسازی

دکتر هارون آبادی مورخه ۱۳۹۲/۹/۷

مارکوف:

① ماتریس احتمال گذار $\xrightarrow{\text{گسسته}}$ مجموع عناصر سطر = ۱ — $P=P2$

② ماتریس نرخ گذار $\xrightarrow{\text{پیوسته}}$ مجموع عناصر سطر = ۰ — $0=P2$

← حلقه نداریم و اعداد بال بین صفر و ا نیست.

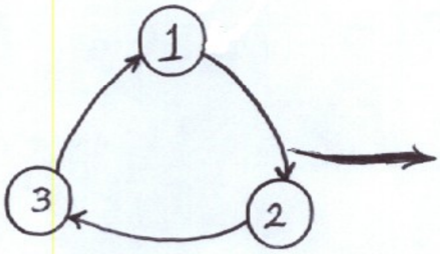
* طبقه‌بندی حالات در فرآیند مارکوف (حالات پایداری):

فرض می‌کنیم فرآیند مارکوف با زمان گسسته را داریم. همانگونه که ملاحظه خواهیم نمود، با اندکی تغییرات این موارد برای فرآیند مارکوف با زمان پیوسته نیز قابل تعمیم است.

فرآیند مارکوف زمان گسسته :

$f_{ii}(n)$: احتمال اینکه از نود i خارج شویم و پس از n تا clock دوباره به نود i وارد شویم.

(مجدداً برای اولین بار به نود i وارد شویم)



هرکدام یک کلاک است

$F_{22}(4)=0$

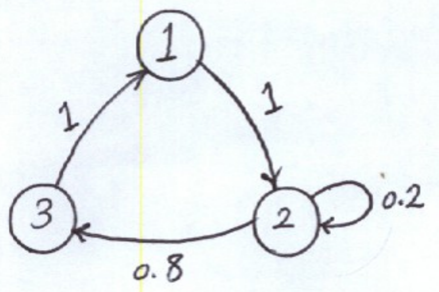
$F_{22}(6)=\,?$ → احتمال آن صفر خواهد شد ⇐ چون برای دومین بار به نود ۲ می‌رسیم

$F_{22}(3)=1$ → احتمال آنکه از نود ۲ خارج شده و با ۳ عدد clock به ۲ برگردیم.

$F_{22}(2)=0$ → احتمال آنکه از نود ۲ خارج شده و با ۲ عدد clock به ۲ برگردیم.

$F_{22}(7)=0$ → احتمال آنکه از نود ۲ خارج شده و با ۷ عدد clock به ۲ برگردیم.

نکته : $F_{22}(7)=0$ ← به این دلیل صفر است که اگر ۷ تا clock طی کنیم به نود ۲ نمی‌رسیم بلکه به نود ۳ می‌رسیم. پس با ۷ تا clock نمی‌توان دوباره به نود ۲ برگشت یعنی بعد از طی ۷ کلاک ۶ برای اولین بار به نود ۲ نمی‌رویم بلکه برای دومین بار است (و از آن عبور می‌کنیم)



$$\begin{cases} f_{11}(3) = 1 \times 0.8 \times 1 = 0.8 \\ f_{11}(4) = 0.2 \times 0.8 = 0.16 \\ f_{11}(5) = 0.2 \times 0.2 \times 0.8 = 0.032 \\ f_{11}(1) = 0 \\ f_{11}(2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{22}(3) = 0.8 = 0.8 \times 1 \times 1 \\ f_{22}(1) = 0.2 \\ f_{22}(2) = 0 \\ f_{22}(4) = 0.8 \times 0.2 \\ f_{22}(5) = 0.8 \times 1 \times 1 \times 0.2 \times 0.2 = 0.032 \\ f_{22}(6) = 0.8 \times 0.8 = 0.64 \end{cases}$$

به نظر می‌رسد در ابتدا از حلقه چند بار می‌توان عبور کرد.
و اولویت با کلاک‌های اصلی است.

نکته:

f_{ii}: احتمال اینکه از نود i خارج شده و مجدداً به نود i برگردیم (نه لزوماً برای اولین بار

یعنی برای اولین بار مهم نیست و همچنین مهم نیست با چند تا clock باشد)

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) \rightarrow f_{ii}(1) + f_{ii}(2) + f_{ii}(3) + \cdots + f_{ii}(n)$$

$\downarrow$

احتمال اینکه مجدداً به حالت اولیه یا نود i برگردد

$$f_{ii} \begin{cases} < 1 & \text{Transient} \\ = 1 & \text{Recurrent} \end{cases}$$

Transient: گذرا (دیگر باز نگردد)

Recurrent: تکرارپذیر (دوباره بازگردد)

مثال: برنامه‌ی شبیه‌سازی داریم که ۱۰۰۰ بار اجرا می‌شود (امتحان می‌کنیم). ۸۵۰ بار به حالت اول برمی‌گردد و ۱۵۰ بار برنمی‌گردد. گذرا است یا تجدیدپذیر؟ چرا؟

گذرا است. چون حالتی وجود دارد که به حالت اولیه برنمی‌گردد و داریم: $f_{ii} = 0.85$

* متوسط زمان بازگشت:

متوسط زمان بازگشت $\theta_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}(n)$

احتمال × زمان

(مثل امید ریاضی)

مثال $= 1\times f_{ii}(1) + \underbrace{2\times f_{ii}(2)}_{0.7} + 3\times \underbrace{f_{ii}(3)}_{0} + \cdots$

نقشی ندارد

چون برمی‌گردد حتماً Recurrent است.

f_{ii} اش ۱ است ولی در زمان خیلی طولانی برمی‌گردد

$$\theta_{ii} \begin{cases} = \infty & \text{Null Recurrent} \\ < \infty & \text{positive Recurrent} \end{cases}$$

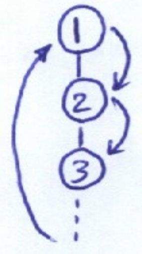
(در یک زمان طولانی برمی‌گردد) تجدیدپذیر تهی

(در یک زمان محدود برمی‌گردد) تجدیدپذیر مثبت

در زمان محدود برمی‌گردد

نکته: در هر دو، f_{ii} یک می‌شود.

نکته: در تجدیدپذیر تهی برمی‌گردد ولی معلوم نیست چه زمانی!



$\Rightarrow$ «تجدیدپذیر تهی است چون معلوم نیست کی برمی‌گردد.»

مثال: احتمال اینکه در ۲ کلاک برگردد:

$$\underbrace{1\times f_{ii}(1)}_{0} + \underbrace{2\times f_{ii}(2)}_{0.7} + \underbrace{3\times f_{ii}(3)}_{0} + \underbrace{4\times f_{ii}(4)}_{0.3} + \cdots$$

نقشی ندارد

چون $\theta = 3$ (تعداد کلاک) و $3 < \infty$، پس تجدیدپذیر مثبت است.

مثال :  تجدید پذیر مثبت است چون حتماً در ۲ کلاک برمی‌گردد.

$2 < \infty$

* فرآیندهای periodic :

حالت پریودیک (دوره‌ای) :

بر طبق تعریف، حالت i را با فرض $f_{ii}(n) > 0$، پریودیک با دور k گوئیم اگر و تنها اگر

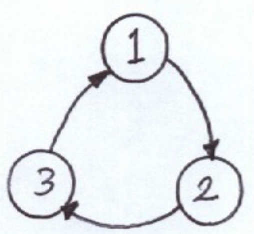
داشته باشیم : $\boxed{m = 0, 1, 2, 3, \ldots}$ و $\boxed{n = mk}$

① * نکته : روی بزرگترین مقسوم علیه مشترک ما نور میده، ضرایب k رو می‌خواهیم چک کنیم.

② * نکته : می‌خواهیم ببینیم روال فرآیند مارکوف که دنبال می‌کنیم، در چه دوره‌هایی تکرار می‌شود آیا اصلاً تکرار می‌شود ؟!

③ * نکته : فرآیند مارکوف در یک حالت می‌تواند پریودیک باشد و در حالت دیگر نباشد.

مثال :



$f_{11}(1) = 0$

$f_{11}(2) = 0$

$f_{11}(3) = 1$

$f_{11}(4) = 0$

حل : در بین حالاتی که $f_{ii} > 0$ شده است، ب.م.م می‌گیریم. در این مثال، ب.م.م ۳ با خودش می‌شود ۳ :

$\Leftarrow$ دوره‌ای است با دور $k = 3$

چون حالتهای 1 و 2 و 4 ، صفر شده اند پس کاری نداریم و فقط با حالت ۳ کار داریم که بزرگتر از صفر (>0) شده است.

حالتهای ممکن:

① اگر ب.م.م = 1 شده: پریودیک نیست

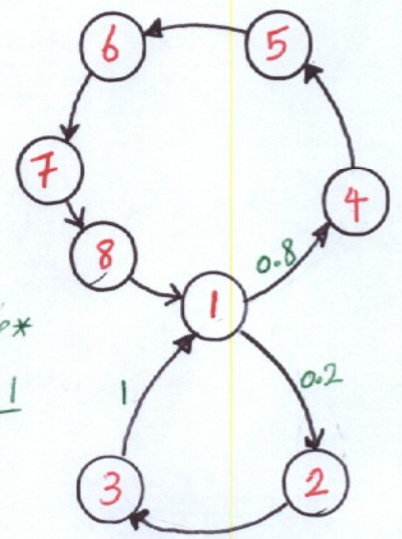
② اگر ب.م.م ≠ 1 شده: پریودیک است ⇐ با دور ب.م.م پریودیک است.
یا ب.م.م > 1

* در این مثال ، نود 1 با دور ۳ پریودیک است.

$K=3$

* نکته: در یک سیستم ممکن است یک گره (حالت) پریودیک باشد و گره (حالت) دیگر پریودیک نباشد.

مثال:



*ضرایب ذکر شده 1 هستند.

$f_{11}(1)=0$

$f_{11}(2)=0$

$f_{11}(3)=0.2$

$f_{11}(6)=0.8$

$f_{11}(9)=0$

ب.م.م (۳و۶) می شود: ۳

و چون ۳>1 است ، پریودیک است.

ب.م.م = ۳ ⇐ حالت 1: با دور ۳ پریودیک است.

$f_{44}(1)=0$

$f_{44}(3)=0$

$f_{44}(6)=0.8$

$f_{44}(9)=0.16=0.2\times0.8$

$f_{44}(12)=0.2\times0.2\times0.8=0.032$

$f_{44}(5)>0$?

ب.م.م (۶و۹و۱۲) می شود: ۳

و چون ۳>1 است پس پریودیک است.

⇓

3 = ب.م.م ⇐ نود 4 با دور 3 پریودیک است.

$$\begin{cases} f_{11}(3) = 0.2 \\ f_{11}(5) = 0.8 \end{cases}$$

$\text{ب.م.م}(5,3) = 1$

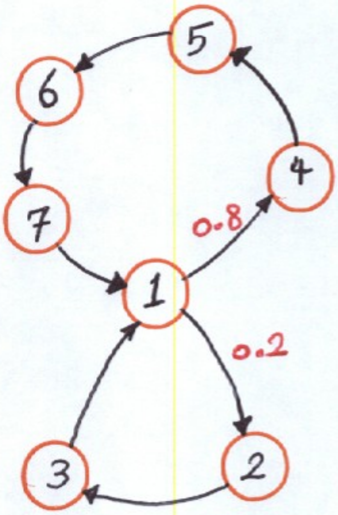
چون : (ب.م.م = ۱) است $\Rightarrow$

بنابراین سیر پریودیک نیست.

* نکته مهم: آیا در مارکوف می‌شود یک نود پریودیک باشد و دیگری نباشد؟ بله و سؤال

نکته : تعداد یالها در پریودیک بودن یا نبودن تأثیر دارد.

مثال :



$f_{11}(3) = 0.2$

$f_{11}(6) = 0$

$f_{11}(5) = 0.8$

در این مثال $f_{11}(6)$ چون برابر صفر است ، عدد ۶ را در ب.م.م در نظر نمی‌گیریم. بنابراین ب.م.م (3,5) می‌شود 1 پس پریودیک نیست. (دقت شود که فقط از 3,5 ، ب.م.م می‌گیریم)

جلسه نهم مدلسازی

دکتر هارون آبادی مورخه ۱۳۹۲/۹/۲۱

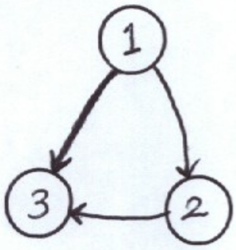
« به نام خدا »

فرآیند مارکوف کاهش ناپذیر :

به یک فرآیند مارکوف (حالت نه ، بلکه فرآیند) کاهش ناپذیر گوئیم اگر از هر حالت به حالت دیگر و یا از هر نود به نود دیگر با احتمال بزرگتر از صفر بتوانیم برویم.

* نکته : برای این موضوع بدیهی است که گراف مربوط متصل باشد (یعنی بین همه ی نودها connected برقرار باشد و بتوان از هر نود به نود دیگری رفت)

مثال :



connected برقرار نیست ←

* در مثال‌های جلسه قبل می‌توانیم با احتمال یک نود به نود دیگر برویم ، پس کاهش ناپذیر بودند.

* قضیه یا نکته :

اگر یک فرآیند مارکوف کاهش ناپذیر داشته باشیم ، تمام حالاتش از یک نوع خواهد بود . به عنوان مثال چنانچه یک نود (حالت) پریودیک با دور k باشد ، کل حالات پریودیک خواهد بود. در چنین زمانی گوئیم فرآیند مارکوف پریودیک است . این موضوع برای سایر موارد تجدید پذیر مثبت و گذرا ، دوره‌ای و ...

نیز صادق است. بدیهی است تعداد حالتها می‌تواند محدود یا نامحدود باشد و خللی در انجام کار وارد نمی‌نماید.

مثال:

* فرآیند ergodic:

به یک فرآیند مارکوف، ergodic گویند اگر شرایط زیر را داشته باشد:

الف) فرآیند کاهش ناپذیر باشد.

ب) فرآیند تجدید پذیر مثبت باشد. (تمام حالات آن مورد نظر است)

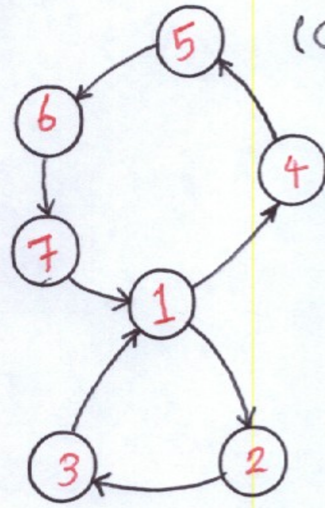
ج) فرآیند غیر دوره‌ای باشد.

* خواص فرآیند ergodic:

الف) تمام خواصش با میانگین اش مساوی است (سیستم پایدار است).

ب) در زمان بی‌نهایت رفتارش به یک گونه است.

ج) بدیهی است سیستم با فرآیند ergodic پایدار است.



مثال: ergodic بودن آن را بررسی کنید. (و بیری سازی خواهش)

ergodic است چون ۱ = ب.م.م است (غیر پریودیک (غیر دوره‌ای)) کاهش ناپذیر (connect دارند) و تجدید پذیر مثبت است.

نکته: ergodic باشد مناسب نیست.

* **قضیه:** فرض کنید یک فرآیند مارکوف کاهش ناپذیر و محدود باشد (تعداد حالات بی‌نهایت نباشد)، آنگاه آن فرآیند تجدید پذیر مثبت است.

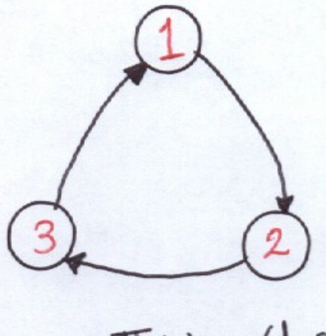
مثال:

✓ کاهش ناپذیر

✗ محدود ← نامحدود است

← نامحدود

مثال: فرآیند مارکوف با احتمال گذار زیر را داریم:



$\pi(0) = (1,0,0)$

الف) طبقه‌بندی حالات را انجام دهید.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\pi(n)$ و $\pi(\infty)$ (در بی‌نهایت)؟

جواب ۸:

الف) ergodic نیست، دوره‌ای هست، تجزیه نپذیر مثبت هست، کاهش ناپذیر است،

محدود است و پریودیک است با $k=3$.

روش اول

ب) اثبات شهودی:

$$\pi(n) \; (\text{شهودی}) \begin{cases} (1,0,0) & n=0,3,6,9,\dots \quad n=3k \\ (0,1,0) & n=1,4,7,10,\dots \quad n=3k+1 \\ (0,0,1) & n=2,5,8,\dots \quad n=3k+2 \end{cases}$$

$n=3k$ ← اگر ۳ تا کلاک بگذرد در هر حالت در نود یک هستیم.

$n=3k+1$ ← اگر یک کلاک بگذرد، در هر حالت در نود ۲ هستیم.

$n=3k+2$ ← اگر ۲ تا کلاک بگذرد در هر حالت در نود ۳ هستیم.

ب) روش دوم: اثبات غیرشهودی (Chapman)

$$\pi(n+1)=\pi(n)\cdot Q$$

$$\pi(1)=\pi(0)\,Q \Rightarrow (1,0,0)\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=(0,1,0)\equiv n=3k+1$$

$$n=1,4,7,10,\dots$$

$$\pi(2)=\pi(1)\,Q \Rightarrow (0,1,0)\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=(0,0,1)\equiv \quad n=3k+2$$

$$n=2,5,8$$

$\lim_{n\to\infty}\pi(n)=$! حد ندارد $\Rightarrow$ چون هر لحظه یک جواب دارد مثلاً در لحظه‌ی ۲، در نود ۳ است (۰،۰،۱) حال در مثلاً 500 ما می‌دانیم که در کدام نود است.

لحظه‌ی 500

حال اگر ما فرض را به صورت زیر تغییر دهیم می‌بینیم که جواب بدست آمده ثابت است :

: با تغییر فرض $\Pi(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ یکی از ۳ تا (بالاخره در زمان n در یکی از ۳ نود است)

$$\Rightarrow \quad \Pi(1) = \Pi(0)Q \Rightarrow (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$

$\Pi(1) = \Pi_0 \Rightarrow Q = 1$

$$\Pi(2) = \Pi(1)Q \Rightarrow (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$

$$\vdots$$

$$\Pi(n) = \cdots\cdots = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$

* توجه : $\lim_{n\to\infty} \Pi(n)$ در اینجا جواب دارد چون اگر $\Pi(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ باشد ،

در هر لحظه همین جواب را می‌دهد.

در کل جواب ب) حد ندارد پس پایدار نیست و به حالت اولیه وابسته است .

پس به حالت شروع وابسته است که این برای شبیه سازی صف مناسب نیست چون به حالت شروع وابسته است .

نکته :

نکته : صفهای شبیه سازی ergodic بوده و به حالت اولیه بستگی ندارد.

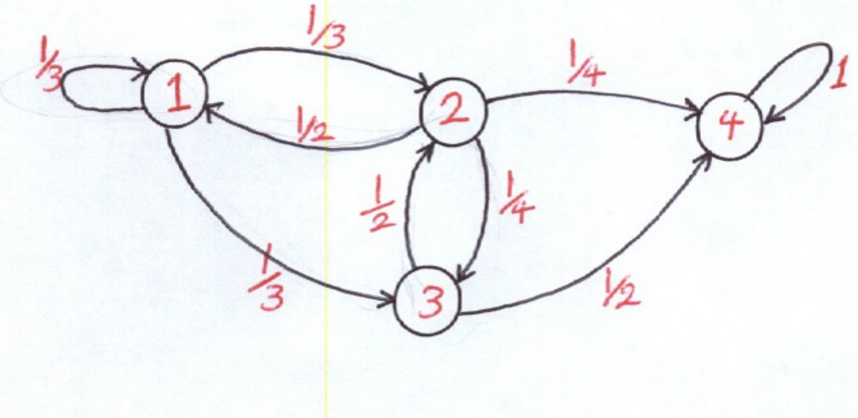
(۹۶)

* نکته: تمام مفاهیم برای فرآیند مارکوف با زمان پیوسته نیز قابل تعمیم است؛ فقط موارد پریودیک (دوره‌ای) و آپریودیک (غیر دوره‌ای) در زمان پیوسته مفهوم خود را از دست داده و ملاحظه می‌گردد.

شرط‌های ergodic گسسته:
- ① کاهش ناپذیر (connect داشته باشد)
- ② تجدید پذیر مثبت (به نود اولیه برگردد)
- ③ غیر دوره‌ای (ب.م.م)

شرط‌های ergodic پیوسته:
- ① کاهش ناپذیر
- ② محدود (تجدید پذیر مثبت
- ③ ~~غیر دوره‌ای~~ ⇐ آیتم ③ حذف می‌شود.

سؤال امتحان: فرض شود فرآیند مارکوف با زمان گسسته را داریم. این فرآیند مشابه شکل زیر دارای ۴ حالت است. حالات فرآیند مارکوف را طبقه‌بندی کنید.



جواب: گراف به طور کامل connected نیست ولی ۱ و ۲ و ۳ باهم connect هستند و ۴

ابتدا برای ۴ بدست می آوریم:

$f_{44}(1)=1$ ① $P.P.$ ب $=1 \Rightarrow$ به صورت اندوله است. پس آپریودیک (غیر دوره ای) است.

$f_{44}(2)=0$ ② $\theta_{44}=1 \Rightarrow 1<\infty$ تجدید پذیر مثبت است چون

$f_{44}(3)=0$

$\vdots$

$f_{44}(n)=0$ $\quad n>1$

$n \times f_{ii} = 1 \times 1 = 1$

زمان

با ۱ کمک

زمانی θ معنی پیدا می کند که $f_{11}(1)$ ما ... یعنی θ ما برابر ۱ شد ... ما بیشتر از ۱ بود θ معنی پیدا نمی کرد ... است ... حالا باید با توجه به θ مثبت بودن آن ... سؤال

نتیجه: ⟸ کل فرآیند ergodic نیست. (چون کامل connected نیست؟ ← ergodic نیست؟)

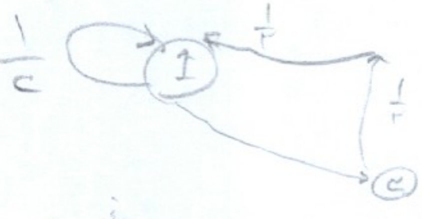
چون یک شرط ergodic بستن را ندارد که همان کاهش ناپذیر بودن است

* چون تمام اعداد بین ۰ و ۱ است مثلاً $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ پس زمان گسسته است.

حال برای گره های ۱ و ۲ و ۳ بدست می آوریم که اگر برای ۱ بدست آید، برای ۲ و ۳ نیز صادق است.

$$f_{11}(1)=1/3$$

$$f_{11}(2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$



$$f_{11}(3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

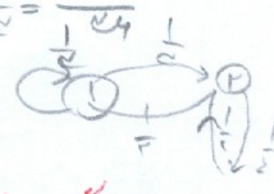
$$f_{11}(4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$$

سؤال: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{36}$

$f_{11}(6)$ ... $\rightarrow \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$$f_{11}(5)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{96}$$

سؤال: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{144}$



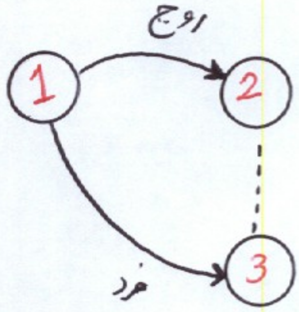
پس ۲ بار حلقه می خورد ... $f_{11}(8)$ ... ۳ بار حلقه می خورد

$\vdots$

$$f_{11}(n)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \Rightarrow \text{اگر } n \text{ فرد باشد. } n\geq 3$$

$$f_{11}(n)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\times\frac{1}{2} \Rightarrow \text{اگر } n \text{ زوج باشد. } n\geq 2$$

برای $f_{11}(7)$ ۲ بار حلقه تکرار می شود



برای حالات فرد از قسمت پائین حرکت می‌کنیم ولی برای حالات زوج

از بالا . در هر صورت باید طوری حرکت کرد که گره ۱ ، فقط یکبار

ملاقات شود آن هم برای آخرین بار .

$$f_{11} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{برای حالت یک}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)^{m} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{\text{برای حالت فرد}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right)^{m} \times \frac{1}{2}}_{\text{برای حالت زوج}} \Rightarrow$$

$$f_{11} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)^{m}}_{\left(\frac{1}{8}\right)^{m}} = \frac{13}{21}$$

نکته :

$$\sum Q^{n} = \frac{1}{1-Q} \quad , \quad Q < 1$$

بنابر نکته‌ی ذکر شده داریم :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{m} = \frac{1}{1-\frac{1}{8}}$$

بنابراین : $f_{11} = \frac{13}{21} < 1$ ، لذا حالت یک گذرا است و حالتهای ۲ و ۳ نیز گذرا است .

به عبارتی نود یک گذرا می‌باشد لذا نودهای ۲ و ۳ نیز گذرا هستند .

فرآیند ergodic نیست چون کاهش ناپذیر نیست (کل گراف کاهش ناپذیر نیست) و به دلیل اینکه

ب.م.م $f_{11}(4)$ و $f_{11}(3)$ برابر ۱ است ، پس غیر دوره‌ای است .

«بنام خدا»

جلسه دهم مدلسازی

دکتر هاروان آبادی مورخه ۱۳۹۹/۹/۲۸

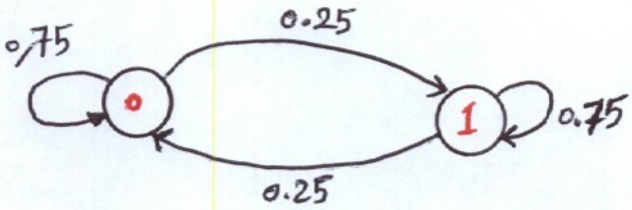
فاطمه اسمعیل نصیب کار

زنجیره ی مارکوف :

فرآیند مارکوف چنانچه در فضای حالت گسسته در نظر بگیریم ، زنجیره ی مارکوف گوئیم.

فضای حالت ← / زمان ↓	گسسته	پیوسته
گسسته	زنجیره ی مارکوف با زمان گسسته	فرآیند مارکوف با زمان گسسته
پیوسته	زنجیره ی مارکوف با زمان پیوسته	فرآیند مارکوف با زمان پیوسته

مثال : در یک شبکه ی انتقال پیام ، (بیت‌هایی از صفر و یک) چندین مرحله جهت انتقال بیت وجود دارد. احتمال آنکه یک رقم صفر و یک به درستی به مرحله ی بعدی انتقال یابد ، ۰٫۷۵ می باشد. مطلوبست احتمال آنکه یک رقم صفر در ۴ مرحله ی بعد نیز صفر دریافت شود ؟



$$\Rightarrow H = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow H^4 = \text{در چهار مرحله بعد}$$

$$H^4_{00} = ?$$

$$H^4 = \begin{bmatrix} H^4_{00} & H^4_{01} \\ H^4_{10} & H^4_{11} \end{bmatrix}$$

حل : باید H^4 را یافته و درایه‌ی H^4_{00} جواب مورد نظر است. بنابراین خواهیم داشت :

$$H = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$[0.75 \times 0.75] + [0.25 \times 0.25] = 0.625$

$$\Rightarrow H^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.375 & 0.625 \end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H^2 = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.375 & 0.625 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow H^4 = H^2 \cdot H^2 = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.375 & 0.625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.375 & 0.625 \end{bmatrix}$$

H^4_{00} H^4_{01}

$$\Rightarrow H^4 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5312 & 0.4687 \\ 0.4687 & 0.5312 \end{bmatrix} \end{array}$$

H^4_{10} H^4_{11}

$$\Rightarrow H^4_{00} = 0.5312$$

* بنابراین احتمال اینکه رقم صفر (0) ، در ۴ مرحله‌ی بعد نیز صفر دریافت گردد ، 0.5312 است.

00 → 0

01 → 1

10 →

11 →

* شدت ترافیک : (Traffic intensity)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

نرخ ورود

نرخ سرویس

اگر تعداد سرویس دهنده ها برابر C باشد خواهیم داشت :

$$\rho = \frac{\lambda}{C\mu}$$

اگر λ بیشتر باشد ، یعنی نرخ ورود و ترافیک زیاد است و اگر μ زیاد باشد یعنی نرخ خروج هم زیاد است و ترافیک کم است و C هرچه بیشتر باشد ، ترافیک کم است .

$\frac{1}{\lambda}$: میانگین فاصله‌ی ورود پیاپی دو مشتری

$\frac{1}{\mu}$: مدت انجام سرویس برای یک مشتری

L : متوسط تعداد مشتری در سیستم با احتساب سرویس گیرنده $\quad L = E(N)$

π_n : احتمال وجود n مشتری در سیستم

w : متوسط زمان انتظار در سیستم

* در وضعیت پایدار داریم :

$$L = \lambda \cdot w$$

: قضیه لیتل

نرخ خروج در محدوده

$$Q_r = \lambda_r R_r$$

متوسط تعداد مشتریان حاضر در محدوده

مدت زمان ماندگاری در محدوده

مثال: در سیستم M/M/1 مطلوبست متوسط تعداد مشتری در سیستم؟

حل:

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\pi_n \quad , \quad \pi_n = \rho^n (1-\rho)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} \quad (*)$$

* دلیل اینکه یکی از توانهای ρ^n را درخارج از $\sum$ ببریم این است که در داخل $\sum$، ($n\rho^{n-1}$) با مشتق عبارتی بوجود آید.

$$= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho^n)$$

مثال: $\dfrac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1}$

مشتق x^n برحسب x

$y = u^m \Rightarrow y' = m u' u^{m-1}$

اثبات: که ما به آن خواهیم داشت:

$$\frac{d(\rho^n)}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}(\rho^n) = n\,\rho^{n-1} \quad (*)$$

مشتق‌گیری از ρ^n، نسبت به ρ

بنابراین در فرمول $(1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$، $n\rho^{n-1}$ درواقع $\frac{d}{d\rho}(\rho^n)$ می‌باشد و خواهیم داشت:

$$= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho^n)$$

با خارج کردن $\frac{d}{d\rho}$ از $\sum_{n=0}^{\infty}$ خواهیم داشت:

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n}\Big] \quad \rho<1 \quad \frac{1}{1-\rho}$$

از قبل داریم:

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\Big[\frac{1}{1-\rho}\Big]$$

$$= (1-\cancel{\rho})\rho \Big[\frac{1}{(1-\rho)^{\cancel{2}}}\Big] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\frac{d}{d\rho}\Big(\frac{1}{1-\rho}\Big) = \frac{\text{مشتق صورت} \times \text{مخرج} - \text{مشتق مخرج} \times \text{صورت}}{(\text{مخرج})^{2}}$$

$$= \frac{0\times(1-\rho) - (-1)(1)}{(1-\rho)^{2}} = \frac{1}{(1-\rho)^{2}}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\cancel{\mu}}}{\frac{\mu-\lambda}{\cancel{\mu}}}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

بنابراین در وضعیت یکنواخت خواهیم داشت:

$$\Rightarrow L = E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$\frac{\cancel{\lambda}}{\mu-\lambda} \leftarrow L = \cancel{\lambda}\cdot w \Rightarrow w = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

متوسط زمان انتظار در سیستم

تمرین: یک فرآیند مارکوف با نرخ های زیر را در نظر بگیرید:

نرخ خروج ← $\lambda_k = (k+2)\lambda$ $\qquad k = 0, 1, 2, \dots$

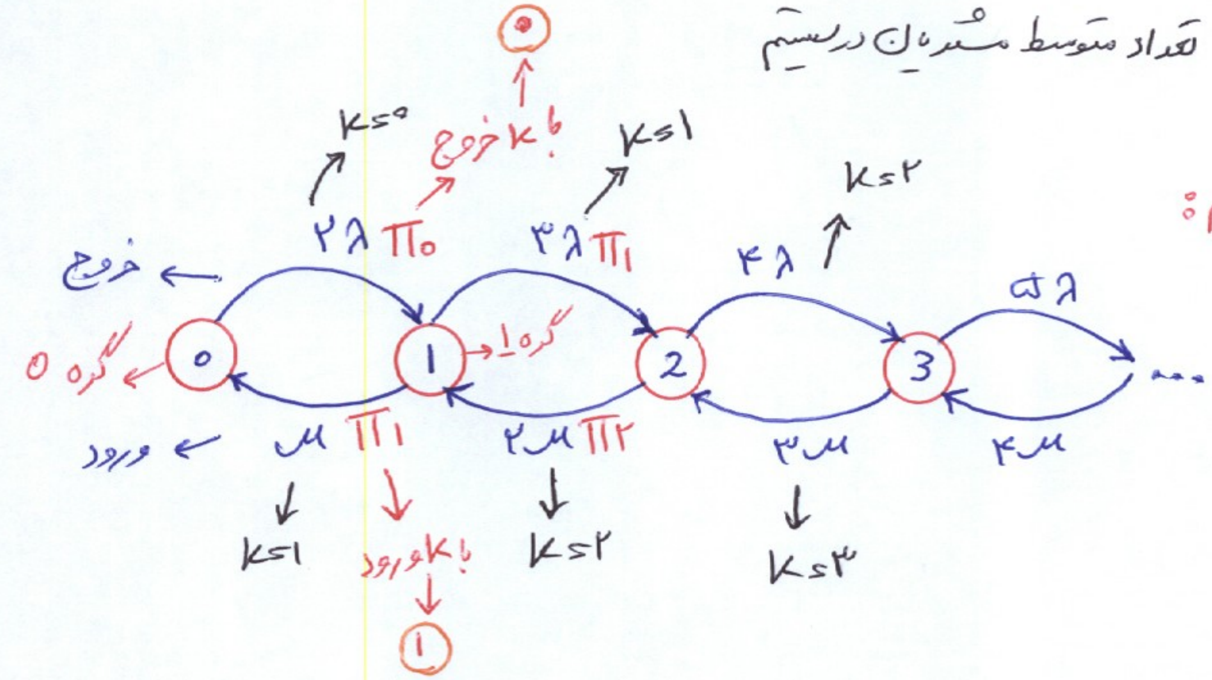
نرخ ورود ← $\mu_k = k\mu$ $\qquad k = 1, 2, 3, \dots$

مطلوبست:

الف) مقدار π_k برحسب مقادیر μ و k و λ (π_k: احتمال وجود k مشتری در سیستم)

ب) تعداد متوسط مشتریان در سیستم

جواب خودم:



برای گره ۰:

$$\underbrace{2\lambda\pi_0}_{\text{خروج از گره صفر}} = \underbrace{\mu\pi_1}_{\text{ورود به گره صفر}}$$

$$\Rightarrow \mu\pi_1 = 2\lambda\pi_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{2\lambda}{\mu}\pi_0} \qquad (1)$$

در گره ۱ :

$$-2\mu\pi_2 - 2\lambda\pi_0 + 3\lambda\pi_1 + \mu\pi_1 = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda\pi_0 + \pi_1(3\lambda+\mu) = 2\mu\pi_2$$

$$\Rightarrow 2\mu\pi_2 = \underbrace{\pi_1}_{2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0}(3\lambda+\mu) - 2\lambda\pi_0$$

$$\Rightarrow 2\mu\pi_2 = \frac{2\lambda}{\mu}\pi_0(3\lambda+\mu) - 2\lambda\pi_0$$

$$= \frac{6\lambda^2}{\mu}\pi_0 + \cancel{\frac{2\lambda}{\mu}\cdot\mu\pi_0 - 2\lambda\pi_0}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\mu\pi_2 = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\lambda^2}{\mu}\pi_0$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{3\lambda^2}{\mu^2}\pi_0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0} \quad (2)$$

(1) : $\pi_1 = 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$, $\quad \frac{\lambda}{\mu} \to \rho$

(2) : $\pi_2 = 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0$

$\vdots$

$$\pi_k = (k+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

بررسی شود ممکن است غلط باشد.

نحوه‌ی پیش‌بینی تابع مشتق گرفته شده : ρ به توان ضریب آن

یعنی : ρ^{k+1}

ب) روش خودم

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\underbrace{(k+1)\rho^k}\,\pi_0$$

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^{k+1}) = (k+1)\rho^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{d}{d\rho}(\rho^{k+1})\pi_0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(k\rho^{k+1})\pi_0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(k\rho^{k+1})\pi_0$$

$$= \frac{d}{d\rho}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k\rho^{k+1})\pi_0\right]$$

$$\Downarrow$$

که باید این بخش را محاسبه کرده تا بتوانیم از آن نسبت به ρ مشتق بگیریم.

برای این کار از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_i = 1 \quad \text{یا} \quad \pi.e = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \cdots = 1 \qquad \begin{cases} \pi_1 = 2(\frac{\lambda}{\mu})\pi_0 \\ \text{یا} \ \boxed{\pi_1 = 2\rho\pi_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_0 + 2\rho\pi_0 + 3\rho^2\pi_0 + \cdots = 1 \qquad \text{و} \ \boxed{\pi_2 = 3\rho^2\pi_0}$$

فاکتورگیری از π_0

$$\Rightarrow \pi_0(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \cdots) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\rho^k\right) = 1$$

چون ضریب ρ از توانش همواره یکی بیشتر است.

حال برای برابر شدن Σ بدست آمده‌ی جدید با $\sum_{k=0}^{\infty}(k\rho^{k+1})\pi_0$ ، باید π_0 و k

در آن ضرب شده و یا از تبدیل ρ^{k+1} به $\rho^k.\rho^1$ استفاده کنیم و تغییرات جزئی دهیم.

$$\pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\rho^{k} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k\rho^{k} + \rho^{k}) \right) = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k} \right) + \pi_0 \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k} \right)}_{\frac{1}{1-\rho}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k} \right) = 1 - \frac{\pi_0}{1-\rho}}$$

که هم اکنون بسیار شبیه رابطه ی سیگمای : $\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k+1}$ می باشد ولی

توان ρ آن k است. پس بهتر است از $\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k+1}$ ، یک توان از ρ کم کنیم.

بنابراین در مورد $\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k\rho^{k+1}).\pi_0 \right)$ خواهیم داشت :

$$\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k\underbrace{\rho^{k+1}}_{\rho^{1}.\rho^{k}})\pi_0 \right) = \frac{d}{d\rho}\left(\rho \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k}}_{\Downarrow} \right)\pi_0$$

که در کادر مستطیلی بالا ثابت شد برابر : $1 - \frac{\pi_0}{1-\rho}$ می باشد.

$$= \frac{d}{d\rho}\left(\rho . \left(1 - \frac{\pi_0}{1-\rho} \right) \right) = \frac{d}{d\rho}\left(\rho \left(\frac{1-\rho-\pi_0}{1-\rho} \right) \right)$$

(۱۰۸)

$$= \frac{d}{d\rho}\left(\rho\left(\frac{1-\rho-\pi_0}{1-\rho}\right)\right) = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho-\rho^2-\pi_0\rho}{1-\rho}\right)$$

صورت

مخرج

$$\boxed{\text{مشتق صورت} = 1-2\rho-\pi_0}$$

$$\boxed{\text{مشتق مخرج} = -1}$$

$$\Rightarrow \; = \frac{(1-2\rho-\pi_0)(1-\rho)-(-1)(\rho-\rho^2-\pi_0\rho)}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{1-\cancel{\rho}-2\rho+2\rho^2-\pi_0+\cancel{\pi_0\rho}+\cancel{\rho}-\rho^2-\cancel{\pi_0\rho}}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{+\rho^2-2\rho+1-\pi_0}{(1-\rho)^2} = \frac{(\rho-1)^2-\pi_0}{(\rho-1)^2}$$

$$= \frac{(\rho-1)^2}{(\rho-1)^2} - \frac{\pi_0}{(\rho-1)^2} \Rightarrow L = 1-\frac{\pi_0}{(\rho-1)^2}$$

$$\frac{\lambda}{\mu}$$

$$\Rightarrow L = 1-\frac{\pi_0}{(\frac{\lambda}{\mu}-1)^2} = 1-\frac{\pi_0}{(\frac{\lambda-\mu}{\mu})^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 1-\frac{\pi_0\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}}$$

* تخمین‌گرها :

* تخمین‌گر میانگین ساده : Sample mean estimator

فرض کنید می‌خواهیم کمیتی را اندازه‌گیری نمائیم مثلاً تأخیر در یک شبکه‌ی کامپیوتری. پس تأخیر را به عنوان متغیر تصادفی x در نظر می‌گیریم.

$X \longrightarrow$ Random variable

$$\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_{10}}_{\text{مستقل از همدیگر}}$$

وقتی یک متغیر تصادفی مثل ترافیک در یک بزرگراه یا نرخ ورود افراد را اندازه‌گیری می‌کنیم، یکسری sample برمی‌گزینیم. در sample ها قضیه‌ی اعداد بزرگ مطرح است که هر چه تعداد ورودی‌ها بیشتر باشد، باید به جواب واقعی نزدیک‌تر شویم و این زمانی است که تخمین‌گر نااریب (unbiased) باشد.

منظور از تخمین‌گر نااریب، تخمین‌گری است که توزیع آن نرمال باشد.

* مزیت نااریب بودن :

قضیه‌ی اعداد بزرگ : اگر تعداد نمونه‌ها زیاد باشد، تخمین‌گر ما را به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌کند.

سؤال : از کجا بفهمیم که تخمین گر unbiased است یا نه ؟ اگر امید ریاضی تخمین گر ، مساوی مقدار واقعی شد ، تخمین گر ناأریب است .

امید ریاضی تخمین گر ← $E($ تخمین گر $) =$ مقدار واقعی

اثبات :

امید ریاضی تخمین گر ← $E(\bar{X}) \overset{?}{=} \mu$ → مقدار واقعی

$$\left.\begin{array}{l} E(X_i) = \mu \\ Var(X_i) = \sigma^2 \end{array}\right\}$$

از آنجا که توزیع ها یکسان است مقدار متوسط و واریانس آنها نیز باهم مساوی است یعنی : امید ریاضی همه ی X_i ها برابر μ و واریانس آنها برابر σ^2 است .

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ (مجموع اعداد تقسیم بر تعداد)

$\bar{X}$ یک تخمین گر ناأریب است (unbiased) :

$$E(\bar{X}) \overset{?}{=} \overset{\text{مقدار واقعی}}{\mu}$$ ⇒ اگر این رابطه برقرار شود ، تخمین گر ناأریب است .

$$E(\bar{X}) = E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\left(\overset{\mu}{E(X_1)} + \overset{\mu}{E(X_2)} + \cdots + \overset{\mu}{E(X_n)}\right)$$

$$= \frac{1}{n}(n\mu) = \frac{\cancel{n}\mu}{\cancel{n}} = \mu$$

$$\Rightarrow E(\bar{X}) = \mu$$

باید توجه نمود هر چقدر n بزرگتر باشد ، تخمین گر ، ما را به μ نزدیکتر می کند (μ مقدار واقعی میانگین است).

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\cancel{n}\sigma^2}{n^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$$

نکته : یادآوری :

قضیه : اگر a و b اعداد ثابتی باشند آنگاه :

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

$\sigma \rightarrow$ زیگما یا سیگما

$\delta \rightarrow$ دلتا

هم اکنون نیاز به یک تخمین گر برای واریانس داریم که نااریب باشد :

$$\delta_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

تخمین گر واریانس

واریانس $\Leftarrow$ نمونه را منهای میانگین کرده و به توان ۲ می رسانیم .

$$E|\delta_x^2| \overset{?}{=} \sigma^2$$

«بنام خدا»

جلسه یازدهم مدلسازی

دکتر هارون آبادی مورخه ۱۳۹۲/۱۰/۵

فاطمه اسمعیل نصیبی کار

نحوه ی محاسبه ی تخمین گر واریانس :

$$\delta_x^2 = \frac{1}{n-1} \boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \rightarrow B$$

می دانیم اگر $E(\delta_x^2) = \sigma^2$ باشد ، به تخمین گر فوق ، نااُریب (unbiased) می گویند.

آوردن و کم کردن μ

$$E(B) = E\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu + \mu - \bar{x})^2\right)$$

$$\mu - \bar{x} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E\left[(x_i - \mu) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)\right]^2 \circledast$$

اثبات : $\mu - \bar{x} = \mu - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{n\mu}{n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}\left(n\mu - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$

$$\Rightarrow \mu - \bar{x} = -\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)\right)$$

$$\circledast \Rightarrow = \sum_{i=1}^{n}\left(E(x_i - \mu)^2 - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} E(x_j - \mu)(x_i - \mu) + \frac{1}{n^2} \underbrace{E\left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)\right]^2}_{n\sigma^2}\right)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

یاد آوری :

$$E(X_i-\mu)^2 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow = \sum_{i=1}^{n}\Big[\sigma^2-\frac{2}{n}\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2-\frac{2}{n}\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}\cancelto{0}{Cov(X_i,X_j)} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\cancelto{0}{Cov(X_j,X_k)}\Big]$$

صفر

* اگر X_i و X_j مستقل باشند، Cov (کواریانس) آنها صفر است.

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2\Big] = (n-1)\sigma^2$$

شرط مستقل بودن برای X و Y : $\sigma_{XY} = E(XY) = E(X)E(Y)$

$$Cov(X_1,X_2) = E\big[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\big] = E[X_1\,X_2] = E(X_1)E(X_2)$$

کاربرد تخمین‌گر واریانس در مدلسازی :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$|\bar{X}-\mu| \leq e$ ⟶ confidence interval (بازه‌ی اطمینان)

error

$\bar{X}$ یک متغیر تصادفی است و ممکن است گاهی اوقات بالا و پایین برود؛ لذا آن را بصورت احتمال

بیان می‌کنیم :

$$P\left[\,|\bar{x}-S| \leqslant e\,\right] = P_0 \Rightarrow \text{confidence level}$$

نکته : جهت دقت شبیه‌سازی ، دو عامل confidence interval و confidence level

مورد توجه قرار می‌گیرد.

قضیه : قضیه‌ای بیان می‌نماید اگر متغیر تصادفی Y بصورت زیر تعریف گردد :

$$Y = \left[(\bar{x}-S)\sqrt{n}\,\right] / \delta \quad \text{یا} \quad Y = \frac{\bar{x}-S}{\delta x}\sqrt{n}$$

با توجه به قانون اعداد بزرگ برای n های بزرگ توزیع نرمال $Y = N(0,1)$ را داریم. از

سوی دیگر می‌خواهیم :

$$P\left[\,|\bar{x}-S| \leqslant e\,\right] \geqslant P_0$$

$$P\Bigg[\underbrace{\frac{\sqrt{n}\,|\bar{x}-S|}{\delta}}_{Y} \leqslant \underbrace{e\,\frac{\sqrt{n}}{\delta}}_{e'}\Bigg] \geqslant P_0 \Rightarrow P(Y \leqslant e') \geqslant P_0$$

از آنجا که δ را نداریم ، از تخمین‌گر واریانس استفاده می‌کنیم و چون متغیر تصادفی است ، دیگر نرمال

نمی‌شود بلکه تبدیل به توزیع t با پارامتر آزادی n-1 می‌شود که برای آن جدول داریم.

مثال ص۱۱۶ کتاب: نرخ کولر از یک جریان اندازه‌گیری شده و در هر مورد ۱۰۰ بار عمل اندازه‌گیری انجام شده است. نرخ جریان از کولر ابتدا ۳٫۰۷ ، دفعه‌ی دوم ۳٫۲۴ ، دفعه‌ی سوم ۳٫۱۴ ، دفعه‌ی چهارم ۳٫۱۱ و دفعه‌ی پنجم ۳٫۰۷ محاسبه گردیده. با توجه به داده‌های مذکور، آیا با سطح اطمینان ۹۹٫۵٪ می‌توان گفت که نرخ جریان بیشتر از ۳ است؟

خطا نداریم : $99.5\% = \frac{99.5}{100} = 0.995$

خطا داشتن : $1 - 0.995 = \boxed{0.005} \to \alpha$

* نکته: خطا از ۰٫۰۰۵ اگر کمتر باشد، سطح اطمینان ۹۹٫۵ درصد است.

خطا داریم : $1 - \frac{99.5}{100} = 0.005$

$n=5$ تعداد داده‌ها

$$\Rightarrow \begin{cases} 99.5\% = 0.995 & \text{نداشتن خطا} \\ \alpha = 0.005 & \text{داشتن خطا} \end{cases}$$

$Y \leftarrow \mu$

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\delta_x}\sqrt{n}$$

سؤال: $P(\mu > 3) \overset{?}{=} 0.995$

$$\mu > 3 \xRightarrow{*(-1)} -\mu \leq -3$$

$$\xRightarrow[\text{جمع با } \bar{X}]{} \bar{X} - \mu \leq \bar{X} - 3$$

$$\xRightarrow[\div \delta]{} \frac{\bar{X}-\mu}{\delta} \leq \frac{\bar{X}-3}{\delta} \xRightarrow[*\sqrt{n}]{} \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\delta} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-3}{\delta}$$

$$\Rightarrow P(S \geq ۳) = P(Y \leq e) \stackrel{?}{=} ۰/۹۹۵$$

$$e = \frac{\bar{x} - ۳}{\delta_x}\sqrt{n} = \frac{۳/۱۲۶ - ۳}{۰/۰۷۰۲}\sqrt{۵} \boxed{\simeq ۴/۲}$$

محاسبه‌ی $\bar{x}$: $\bar{x} = \frac{۳/۰۷ + ۳/۲۴ + ۳/۱۴ + ۳/۱۱ + ۳/۰۷}{۵} \Rightarrow \bar{x} = ۳/۱۲۶$

$$\Rightarrow \delta_x = \sqrt{\left[(۳/۰۷ - ۳/۱۲۶)^۲ + (۳/۲۴ - ۳/۱۲۶)^۲ + \cdots\right] / ۴}$$

۴ → $n-1$

↓ ۵ بار (۵ برداشت)

$$\Rightarrow \delta_x = ۰/۰۷۰۲$$

با مراجعه به جدول کتاب ص ۸۳۵ : $P(X \leq x) = 1 - \alpha \Rightarrow P(Y \leq \overset{۴/۶۰۴}{e'}) = ۱ - ۰/۰۰۵ = ۰/۹۹۵$
$= ۹۹/۵\%$

$$P(S \geq ۳) = P(Y \leq e) = P(Y \leq ۴/۲) \stackrel{?}{=} ۰/۹۹۵$$

$\left.\begin{matrix} e' = ۴/۶۰۴ \\ e = ۴/۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow e' > e \Rightarrow$ پس به اطمینان نمی‌رسیم

* اگر اطمینان ۹۷/۵٪ باشد :

$$۱ - \frac{۹۷/۵}{۱۰۰} = ۰/۰۲۵$$

$$\Rightarrow \alpha = ۰/۰۲۵$$

$\Rightarrow e' = ۲/۷۷۶ \Rightarrow e' < e \Rightarrow$ لذا جواب مثبت است.

اگر $P(Y \leq \overset{۴/۶۰۴}{e'})$ با احتمال ۹۹/۵٪ باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت $P(Y \leq ۴/۲)$ با احتمال مذکور است؟ خیر