به نام خدا

ریاضیات عمومی ۱

امتحان میان ترم اول

مدت: $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت

تاریخ پنجشنبه ۱۹ آبان ۱۳۹۰

---

۱ الف) همه جواب های معادله $z^2+z+1=0$ را در مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ بیابید. (۵ نمره)

ب) همه جواب های معادله $z^6+z^3+1=0$ را در مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ بیابید. (۵ نمره)

۲ عدد صحیح $\alpha\geqslant 0$ داده شده است. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=|x|^\alpha\sin|x|$ را در نظر می گیریم (برای $\alpha=0$، $|x|^\alpha$ را برای هر x برابر 1 در نظر می گیریم). با ذکر دلیل همه نقاط پیوستگی و مشتق پذیری f را (بر حسب مقادیر مختلف α) مشخص کنید. (۱۰ نمره)

۳ فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به طوری که $f(0)=1$ و $f(1)=0$. نشان دهید عدد $c\in]0,1[$ چنان موجود است که $f(c)=c$. (۱۰ نمره)

۴ دو تابع مشتق پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مفروضند به طوری که برای هر $x\in\mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می کنند:

$$(*)\qquad \begin{cases} f'(x)=g(x), & g'(x)=-f(x),\\ f(0)=0, & g(0)=1.\end{cases}$$

الف) ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $f(x)^2+g(x)^2=1$. (۵ نمره)

ب) فرض کنید f_0 و g_0 دو تابع دلخواه باشند که در روابط $(*)$ صدق می کنند. ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $f_0(x)=f(x)$ و $g_0(x)=g(x)$. (۵ نمره)

۵ فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ یک تابع پیوسته باشد به طوری که روی $]0,1[$ مشتق پذیر باشد و همچنین عدد L چنان موجود است که $|f'(x)|\leqslant L<1$ برای هر $x\in]0,1[$.

الف) ثابت کنید معادله $f(x)=x$ روی $[0,1]$ دارای جوابی یگانه مانند s است. (۵ نمره)

ب) نقطه دلخواه $a\in[0,1]$ را در نظر می گیریم. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_0=a,\ x_1=f(x_0),\cdots,x_{n+1}=f(x_n),\cdots$$

ثابت کنید دنباله $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ به s همگراست. (۵ نمره)

موفّق باشید

ریاضی عمومی (۱)

پایان ترم اول

۱- (الف) $z^2+z+1=0 \Longrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z^3=1 \Rightarrow \begin{cases} z_1=e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ z_2=e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ z_3=1 \quad \text{قابل قبول نیست} \end{cases}$

راه دیگر: با استفاده از دستور Δ برای معادلات درجه دوم می‌توان ریشه‌ها را محاسبه نمود.

(ب) $\left(z^6+z^3+1=0\ ,\ w=z^3\right) \Longrightarrow w^2+w+1=0$

سپس با استفاده از قسمت (الف) داریم:

$$\left(z^3=w,\ w=e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \Rightarrow \begin{cases} z_1=e^{\frac{2\pi i}{9}} \\ z_2=e^{\frac{8\pi i}{9}} \\ z_3=e^{\frac{14\pi i}{9}} \end{cases} \quad \& \quad \left(z^3=w,\ w=e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \Rightarrow \begin{cases} z_4=e^{\frac{4\pi i}{9}} \\ z_5=e^{\frac{10\pi i}{9}} \\ z_6=e^{\frac{16\pi i}{9}} \end{cases}$$

۲- می‌دانیم توابع $|x|$ و $\sin x$ و $|x|^\alpha$ برای $\alpha\geq 0$، توابعی پیوسته‌اند چون ترکیب، مجموع و حاصلضرب توابع پیوسته، تابعی پیوسته است پس f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

می‌دانیم تابع $\sin x$ مشتق‌پذیر (روی $\mathbb{R}$) است و تابع $|x|$ روی $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ مشتق‌پذیر است و چون ترکیب و مجموع و حاصلضرب توابع مشتق‌پذیر، تابعی مشتق‌پذیر است، پس f روی $\mathbb{R}-\{0\}$ مشتق‌پذیر است. بنابراین کافی است مشتق‌پذیری تابع f در نقطه $x=0$ با استفاده از تعریف، بررسی شود.

$$(x\neq 0)\qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|^\alpha \sin|x| - 0}{x} = \frac{|x|^{\alpha+1}}{x}\,\frac{\sin|x|}{|x|}$$

پس f در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha+1}}{x}$ موجود باشد، توجه دارید که $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

$$\begin{cases} \alpha>0 \Rightarrow \left|\frac{|x|^{\alpha+1}}{x}\right| = |x|^\alpha \rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha+1}}{x} = 0 \\ \alpha=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \ \text{موجود نیست} \ \left(\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1\ , & x>0 \\ -1\ , & x<0 \end{cases}\right) \end{cases}$$

۳- تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x)=f(x)-x$ در نظر بگیرید. چون f و x توابعی پیوسته هستند پس g نیز پیوسته است، از طرف دیگر داریم

$$\begin{cases} g(0)=f(0)-0=1>0 \\ g(1)=f(1)-1=-1<0 \end{cases}$$

پس مطابق قضیه مقدار میانی لااقل $c\in]0,1[$ چنان موجود است که $g(c)=0$ و نتیجه می‌گیریم که $f(c)=c$.

۴- الف) تابع $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$ را درنظر بگیرید.
چون f و g مشتق‌پذیراند و مجموع و حاصلضرب توابع مشتق‌پذیر، تابعی مشتق‌پذیر می‌باشد
بنابراین h مشتق‌پذیر است و ضابطه مشتق آن بصورت زیر است:

$$(\forall x)\quad h'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=2f(x)g(x)+2g(x)(-f(x))=0$$

بنابراین بر طبق قضیه (ل) h تابعی ثابت است و چون $h(0)=0^2+1^2=1$ بنابراین

$$(\forall x)\quad h(x)=1 \Rightarrow (\forall x)\quad f^2(x)+g^2(x)=1$$

ب) مانند قسمت (الف) تابع $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $k(x)=(f(x)-f_0(x))^2+(g(x)-g_0(x))^2$
را درنظر بگیرید و مانند قسمت (الف) واضح است که k مشتق‌پذیر است
و ضابطه مشتق آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}(\forall x)\quad k'(x)&=2(f(x)-f_0(x))(f'(x)-f_0'(x))+2(g(x)-g_0(x))(g'(x)-g_0'(x))\\&=2(f(x)-f_0(x))(g(x)-g_0(x))+2(g(x)-g_0(x))(-f(x)+f_0(x))\\&=0\end{aligned}$$

همچنین $k(0)=(0-0)^2+(1-1)^2=0$ و بنابراین (با استفاده از قضیه ل) داریم:

$$(\forall x)\quad k(x)=0 \Longrightarrow (\forall x)\quad \underbrace{(f(x)-f_0(x))^2+(g(x)-g_0(x))^2}_{\text{مجموع دو مقدار نامنفی است.}}=0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\forall x)\ (f(x)=f_0(x)\ \&\ g(x)=g_0(x))$$

۵- الف) تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-x$ را درنظر بگیرید. چون f و تابع همانی پیوسته هستند، پس g نیز پیوسته خواهد بود، همچنین داریم

$$\begin{cases}g(0)=f(0)-0\geqslant 0\\ g(1)=f(1)-1\leqslant 0\end{cases}$$

چون $f(x)$ متعلق به فاصله $[0,1]$ است.

اگر $g(0)$ یا $g(1)$ حداقل یکی برابر صفر باشد، حکم واضح است، در غیر اینصورت

خواهیم داشت:

$$g(0) > 0 \quad \& \quad g(1) < 0$$

حال مطابق قضیه مقدار میانی داریم:

$$\exists s \in [0,1] : g(s) = 0 \implies \exists s \in [0,1] : f(s) = s$$

اگر $f(s_1) = s_1$ و $f(s_2) = s_2$ باشند با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم

$$\exists c : f(s_2) - f(s_1) = f'(c)(s_2 - s_1) \implies |s_2 - s_1| \leqslant L\, |s_2 - s_1|$$

و چون $0 \leqslant L < 1$ نتیجه خواهیم گرفت که $s_2 = s_1$ که یعنی $f(x)=x$ جواب یگانه دارد.

(ب) چون $f(s) = s$ بنابراین داریم:

$$s = f(s) = f(f(s)) = f(f(f(s))) = \cdots$$

در نتیجه داریم:

$$|x_n - s| = |f(x_{n-1}) - f(s)| \leqslant L\, |x_{n-1} - s| \leqslant L^2 |x_{n-2} - s| \leqslant \cdots \leqslant L^n |a - s|$$

با توجه به قضیه مقدار میانگین

چون $0 \leqslant L < 1$ می‌داریم:

$$\lim_{n \to \infty} L^n = 0$$

بنابراین نتیجه خواهیم گرفت که

$$\lim_{n \to \infty} x_n = s$$