انتگرال چندگانه

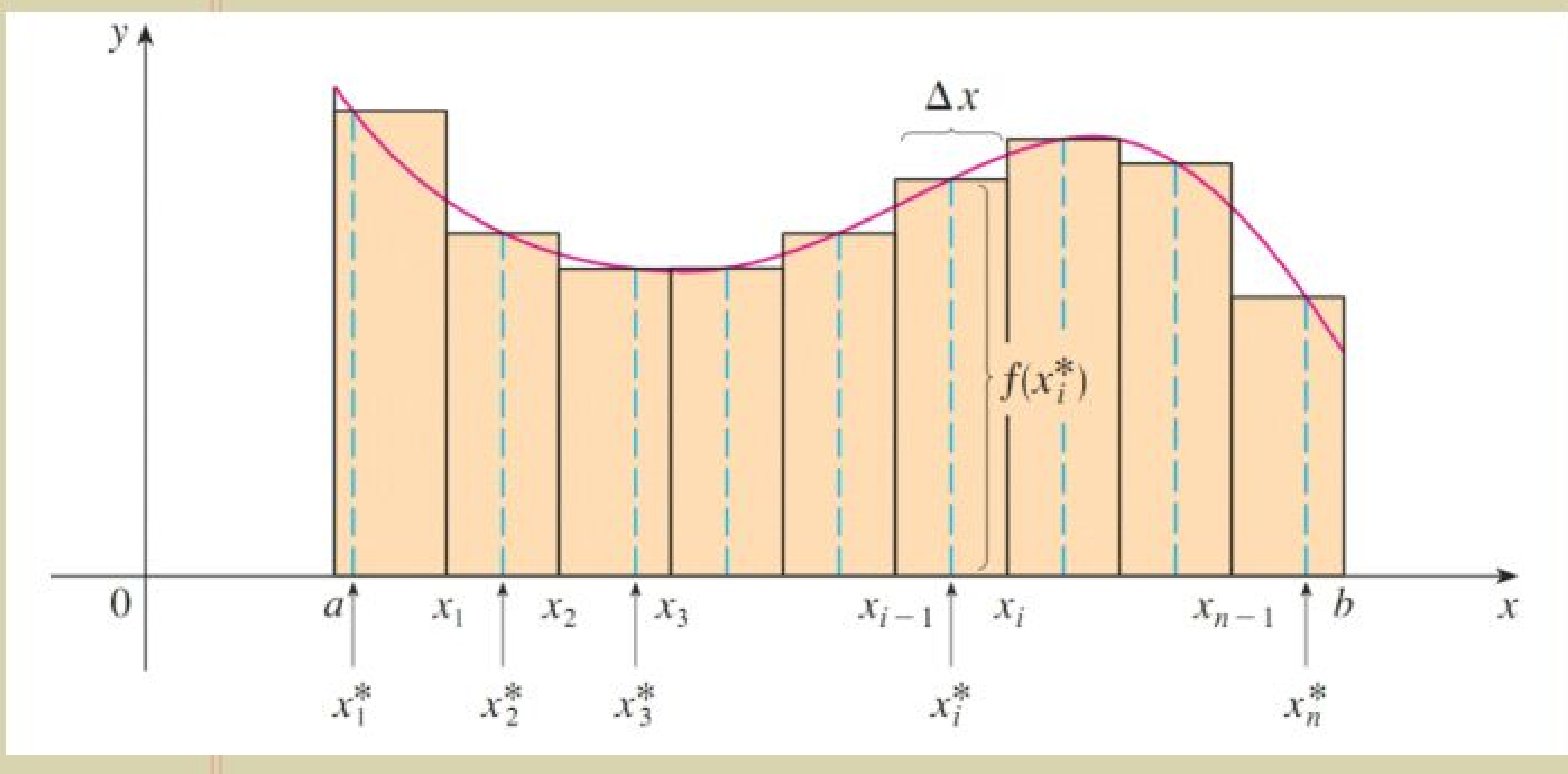
ابتدا مفهوم انتگرال معین توابع یک متغیره را مرور می‌کنیم.

اگر $f(x)$ روی $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد با تقسیم بازه $[a,b]$ به n زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ با طول برابر $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و با انتخاب نقطه‌ای مانند x_i^* در این زیربازه‌ها پس با تشکیل مجموع ریمان

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

و میل دادن $n \to \infty$ (یا $\Delta x \to 0$) انتگرال معین f از a تا b به دست می‌آید.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$



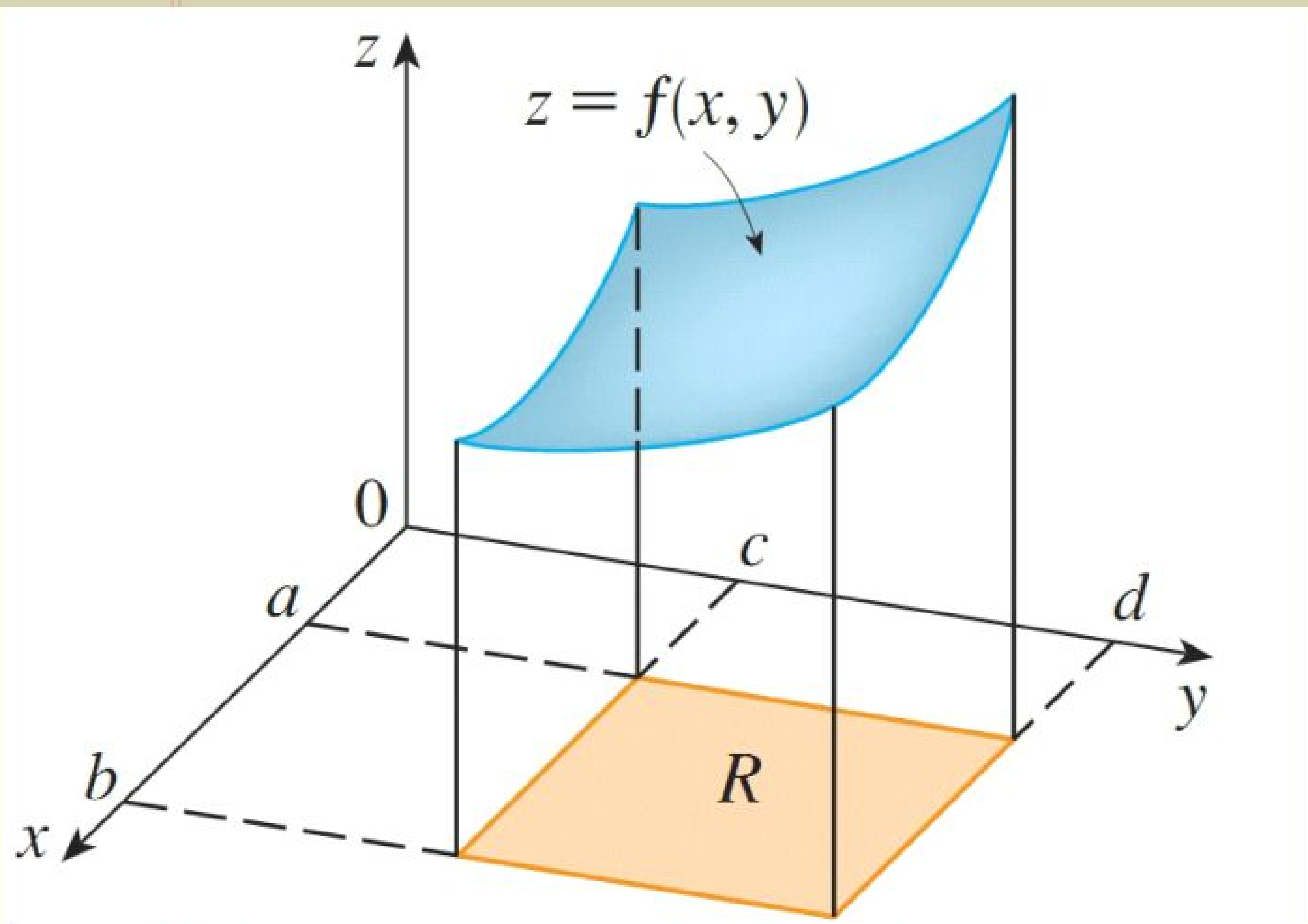
به روش مشابه برای تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ که روی مستطیل بسته

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b ,\ c \leq y \leq d \}$$

تعریف شده می‌خواهیم حجم

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y) \ ,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

را به دست آوریم.



گام اول این است که مستطیل R را به زیر مستطیل هایی تقسیم کنیم برای این کار

بازه $[a,b]$ را به m زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ با طول برابر $\Delta x = \frac{b-a}{m}$

و بازه $[c,d]$ را به n زیر بازه $[y_{j-1}, y_j]$ با طول برابر $\Delta y = \frac{d-c}{n}$

تقسیم می‌کنیم. و با کشیدن خط‌های موازی محورها از نقطه انتهایی این زیربازه‌ها

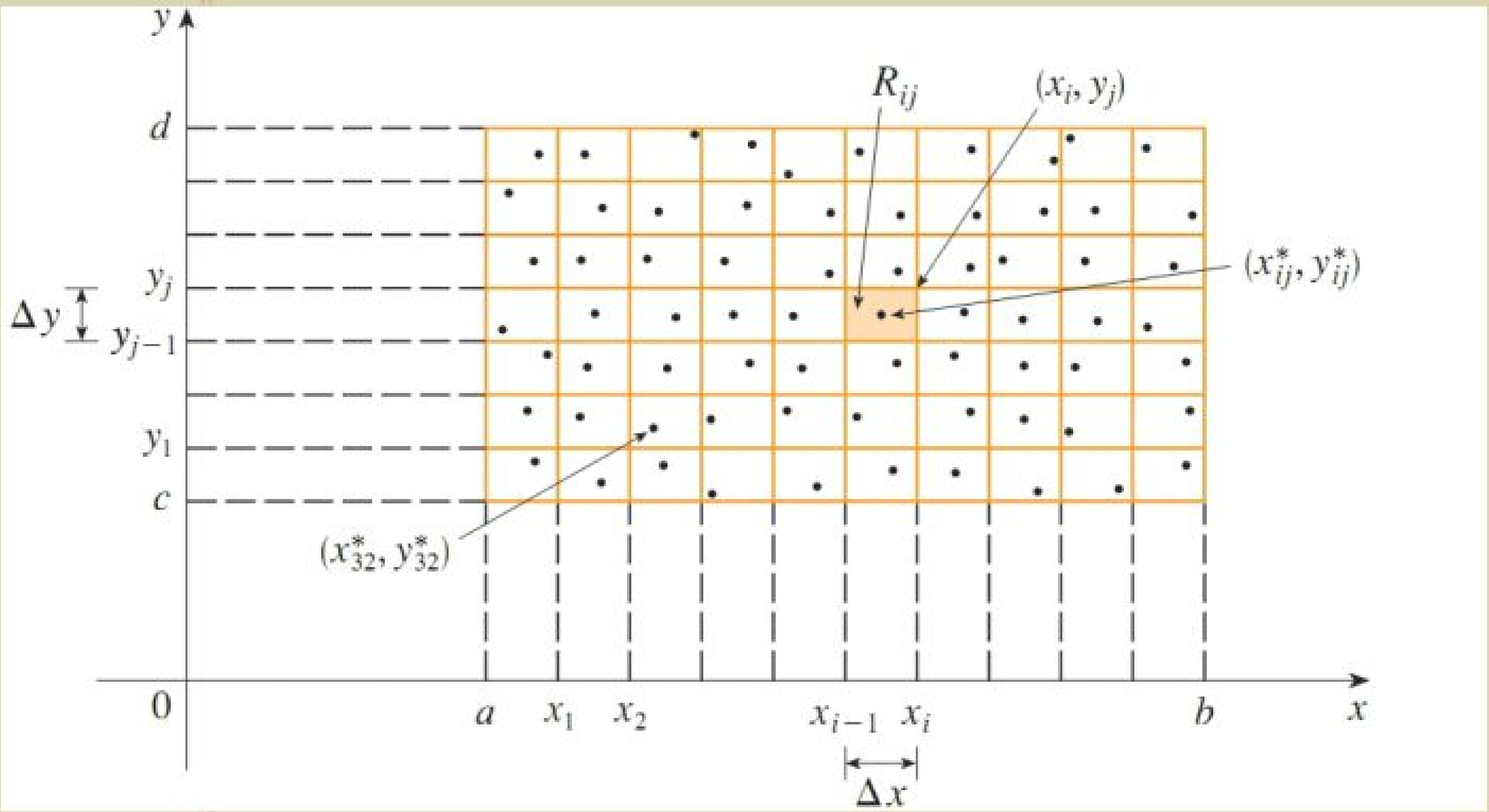
مانند شکل زیر، زیرمستطیل های

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] =$$

$$= \{(x,y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i , y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

را تشکیل می‌دهیم که مساحت هر کدام $\Delta A = \Delta x \Delta y$ می‌باشد.

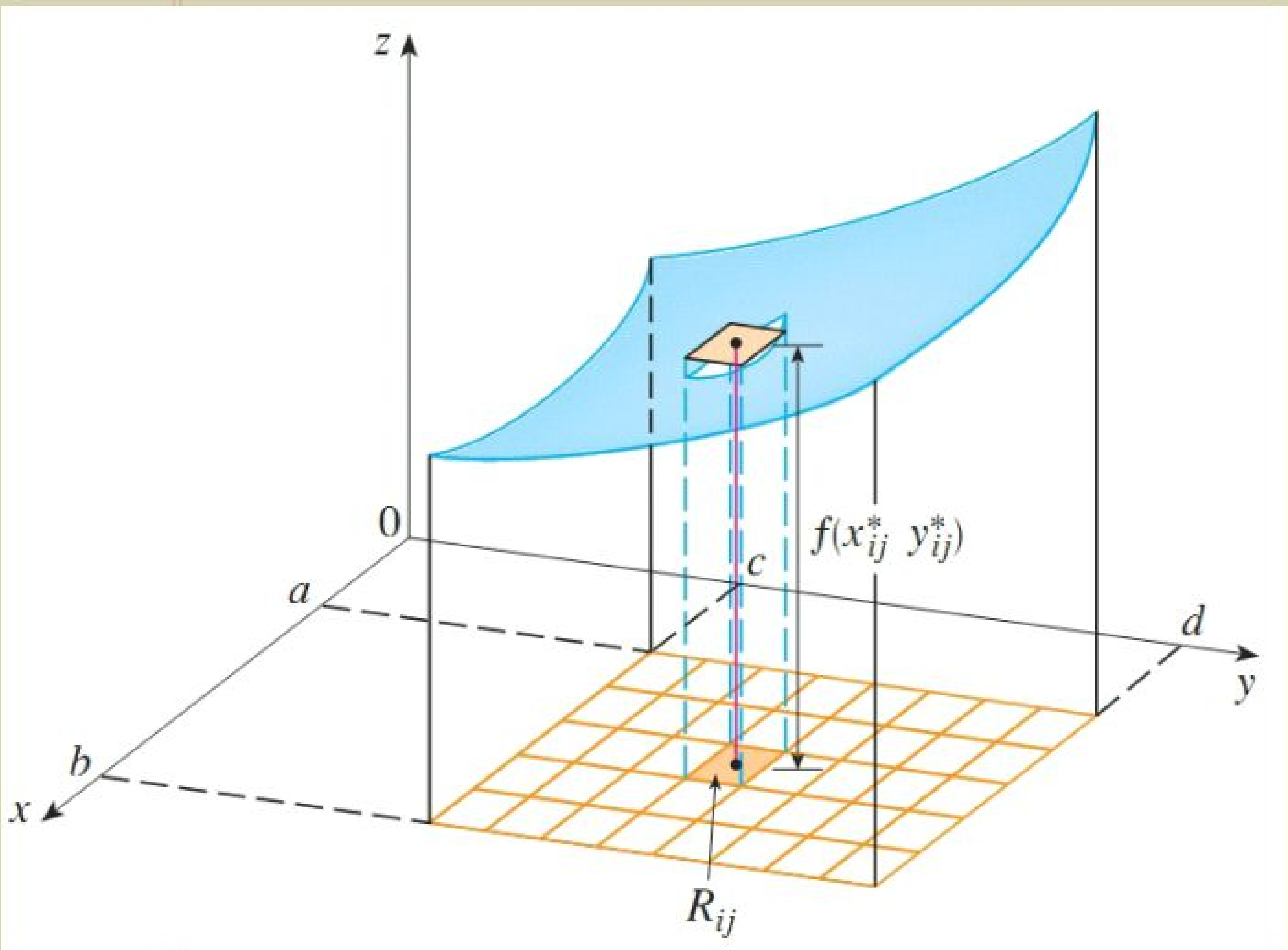
اگر از هر مستطیل R_{ij} نقطه (x_{ij}^*, y_{ij}^*) را انتخاب کنیم



آنگاه مکعب باریکی که قاعده آن R_{ij} و ارتفاع آن $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$

است دارای حجم

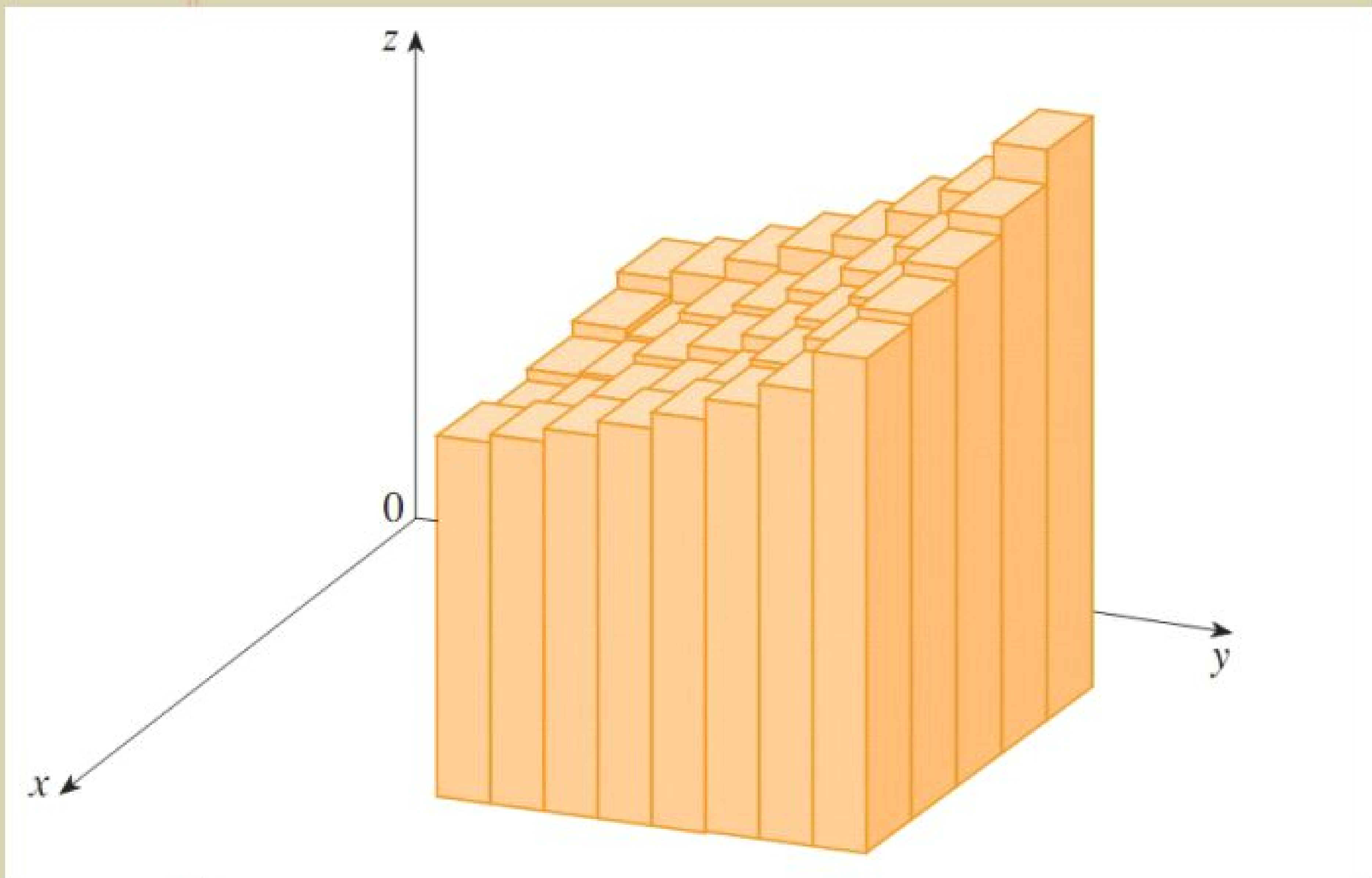
$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$ خواهد بود.



با انجام این روش برای تمام زیرمستطیل‌ها، مجموع حجم مکعب مستطیل‌های باریک تقریبی از حجم S را می‌دهد.

یعنی :

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$



به طور شهودی می‌توان گفت که تقریب این حجم با زیاد کردن m , n
(یا کوچک کردن R_{ij}) بهتر می‌شود

پس می‌توان انتظار داشت که

$$\boxed{1} \qquad V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

تعریف: انتگرال دوگانه f روی مستطیل R به صورت زیر است

$$\boxed{2} \qquad \iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

اگر حد موجود باشد مقدار حد را انتگرال دوگانه و f را انتگرال پذیر می‌نامند.

نقاط (x_{ij}^*, y_{ij}^*) هر نقطه‌ای از زیر مستطیل R_{ij} می‌تواند انتخاب بشود اما اگر ما نقطه گوشهٔ بالا سمت راست R_{ij} را انتخاب کنیم آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A$$

با مقایسه $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ می‌بینیم که حجم را می‌توان به صورت انتگرال دوگانه نوشت.

اگر $z=f(x,y)$ مثبت باشد (بالای صفحه $z=0$) آنگاه حجم جسمی که روی مستطیل R و زیر رویه $z=f(x,y)$ قرار دارد برابر است با

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

ویژگی های انتگرال دوگانه :

فرض کنیم f و g انتگرال پذیر باشند آنگاه

۱) $\displaystyle\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$

۲) $\displaystyle\iint_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$ c ثابت

اگر $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ برای تمام (x,y) در R آنگاه

۳) $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA \geqslant \iint_R g(x,y)\,dA$

تعریف : اگر f انتگرال پذیر باشه آنگاه

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \quad \text{و} \quad \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

را انتگرال های مکرر تابع f روی R می نامیم.

قضیه فوبینی: اگر $f(x,y)$ روی $R=[a,b]\times[c,d]$ پیوسته باشد
آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

قضیه فوبینی می‌گوید که اگر f پیوسته باشد آنگاه انتگرال های
مکرر و انتگرال دوگانه برابرند.

۱– مقدار انتگرال مکرر $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (y\cos x+2)dydx$ برابر کدام گزینه است؟ نیمسال دوم ۹۲-۹۱

۱. $\frac{\pi}{3}+2$ ۲. $\frac{\pi+1}{2}$ ۳. $\pi+\frac{1}{2}$ ✓ ۴. $2\pi+\frac{1}{3}$

$$\int_0^1 (y\cos x+2)\,dy = \frac{y^2}{2}\cos x + 2y \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\cos x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{2}\sin x + 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \pi\right) - 0 = \pi + \frac{1}{2}$$

فاینال اول ۹۳-۹۲

۲۴- حاصل انتگرال دوگانه $\int_0^1\int_0^1 \sin(x+y)dxdy$ برابر است با:

۱. $\sin 2-2\sin 1$ ۲. $2\sin 1-\sin 2$ ✓ ۳. $\sin 1-2\sin 2$ ۴. $2\sin 2-\sin 1$

$$\int_0^1 \sin(x+y)\,dx = -\cos(x+y)\Big|_0^1$$

$$=(-\cos(1+y))-(-\cos y)$$

$$=\cos y-\cos(1+y)$$

$$\int_0^1(\cos y-\cos(1+y))\,dy = \sin y-\sin(1+y)\Big|_0^1$$

$$=(\sin 1-\sin ۲)-(-\sin 1)$$

فاینال دوم ۹۱-۹۰

۱- حاصل $\int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dxdy$ کدام است؟

۱. $e-۱$ ۲. e ۳. $e-۲$ ✓ ۴. $e-۳$

$$\int_0^1 \left[e^{xy}\right]_0^1 dy = \int_0^1 (e^y-1)\,dy$$

$$=\left[e^y-y\right]_0^1 = (e^1-1)-(1)$$

$$= e-۲$$

نیمسال دوم ۹۳-۹۲

۲۱- حاصل انتگرال مکرر $f(x,y)=-x\ln y$ روی $R=[-1,0]\times[1,2]$ برابر است با:

۱. $\frac{\ln 2-2}{2}$ ۲. $\frac{\ln 2-1}{2}$ ۳. $2\ln 2-2$ ۴. $\frac{2\ln 2-1}{2}$ ✓

$$\int_{-1}^{0}\int_{1}^{2} -x\ln y \, dy\, dx = \int_{1}^{2}\int_{-1}^{0} -x\ln y \, dx\, dy$$

$$= \int_{1}^{2}\left(-\ln y \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}\right) dy = \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\ln y \, dy$$

$$= \frac{1}{2}(y\ln y - y)\Big]_{1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((2\ln 2 - 2) - \ln 1 + 1\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(2\ln 2 - \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0} - 1) = \frac{2\ln 2 - 1}{2}$$

نیمسال دوم ۹۲-۹۱

۲- مقدار انتگرال مکرر $\iint_R \frac{y^2}{x^2+1}\,dA$ که در آن ناحیه ی انتگرال گیری $R=[0,1]\times[0,1]$ است برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{6}$ ۳. $\frac{\pi}{8}$ ۴. $\frac{\pi}{12}$ ✓

با توجه به قضیه فوبینی :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y^2}{x^2+1}\,dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{y^3}{3}\right)\right]_0^1 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\tan^{-1}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

مثال: مطلوبست محاسبه حجم جسم محصور به رویه $z = \sin y$ ، صفحه xy

$0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ و $0 \le x \le 1$

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \, dx = \int_0^1 -\cos y \Big]_0^{\pi/2} dx$$

$$= \int_0^1 (0 - (-1)) \, dx = x \Big|_0^1 = 1$$

مثال: مطلوبست محاسبه حجم جسم محصور به صفحات $x=1$ ، $y=1$ ، صفحات مختصات و رویه $z = x^2 + y^4$

صفحات مختصات: $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^4) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{5} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5} x \Big]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$$

مثال : انتگرال $\iint_R \frac{dA}{(x+y)^2}$ را روی $R=[2,3]\times[1,5]$ حساب کنید.

$$\int_2^3\int_1^5 \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx = \int_2^3 \left[\frac{-1}{(x+y)}\right]_1^5 dx$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{-1}{x+5} - \frac{-1}{x+1}\right) dx$$

$$= \Big[-\ln(x+5) + \ln(x+1)\Big]_2^3 = \left[\ln\frac{x+1}{x+5}\right]_2^3$$

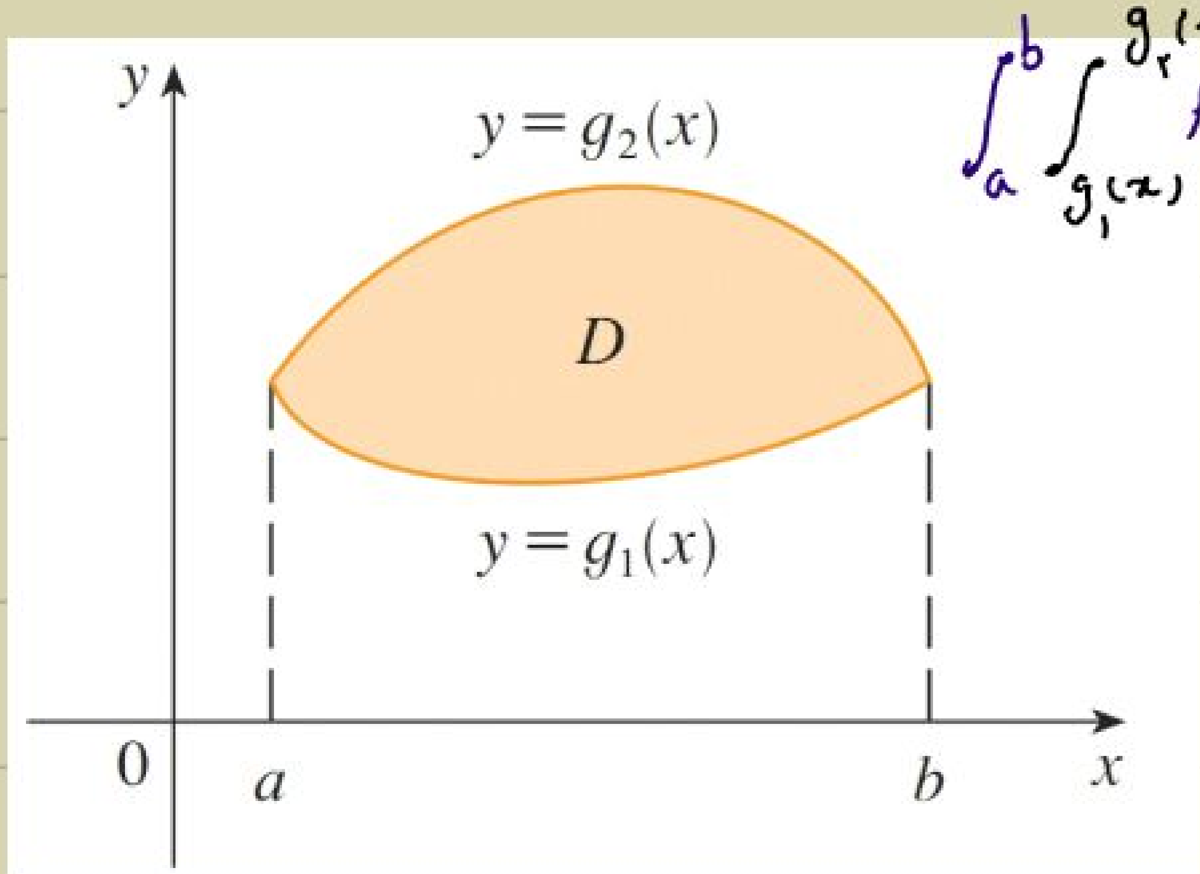
$$= \ln\frac{4}{8} - \ln\frac{3}{7} = \ln\frac{\frac{4}{8}}{\frac{3}{7}}$$

$$= \ln\frac{7}{6} = \ln 7 - \ln 6$$

انتگرال دوگانه روی نواحی کلی‌تر:

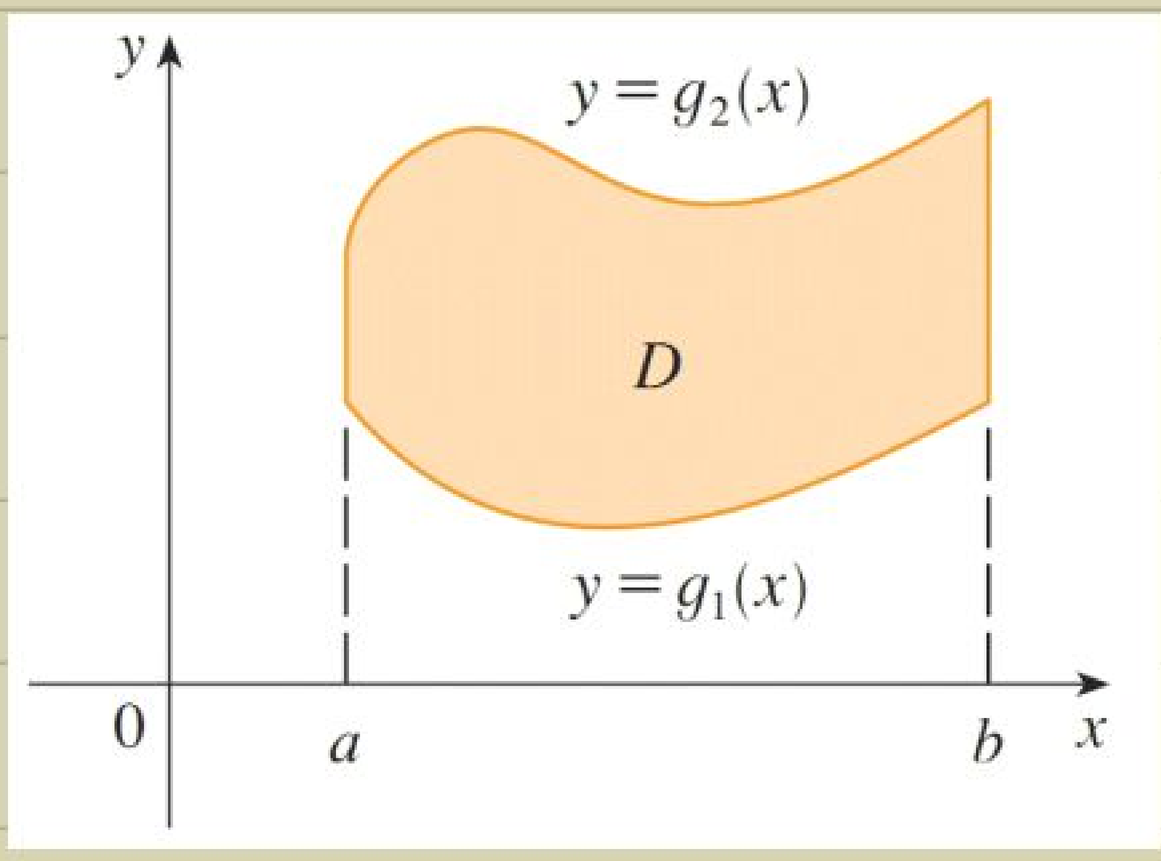
ناحیه نوع اول: اگر $g_1(x)$ و $g_2(x)$ دو تابع پیوسته باشند به طوری که برای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $g_1(x) \le g_2(x)$ آن‌گاه ناحیه زیر را ناحیه نوع اول در صفحه xy می‌نامیم.

$$D = \{ (x,y) \mid a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

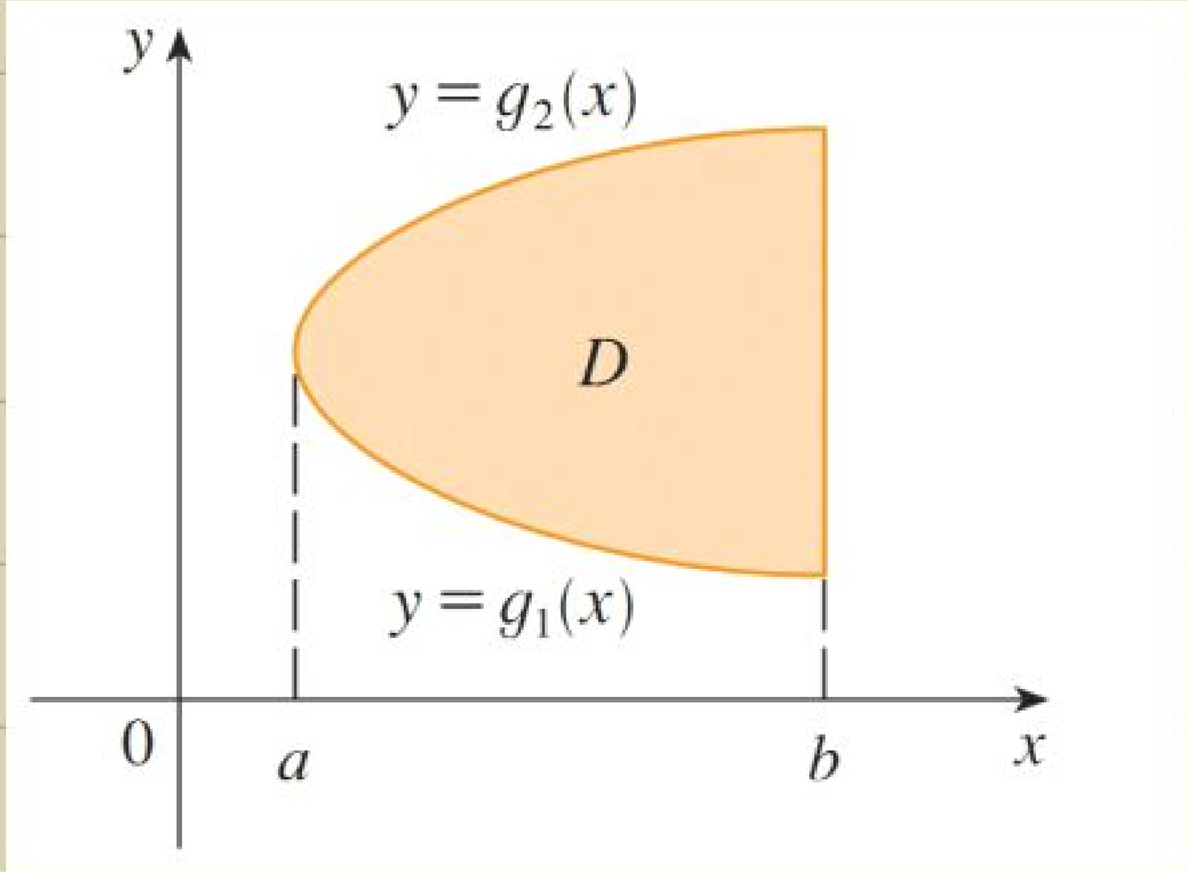


$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

ناحیه نوع اول



ناحیه نوع اول



ناحیه نوع اول

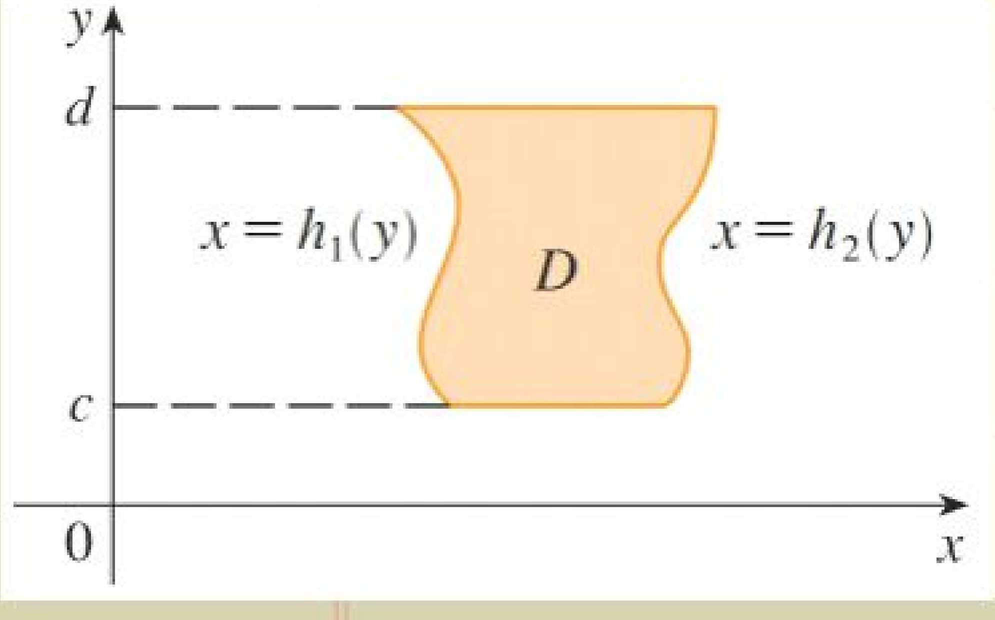
تعریف :

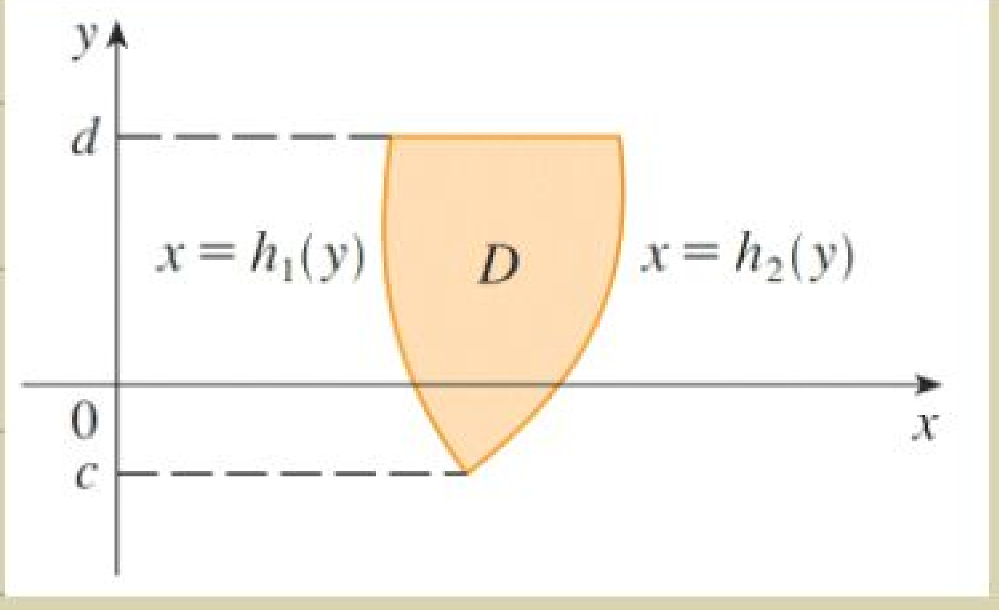
ناحیه نوع دوم : اگر $h_1(y)$ و $h_2(y)$ دو تابع پیوسته باشند به طوری که روی فاصله $[c, d]$ داشته باشیم $h_1(y) \leq h_2(y)$ آن‌گاه ناحیه

$$D = \{ (x, y) \mid h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y) \quad و \quad c \leq y \leq d \}$$

را ناحیه نوع دوم در صفحه xy می‌نامیم.

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$



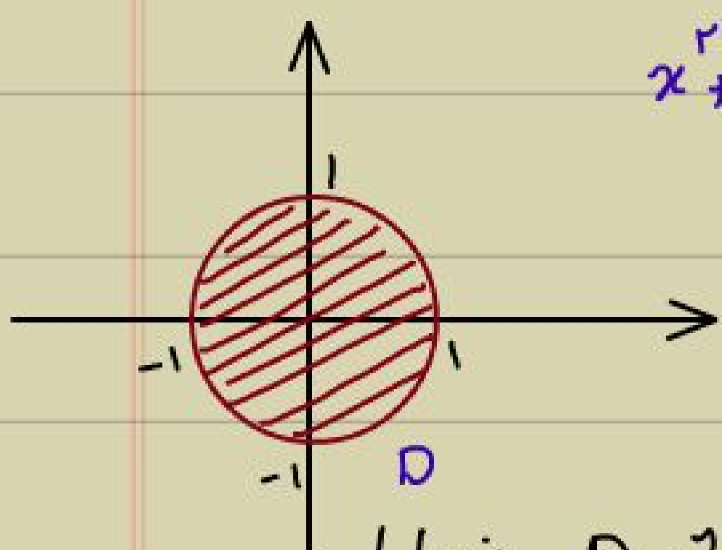


ناحیه نوع دوم

در واقع هر ناحیه در صفحه xy طوری باشه که هر نقطه (x,y) از آن ناحیه اگر مولفه اول یعنی x بین دو عدد باشد و مولفه دوم بین دو تابع پیوسته روی این دو عدد باشد ناحیه اول و اگر مولفه دوم یعنی y بین دو عدد و مولفه اول بین دو تابع پیوسته روی این دو عدد باشد ناحیه دوم نامیده می‌شود.

تعریف: هر ناحیه که هم نوع اول و هم نوع دوم باشد، ناحیه نوع سوم می‌نامیم.

مثال: ناحیه داخل و روی دایره $x^2+y^2=1$ یک ناحیه از نوع سوم است.



نوع اول ← $D=\{(x,y): -1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\}$

نوع: $D=\{(x,y): -\sqrt{1-y^2}\le x\le \sqrt{1-y^2},\ -1\le y\le 1\}$

پس از نوع سوم می‌باشد.

اگر ناحیه D از نوع سوم باشد آنگاه می‌توانیم ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم.

یعنی

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

(نوع اول) (نوع دوم)

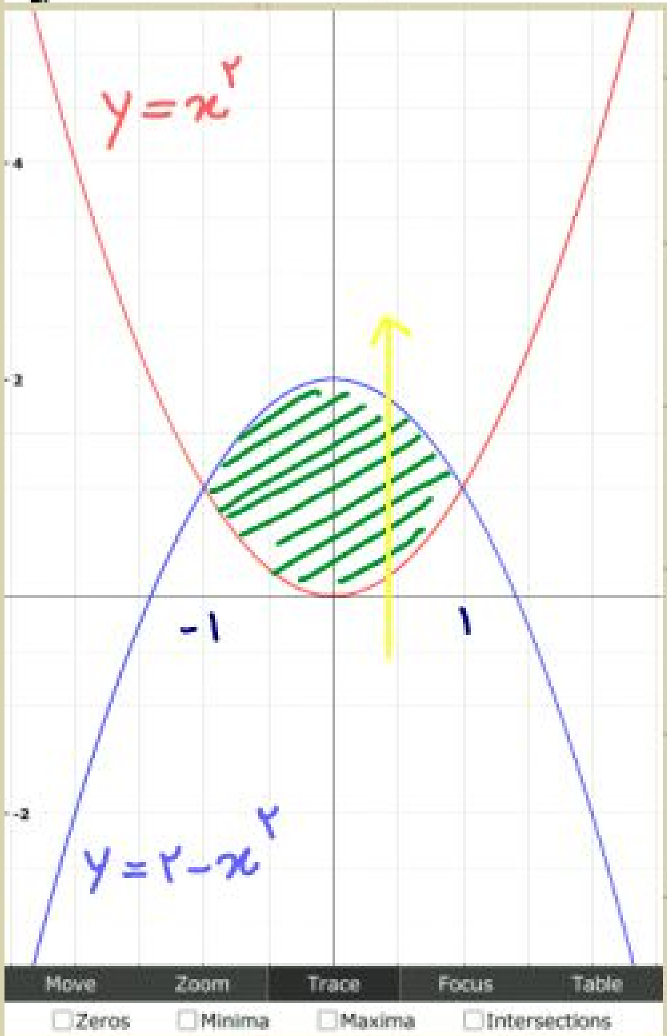
توجه: همیشه در یک انتگرال مکرر حدود انتگرال سمت چپ باید دو عدد باشند.

محاسبه انتگرال روی نواحی کلی تر !

میانترم دوم ۹۱-۹۰

۲- حاصل انتگرال تابع $f(x,y)=2xy$ روی ناحیه محصور به دو منحنی $y=x^2$ و $y=2-x^2$ کدام است؟

۱. صفر ✓　　۲. ۱　　۳. ۲　　۴. ۱-



مختصات محل تلاقی دو منحنی را پیدا می‌کنیم :

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2=2-x^2 \Rightarrow x^2=1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

ناحیه از نوع اول است :　$-1\le x\le 1$

$$x^2\le y\le 2-x^2$$

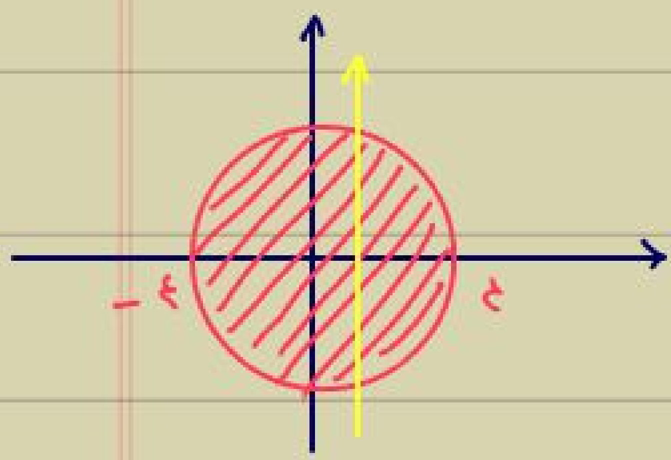
$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} 2xy\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left(xy^2\Big]_{x^2}^{2-x^2}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(x(2-x^2)^2-x^5\right)dx=\int_{-1}^{1}(4x-4x^3)\,dx$$

$$=2x^2-x^4\Big|_{-1}^{1}=(2-1)-(2-1)=0$$

۲۲- حجم جسم محصور به نمودار تابع $f(x,y)=y+2x+20$ و ناحیه $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 16\}$ و استوانه ساخته شده روی D برابر است با:

۱. π ۲. 320π ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. 180π



ناحیه از نوع سوم است، قرار می‌دهیم

$$-4 \le x \le 4$$

$$-\sqrt{16-x^2} \le y \le \sqrt{16-x^2}$$

$$\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (y+2x+20)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-4}^{4}\left(\left(\frac{y^2}{2}+2xy+20y\right)\Bigg|_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$$

$$= \int_{-4}^{4}\left[\left(\cancel{\frac{16-x^2}{2}}+2x\sqrt{16-x^2}+20\sqrt{16-x^2}\right)-\left(\cancel{\frac{16-x^2}{2}}-2x\sqrt{16-x^2}-20\sqrt{16-x^2}\right)\right]dx$$

$$= \int_{-4}^{4}\left(4x\sqrt{16-x^2}+40\sqrt{16-x^2}\right)dx$$

انتگرال $\int_{-4}^{4} 4x\sqrt{16-x^2}\,dx$ برابر صفر می‌باشد چون تابع زیر انتگرال فرد و حدود انتگرال متقارن می‌باشد.

$$\int_{-4}^{4} 40\sqrt{16-x^2}\,dx$$

(برای انتگرال های به صورت $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ از تغییر متغیر $x = a\sin t$ یا $x = a\cos t$ را انجام می‌دهیم.)

$$x = 4\sin t \rightarrow dx = 4\cos t\,dt$$

$$x=-4 \rightarrow -4 = 4\sin t \rightarrow \sin t = -1 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$

$$x=4 \rightarrow 4 = 4\sin t \rightarrow \sin t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-4}^{4} 40\sqrt{16-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 40\sqrt{16-16\sin^2 t}\;4\cos t\,dt$$

$$= 40\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos t\,4\cos t\,dt = 640\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 320\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = 320\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 320\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 320\pi$$

فاینال دوم ۹۲-۹۱

۳- مقدار انتگرال دوگانه ی $I=\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\,dydx$ برابر است با:

۱. $2e-\frac{1}{2}$ ۲. $\ln 2-\frac{1}{4}$ ۳. $\frac{1}{2}(e-1)$ ✓ ۴. $2\ln 2-1$

فاینال اول ۹۳-۹۲

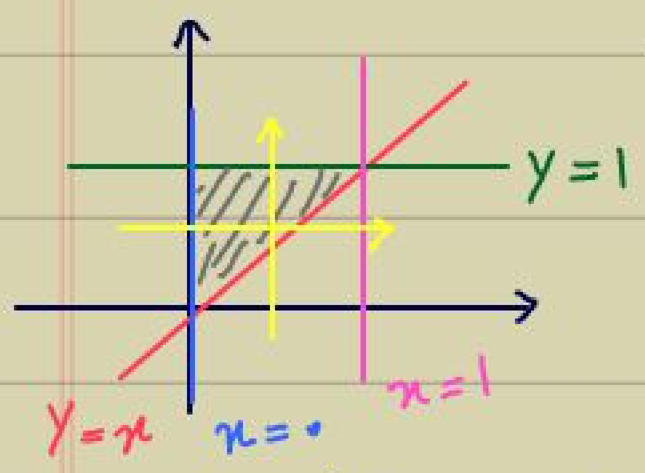
۴- حاصل انتگرال زیر را بیابید. ۱.۷۵ نمره

$$\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\,dydx$$

فاینال اول ۹۲-۹۱

۱- انتگرال دوگانه $\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\,dydx$ را محاسبه کنید. ۱.۴۰ نمره

با این ترتیب نمی‌توان انتگرال را محاسبه کرد بنابراین ترتیب انتگرال را عوض می‌کنیم برای این کار ناحیه را ترسیم می‌کنیم.



$$x \le y \le 1$$

$$0 \le x \le 1$$

ناحیه از نوع سوم است و انتگرال روی ناحیه نوع اول نوشته شده بنابراین به صورت ناحیه نوع دوم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^y e^{y^2}\,dxdy = \int_0^1 \left[x e^{y^2}\right]_0^y dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy$$

$$\int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

میان ترم اول ۹۲-۹۱

۱- مقدار انتگرال دو گانه $\int_0^1\int_0^x y^2\sqrt{x}\,dy\,dx$ برابر کدام است؟

۱. $\frac{2}{27}$ ✓ ۲. $\frac{4}{15}$ ۳. $\frac{3}{7}$ ۴. $\frac{13}{17}$

$$\int_0^1\int_0^x y^2\sqrt{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x}\,\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\,\frac{x^3}{3}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{27}$$

پایان‌ترم ۹۱-۹۰

۳- $\int_0^1\int_y^1 \sin \pi x^2 dxdy$ با تعویض ترتیب انتگرال گیری برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\int_0^1\int_x^1 \sin \pi x^2 dydx$

۲. $\int_0^1\int_0^x \sin \pi x^2 dydx$

۳. $\int_0^1\int_0^x \sin \pi x^2 dxdy$

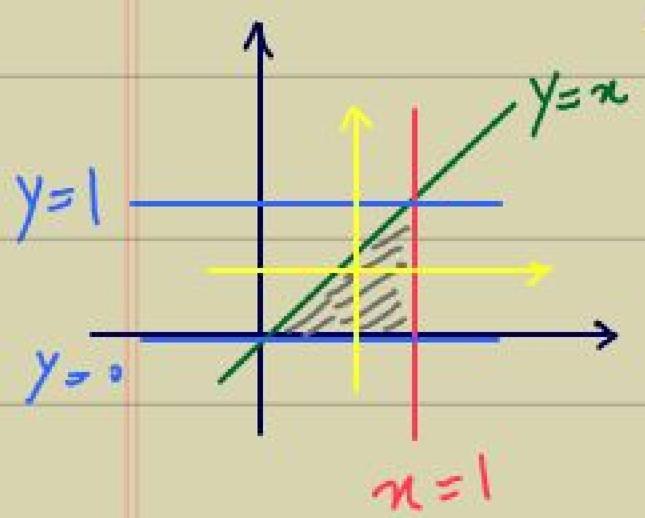
۴. $\int_0^1\int_x^1 \sin \pi x^2 dxdy$

پایان‌ترم ۹۲-۹۱

۱- الف) با استفاده از تغییر ترتیب انتگرال گیری مقدار انتگرال مکرر $\int_0^1\int_y^1 \sin \pi x^2 dxdy$ را محاسبه کنید. ۱.۴۰ نمره

ناحیه را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} y \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

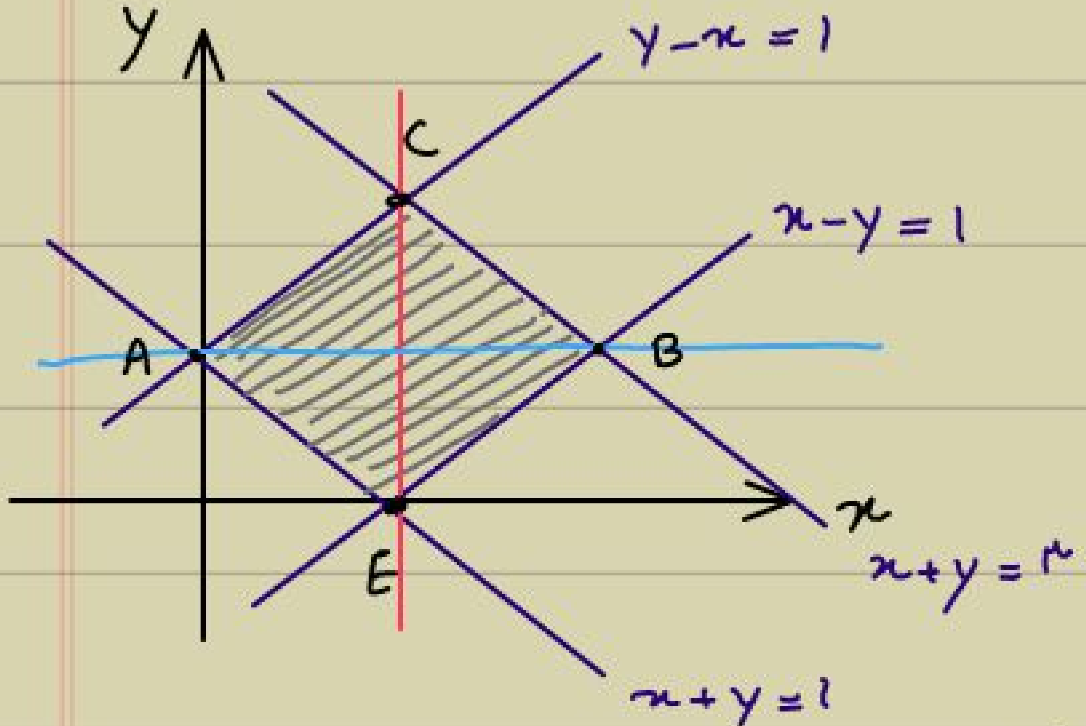
$$\int_0^1 \int_0^x \sin \pi x^2 \, dy\, dx = \int_0^1 \left[y \sin \pi x^2 \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x \sin \pi x^2 \, dx = \frac{-1}{2\pi} \cos \pi x^2 \Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{1}{2\pi}$$

اگر نواحی انتگرال گیری از نوع اول ، دوم یا سوم نباشند با تقسیم نواحی به ناحیه های نوع اول ، دوم یا سوم انتگرال گیری می کنیم .

مثال : ناحیه D محصور به خطوط $x+y=1$ و $x-y=1$ ، $y-x=1$ و $x+y=3$ را در نظر می گیریم .



اگر نقاط A, B را به هم وصل کنیم دو ناحیه از نوع دوم به دست می آید و اگر نقاط C, E را به هم وصل کنیم باز دو ناحیه از نوع اول به دست می آید و

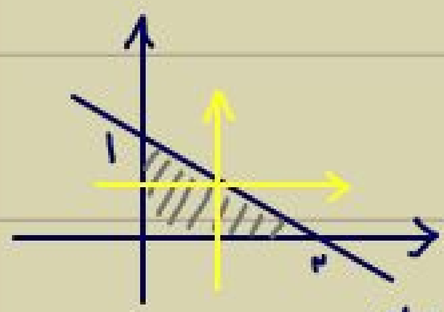
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA$$

نیمسال دوم ۹۱-۹۰

۱- حجم هرمی که توسط صفحات مختصات و صفحه $x+2y+z=2$ محصور شده است بدست آورید. **۱.۴۰ نمره**

صفحات مختصات $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

صفحه $x+2y+z=2$ صفحه xy را روی خط $x+2y=2$ قطع میکند



$x+2y=2$

$$\int_0^1\int_0^{2-2y}(2-x-2y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left[2x-\frac{x^2}{2}-2yx\right]_0^{2-2y}dy$$

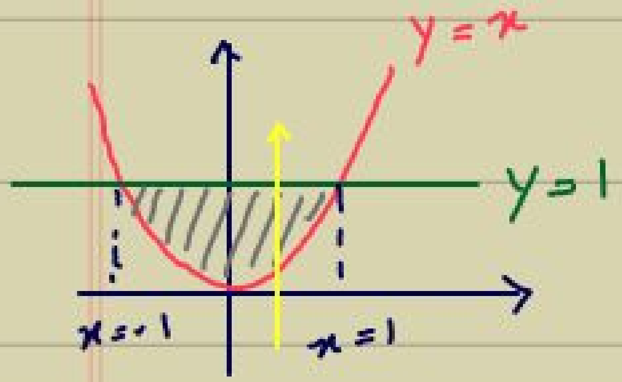
$$=\int_0^1\left(2(2-2y)-\frac{(2-2y)^2}{2}-2y(2-2y)\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(4-4y-\frac{1}{2}(4-8y+4y^2)-4y+4y^2\right)dx$$

$$=\int_0^1(2-4y+2y^2)\,dy=\left[2y-2y^2+\frac{2}{3}y^3\right]_0^1$$

$$=2-2+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

مثال: حجم جسم محصور به صفحات $y=1$ ، $z=0$ ، استوانه $y=x^2$
در رویه $z=x^2+y^2$ را محاسبه کنید.



$$\begin{cases} y=1 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 1$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\left(x^2+\frac{1}{3}\right)-\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3}\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1}$$

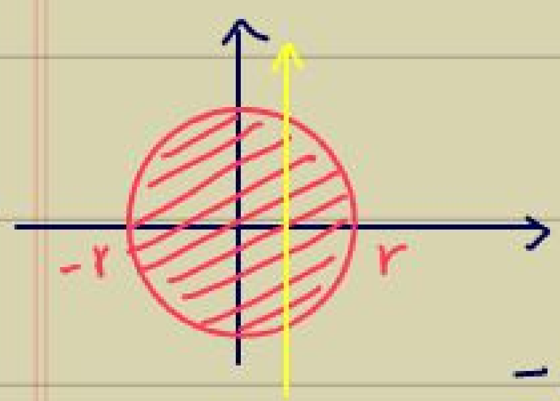
$$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{21}\right)$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{21} = \frac{4}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{21}$$

$$= \frac{140-42-10}{105} = \frac{88}{105}$$

اگر روی هر ناحیه‌ای انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)=1$ را بگیریم
مساحت ناحیه به دست می‌آید.

مثال: انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)=1$ را روی ناحیه
$D=\{(x,y): x^2+y^2\le r^2\}$ حساب کنید.



$$-r \le x \le r$$

$$-\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}$$

$$\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\,dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$\begin{cases} x = r\sin t \longrightarrow dx = r\cos t\,dt \\ x=-r \rightarrow t=-\frac{\pi}{2}\,, \quad x=r \longrightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2\cos^2 t\,dt$$

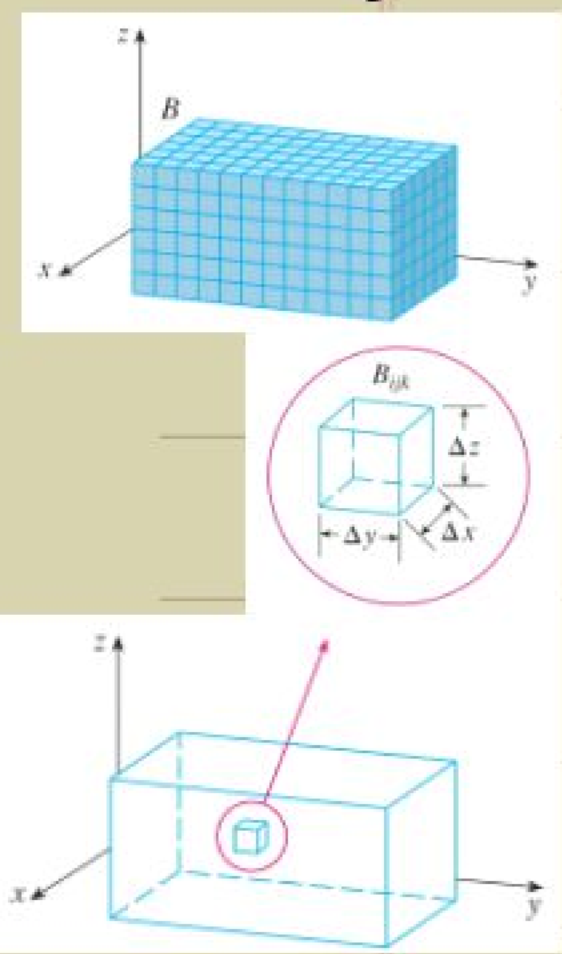
$$= r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = r^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \pi r^2$$

انتگرال سه گانه

همانگونه که انتگرال یگانه را برای توابع تک متغیره و انتگرال دوگانه را برای توابع دو متغیره تعریف کردیم می توانیم انتگرال سه گانه را برای توابع سه متغیره تعریف کنیم.

در ساده ترین حالت فرض کنید f روی یک مکعب مستطیل مانند B تعریف شده باشد



$$B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$$

$$B = \{ (x,y,z) \mid a \le x \le b \ , \ c \le y \le d \ , \ r \le z \le s \}$$

با تقسیم B به زیر مکعب مستطیلهای

$$B_{ijk} = \underbrace{[x_{i-1}, x_i]}_{\Delta x} \times \underbrace{[y_{j-1}, y_j]}_{\Delta y} \times \underbrace{[z_{k-1}, z_k]}_{\Delta z}$$

هر زیر مکعب دارای حجم $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ می باشد

با تشکیل مجموع سه گانه ریمان

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta V$$

که در آن $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ نقطه ای از B_{ijk} می باشد.

تعریف: انتگرال سه گانه f روی مکعب مستطیل B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V$$

اگر حد موجود باشد f را انتگرال پذیر و مقدار حد را برابر انتگرال ۳ گانه f روی B می‌نامند.

تعریف: اگر f روی B انتگرال پذیر باشد آنگاه انتگرال زیر را یک انتگرال مکرر می‌نامیم.

$$\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_r^s f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

۵ صورت دیگر برای انتگرال مکرر تابع f روی B می‌توانیم بنویسیم.

نیمسال دوم ۹۲-۹۱

۴- مقدار انتگرال $\int_1^2\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)dzdydx$ برابر کدام است؟

۱. 6 ✓ ۲. 10 ۳. 15 ۴. 20

نیمسال اول ۹۲-۹۱

۲- مقدار انتگرال مکرر $\int_1^2\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)dzdydx$ برابر است با:

۱. $\frac{1}{6}$ ۲. 6 ✓ ۳. $\frac{1}{5}$ ۴. $\frac{3}{8}$

نیمسال دوم ۹۱-۹۰

۴- حاصل $\int_1^2\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)dzdydx$ کدام است؟

۱. ۶ ✓ ۲. ۳ ۳. $\frac{۱}{۲}$ ۴. ۲

$$\int_1^2\int_0^2 \left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 dy\,dx$$

$$=\int_1^2\int_0^2 \left(x+y+\frac{1}{2}\right)dy\,dx=\int_1^2\left[xy+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}y\right]_0^2 dx$$

$$=\int_1^2 (2x+3)\,dx=\left[x^2+3x\right]_1^2$$

$$=(4+6)-(1+3)=6$$

قضیه فوبینی: مشابه انتگرال دوگانه اگر f روی B پیوسته باشد آنگاه انتگرال ۳ گانه برابر انتگرال‌های مکرر است. (هر ۶ انتگرال مکرر)

مثال: اگر $E=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ باشد مطلوبست محاسبه

$$\iiint_E x^2\,dV$$

طبق قضیه فوبینی:

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{3}\,dy\,dz$$

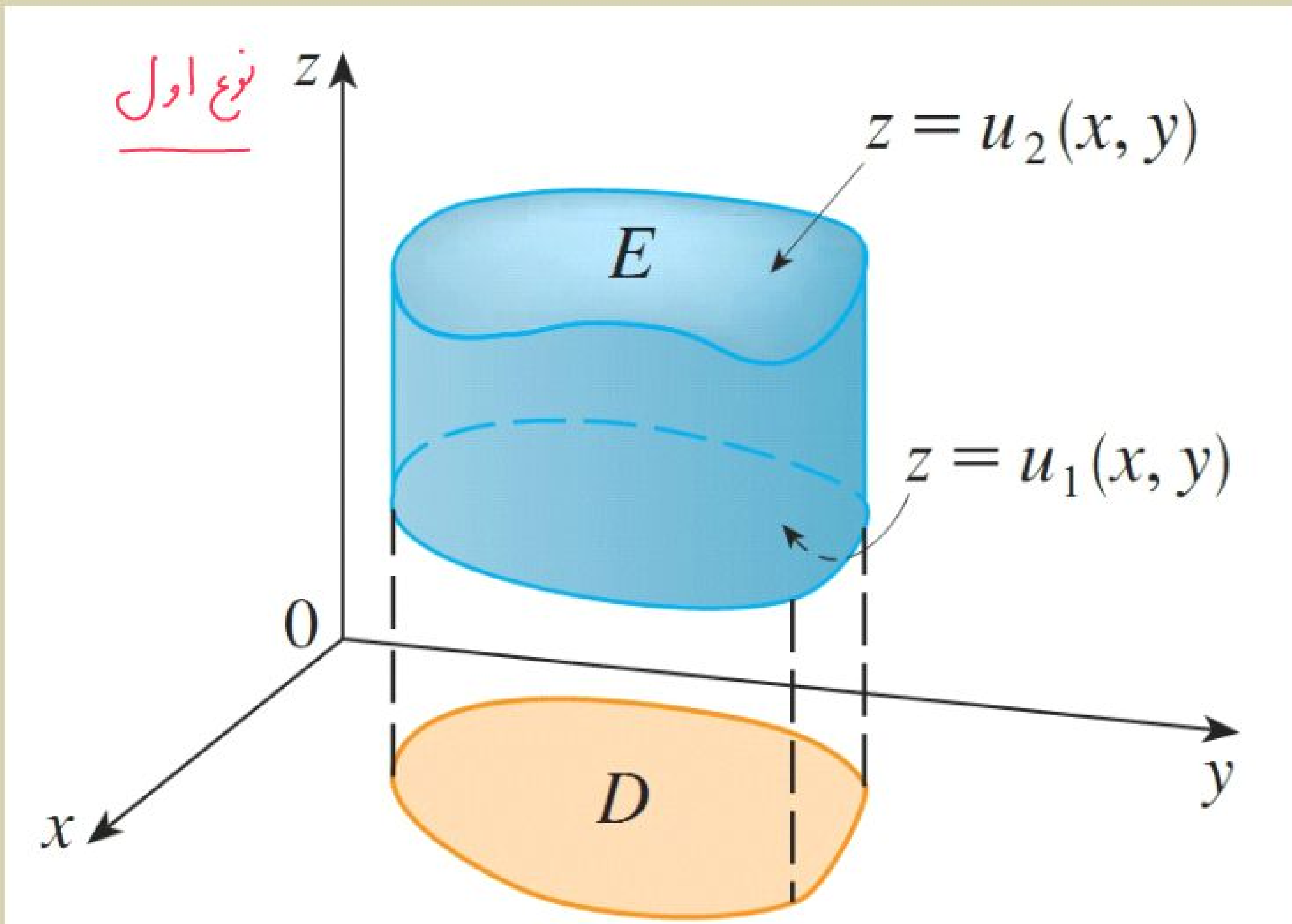
$$= \int_0^1 \frac{1}{3}y\Big]_0^1 dz = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dz = \frac{1}{3}$$

انتگرال‌گیری سه‌گانه روی نواحی کلی‌تر:

نواحی مقدماتی نوع اول، نوع دوم، نوع سوم و نوع چهارم

می‌خواهیم انتگرال سه‌گانه f را روی ناحیه مقدماتی E محاسبه کنیم:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV$$



$$E = \left\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\right\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

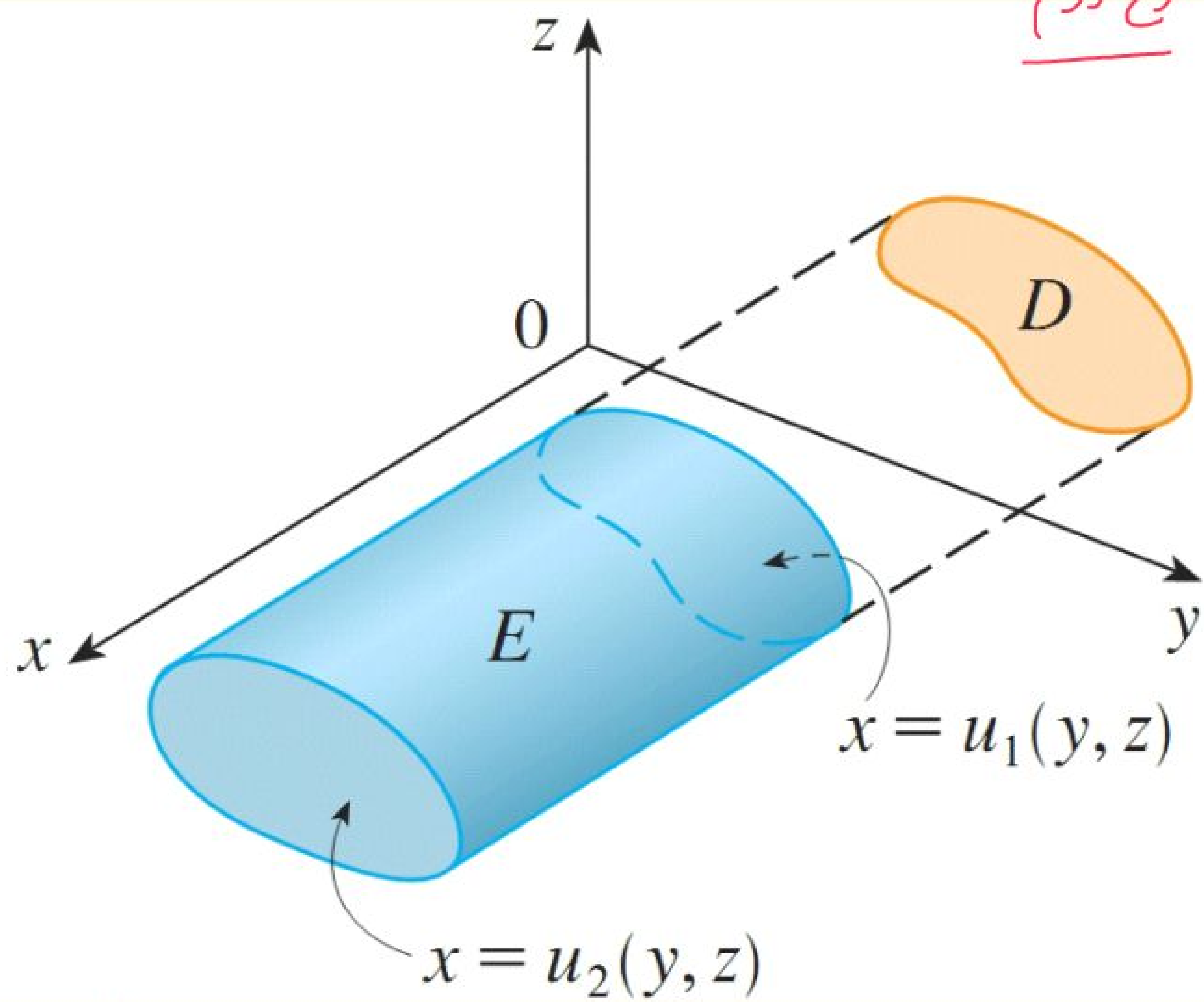
$$E = \left\{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\right\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$E = \left\{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\right\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

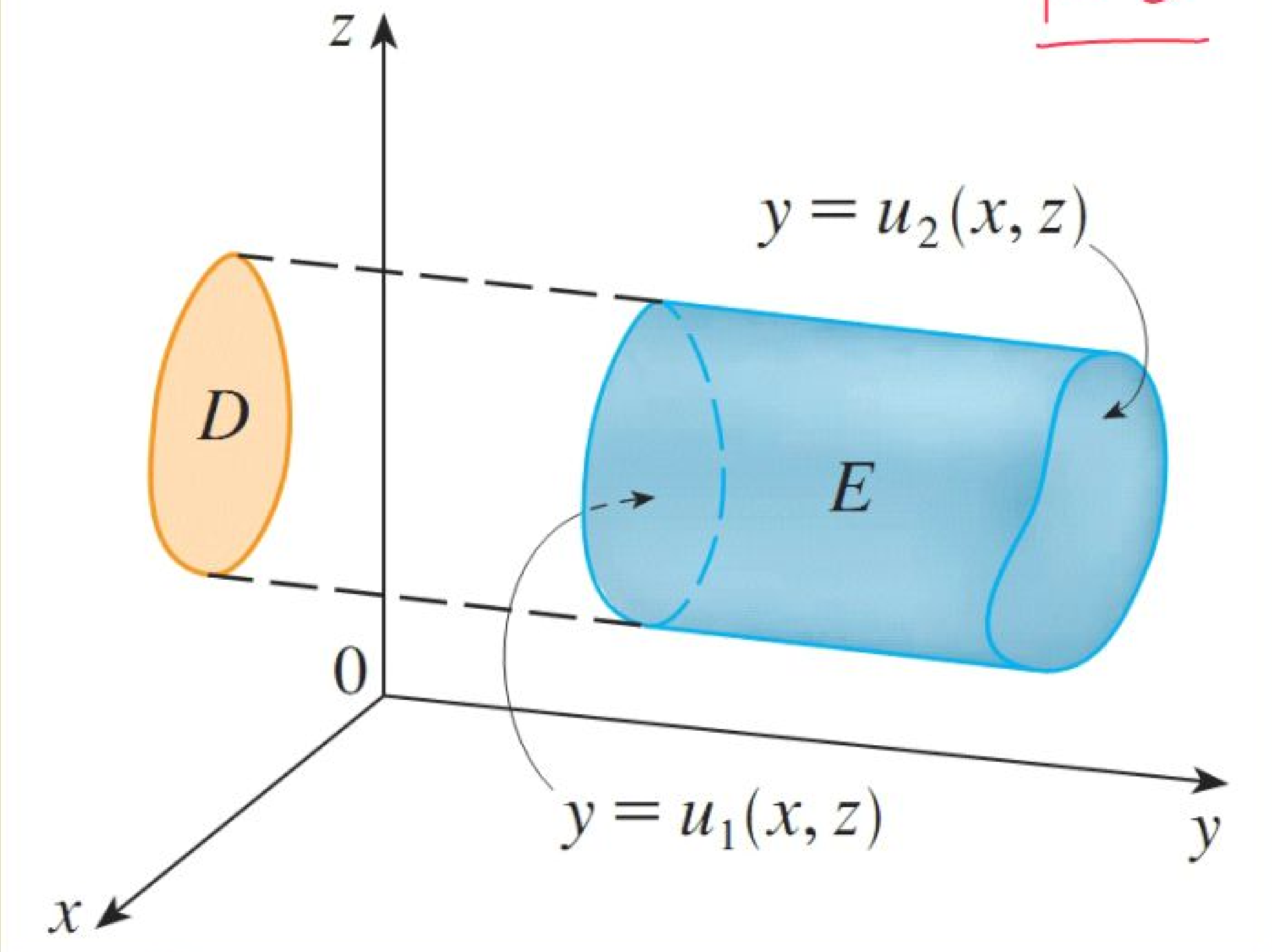
نوع دوم



$$E = \left\{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\right\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

نوع سوم



$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

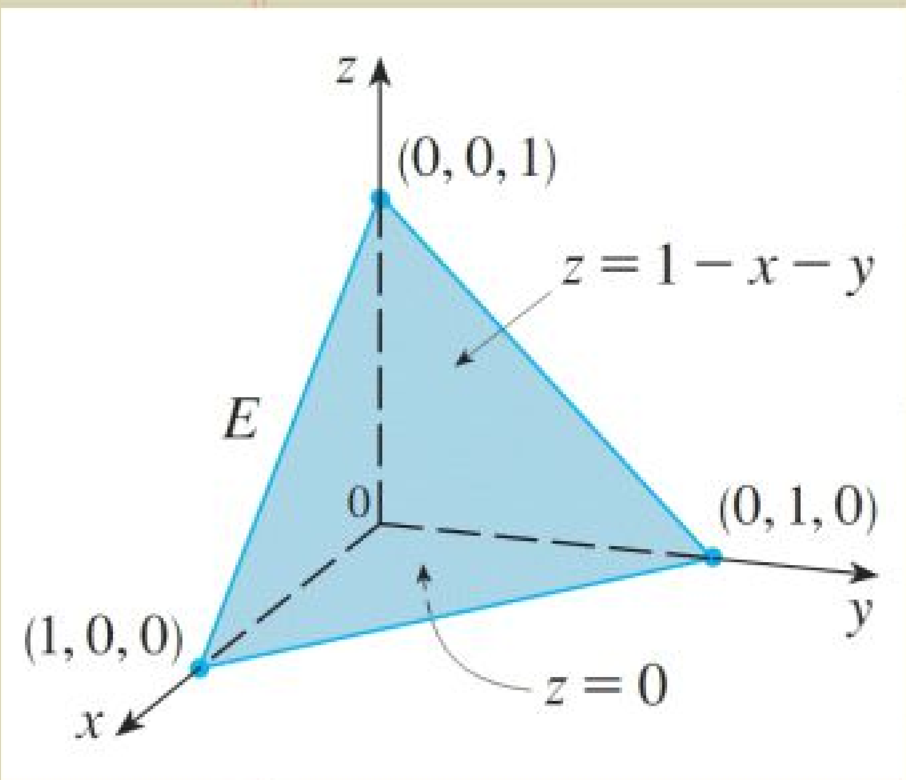
واگر ناحیه‌ای هم از نوع اول هم از نوع دوم و هم از نوع سوم باشد را ناحیه مقدماتی نوع چهارم می‌نامیم.

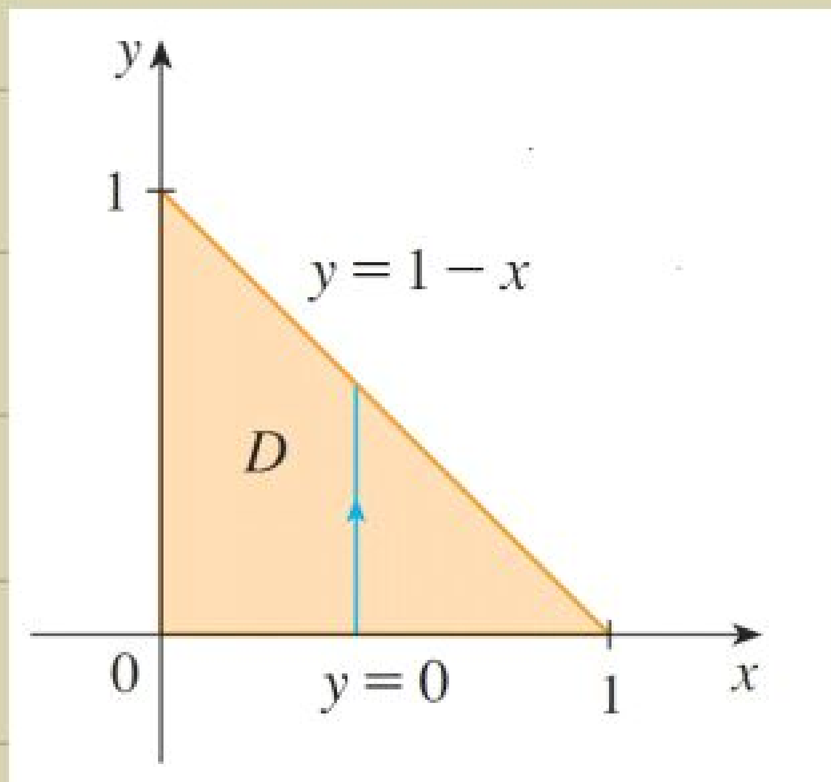
کلیه قضیه‌ها برای انتگرال‌های دوگانه برای انتگرال‌های ۳گانه نیز برقرار است.

- اگر ناحیه مقدماتی نباشد ناحیه را به ناحیه‌های مقدماتی تقسیم کرده و روی هر یک جداگانه انتگرال سه‌گانه را حساب کرد و نتایج را با هم جمع کرد.

نیمسال دوم ۹۲-۹۱

ب) اگر W جسم محصور به صفحات $x+y+z=1$ و $x=0, y=0, z=0$ باشد، انتگرال $\iiint_W x\,dV$ را محاسبه کنید.





$$0 \le x \le 1$$

$$0 \le z \le 1-x-y \qquad 0 \le y \le 1-x$$

$$\iiint_W x\,dv = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$

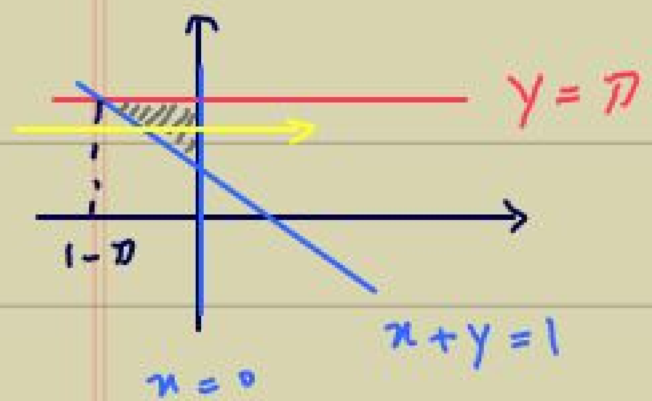
$$= \int_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - x\frac{(1-x)^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

نیمسال اول ۹۱_۹۲

۲- اگر W ناحیه محصور به پنج صفحه $z=0$, $z=\pi$, $y=\pi$, $x=0$, $x+y=1$ باشد، انتگرال $\iiint\limits_{W} x^2 \sin z\,dv$ را محاسبه کنید. **۱.۴۰ نمره**



$$\begin{cases} y=\pi \\ x+y=1 \end{cases} \longrightarrow x = 1-\pi$$

$$1-y \le x \le 0$$

$$1 \le y \le \pi$$

$$0 \le z \le \pi$$

$$\iiint\limits_{W} x^2 \sin z\, dv = \int_1^{\pi}\int_{1-y}^{0}\int_0^{\pi} x^2 \sin z\, dz\, dx\, dy$$

$$= \int_1^{\pi}\int_{1-y}^{0} \left[-x^2\cos z\right]_0^{\pi} dx\, dy = \int_1^{\pi}\int_{1-y}^{0} 2x^2\, dx\, dy$$

$$= \int_1^{\pi} \frac{2}{3}x^3\Big]_{1-y}^{0} dy = \int_1^{\pi} -\frac{2}{3}(1-y)^3\, dy$$

تغییر متغیر: $1-y=t \rightarrow -dy=dt \rightarrow dy=-dt$

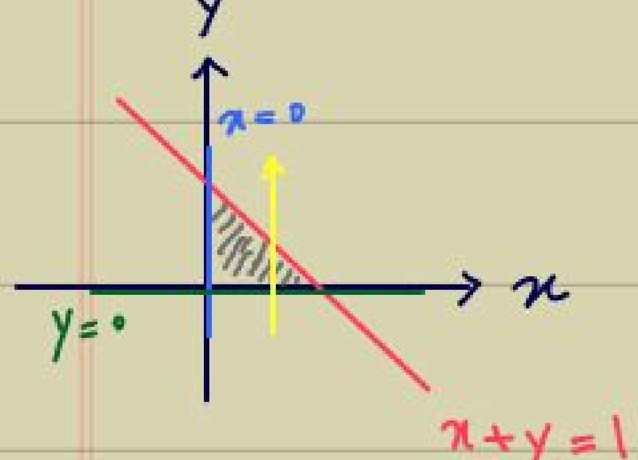
, $y=1 \rightarrow t=0$, $y=\pi \rightarrow t=1-\pi$

$$\int_0^{1-\pi} +\frac{2}{3}t^3\, dt = \frac{2}{3}\,\frac{t^4}{4}\Big|_0^{1-\pi} = \frac{1}{6}(1-\pi)^4$$

محاسبه حجم :

برای محاسبه حجم یک فضای سه بعدی کافی است از تابع $f(x,y,z)=1$ روی ناحیه مزبور انتگرال سه گانه بگیریم.

مثال: اگر W ناحیه محصور به صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$ و $z=x+y$ و $x+y=1$ باشد، حجم آن را محاسبه کنید.



سایه را روی xy درنظر می‌گیریم:

$$0 \le x \le 1$$

$$0 \le y \le 1-x$$

$$0 \le z \le x+y$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x \Big]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تغییر متغیر در انتگرال چندگانه :

در مواردی که انتگرال گیری از تابع زیر علامت انتگرال نسبت به هر دو متغیر پیچیده بوده و یا ناحیه انتگرال گیری پیچیده (نسبت به هر دو متغیر نامنظم) باشد ممکن است اعمال یک تغییر متغیر مناسب بتواند حل مسئله را ساده کند.

اگر در محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ بخواهیم از تغییر متغیر

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \text{(2)}\quad \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

استفاده کنیم داریم :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} h(u,v)\,|J|\,du\,dv$$

که J برای تغییر متغیر (1) :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

و J برای تغییر متغیر (2) :

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

تغییر متغیر قطبی :
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x(r,\theta) \\ y = y(r,\theta) \end{cases}$$

پس از تغییر متغیر ① استفاده کرده ایم و داریم :

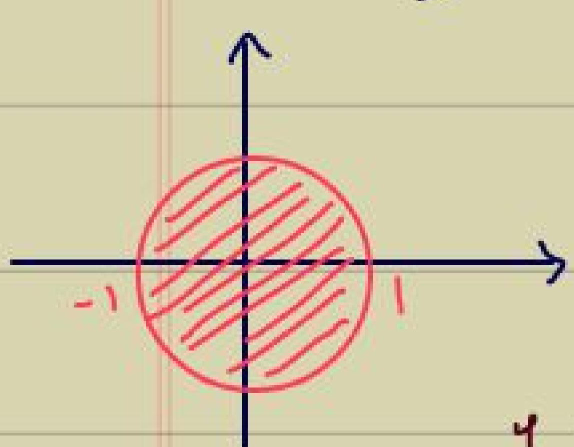
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

بنابراین $|J| = r$ و

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

مثال : انتگرال دوگانه $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ را که D ناحیه داخل دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ می باشد را محاسبه کنید.



با توجه به عبارت x^2+y^2 در انتگرال از تغییر متغیر قطبی استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad |J| = r$$

$$x^2+y^2 = r^2$$

$-1 \le r\cos\theta \le 1$

$-1 \le r\sin\theta \le 1$

$r^2 \le 1$

$$۰ \leq r \leq ۱ \quad , \quad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

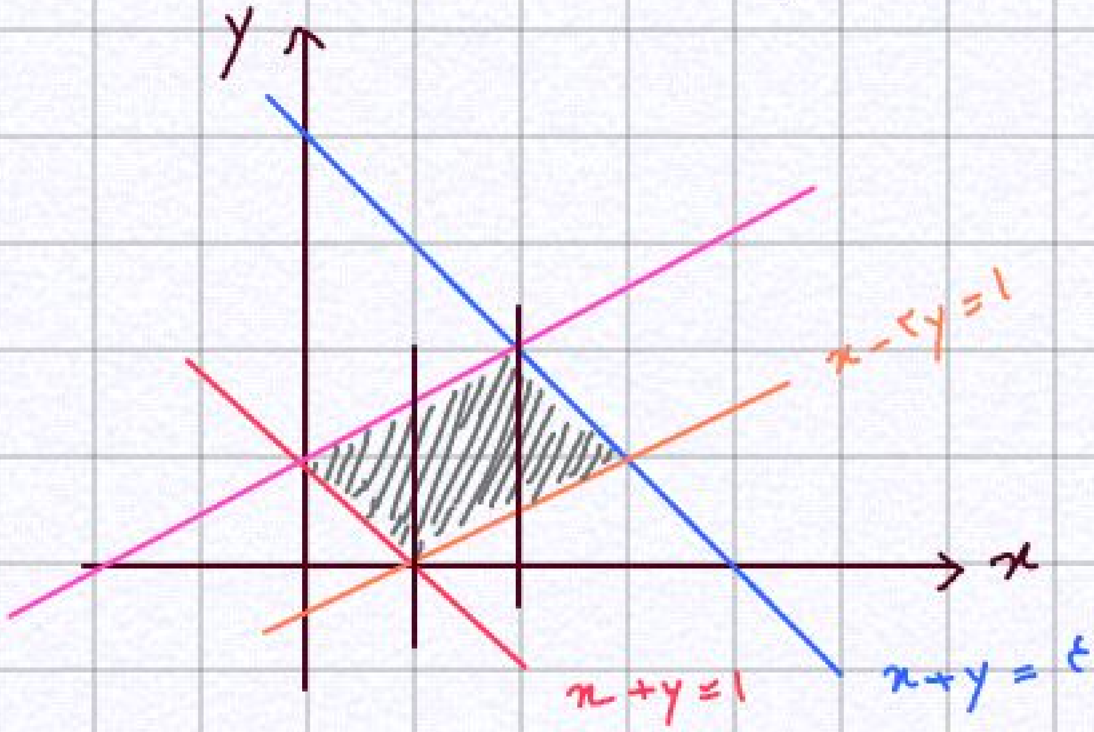
$$\iint_D \sqrt{x^۲+y^۲}\, dA = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^۱ r.r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi} \frac{r^۳}{۳}\Big|_۰^۱ d\theta = \frac{۲\pi}{۳}$$

مثال :

انتگرال دوگانه $\iint_D (x+y)^3\, dx\, dy$ را محاسبه کنید

D ناحیه محصور به خطوط $x-2y=-2$ ، $x-2y=1$ ، $x+y=4$ و $x+y=1$ می‌باشد.



در این مسئله ناحیه انتگرال گیری نامنظم است

اگر بخواهیم به نواحی مقدماتی تقسیم کنیم به سه ناحیه

نوع اول و دو ناحیه نوع دوم می‌توان تقسیم کرد

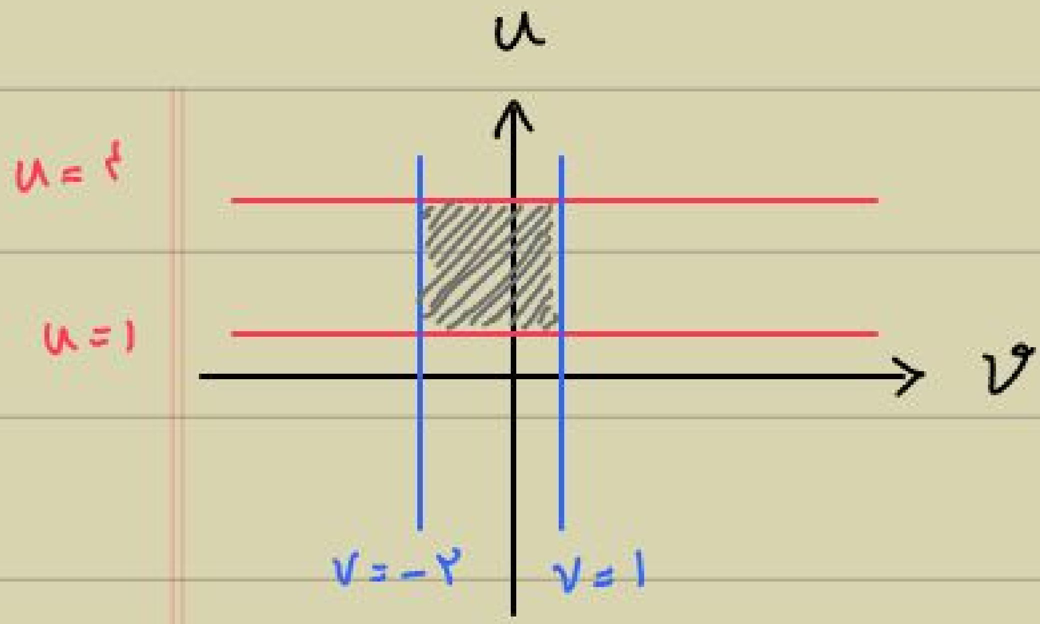
ولی با تغییر متغیر هم ناحیه منظم می‌شود و انتگرال راحت تر :

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |J| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=1 \\ u=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v=1 \\ v=-2 \end{cases}$$



در دستگاه مختصات جدید:

$$-۲ \le v \le ۱$$

$$۱ \le u \le ۴$$

$$\int_{-۲}^{۱} \int_{۱}^{۴} \frac{۱}{۳} u^{۳}\, du\, dv = \int_{-۲}^{۱} \frac{۱}{۳} \frac{u^{۴}}{۴} \Big]_{۱}^{۴} dv$$

$$= \frac{۱}{۳} \int_{-۲}^{۱} \frac{۲۵۵}{۴}\, dv = \left(\frac{۱}{۳}\right) \frac{۲۵۵}{۴} (۳) = \frac{۲۵۵}{۴}$$

تغییر متغیر در انتگرال سه گانه :

اگر در محاسبه انتگرال سه گانه از تغییر متغیرهای

$$①\ \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}\ ②$$

استفاده کنیم. داریم :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} h(u,v,w)\,|J|\,du\,dv\,dw$$

که ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات برای تغییر متغیر ①

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

و برای تغییر متغیر ② :

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}}$$

تغییر متغیر در دستگاه استوانه‌ای :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x(r,\theta,z) \\ y = y(r,\theta,z) \\ z = z(r,\theta,z) \end{cases} \longrightarrow J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \quad |J| = r$$

تغییر متغیر در دستگاه کروی!

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x(\rho, \theta, \varphi) \\ y = y(\rho, \theta, \varphi) \\ z = z(\rho, \theta, \varphi) \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho \sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$\boxed{J = -\rho^2 \sin\varphi}$$

بنابراین

$$\boxed{|J| = \rho^2 \sin\varphi}$$

میانترم اول ۹۲-۹۱

۴- ژاکوبین تغییر متغیر کروی برای انتگرال های سه گانه برابر است با:

۱. r ۲. $r\sin\varphi$ ۳. $-r\sin^{2}\varphi$ ۴. $-r^{2}\sin\varphi$ ✓