۲۱۰ دقیقه

به نام خدا

باشگاه دانش پژوهان جوان

آزمون نخست المپیاد فیزیک ایران (مرحله چهل نفر)

۱. فضای برداری حاصل ضربی

فرض کنید مجموعه بردار $\hat{e}_i$ به ازای $i = 1, \dots, n$ یک پایه متعامد بهنجار برای فضای برداری V_1 و مجموعه بردار $\hat{u}_a$ به ازای $a = 1, \dots, m$ نیز یک پایه متعامد بهنجار برای فضای برداری V_2 باشد. بنا به تعریف فضای حاصل ضربی $V_1 \otimes V_2$ یک فضای mnبعدی است که بردارهای پایه آن بردارهای دوپشته ی $\hat{w}_{ia} \equiv \hat{e}_i \hat{u}_a$ به ازای همه iها و aها است. به این ترتیب هر بردار دلخواه از این فضا به صورت $A = \sum_{i,a} \alpha_{ia} \hat{w}_{ia}$ نوشته می شود که در آن مولفه های بردار نیز با اندیس های دوپشته مشخص می شوند.

الف) اگر در فضای V_1 تبدیل پایه $\hat{e}'_i = R_{ij} \hat{e}_j$ و در فضای V_2 تبدیل پایه $\hat{u}'_a = S_{ab} \hat{u}_b$ را انجام دهیم، درایه های ماتریس تبدیل از پایه $\hat{w}_{ia}$ به پایه $\hat{w}'_{ia}$، یعنی $N_{ia,jb}$ها (که در آن اندیسهای سطر و ستون دوپشته اند) را به دست آورید. این ماتریس را به عنوان ضرب مستقیم ماتریس های R و S به شمار می آوریم و به صورت $N = R \otimes S$ نمایش می دهیم. (۲ نمره)

ب) اگر در فضای V_1 تبدیل پایه $\hat{e} \to \hat{e}'$ با ماتریس R_1 و سپس تبدیل پایه $\hat{e}' \to \hat{e}''$ با ماتریس R_2 به طو ر پیاپی انجام شود، و متناظرا در فضای V_2 تبدیل های پیاپی $\hat{e} \to \hat{e}' \to \hat{e}''$ با ماتریس های S_1 و S_2 انجام شود، درایه های ماتریس N مربوط به تبدیل دو پله ای $\hat{w} \to \hat{w}''$ ونیز شکل ماتریسی آن (به صورت ضرب مستقیم ماتریس ها) را به دست آورید. از اینجا قانونی برای ضرب کردن ماتریس هایی به صورت $N = R \otimes S$ به دست آورید. (۲ نمره)

ج۱) ثابت کنید ضرب سه ماتریس دلخواه A، B و C شرکت پذیر است، یعنی $(AB)C = A(BC)$. (توجه فرمایید که این قسمت از مسئله، مستقل از قسمت های قبل است.) (۱٫۵ نمره)

ج۲) سه ماتریس N_1، N_2 و N_3 به صورت $N_k = R_k \otimes S_k$ در نظر بگیرید که قانون ضرب آنها مطابق آنچه در بخش ب به دست آوردید، است. ثابت کنید این ضرب شرکت پذیر است. (۱٫۵ نمره)

د) اگر $\vec{U}_2 \in V_1$, $\vec{U}_1 \in V_1$ و $\vec{E}_2 \in V_2$, $\vec{E}_1 \in V_2$ باشد، ضرب داخلی بردارهای $W_1 = \vec{U}_1 \vec{E}_1$ و $W_2 = \vec{U}_2 \vec{E}_2$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$W_1 . W_2 = (U_1 . U_2)(E_1 . E_2)$$

ضرب داخلی دو بردار دلخواه $A = \sum_{i,a} \alpha_{ia} \hat{w}_{ia}$ و $B = \sum_{j,b} \beta_{jb} \hat{w}_{jb}$ را به دست آورید. (۱ نمره)

ه) مجموعه توابع $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi x}{a})$ را به عنوان پایه ای برای توابعی که در بازه $0 \leq x \leq a$ تعریف می شوند و در ابتدا و انتهای بازه صفر هستند، در نظر بگیرید. به همین ترتیب مجموعه تابع $e_m(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin(\frac{m\pi y}{b})$ برای توابع مشابه در بازه $0 \leq y \leq b$ تعریف می شوند. فضای برداری توابع دو متغیره ای که در مستطیل

$0 \le y \le b$. $0 \le x \le a$ تعریف می شوند و روی مرزهای آن صفر هستند. ضرب مستقیم دو فضای فوق است. فرض کنید تابع $f(x,y)$ بردار دلخواهی در این فضا باشد. بسط این بردار را بر حسب پایه فضای حاصل ضربی بنویسید و ضرایب بسط را به دست آورید. (۲ نمره)

---

۲. دوران صلب سه جسم گرانشی

سه جسم نقطه ای به جرم های m_1، m_2 و m_3 در سه رأس مثلث $P_1P_2P_3$ قرار دارند. این سه جسم با یکدیگر فقط برهمکنش گرانشی دارند و با هیچ جسم دیگری برهمکنش ندارند. طول اضلاع مثلث در یک لحظه غیر مشخص به ترتیب زیر است

$$P_1P_2 = a_{12}\,, \quad P_2P_3 = a_{23}\,, \quad P_3P_1 = a_{31}.$$

نقطه O در صفحه مثلث در جایی است که $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0$ که در آن $\vec{r}_1$، $\vec{r}_2$ و $\vec{r}_3$ به ترتیب بردارهایی است که از نقطه O به نقاط P_1، P_2 و P_3 وصل شوند.

الف) ثابت کنید شتاب نقطه O نسبت به هر ناظر لختی صفر است. (بنابر این از اینجا به بعد میتوان آن را به عنوان مبدا مختصات یک دستگاه لخت گرفت و مسئله را از دید آن دستگاه حل کرد.) (۲ نمره)

حال حرکتی را در نظر بگیرید که در آن مثلث $P_1P_2P_3$ بدون آن که طول اضلاعش تغییر کند حول محوری که از نقطه O می گذرد و بر صفحه مثلث عمود است دوران می کند.

ب) برای این که چنین حرکتی رخ دهد سرعت زاویه ای ω چه شرطی باید داشته باشد؟ (۱نمره)

ج) برای این که چنین حرکتی رخ دهد طول اضلاع مثلث چه باید باشند؟ (۷نمره)

راهنمایی

در این مسئله پایستگی انرژی وجود دارد و انرژی پتانسیل گرانش دو جسم m_1 و m_2 به عنوان مثال چنین است:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{a_{12}}$$

---

3) ترکیب دوران های سه بعدی

فضای سه بعدی را با سه مختصه‌ی x ، y و z در نظر بگیرید. ماتریس $R_{\hat{A}}(\theta)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که به ازای هر بردار دلخواه $\vec{B}$ داریم:

$$\vec{B}' = R_{\hat{A}}(\theta)\vec{B}$$

که در این جا $\vec{B}'$ ، دوران یافته‌ی $\vec{B}$ به صورت **پادساعتگرد** حول راستای $\hat{A}$ به اندازه زاویه‌ی θ است. در ادامه‌ی مساله فرض کنید ماتریس‌های دوران بر مختصات تاثیری نمی‌گذارند و صرفاً بردارهای داده شده را در مختصات ثابت x y و z به بردارهای دوران یافته تبدیل می‌کنند.

الف) ماتریس $R_{\hat{z}}(\theta)$ را بنویسید.

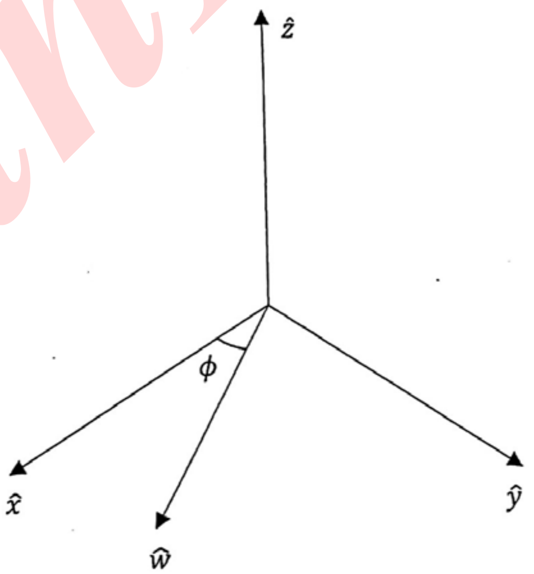
ب)فرض کنید $\hat{w}$ راستایی روی صفحه‌ی $x-y$ است، که با محور x زاویه‌ی ϕ می‌سازد.(مطابق شکل) ماتریس $R_{\hat{w}}(\theta)$ را بدست آورید.

ج) دو دوران متوالی یکی حول محور y و دیگری حول محور x با زوایای θ_y و θ_x را در نظر بگیرید. در این مساله قصد داریم این موضوع را بررسی کنیم که ترکیب این دو دوران به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$R_{\hat{x}}(\theta_x).R_{\hat{y}}(\theta_y) = R_{\hat{w}}(\theta).R_{\hat{z}}(\psi)$$

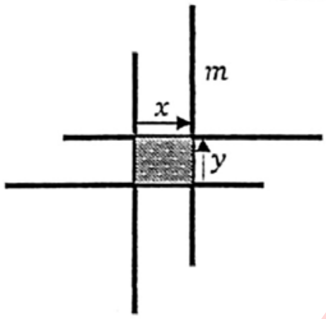
که در رابطه‌ی فوق "نقطه" به معنای ضرب ماتریسی است. $\hat{w}$ راستایی مجهول واقع بر صفحه‌ی $x-y$ است که با محور x زاویه‌ی ϕ می‌سازد. سه زاویه‌ی به کار رفته در تساوی فوق ϕ و θ و ψ را برحسب زوایای θ_x و θ_y بدست آورید.

(نیازی نیست امکان برقراری تساوی فوق را اثبات کنید، تنها محاسبه‌ی این سه زاویه به هر روش دلخواهی کافیست.)



4) نوسانات حباب مستطیلی

دو جسم به شکل علامت بعلاوه (+) داریم که هرکدام از دو میله‌ی به طول بینهایت متصل به هم با زاویه‌ی نود درجه تشکیل شده‌اند. هر دو جسم بر یک صفحه قرار دارند. از برخورد این دو جسم با هم صرف نظر کنید. یکی ازین اجسام، در مبدا مختصات ثابت شده است. جسم دیگر اما امکان حرکت دارد، جرم کل آن m است و مکان آن(مکان محل تلاقی دو میله‌ی آن) (x,y) است. هر دوی این اجسام توانایی چرخیدن ندارند و راستای میله‌های آن‌ها موازی $\hat{x}$ و $\hat{y}$ تثبیت شده است.



در مستطیل محدودی که توسط این چهار میله احاطه شده یک حباب گیر افتاده است. با جابجا شدن جسم متحرک ابعاد این مستیطل تغییر کرده و حباب بزرگ و کوچک می‌شود.

راهنمایی: می‌دانیم انرژی پتانسیل یک حباب متناسب با مساحت آن است: $V=\sigma S$. که S مساحت حباب و σ ثابتی مثبت است. توجه کنید که مساحت، مطابق تعریف هندسی آن، کمیتی نامنفی است.

الف ۱) انرژی پتانسیل این توزیع را برحسب x,y و σ در تمامی نواحی مختصاتی بنویسید.

الف ۲) شکل منحنی‌های هم پتانسیل: ثابت $= V(x,y)$ را در صفحه‌ی (x,y) رسم کنید.

ب) معادلات حرکت این سیستم را در راستای y و x برای تمامی نواحی مختصاتی بدست آورید.

ج) حال فرض کنید سیستم را صرفا در حالت $x,y>0$ (ناحیه‌ی اول مختصاتی) مورد بررسی قرار می‌دهیم. دو پارامتر جدید تعریف می‌کنیم:

$$u=\frac{x+y}{2}, \qquad v=\frac{x-y}{2}$$

با ترکیب معادلات حرکت بدست آمده در قسمت "ب" دو معادله‌ی دیفرانسیلی مستقل از هم یکی برای u و یکی برای v بدست آورید.

د) با تست کردن جواب‌های عمومی به فرم:

$$f(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t), \qquad g(t)=Ce^{\lambda t}+De^{-\lambda t}$$

در معادلات دیفرانسیل قسمت قبل، فرم عمومی $x(t)$ و $y(t)$ را بدست آورید. (A و B و C و D ثوابتی هستند که بسته به شرایط اولیه تغییر می‌کنند. ω و λ را در صورت حضور در معادلاتتان بایست در این قسمت پیدا کنید.) توجه کنید همین که جواب بدست آمده تا وقتی جسم هنوز در ناحیه‌ی اول مختصات باقی است، درست باشد، برای ما کافیست.

هـ) فرض کنید جسم m در زمان $t=0$ از مبدا مختصات: $x=y=0$ با سرعت $\vec{V}$ رها شده است که: $V_x>0$ و $V_y>0$. ضرایب مجهول قسمت قبل را برای این حالت بیابید و $x(t)$ و $y(t)$ را تا وقتی جسم هنوز در ناحیه‌ی اول مختصات است تعیین کنید.

۵) تابش جسم سیاه ، اثر اونروه، سیاه چاله ها، و تابش هاوکینگ

در طول بخش های تحلیل ابعادی مسئله ، ضرایب ظاهر شده در بخش نهایی را یک در نظربگیرید.

الف) می دانیم همه اجسامی که دمایی غیر صفر دارند انرژی تابش می کنند. این تابش بصورت امواج الکترومغناطیسی می باشد. به این تابش ، تابش جسم سیاه گفته میشود . با به کاربردن نظریه الکترومغناطیس و مکانیک کوانتومی ، می توان توان تابشی کل بر واحد سطح و طیف تابشی آن را به دست آورد. به این طیف تابشی، طیف تابشی پلانک گفته می شود.

بنابراین انتظار داریم که در تحلیل مسئله ثابت پلانک، $\hbar$ ، ثابت بولتزمن، K، وسرعت نور، C، ظاهر شود. با توجه به اینکه توان تابشی کل بر واحد سطح متناسب با توان چهارم دمای سطح است، رابطه ای برای توان تابشی به دست آورید.

بُعد ثابت پلانک، انرژی در زمان و بُعد ثابت بولتزمن، انرژی بر دما هستند.

ب) با استفاده از معادلات فیزیک مدرن می توان نشان داد، یک ناظر شتابدار نسبت به دستگاه لخت، یک تابش همسانگرد گرمایی در دمای T از ذرات با طیف تابشی پلانک در کل فضا می بیند. به این اثر، اثر اونروه گفته میشود. دمای Tرا برحسب ثابت های بالا و شتاب ناظر به دست آورید.

سیاه چاله ها اجسام جرم دار متراکمی هستند، که به علت تراکم زیاد جرمی ، میدان گرانشی بر روی سطح آن ها به قدری قوی است که هیچ ذره ای حتی نور نمی تواند از روی سطح آن به بی نهایت فرار کند. معادلات حاکم بر سیاه چاله ها به طور دقیق در نسبیت عام بررسی می شوند. دراینجا می خواهیم با استفاده از موارد به دست آمده در بالا و فیزیک کلاسیک تحلیل ساده ای از سیاه چاله ها به دست آوریم.

ج) ابتدا یک جسم بزرگ با تقارن کروی و جرم M و شعاع R در نظر بگیرید. می خواهیم یک جسم آزمون از سطح این جسم بزرگ را به بی نهایت بفرستیم ،کمینه سرعت اولیه لازم برای فرار این جسم را به دست آورید. به این سرعت ، سرعت فرار می گوییم. همه بر هم کنش ها را گرانشی در نظر بگیرید.

د) حال نور را بصورت ذراتی با جرم m در بگیرید. با اعمال این قید که ذرات نور نمی توانند از روی سطح این جسم بزرگ فرار کنند، به دست آورید که باید شعاع جسم بزرگ از یک شعاع بحرانی کم تر باشد. به این شعاع ، شعاع شوآرتزشیلد گفته می شود. این شعاع را به دست آورید. اجسامی که شعاع شان از شعاع شوآرتزشیلد شان کمتر باشد تشکیل سیاه چاله می دهند.

در نظریه نسبیت خاص، بیشینه سرعت ذرات سرعت نور است. در نتیجه هیچ ذره ای را نمی توان از روی سیاه چاله به بیرون فرستاد.

در فاصله شعاع شوارتزشیلد از مرکز سیاه چاله، افق سیاهچاله قرار دارد. افق سیاه چاله را به صورت یک سطح کروی با شعاع شوارتزشیلد در نظر بگیرید. همان طور که در بالا نشان دادید، همه ذراتی که در داخل افق قرار گرفته اند از جمله ذرات نور نمی توانند از آن خارج شوند ، در نتیجه انتظار داریم که افق سیاه چاله ها کاملا تاریک به نظر برسند.

با اعمال مکانیک کوانتومی بر روی سیاهچاله ها می توان به نتایج جدیدی برای افق سیاه چاله ها رسید ، از جمله اینکه می توان به افق سیاه چاله ها یک دما نسبت داد که در آن تابش گرمایی جسم سیاه انجام می دهند ، به این تابش، تابش هاوکینگ گفته می شود. حال می خواهیم با استفاده از اثر اونروه بررسی ساده ای در مورد این تابش داشته باشیم.

ه) با استفاده از اصل هم ارزی می توان شتاب دستگاه های نالخت را با شتاب گرانش متناظر کرد. ابتدا شتاب گرانش سیاه چاله را بر روی افق اش به دست آورید. سپس با رابطه ای که برای اثر اونروه به دست آوردید، دمای سطح افق سیاه چاله را به دست آورید. افق سیاه چاله در این دما تابش گرمایی انجام می دهد.

و) توان تابشی کل سطح افق را به دست آورید.

این توان تابشی باعث می شود به مرورِ زمان سیاه چاله تبخیر شود.

ز) انرژی کل سیاه چاله را برابر جرم در مجذور سرعت نور قرار دهید. عمر یک سیاه چاله با جرم اولیه M را به دست آورید.

ح) با استفاده از روابط بالا ، ابتدا به دست آورید برای تبدیل خورشید به سیاه چاله باید چقدر آن را کوچک کنیم؟ سپس چگالی جرمی اولیه و عمر آن را به دست آورید.

جرم خورشید $2 \times 10^{30} kg$ است.

آزمون دوم المپیاد فیزیک (۹۷/۶/۲)

۱) متحرکی بر روی مسیر بستهٔ $r = r_0(1 + \cos\varphi)$ حرکت می‌کند که (r, φ) مختصات قطبی یک نقطه در صفحهٔ x-y، r_0 مقداری ثابت و $0 \leq \varphi \leq \pi$ است. اندازهٔ سرعت متحرک روی مسیر همواره ثابت و برابر مقدار v_0 است. فرض کنید متحرک در لحظهٔ $t = 0$ در نقطهٔ $x = 2r_0$ و $y = 0$ است و در جهت پادساعتگرد روی مسیر حرکت می‌کند.

آ) شکل مسیر حرکت را در صفحهٔ x-y رسم کنید.

ب) زمان طی مسیر از لحظهٔ $t = 0$ تا رسیدن متحرک به مبدأ مختصات چقدر است؟ در قسمت‌های بعدی سؤال لحظهٔ t را در این بازه بگیرید.

پ) بردار سرعت متحرک را در لحظهٔ t در مختصات قطبی بر حسب بردارهای یکهٔ $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ به دست آورید.

ت) بردار شتاب متحرک را در لحظهٔ t در مختصات قطبی بر حسب بردارهای یکهٔ $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ به دست آورید.

ث) بردار سرعت متحرک را در لحظهٔ t در مختصات دکارتی بر حسب بردارهای یکهٔ $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ بنویسید.

ج) بردار شتاب متحرک را در لحظهٔ t در مختصات دکارتی بر حسب بردارهای یکهٔ $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ بنویسید.

چ) مقدار عددی مؤلفه‌های سرعت و شتاب که در قسمت‌های ث) و ج) به دست آوردید را به ازای $r_0 = 20\,\mathrm{cm}$، $v_0 = 1\,\mathrm{cm/s}$ و $t = 15\,\mathrm{s}$ حساب کنید.

۲) تولید امواج گرانشی در سیستم های ذرات

- **بخش اول**

تاثیر تولید امواج گرانشی برحرکت ستاره های دوتایی

یک دوتایی از دو جسم تشکیل شده، که جرم هر یک برابر M است. فاصله دو جسم از یکدیگر را R بگیرید. این دو جسم به دور مرکز خط واصل شان دوران صلب انجام میدهند.

الف) با استفاده از قانون گرانش عمومی نیوتن، فرکانس دوران را برحسب ثابت گرانش نیوتن G، جرم M، و فاصله R به دست آورید. سپس انرژی کل سیستم را برحسب فاصله به دست آورید.

در تئوری نسبیت عام، ذرات جرم داری که دارای حرکت شتابدار هستند می توانند تابش انرژی از طریق تولید امواج گرانشی داشته باشند. تانسور چهار قطبی یک سیستم ذرات، I، مطابق زیر تعریف می شود. به تانسور J تانسور چهارقطبی کاهش یافته می گوییم که مطابق زیر از روی تانسور I تعریف می شود. با معادلات نسبیت عام می توان نشان داد که توان تابش گرانشی، P، یک سیستم ذرات با تانسور J از رابطه زیر به دست می آید.

$$I_{ij} = \sum_m m r_i r_j \,,$$

$$\mathrm{J}_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} Tr(I_{ij}),$$

$$P = -\frac{G}{5c^5}\frac{d^3\mathrm{J}_{ij}}{dt^3}\frac{d^3\mathrm{J}_{ij}}{dt^3}.$$

با فرض اینکه توان تابش گرانشی بسیار کوچک است، می توان با تقریب مسیر ذرات را به طور لحظه ای به شکل دایره ای در نظر گرفت. در نتیجه معادلات بخش الف برقرار می باشند، ولی به علت تابش گرانشی این شعاع به مرور زمان با آهنگ بسیار کوچکی تغییر می کند.

ب) با فرض های بالا انرژی تابش گرانشی سیستم دوتایی در یک دوره تناوب را بر حسب فاصله R به دست آورید. توجه کنید که تانسور ها را باید در سه بعد مکانی بنویسید.

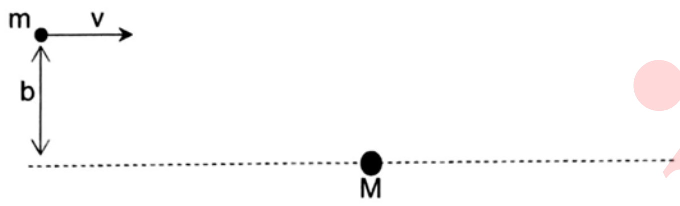
ج) شعاع و فرکانس دوران را به صورت تابعی از زمان به دست آورید (جرم اجسام ثابت هستند).

- **بخش دوم**

انرژی تابش گرانشی درپراکندگی ذرات از یکدیگر

یک جرم M را در مبدا مختصات در نظر بگیرید. فرض کنید در بی نهایت جرم m با پارامتر برخورد b و سرعت اولیه v به سمت جسم پرتاب می شود. طول پارامتر برخورد مطابق شکل تعریف می شود. فرض کنید

جرم M بسیار سنگین تر از جرم m است و می توان فرض کرد جرم M ثابت است. دو جرم با یکدیگر برهم کنش گرانشی می کنند که نیرویشان از قانون گرانش عمومی نیوتن تبعیت می کند. تاثیر نیروی گرانشی بر روی حرکت جرم m را کوچک در نظر بگیرید به طوری که مسیر مرتبه صفر جسم یک خط راست می باشد.



د) حال انرژی کل تابش گرانشی سیستم را تا اولین مرتبه غیر صفراز تاثیرات نیروی گرانشی به دست آورید.

راهنمایی: برای حل انتگرال‌ها از تغییر متغیر توابع مثلثاتی و انتگرال‌های آورده شده در انتهای سوال استفاده کنید.

ه) حال فرض کنید هر دو جرم بار Q دارند و برهم کنش گرانشی دربرابر برهم کنش الکترومغناطیسی قابل صرف نظر است. دوباره تاثیر نیروی الکترومغناطیسی بر حرکت ذره را بسیار کوچک در نظر بگیرید به طوری که مسیر مرتبه صفر همان خط راست است. انرژی اتلافی به دست آمده در بخش "د" را تصحیح کنید. نیازی به حل دوباره مسئله نیست.

- **بخش سوم**

توان تابش گرانشی یک گاز متشکل از ذرات باردار

و) در این بخش ضرایب عددی را یک بگیرید. فرض کنید یک گاز از N ذره به جرم M و بار Q در حجم V و دمای T تشکیل شده است. فرض کنید انرژی ذرات ازمرتبه kT است که k ثابت بولتزمن است. ابتدا فاصله میانگین ذرات را به دست آورید. سپس تعداد پراکندگی های ذرات از یکدیگر را در واحد زمان به دست آورید. فرض کنید می توانید در هر لحظه ذرات را به صورت جفت جفت در نظر بگیرید که هر دو ذره را می توان به صورت بخش (ه) در نظر گرفت و هرذره فقط با ذره دوم برهم کنش الکترومغناطیسی انجام می دهد. انرژی کل تابش پراکندگی دو جسم با جرم M و بار Q را هم مرتبه با قسمت (ه) در نظر بگیرید. فرض کنید پارامتر برخورد هم مرتبه با میانگین فاصله ذرات از یکدیگر است. با فرض های بالا توان تابش گرانشی کل گاز را به دست آورید.

ز) خورشید را به صورت یک گاز از ذرات پروتون در نظر بگیرید، و میانگین دمای خورشید را یک میلیون کلوین بگیرید. توان تابش کل گرانشی خورشید را به دست آورید. نسبت این انرژی به کل انرژی تابش گرمایی خورشید را حساب کنید.

جرم پروتون $= 1.6 \times 10^{-27}\text{kg}$ بار پروتون $= 1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$

توان تابشی خورشید بر واحد سطح زمین $= 1400\ W/m^2$

فاصله خورشید از زمین $= 1.50 \times 10^8\text{km}$

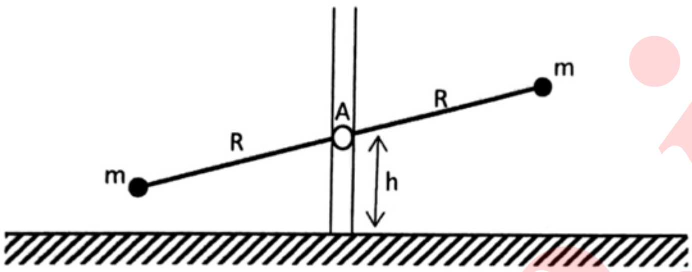
جرم خورشید $= 2 \times 10^{30}\text{kg}$ شعاع خورشید $= 7 \times 10^5\text{km}$

$$G = 6.7 \times 10^{-11}\frac{\text{Jm}}{(\text{kg})^2},\ k = 1.38 \times \frac{10^{-23}\text{J}}{\text{K}},\ c = 3 \times 10^8\ \text{m/s}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}. & n\ \text{زوج} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}. & n\ \text{فرد} \end{cases}$$

۳) دمبل در حال سقوط

مطابق شکل نقطه‌ی A می‌تواند درون شیاری عمودی حرکت کند. یک دمبل متشکل از یک میله صلب به طول $2R$ و دو جرم m که در دو انتهای میله بسته شده اند، از وسط به نقطه‌ی A لولا شده است و می‌تواند در صفحه‌ی شکل زیر بچرخد. فاصله‌ی نقطه‌ی A از زمین را h می‌نامیم و از نیروی گرانش و هر گونه اصطکاک صرف نظر می‌کنیم. برخورد جرم‌های m با زمین نیز کاملا کشسان است به این معنا که انرژی هدر نمی‌دهند.



در تمام طول مساله فرض کنید فرض $h \ll R$ باقی می‌ماند و تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\theta = h/R$ محاسبه انجام دهید.

الف) فرض کنید در ابتدا A در ارتفاع h_0 ثابت نگه‌داشته شده است و **اندازه‌ی** سرعت زاویه‌ای دمبل ω_0 است. بدلیل برخوردهای دو جرم m از چپ و راست با زمین، سرعت زاویه‌ای دمبل مدام تغییر علامت می‌دهد. حال به آرامی ($|\dot{h}| \ll \omega_0 R$) نقطه‌ی A را از ارتفاع h_0 به ارتفاع h_1 می‌بریم. در اثر این فرایند، **اندازه‌ی** سرعت زاویه‌ای دمبل به مقدار ω_1 تغییر پیدا می‌کند. ω_1 را بر حسب کمیت‌های ω_0 و h_0 و h_1 بیابید. (۲ نمره)

قسمت‌های بعد سوال تا حدودی از قسمت "الف" مستقل‌اند و اگر در حل بخش "الف" توفیق نداشته‌اید از ادامه دادن سوال ناامید نشوید.

فرض کنید در ابتدای کار زاویه‌ی دمبل با خط افق θ_1 است که $h > R\theta_1$ و سرعت زاویه‌ای دمبل صفر می‌باشد. نقطه‌ی A را با سرعت **ثابت** v به سمت پایین می‌آوریم. توجه کنید این سرعت به صورت مصنوعی به A داده شده است و با وجود برخوردهای متعدد جرم‌های m با زمین، همچنان ثابت نگه‌داشته می‌شود. در لحظه‌ی $t = 0$ اولین برخورد جرم‌های m با زمین آغاز می‌شود و بعد از آن به خاطر برخوردها، دمبل سرعت زاویه‌ای پیدا می‌کند. توجه کنید برخوردها یکی درمیان مربوط به جرم سمت چپ دمبل و جرم سمت راست دمبل با زمین است. کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

h_i : مقدار h در لحظه‌ی برخورد i اُم. که از روی آن تعریف می‌کنیم: $\theta_i = \frac{h_i}{R}$

ω_i : **اندازه‌ی** سرعت زاویه‌ای بلافاصله پس از برخورد i اُم.

Δt_i : فاصله زمانی میان برخورد i اُم و برخورد $i+1$ اُم.

ب) رابطه‌ی میان ω_i و ω_{i+1} بدست آورده و ازین طریق کمیت ω_i را فقط بر حسب i و R و v بنویسید.(۱ نمره)

ج) دو رابطه‌ی مستقل میان کمیت‌های θ_i و θ_{i+1} و ω_i و Δt_i و R و v بنویسید. با حذف Δt_i میان این دو معادله و جاگذاری ω_i از قسمت قبل، به یک رابطه‌ی بازگشتی تنها میان θ_i و θ_{i+1} و i برسید. سپس این رابطه را حل کنید و θ_i را بر حسب i و θ_1 بدست آورید.(۳نمره)

راهنمایی: برای حل θ_i از رابطه‌ی بازگشتی بدست آمده در این بخش، نخست به ازای چند i کوچک جواب را بدست آورید، سپس فرم کلی جواب را حدس بزنید.

د) با استفاده از حل بدست آمده در قسمت قبل برای θ_i ، مقدار Δt_i را برحسب R و v و i و θ_1 بنویسید. سپس تعریف می‌کنیم : T_i باشد زمان رخ دادن برخورد i اُم. که به عنوان مثال می‌دانیم: $T_1 = 0$. T_i را برحسب R و v و i و θ_1 بنویسید.(۱نمره)

هـ) انرژی جنبشی کل دمبل را بلافاصله پس از برخورد i اُم می‌نامیم: U_i. U_i را تنها بر حسب R و m و θ_1 و v و T_i بنویسید. (i فقط در اندیس‌ها حضور داشته باشد) (۱نمره)

حال قصد داریم مساله را با تخمین از حالت گسستگی در بیاوریم به این صورت که از همین رابطه‌ی بدست آمده $U_i = U_i(T_i)$ استفاده می‌کنیم و اندیس‌های i را برمی‌داریم! به رابطه‌ای تخمینی پیوسته‌ای می‌رسیم که انرژی سیستم را به صورت تابعی پیوسته از زمان T به ما می‌دهد، که T کل زمان گذشته شده از اولین برخورد است: $U = U(T)$ که $T < R\theta_1/v$. حال که پیوسته سازی انجام داده‌ایم اجازه‌ی مشتق گیری زمانی خواهیم داشت.

و)با استفاده از نتیجه‌ی قسمت قبل، نیرویی که در زمان T که $T < R\theta_1/v$ ، به صورت مصنوعی به نقطه‌ی A وارد می‌شود تا شرایط مساله صادق بماند(سرعت v ثابت بماند) را پیدا کنید.(۲ نمره)

۴) این سوال از دو بخش کاملا مجزا تشکیل شده است.

بخش اول

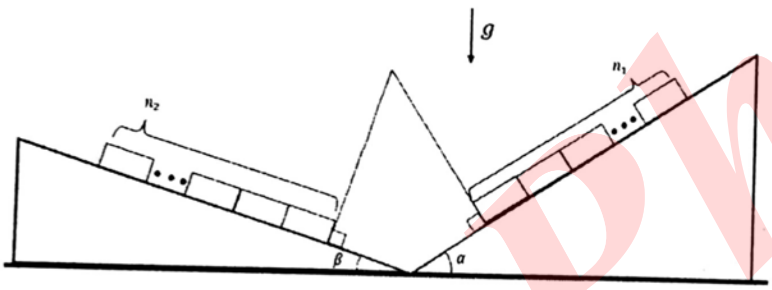
دو سطح شیبدار ساکن به هم چسبیده با زاویه های α و β و ضرایب اصطکاک به ترتیب μ_1 و μ_2 در نظر بگیرید. منشوری به جرم m با قاعده‌ای به زاویه رأس پایینی $(\pi-\alpha-\beta)$ و دو رأس قائم را بین دو سطح مطابق شکل قرار می‌دهیم.

الف) حداقل چند مکعب، $n_{1_{min}}$، به جرم m_1 روی سطح شیبدار سمت راست قرار دهیم که مطمئن شویم جرم m به حرکت در می‌آید؟

فرض کنید n_1 مکعب به جرم m_1 روی سطح سمت راست قرار می‌دهیم.

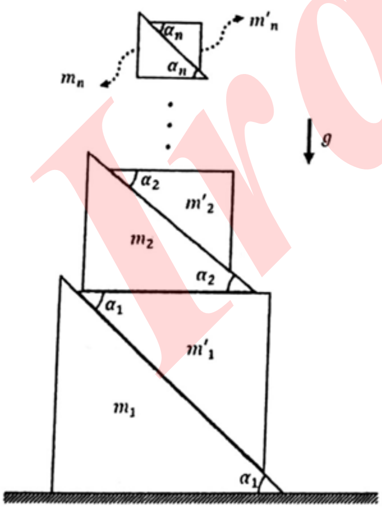
ب۱) با فرض حرکت کردن، شتاب جرم m، a را بیابید.

ب۲) حداقل چند مکعب دیگر، n_2، به جرم m_2 روی سطح شیبدار سمت چپ در کنار یکدیگر قرار دهیم تا مطمئن شویم جرم m روی سطح سمت راست به حرکت در می‌آید؟



بخش دوم

n جفت گوه به واسطه‌ی اصطکاکشان روی یکدیگر در حالت تعادل قرار گرفته اند. جرم گوه ها و زاویه شان در شکل مشخص شده است. برای هر i، ضریب اصطکاک m_i با سطح زیرش μ_i و با گوه‌ی بالایش μ'_i است.



نیروی اصطکاک بین m_i و m'_{i-1}: F_i

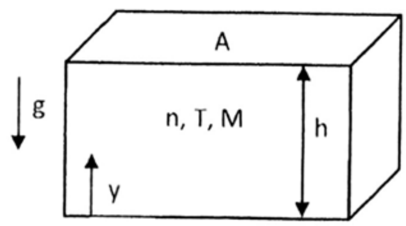
نیروی عمودی سطح بین m_i و m'_{i-1}: N_i

نیروی اصطکاک بین m_i و m'_i: f_i

نیروی عمودی سطح بین m_i و m'_i: n_i

الف) F_i و N_i را بیابید.

ب) f_i و n_i را یافته و سپس شرط (های) تعادل سیستم را بنویسید.



۵) ظرفی مطابق شکل به ارتفاع h و سطح مقطع A نظر بگیرید، درون ظرف n مول گاز کامل با جرم مولی M و ظرفیت گرمایی ویژه مولی حجم ثابت C_{MV} (در صورت عدم حضور گرانش) قرار دارد. حال ظرف را در میدان گرانشی g قرار می‌دهیم. ارتفاع از کف ظرف را مطابق شکل با پارامتر y تعیین می‌کنیم.

الف) با نوشتن رابطه‌ی تعادل برای یک لایه گاز در ارتفاع y و به ضخامت dy معادله‌ی دیفرانسیل فشار گاز $P_{(y)}$، بر حسب ارتفاع را بدست آورید. سپس با حذف متغیرهای اضافی و تعیین شرایط مرزی $P_{(y)}$ را بدست آورید.

ب) چگالی گاز بر حسب ارتفاع، $\rho_{(y)}$ را بیابید.

قسمت‌های «ج» و «د» مستقل از بخش‌های بعد است. یعنی بدون حل آنها نیز می‌توان به حل سوال ادامه داد.

ج) احتمال حضور ذره، بین ارتفاع y و $y + dy$، $\phi_{(y)}dy$ را بدست آورید.

د) برای گاز کامل احتمال وجود ذره‌ای با سرعتی بین v و $v + dv$ طبق رابطه‌ی روبرو است:

$$\psi_{(v)}dv = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

رفتار هر ذره‌ی گاز که بین ارتفاع y و $y + dy$ قرار دارد مشابه رفتار گاز کامل خارج میدان گرانشی است. با توجه به نکته‌های اخیر احتمال حضور ذره‌ای بین ارتفاع y و $y + dy$ که سرعتی بین v و $v + dv$ داشته باشد را بنویسید.

ه) انرژی کل سیستم U را بیابید. این انرژی شامل جنبشی (انرژی درونی در صورت عدم حضور گرانش) و پتانسیل گرانشی است.

و) با استفاده از بخش قبل ظرفیت گرمایی حجم ثابت گاز، C_{Vg} را محاسبه کنید.

ز) پارامترهای بی‌بعد X، $\tilde{C}$ و $\tilde{C}_0$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X := \frac{Mgh}{RT} \qquad \tilde{C} := \frac{C_{Vg}}{nR} \qquad \tilde{C}_0 := \frac{C_{MV}}{R}$$

رابطه‌ی نهایی بخش «و» را بر حسب متغیرهای اخیر بازنویسی کنید.

ح) نمودار $\tilde{C} - X$ را در دامنه‌ی $X \in [0.\infty)$ رسم کنید. اختلاف کمینه و بیشینه‌ی $\tilde{C}$ را محاسبه نمایید.

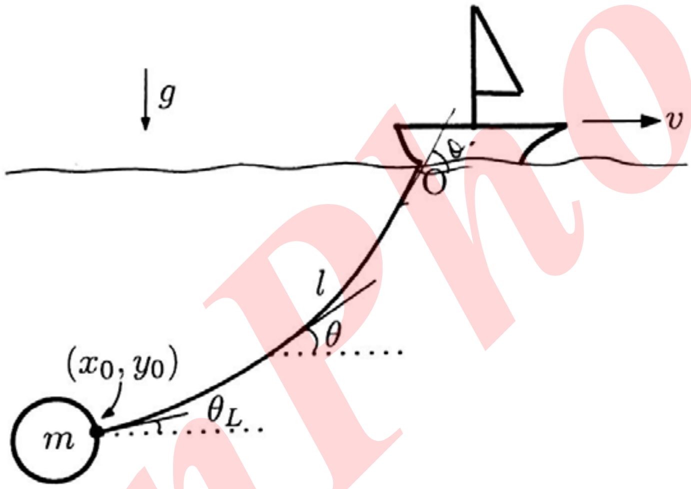
باشگاه دانش پژوهان جوان

آزمون نهایی المپیاد فیزیک ایران (مرحله چهل نفر)

۱۰ شهریور ۱۳۹۷

۱. طناب و لنگر

قایقی مطابق شکل با سرعت ثابت v روی دریاچه آرامی حرکت می کند. در زیر این قایق طناب قابل انعطافی به نقطه O متصل شده و توسط قایق کشیده می شود. در انتهای دیگراین طناب وزنه ای کروی به جرم m و شعاع R متصل است. طول طناب L و قطر آن D است که از طول آن خیلی کوچکتر است. طناب از ماده ای با چگالی ρ ساخته شده است که آب در آن نفوذ نمی کند. چگالی آب را نیز ρ_0 بگیرید. نیروی مقاومت آب در برابر حرکت اجسام خلاف جهت سرعت است و مقدار آن از رابطه kv^2A به دست می آید که در آن k ضریب ثابتی است و A سطح تصویر جسم بر روی صفحه ای است که بر سرعت عمود است. (دقت کنید که A جزو داده های مسئله نیست و باید بر حسب پارامترهای داده شده تعیین شود.)



الف) فرض کنید از نقطه O تا نقطه غیر مشخصی از طناب طول l از آن قرار گرفته باشد. عنصر کوچکی از طناب به طول dl را در این محل نظر بگیرید. فرض کنید زاویه طناب با محور x در این نقطه برابر با $\theta(l)$ است. معادلات حرکت این عنصر را بنویسید و از آنها دو معادله دیفرانسیل جفت شده برای متغیرهای $\theta(l)$ و $T(l)$ به دست آورید، که $T(l)$ کشش طناب در محل عنصر مورد نظر است.

ب) معادلات حرکت جسم m را بنویسید و از آن T_L و θ_L را در محل انتهای طناب که به جرم m متصل است به دست آورید.

ج ۱) حلی را در نظر بگیرید که در آن طناب به شکل یک خط راست در می آید؟ در این حالت $\theta_\cdot$، زاویه طناب با محور x را به دست آورید. نیرویی که قایق به طناب وارد می کند را برحسب $\theta_\cdot$ و سایر پارامترهای داده شده حساب کنید.

ج ۲) برای آن که حل فوق برقرار باشد چه رابطه ای باید بین پارامترهای داده شده مسئله برقرار باشد؟ (لازم نیست این رابطه را ساده کنید.) اگر زاویه طناب با محور x در این حالت ۶۰ درجه باشد سرعت قایق را بر حسب پارامترهای طناب و جرم m به طور جداگانه حساب کنید و از برابری آنها شرط معینی بین پارامترهای طناب و جرم m به دست آورید.

د) از معادلات بخش الف در حالت کلی T را بر حسب انتگرال معینی روی متغیر θ به دست آورید. محاسبه انتگرال لازم نیست، ولی انتگرالده باید دقیقا معرفی شود. نتیجه این بخش را در قسمت های بعدی تابع معلوم $T(\theta)$ بنامید.

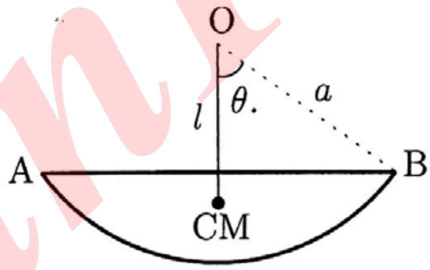
ه) با استفاده از نتایج بخش های الف و د رابطه ای برای l بر حسب θ به دست آورید که شامل یک انتگرال معین روی θ است. انتگرالده، حدود انتگرال و ثابت های رابطه را معلوم کنید. فرض کنید با معکوس کردن این رابطه $\theta(l)$ به دست می آید که تابع معلومی است.

و) عبارت هایی برای محاسبه $x_\cdot$ و $y_\cdot$، مختصات نقطه انتهایی طناب، یعنی نقطه اتصال به جرم m، بر حسب تابع $\theta(l)$ به دست آورید.

---

۲. تعادل یک قطعه

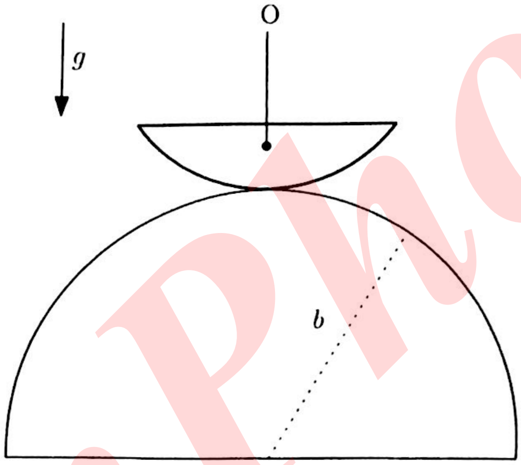
الف) قطعه ای به جرم M مطابق شکل ۱، بخشی از یک استوانه توپر است که مقطع آن ناحیه محصور بین کمان AB از دایره ای به شعاع a و وتر روبروی این کمان است. از نقطه O مرکز دایره، که در واقع محل تقاطع محور استوانه با صفحه شکل است، وتر و کمان AB تحت زاویه $2\theta_\cdot$ دیده می شوند. طول l، فاصله مرکز دایره با مرکز جرم دستگاه را بر حسب a و $\theta_\cdot$ به دست آورید.



شکل ۱

ب) قطعه یاد شده را مطابق شکل ۲ بر فراز نیم استوانه ثابتی به شعاع b قرار می دهیم. اصطکاک بین قطعه و نیم استوانه زیاد است و روی هم سر نمی خورند. در ابتدا دستگاه در حال تعادل است و وتر AB در حالت

افقی قرار دارد. قطعه کمی نسبت به حالت تعادل منحرف می شود، طوری که زاویه وتر AB با امتداد افقی زاویه بسیار کوچک ϕ باشد. تغییر انرژی پتانسیل دستگاه را بر حسب ϕ، l، a، b و Mg به دست آورید، که g شتاب گرانش است.



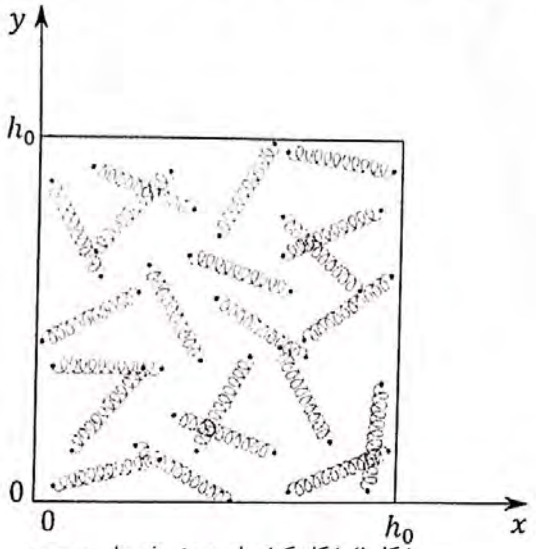
شکل ۲

ج) معین کنید به ازای چه مقادیری از l تعادل دستگاه در حالت $\phi = ۰$ پایدار، ناپایدار یا بی تفاوت است. سپس به ازای a و b معین، شرط تعادل پایدار را به شکل یک نامساوی برای متغیر $\theta_۰$ به دست آورید. با در نظر گرفتن رفتار عبارتها در نزدیکی $\theta_۰ = ۰$ نشان دهید ناحیه تعادل پایدار به صورت $\theta_{۰m} > \theta_۰ > ۰$ است. راهی برای به دست آوردن $\theta_{۰m}$ ارائه کنید.

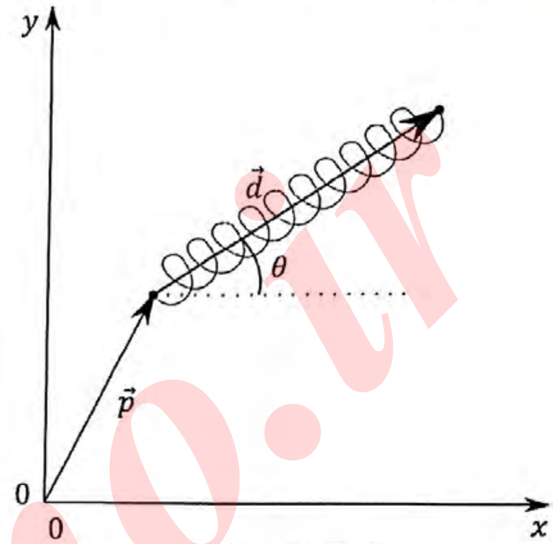
د) انرژی جنبشی دستگاه را ابتدا برای ϕ متناهی و سپس برای ϕ کوچک بر حسب M، a، b، $\dot{\phi}$ و $\theta_۰$ به دست آورید.

ه) بسامد زاویه ای نوسان های کوچک دستگاه حول حالت تعادل پایدار را بر حسب g، a، $\theta_۰$ و b/a به دست آورید و سپس آن را به ازای $\theta_۰ = \pi/۶$ و $b/a = ۱$ بر حسب g و a حساب کنید.

بخش نخست) در این بخش قصد داریم مدلی برای یک سطح کشسان (مثل یک لایه از لاستیک) ارائه دهیم. فرض کنید قطعه‌ای کشیده نشده ازین ماده در اختیار داریم که ابعاد $h_0 \times h_0$ دارد و در دستگاه مختصات مطابق شکل ۱ قرار دارد. تعداد بسیار زیادی فنر میکروسکوپیک بر روی این مربع به طور یکنواخت توزیع شده‌اند به طوری که در واحد سطح مربع n عدد از آن‌ها یافت می‌شود($n \gg 1$). تمام این فنرها ضریب کشسانی k و طول اولیه‌ی l_0 دارند که $l_0 \ll h_0$. اگر مکان ابتدای یک فنر را با $\vec{p}$ نشان دهیم و برداری که ابتدای فنر را به انتهای آن می‌رساند را با $\vec{d}$، در حالت کشیده نشده داریم: $|\vec{d}| = l_0$ و اگر زاویه‌ی $\vec{d}$ را با محور $\hat{x}$ بنامیم: θ ، آنگاه، θ مقداری تصادفی میان $(0,2\pi)$ با توزیع یکنواخت است. (در حالت کشیده شده هر دوی این شرایط ممکن است تغییر کنند)



شکل ۱) شکل کیفی از چینش فنرها روی مربع

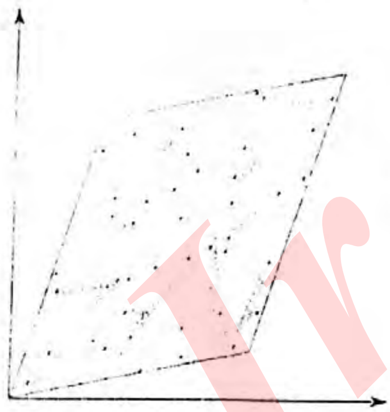


شکل ۲) موقعیت یک فنر

الف) چه تعداد فنر درون مربع $h_0 \times h_0$ وجود دارد که زاویه‌ی θی آن‌ها بین θ تا $\theta + d\theta$ باشد؟ آیا اگر از مقداری که بدست آورده‌اید روی θ از 0 تا 2π انتگرال بگیریم تعداد کل فنرهای داخل مربع را به ما خواهد داد؟(۰,۲۵ نمره)

ب) انرژی ذخیره شده در یک فنر با طول اولیه‌ی l_0 و ضریب کشسانی k وقتی آنقدر کشیده(یا فشرده) شده که به طول l در آمده است چقدر است؟ (انرژی حالت $l = l_0$ بایست صفر باشد) (۰,۲۵ نمره)

حال فرض کنید تبدیل خطی دلخواه: $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را بر این صفحه‌ی دو بعدی اعمال میکنیم به طوری که هر نقطه‌ای که پیش از این در مختصات $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ قرار داشته است حال به نقطه‌ی $\vec{r}' = T\,\vec{r} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ منتقل می‌شود (شکل ۳). تحت این تبدیل هندسی، مختصات ابتدا و انتهای تمام فنرها عوض می‌شود و باعث می‌شود آنها کشیده یا فشرده شوند. خود مربع $h_0 \times h_0$ نیز پس از این تبدیل احتمالا به یک متوازی الاضلاع تبدیل خواهد شد.


شکل۳) تبدیل یافته تحت T

ج) انرژی کل فنرهای درون مربع سابق را پس از اعمال تبدیل T به صورت یک انتگرال بر روی θ بنویسید. بحث کنید که آیا محل قرار گیری یک فنر قبل از تبدیل T ، بر روی انرژی آن پس از تبدیل تاثیری می‌گذارد؟ (۱,۵ نمره)

د) نشان دهید اگر تبدیل T یک تبدیل متعامد باشد (ترانهاده‌ی T برابر معکوس آن باشد) آنگاه انرژی بخش قبل صفر خواهد بود.(۰,۵ نمره)

هـ) برای تبدیل Scale به فرم: $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ جواب قسمت ج را دوباره بنویسید و ساده کنید و انتگرال را بگیرید و انرژی سیستم را برحسب λ و باقی پارامترهای مساله محاسبه کنید.(۰,۵ نمره)

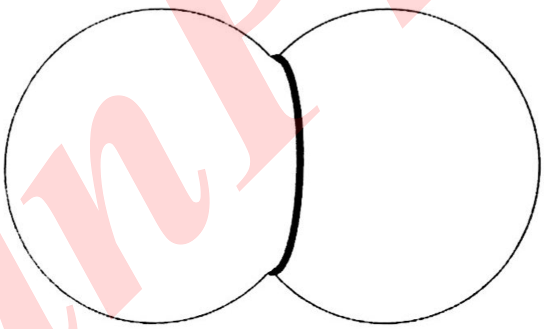
ازین پس تنها با تبدیل های به فرم قسمت (هـ) کار می‌کنیم. ضلع جدید مربع پس از این تبدیل $h = \lambda h_0$ است. یک خط صاف فرضی به طول t که $t < h$ روی مربع تبدیل یافته رسم می‌کنیم. نیروی کشش میان دو طرف این خط با اندازه‌ی t متناسب است: $T = \sigma\, t$.

و) σ را به صورت تابعی از λ و باقی پارامترهای مساله بیابید.(۱ نمره)

بخش دوم) حال فرض کنید با ماده‌ی قسمت قبل یک رویه‌ی کروی می‌سازیم که در حالت کشیده نشده شعاع r_0 که $r_0 \gg l_0$ دارد و تعداد فنرها بر واحد سطح و ضریب کشسانی فنرها و طول اولیه‌ی فنرها همانند بخش‌های قبل است (ضریب کشسانی فنرها با دما تغییر نمی‌کند).
N مول گاز ایده‌آل رقیقی را به داخل این توپ تزریق می‌کنیم، دمای محیط T_0 است و از فشار هوای بیرون صرف نظر کنید. صبر می‌کنیم تا گاز داخل توپ با بیرون هم‌دما شود. کره تغییر شعاع پیدا می‌کند به شعاع r_E. تغییر شعاع کره دقیقا یک تبدیل Scale است با $\lambda = r/r_0$ و می‌توانید از روابط بدست آمده از بخش قبل برای آن استفاده کنید. فرض کنید گاز داخل توپ رقیق است و فشار آن کم، در نتیجه تغییر شعاع بسیار کوچک است: $1 \gg \frac{(r_E - r_0)}{r_0}$ یا $1 \gg N$. تمام محاسبات قسمت‌های بعد را تا اولین مرتبه‌ی این تصحیح انجام دهید.

ز) با نوشتن معادله‌ی تعادل نیروها (برای بخشی دلخواه از کره) رابطه‌ای میان فشار گاز داخل توپ P ، شعاع توپ r و بقیه ثوابت بیابید. سپس با در نظر گرفتن معادله‌ی گاز ایده‌آل شعاع جدید کره را r_E برحسب ثوابت بیابید. (۲ نمره)

ح) توپ به تعادل رسیده‌ی قسمت (ز) را فرض کنید. حول استوای توپ یک نخ دایره‌ای به طول $2\pi r_n$ که $r_n < r_E$ می‌بندیم و توپ به شکل ۴ درمی‌آید. صبر می‌کنیم تا مجدداً گاز با محیط همدما شود. با این فرض که کره‌ی اولیه به دو بخش تقسیم شده است و حال هر کدام از بخش‌ها خود به شکل کره‌هایی ناقص در آمده‌اند و این که همچنان کشش لاستیک (برای هر یک از دو بخش آن) از نوع Scale خالص است. نیروی کشش نخ را برحسب r_n و باقی ثوابت پیدا کنید. (خوب است که در ابتدای کار برای خود تعیین کنید، هر چیزی را تا چه مرتبه‌ای از تقریب نیاز است محاسبه کنید.) (می‌توانید کمیت‌های هندسی‌ای به دلخواه خود تعریف کرده، آن‌ها را بدست آورید و از آن‌ها در پاسخ نهایی خود استفاده کنید.) (۴ نمره)



شکل۴) توپ وقتی که آنرا از استوا با یک نخ می‌بندیم

راهنمایی: شاید فرمول‌های زیر به کارتان آمد و شما را از شر انتگرال‌گیری‌هایی متعدد رهاند:

$$S = 2\pi r^2(1 - cos\theta), \qquad V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

که اولی مساحت عرقچینی است که یک مخروط (که یالش با محورش زاویه‌ی θ میسازد) که راس آن بر مرکز یک کره به شعاع r قرار گرفته است از سطح کره جدا می‌کند. دومی حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h است.

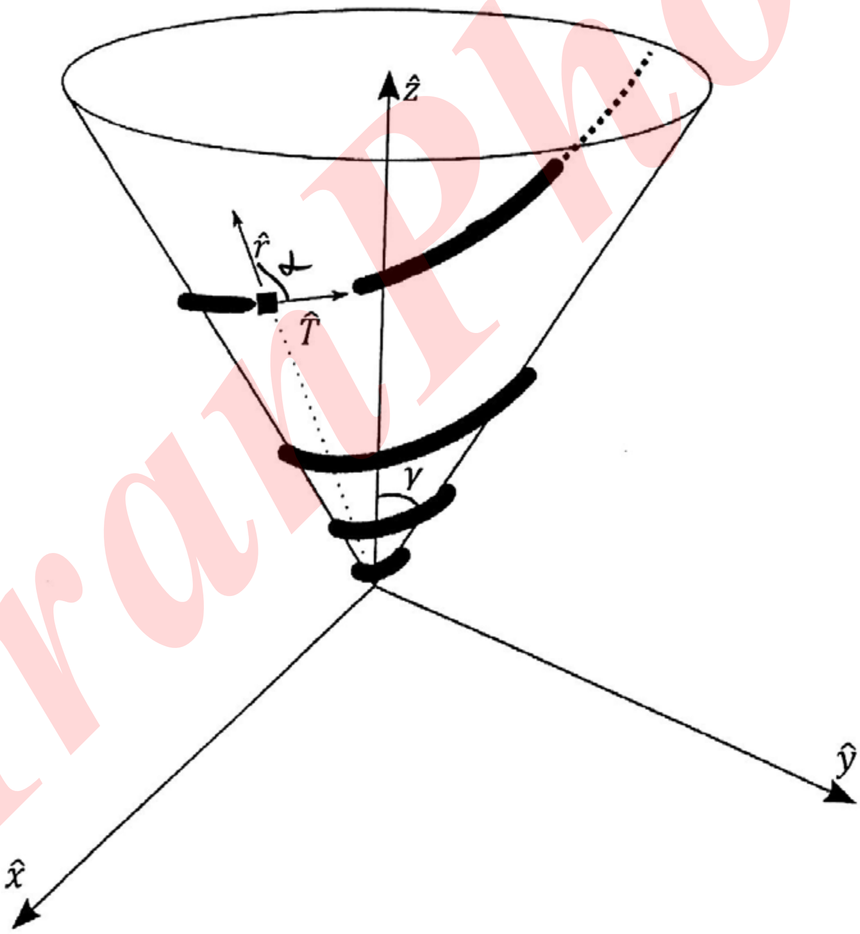
موفق باشید :)

الف) یک خم در فضا با بردار مکان $\vec{r}(s)$ در نظر بگیرید که s پارامتر طول بر روی خم است. شعاع انحنا در هر نقطه از خم را برحسب $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ و $\vec{r}''$، که پرایم به معنای مشتق گیری نسبت به s است، بنویسید.

یک مخروط با زاویه راس γ در نظر بگیرید. مطابق شکل، نوک مخروط را در مبدأ مختصات قرار می‌دهیم به طوری که محور مخروط در راستای $\hat{z}$ باشد. بر روی مخروط یک طناب بی جرم به طور کامل قرار گرفته است، ابتدای طناب در نوک مخروط قرار دارد. در هر نقطه از طناب، راستای مماس بر طناب، با بردار مکان آن نقطه در دستگاه کروی، زاویه‌ی ثابت α می‌سازد: $(\hat{T}.\hat{r} = \cos\alpha)$. فرض کنید ضریب اصطکاک طناب با مخروط μ ، و طناب در آستانه‌ی لغزش رو به بالا قرار دارد.

ب) بردار جهت نیروی اصطکاک بر روی مخروط را به صورت: $\hat{f} = -e_1\hat{\varphi} - e_2\hat{r}$ در نظر بگیرید. ابتدا معادلات حاکم بر طناب در دستگاه TNB را بنویسید، سپس نشان دهید که e_1 و e_2 برروی طناب ثابت هستند و آن‌ها را بدست آورید.

ج) نشان دهید بر روی طناب پارامتر Tz^{β} ثابت می‌باشد، که T کشش طناب در هر نقطه است. پارامتر β را بدست آورید.



بسم الرحمن

آزمون پایانی المپیاد فیزیک – بخش تئوری (تابستان ۹۷)

در این آزمون ماشین حساب fx۸۲-ms و کاغذ نمودار میلیمتری و خطکش در اختیار شما قرار میگیرد.

سوال ۵

ضرایب انتقال گرمای میله ی آلومینیومی

اگر میله ای رسانا که از سطح جانبی اش اتلاف گرما نداشته باشد را تحت اختلاف دمای ΔT قرار دهیم آنگاه آهنگ عبور گرما از آن متناسب با سطح مقطع میله (A) و اختلاف دمای دو طرف(ΔT) و ضریب k (که به جنس میله بستگی دارد) و معکوس طول میله($\frac{1}{d}$) می‌باشد:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{kA\Delta T}{d}$$

از طرفی هر جسمی که از سطح جانبی اش (A') با هوا تبادل گرما کند رابطه شارش گرمای آن به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = HA'\Delta T$$

در این رابطه H ضریب انتقال گرمای سطحی خواهد بود.

می‌توان اثبات کرد وقتی یک میله به دو طریق رسانش و همرفت به صورت همزمان انتقال حرارت داشته باشد معادله دما T بر حسب موقعیت آن x به صورت زیر خواهد شد:

$$T = T_0 + \alpha \cosh(\beta x + \theta)$$

که T_0 دمای محیط و α, β, θ ثوابت مسئله هستند.

در یک آزمایش که اعداد آن در آزمایشگاهی با دمای محیط ۲۴°C گرفته شده است، دمای میله در موقعیت های مختلف اندازه گیری شده و در جدول ۱ آمده است. (دقت کنید جدول ۱ در پاسخ نامه شما قرار دارد و در نهایت باید تحویل داده شود)

میخواهیم با تحلیل این اعداد ، ثوابت مسئله را بدست آوریم. درطول مسئله نیاز به محاسبه خطا نیست.

الف) برای این کار در ابتدا نقاط را روی نمودار میلیمتری رسم کنید. (۲ نمره)

ب) سعی کنید به صورت چشمی نقطه کمینه و خط تقارن تابع را رسم کنید و مقدار T_{min}، $x_{T_{min}}$ را در کادر بنویسید. (۰,۷۵ نمره)

ج) با استفاده از قسمت قبل مقدار α و نسبت θ به β را بیابید و در کادر بنویسید. (۰,۷۵ نمره)

برای بدست آوردن β, θ می‌توانید از ستون های اضافه جدول استفاده کنید.

د) با روش هایی که آموخته اید و با استفاده از رسم نموداری جدید، β, θ را بدست آورید و آن ها را در کادر بنویسید. در این بخش حتما توضیحی از کاری که انجام داده‌اید ارائه کنید . در صورت نیاز برای حذف کردن نقاط و بی تاثیر کردن آنها در محاسبات باید دلایل قانع کننده داشته باشید. (۶ نمره)

ه) جواب بدست آمده برای β, θ در قسمت د را با رابطه ای که در قسمت ج بدست آورده اید مقایسه کنید . (۰,۵ نمره)

سوال ٦

تاس ناهمگن

در این سوال می خواهیم صحت یک فرضیه را با استفاده از احتمال بررسی کنیم.

فرضیه مورد نظر این است اگر جسمی مکعبی شکل، به صورت اتفاقی پرتاب شود ، در هنگام تعادل نهایی ، سطح i ام با احتمال

$$P_i = \frac{\Omega_i}{4\pi} \qquad \text{معادله ۱:}$$

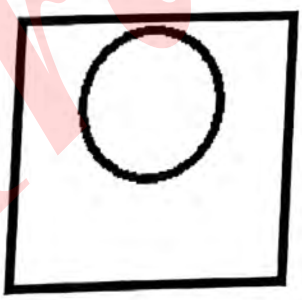
روی زمین قرار میگیرد، که در آن Ω_i زاویه فضایی آن سطح (نسبت به مرکز جرم آن جسم) است.

مرکز جرم تاس هایی که در اختیار شماست بر روی خطی که از مرکز وجه های ۱ و ۶ می گذرد قرار دارد اما نسبت به وجه های دیگر روی مرکز مربع نیست .

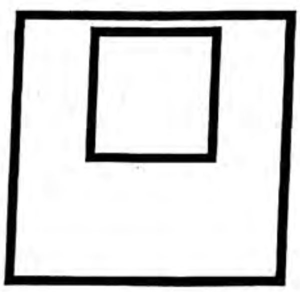
زاویه فضایی یک مربع به اضلاع $2a$ نسبت به نقطه ای که به فاصله Z و بر روی محور مرکزی عمود بر صفحه قرار دارد برابر است با :

$$\Omega = 2\pi - 4\,arc\tan\left[\frac{Z}{a}\sqrt{2+\left(\frac{Z}{a}\right)^2}\,\right] \qquad \text{معادله ۲ :}$$

دوتاس متفاوت به شکلهای زیر به شما داده شده است .

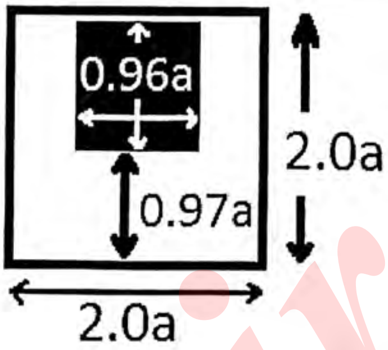


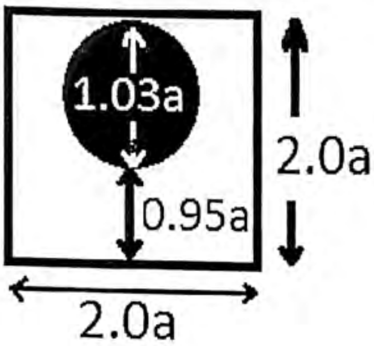
تاس B (آبی)



تاس A (سیاه)

الف) با توجه به مقیاس‌های داده شده در اشکال زیر، فاصله مرکزجرم را نسبت به ضلع شماره ۱و۶ بر حسب a برای هر دو تاس A و B بدست آورید و در کادر بنویسید. (۲ نمره)





از این پس خطای اندازه گیری مرکز جرم را $0.1a$ در نظر بگیرید.

ب) با استفاده از قسمت قبل Ω_1 و Ω_6 و خطای آن ها را برای هر دو تاس با استفاده از معادله۲ به دست آورید. (۱ نمره)

ج) هر تاس را ۴۰ بار انداخته و در ستون اول جدول داده شده (۱) ، شماره سطح بالایی تاس را گزارش کنید این کار را مجموعا ۱۲ بار انجام دهید و در باقی ستون های جدول وارد کنید پس از کامل شدن جدول ، احتمال روی زمین قرار گرفتن وجه i (p_i) را برای هر ستون جدول محاسبه کرده و در جدول ۲ بنویسید . (۴ نمره)

د) در انتها $\bar{p}_1$ و $\Delta\bar{p}_1$ و $\bar{p}_6$ و $\Delta\bar{p}_6$ را محاسبه کنید . توضیح دهید چگونه خطا را بدست می آورید. (۱,۵ نمره)

ه) حال با استفاده از معادله ۱ و جواب های قسمت د، Ω_1 و Ω_6 و خطاهای را محاسبه کرده و آنها را گزارش نمایید . (۱ نمره)

و) جواب فوق را با نتیجه قسمت ب مقایسه کرده و بگویید آیا فرضیه مسئله درست است یا خیر ؟ (۰,۵نمره)

۱) این سوال از سه بخش مجزا تشکیل شده است

بخش اول

گاز فوتونی: یک کاواک با سطوح مرزی رسانا در نظر بگیرید. حجم کاواک V است. این کاواک با یک منبع گرمایی T در تعادل گرمایی قرار دارد. در این کاواک امواج الکترومغناطیسی وجود دارد که با منبع گرمایی به تعادل رسیده اند. می دانیم امواج الکترومغناطیسی از ذرات فوتون تشکیل شده است. در نتیجه یک گاز از ذرات فوتون گرمایی داریم.

الف) با استفاده از تحلیل ابعادی نشان دهید انرژی این گاز را می‌توان به فرم: $U = k_B T f(x)$ نوشت که x تابعی از k_B و T و h و c و V می‌باشد. فرض کنید رابطه x با V خطی است.

ب) با استفاده از همسانگردی و معادله‌ی تکانه انرژی ذرات فوتون می‌توان نشان داد که معادله حالت گاز فوتونی به فرم زیر می‌باشد: $PV = U/3$. ابتدا فرض کنید $f(x) = x^\alpha$ به فرم x^α می‌باشد. با استفاده از فرض های زیر آنتروپی گاز را بر حسب α بدست آورید.

فرض 1: با توجه به قانون سوم ترمودینامیک آنتروپی گاز در دمای صفر، صفر می‌باشد :

$$S(T = 0) = 0$$

فرض 2: به علت بوزون بودن ذرات فوتون، انرژی گاز در دمای صفر، صفر می‌باشد:

$$U(T = 0) = 0$$

ج) با استفاده از روابط بدست آمده، α را بدست آورید.

د) انرژی آزاد گیبز و ظرفیت گرمایی گاز در فشار ثابت را بدست آورید.

بخش دوم

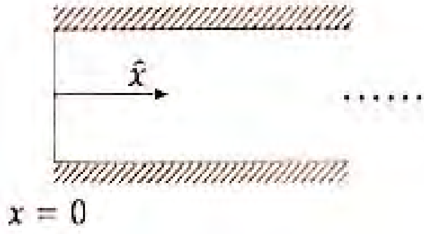
اثبات کنید که بازده هر ماشین گرمایی دلخواه با یک چرخه ی ترمودینامیکی، کوچکتر یا مساوی است از بازده ماشین کارنویی که بین دو منبع گرمایی با دماهای کمینه و بیشینه چرخه کار می کند.

$$\eta \le \eta_c(T_{min} , T_{max})$$

بخش سوم

یک سیستم متشکل از N جسم با ظرفیت گرمایی C_1 تا C_N و دماهای اولیه ی T_1 تا T_N داریم. سیستم از محیط ایزوله می‌باشد ماکسیمم کار ممکن که می توان از این سیستم بدست آورد را حساب کنید. در این حالت دماهای نهایی اجسام را بدست آورید.

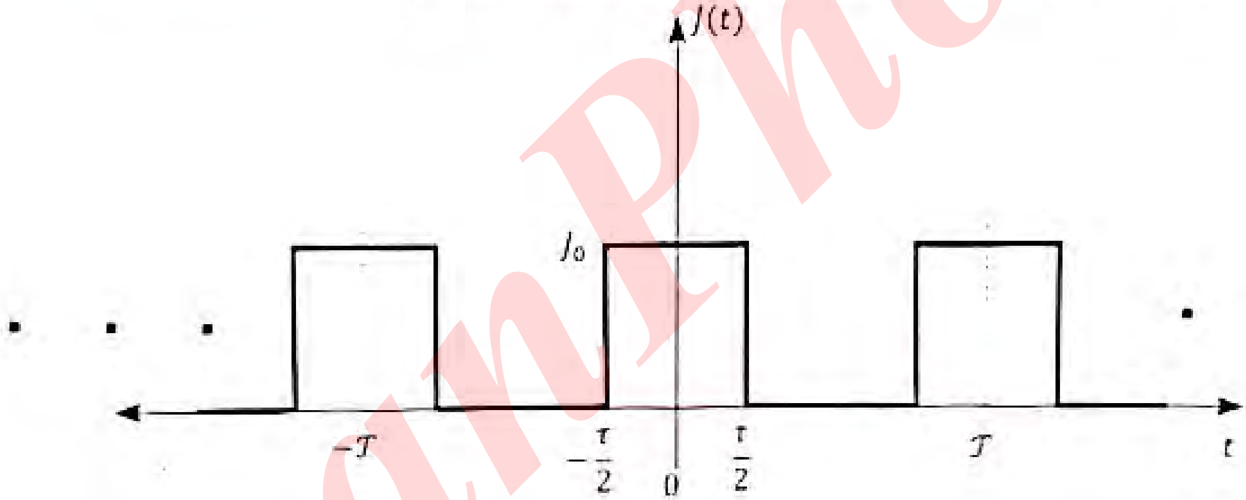
۲) یک میله با چگالی جرمی ثابت و ضریب رسانشی ثابت k و ظرفیت گرمایی ویژه ثابت C در نظر بگیرید. ابتدای میله در مبدا مختصات قرار دارد و مطابق شکل میله در راستای $\hat{x}$ می باشد. طول میله بینهایت و سطوح کناری میله عایق بندی شده است. فرض کنید تابع دما تنها به فرم $T(x,t)$ می باشد.



الف) فرض کنید ابتدای میله در تعادل با یک منبع با دمای $T_0 \cos\omega t$ قرار دارد. دما را داخل میله به صورت تابعی از مکان و زمان بدست اورید.

راهنمایی: میتوانید دما را به فرم $T(x,t) = f(x)\cos\omega t + g(x)\sin\omega t$ در نظر بگیرید.

ب) فرض کنید به ابتدای میله با آهنگ $J(t)$ گرما میدهیم. $J(t)$ مطابق نمودار زیر یک تابع تناوبی از زمان با دوره تناوب T می‌باشد که در هر دوره تنها مدت زمان τ غیر صفر است. دما را به صورت تابعی از مکان و زمان داخل میله بدست آورید.



۴) علاوه بر معادلهٔ حالت گاز ایده‌آل و گاز واندروالس، معادلات حالت دیگری برای گازها وجود دارد. یکی از آن‌ها که برای فشارهای بالا و دماهای بالاتر از دمای بحرانی مناسب است به معادلهٔ حالت Redlich-Kwong معروف است

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{\sqrt{T}V(V + nb)}$$

که در آن n تعداد مول و a و b ثابت‌هایی مثبت‌اند که به نوع گاز بستگی دارند.

آ) ضرایب ویریال $B_2(T)$ و $B_3(T)$ را به دست آورید.

قسمت‌های بعدی مسئله را با همان شکل کلی معادلهٔ حالت داده شده انجام دهید. برای n مول گاز در یک فرآیند برگشت‌پذیر هم‌دما در دمای T:

ب) کار مبادله شده از حجم V_1 تا حجم V_2 را محاسبه کنید.

پ) تغییر آنتروپی گاز از حجم V_1 تا حجم V_2 را محاسبه کنید.

ت) تغییر آنتالپی گاز از حجم V_1 تا حجم V_2 را محاسبه کنید.

طبق تعریف، دمای بحرانی یک گاز دمایی است که بالاتر از آن تمایزی بین مایع و بخار وجود ندارد. به عبارت دیگر در زیر دمای بحرانی اگر گاز را متراکم کنیم بخشی از گاز از حالت بخار شروع به مایع شدن می‌کند. در صورتی که بالای دمای بحرانی این اتفاق نمی‌افتد. برای گاز واندروالس و گاز فوق، نقطهٔ بحرانی حالت تعادلی از گاز مانند (P_C, V_C, T_C) است که در آن شرایط زیر برقرار است

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{(T_C, V_C, P_C)} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{(T_C, V_C, P_C)} = 0$$

ث) برای گاز فوق در نقطهٔ بحرانی چه رابطه‌ای (مستقل از a و b) بین T_C، V_C و P_C برقرار است؟

ج) ثابت‌های a و b را بر حسب T_C، P_C و R به دست آورید.

اکنون فرض کنید گاز آرگون را به صورت برگشت‌پذیر و هم‌دما در دمای $300\,\mathrm{K}$ با آهنگ $1\,\mathrm{kg/s}$ از فشار $1\,\mathrm{atm}$ تا فشار $300\,\mathrm{atm}$ متراکم می‌کنیم. نقطهٔ بحرانی گاز آرگون $(T_c = 151\,\mathrm{K}, P_c = 48\,\mathrm{atm})$ است. جرم مولی گاز آرگون $39.9\,\mathrm{g/mol}$ است.

ج) مقدار عددی ثابت‌های a و b برای گاز آرگون چقدر است؟

ح) مقدار عددی قسمت پ) و ت) را بر واحد مول به دست آورید.

خ) کمپرسوری که باید گاز را متراکم کند با چه توانی کار می‌کند؟

در صورت لزوم:

$$P = \frac{nRT}{V}\left(1 + \frac{n}{V}B_2(T) + \frac{n^2}{V^2}B_3(T) + \cdots\right)$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$H = U + PV$$

$$1\,\mathrm{atm} = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{pa}$$

$$R = 8.31\,\mathrm{J/mol.K}$$

در صورتی که نیاز به حل معادلهٔ درجه سومی مانند $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ دارید، اگر بنویسیم

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}, \quad S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

و به شرطی که a_1، a_2، a_3 حقیقی و $Q^3 + R^2 > 0$ باشد معادله یک ریشهٔ حقیقی به صورت $x_1 = S + T - \frac{a_1}{3}$ دارد.

۴) آزمایش برخورد یونهای سنگین

آزمایش برخورد یونهای سنگین در شتاب دهنده‌ی سرن $CERN$ در مرز سوییس و فرانسه. دو دسته یونهای سرب هر یک شامل میلیونها یون سرب از دو سوی مخالف و با سرعت‌های یکسان به سوی هم شلیک می‌شوند. هر برخورد یکی از یونهای یک دسته با یکی از یونهای دسته مخالف را یک رویداد می‌نامیم. فیزیک ذرات بنیادی پیش‌بینی می‌کند در هر رویداد در چنین آزمایشی، در زمانی کوتاه از مرتبه‌ی 10^{-14} ثانیه. "محیطی" از ماده‌ی درون هسته‌ای شامل کوارک و گلوون تشکیل می‌شود. این محیط، پلاسمای کوارک-گلوون نامیده می‌شود. کوارکها شبیه الکترون‌ها ذراتی باردار با اسپین $\frac{1}{2}$ هستند ولی برخلاف الکترون‌ها، شش نوع گوناگون با جرم‌های متفاوت دارند. گلوون‌ها مانند فوتون‌ها ذراتی بی‌بار با اسپین ۱ هستند. فیزیک ذرات بنیادی هم‌چنین پیش‌بینی می‌کند که کوارک‌های سبک‌تر، محیط را تشکیل می‌دهند و کوارک‌های سنگین‌تر در این محیط حرکت می‌کنند. توجه داشته باشید که ابعاد این محیط از مرتبه‌ی قطر هسته‌ی سرب است.

اگر برخورد دو یون سنگین سربه‌سر باشد، محیط تشکیل شده، در چارچوب آزمایشگاه، به صورت یک استوانه خواهد بود (در شکل ۱، دو یون سنگین در راستای محور y به هم نزدیک می‌شوند.) . با گذشت زمان، این محیط منبسط شده رقیق می‌شود و دمای آن کاهش می‌یابد؛ مانند تبخیر آب، پلاسما در حال تغییر فاز است! اما در نهایت این کوارکها و گلوون‌ها نیستند که با از بین رفتن پلاسما، وارد فضای آزمایشگاه شوند! بر طبق نظریه‌ای به‌نام حبس‌شدگی، کوارکها و گلوون‌ها هنگام خروج از پلاسما در بسته‌هایی به نام "هادرون" حبس شده، این هادرون‌ها هستند که وارد فضای آزمایشگاه شده، در آشکارسازها آشکار می‌شوند. پروتون و نوترون، دو نوع از اقسام هادرونها هستند.

از توضیحات بالا واضح است که بیش از هادرونی شدن کامل محیط، ابتدا کوارک‌های سنگین‌تر هادرونی می‌شوند و هادرونهای حاصل از آن‌ها در آشکارسازها آشکار می‌شوند. مطابق شکل ۲ فرض کنید دو کوارک سنگین هر دو با جرم M و سرعت v_0، در نقطه‌ی C از یکدیگر به صورت کشسان پراکنده شده و با زاویه‌ی θ از نقطه‌ی برخورد خارج می‌شوند. پس از برخورد، با حرکت در محیط در حال انبساط به مرز محیط می‌رسند. سپس هادرونی شده، هریک تعداد زیادی هادرون سبک تولید می‌کنند که جت هادرونی نامیده می‌شود. جت هادرونی مخروطی‌شکل است و محور آن در راستای تکانه‌ی کوارکی است که با هادرونی شدن آن، جت تولید شده است. فیزیک‌دانان با تحلیل هادرون‌های آشکارشده در یک جت می‌توانند جمع انرژی ذرات درون جت، E، و هم‌چنین راستای محور مخروط جت، θ، را نیز تعیین کنند.

آشکار شدن دو جت پشت به پشت که جمع انرژی ذرات آن‌ها به ترتیب E_1 و E_2 $E_1 \neq E_2$ باشد تاییدی بر تشکیل محیط است؛ چون نشان می‌دهد پس از پراکندگی در نقطه‌ی C، کوارکی که مسیر طولانی‌تری طی کرده انرژی بیشتری از دست داده و منجر به تشکیل جت کم‌انرژی‌تری گشته است.

فرض کنید افت انرژی کوارک در محیط به دلیل اثر یک نیروی مقاوم و متناسب با سرعت برآن است:

$$\vec{F} = -\eta \vec{v} \qquad (1)$$

که در این رابطه، ضریب ثابت η به مشخصات برهمکنش بین کوارک و محیط بستگی دارد.

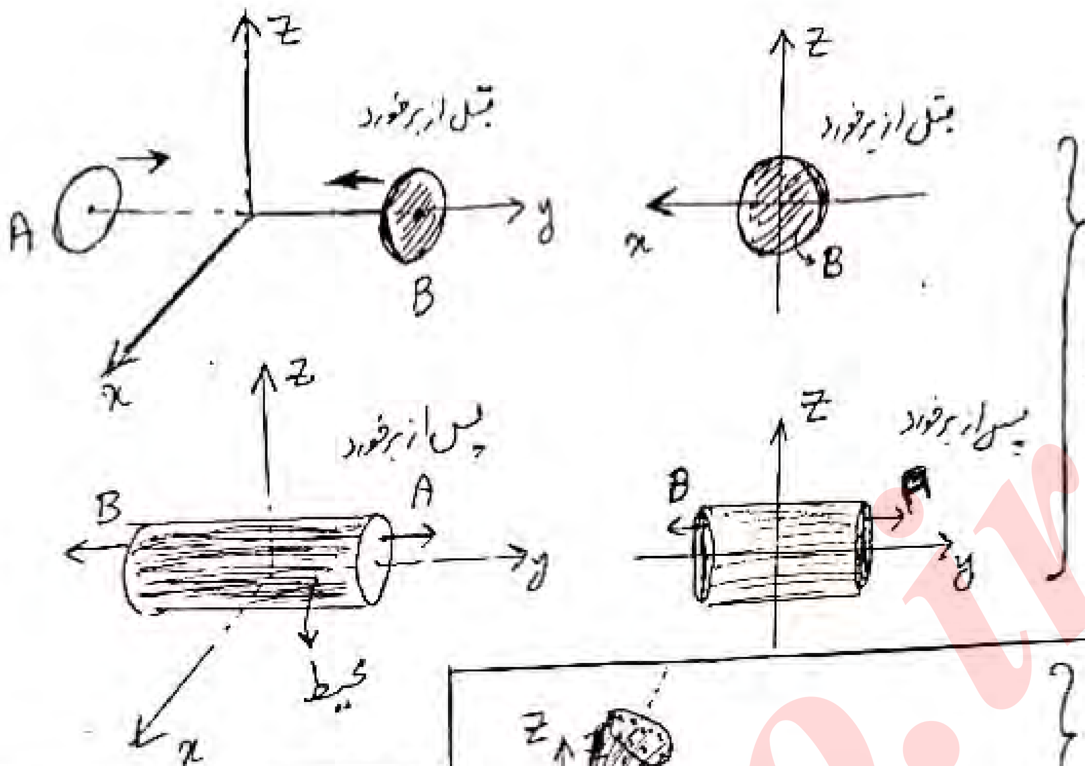
الف) η را بر حسب M، R، v_0، E_1، E_2 و θ حساب کنید. (R شعاع یون است.)

در یک برخورد سربه‌سر انتظار این است که توزیع ذرات آشکار شده در صفحه‌ی $x-y$، مستقل از زاویه‌ی ϕ باشد. در یک آزمایش برخورد یونهای سنگین اما، بسیاری از رویدادها سربه‌سر نیستند (شکل ۳). در یک رویداد غیر سربه‌سر، محیط تشکیل شده به جای استوانه، یک موازی‌السطوح با مقطع "بادامی‌شکل" است چون گرادیان فشار در روی محور کوتاه‌تر بادام بزرگ‌تر از گرادیان فشار در روی محور بلندتر بادام است، انتظار این است که در دوسوی محور افقی (محور کوتاه‌تر)، تعداد ذره‌ی بیش‌تری آشکار شود. این انحراف از توزیع یکنواخت را با پارامتری به نام v_2 اندازه‌گیری می‌کنند به این ترتیب که تعداد ذره‌ی آشکارشده در واحد زاویه‌ی ϕ را چنین می‌نویسیم

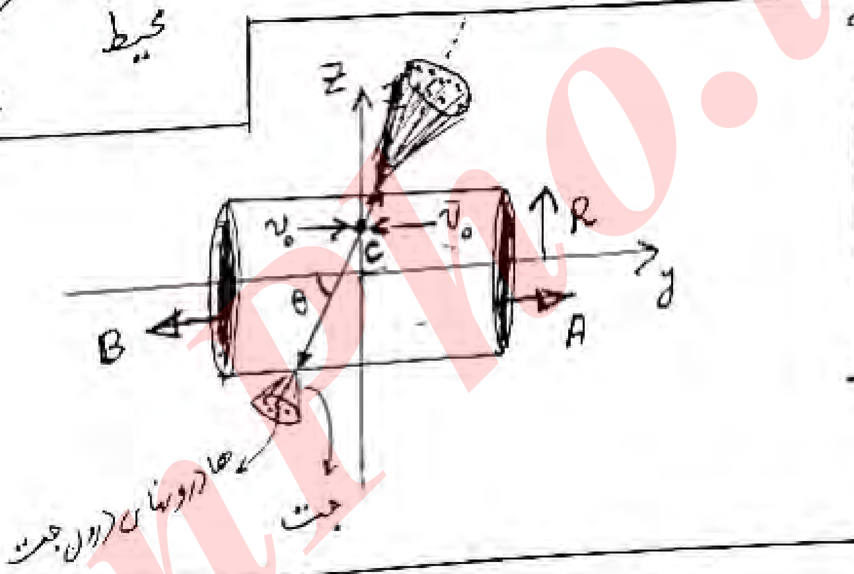
$$\frac{dN}{d\phi} = A(1 + v_2 \cos 2\phi) \qquad (2)$$

ب) فرض کنید در یک آزمایش، ذرات به‌دست‌آمده از یک رویداد را توسط ۱۰ تا آشکارساز که هر یک بازه‌ای ۱۸ درجه‌ای از ϕ را آشکارسازی می‌کند، می‌شماریم. نتایج مطابق جدول میله‌ای زیر است. با در نظر گرفتن این نکته که تعداد ذره‌ی آشکارشده در واحد زاویه‌ی ϕ دارای توزیعی پیوسته به صورت رابطه‌ی (۲) است، v_2 را به طور تقریبی برای این رویداد حساب کنید.

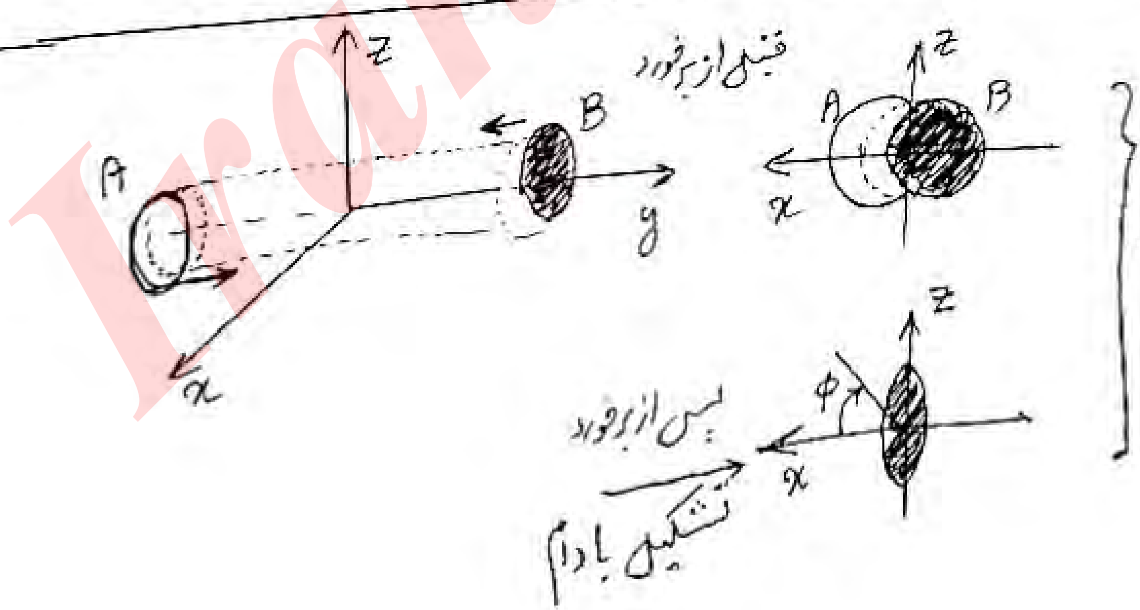
ϕ	$(0, \frac{\pi}{10})$	$(\frac{\pi}{10}, \frac{2\pi}{10})$	$(\frac{2\pi}{10}, \frac{3\pi}{10})$	$(\frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{10})$	$(\frac{4\pi}{10}, \frac{5\pi}{10})$	$(\frac{5\pi}{10}, \frac{6\pi}{10})$	$(\frac{6\pi}{10}, \frac{7\pi}{10})$	$(\frac{7\pi}{10}, \frac{8\pi}{10})$	$(\frac{8\pi}{10}, \frac{9\pi}{10})$	$(\frac{9\pi}{10}, \pi)$
N	۶۴۱	۶۳۳	۶۲۶	۶۲۲	۶۱۸	۶۱۷	۶۲۱	۶۲۹	۶۳۶	۶۳۹



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳