مدار الکتریکی I

$K: 10^{3}$

$M: 10^{6}$

$G: 10^{9}$

$T: 10^{12}$

$m: 10^{-3}$

$\mu: 10^{-6}$

$\eta: 10^{-9}$

$p: 10^{-12}$

* سرفصل‌ها:

۱. مقدمه
۲. منابع الکتریکی، مقاومت‌ها و مدارهای ساده مقاومتی
۳. روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی
۴. خازن‌ها و سلف‌ها
۵. مدارهای مرتبه اول (دارای فقط یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی الکتریکی)
۶. مدارهای مرتبه دوم (دارای دو عنصر ذخیره‌ساز انرژی الکتریکی هستند)
۷. تجزیه تحلیل حالت دائمی سینوسی
۱۱. مدارهای سه فاز

فصل ۱

قابلیت انتقال ساده و قابلیت تبدیل به انرژی‌های دیگر دلایل محبوبیت انرژی الکتریکی هستند
و به سادگی از هر انرژی دیگری تولید انرژی الکتریکی امکان‌پذیر است.
و قابلیت ذخیره‌سازی نیز دارد (مثل باطری یا خازن)

* سیستم mks:

$K: \text{Kilo}: 10^{3}$ $M: \text{Mega}: 10^{6}$ $G: \text{Giga}: 10^{9}$

$T: \text{Tera}: 10^{12}$ $m: \text{mili}: 10^{-3}$ $\mu: \text{Micro}: 10^{-6}$

$\eta: \text{nano}: 10^{-9}$ $p: \text{pico}: 10^{-12}$

* تعریف واحدهای مهم الکتریکی:

الف: بار الکتریکی: q (واحد کولن C)

$$q_e = 1.6 \times 10^{-19}\ C$$

بار الکتریکی هر الکترون

$$1\ C = 6.3 \times 10^{18}\ q_e$$

ب: جریان الکتریکی (واحد آمپر A) به آهنگ تغییرات بار الکتریکی در واحد زمان جریان گفته می‌شود.

Δq: ← تغییرات بار الکتریکی

Δt: ← تغییرات زمان

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}\ \left(\frac{C}{S}\right)$$

جریان لحظه‌ای: $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ $\Delta t \to 0$ ← جریان لحظه‌ای: $i = \frac{dq}{dt}$

۲/۲

$q(t)$: $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt$

بار الکتریکی بعنوان تابعی از زمان

ج) انرژی الکتریکی: (W) انرژی ای که باید صرف تفکیک بارهای الکتریکی موافق یا برخلاف جهت حرکت آنها کرد تا هم

(واحد ژول J)

د) ولتاژ الکتریکی: (اختلاف پتانسیل الکتریکی) (V : Volt ولتاژ آن است)

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین A و B . اگر برای انتقال یک کولن بار الکتریکی از نقطه B به نقطه A به یک (ژول) انرژی نیاز باشد اختلاف پتانسیل الکتریکی (ولتاژ الکتریکی) بین این دو نقطه برابر با یک ولت است

ولتاژ $V = \frac{W}{q}$ $\qquad V(t) = \frac{dw}{dq}$ ← ولتاژ بعنوان تابعی از زمان → می تواند تابعی از زمان باشد $\qquad \left(\frac{J}{C}\right)$

ه) توان الکتریکی P (واحد وات : W) : تغییرات انرژی الکتریکی در واحد زمان توان الکتریکی نامیده می شود

$$p(t) = \frac{dw}{dt} \qquad W(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)\,dt$$

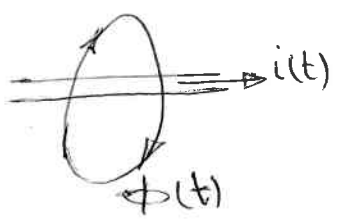
(انرژی)

$$p(t) = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = V(t) \times i(t)$$

if V, I = Constant $\longrightarrow P = VI$

انرژی : $W = VIt$

و) شار مغناطیسی:



(ولتاژ ولبر یا weber) (Φ : فی)

$$V(t) = \frac{d\Phi}{dt}$$

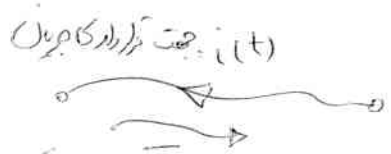
$$\longrightarrow \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} V(t)\,dt$$

۵) تعیین جهت مبنا برای تغییرهای الکتریکی

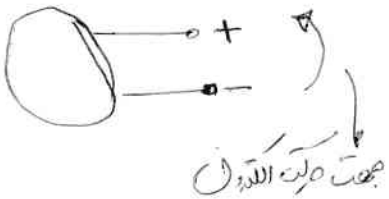
الف: جهت مبنا برای بار الکتریکی:

ب: جهت مبنا برای جریان الکتریکی: $i(t)$: جریان به عنوان یک بردار

جهت جریان خلاف جهت حرکت الکترون‌ها در نظر گرفته می‌شود به دلیل اینکه در هنگام کشف جریان الکتریکی تصور می‌شد که پروتون‌ها حرکت می‌کنند نه الکترون‌ها ولی بصورت قراردادی این حرکت در نظر گرفته می‌شود



ج: جهت مبنا برای ولتاژ الکتریکی: $\bar{V}(t)$:

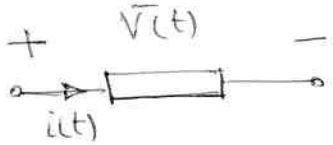


جهت حرکت قراردادی الکترون از قطب مثبت ولتاژ به قطب منفی است

خارج از مدار

در داخل مدار از قطب مثبت به منفی است

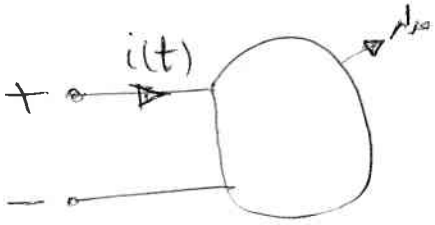
د: جهت قراردادی برای عناصر دو سر:



جهت قراردادی عناصر

ه: جهت مبنا برای توان الکتریکی: $P(t)$:

$$p(t) = \bar{V}(t) \cdot I(t)$$

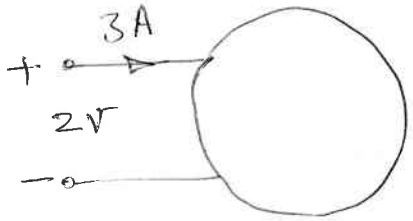


if: $p(t) = \bar{V}(t)\, i(t)$ $\begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

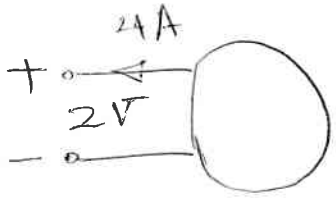
> 0 : مصرف کننده توان (passive)

< 0 : تولید کننده توان (Active)

حل:



$\rightarrow p(t) = 2V \times 3A = 6W$ مصرف کننده

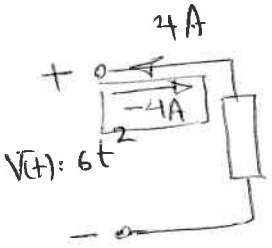


$p(t) = 2V \times 4A = 8W$ تولید کننده

چون خلاف جهت قراردادی منبع جریان در جریان است

$p(t) = 3 \times 2 = 6$ W
مصرف کننده

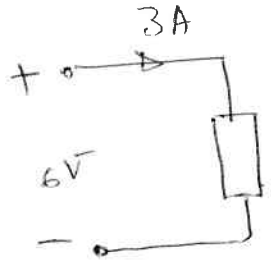
مثال: توان جذب شده و انرژی را در بازه زمانی 0 تا 10 ثانیه بیابید.



$$p(t) = 6t^2 \times (-4A) = -24t^2$$

توان در لحظه $t=10$: $p(t) = -24(10)^2 = -2400\ w$

$$w(t) = \int_0^t p(\tau)\,d\tau = \int_0^{10} -24\tau^2\,d\tau = -8\tau^3\Big|_0^{10} = -8000\ j$$



$$p(t) = 6V \times 3A = 18\ w$$

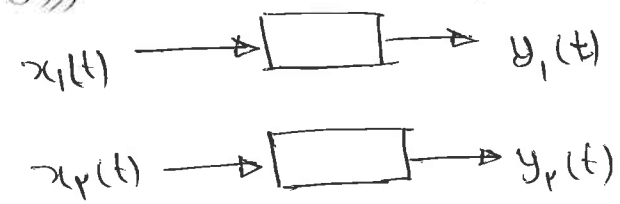
$$w(t) = \int_0^{10} 18\,dt = 18t\Big|_0^{10} = 180\ j$$

دسته بندی انواع عناصر در شبکه های الکتریکی:

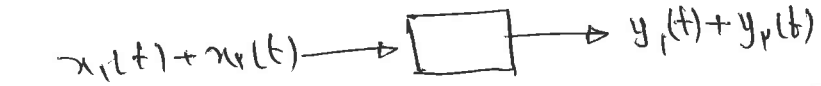
الف) خطی بودن: یک عنصر الکتریکی وقتی خطی است که از دو قاعده پیروی کند

۱) جمع پذیری
۲) ضرب (قاعده فرب)

* قاعده جمع پذیری:



عنصری خطی است که اگر $x_1(t)+x_2(t)$ به آن دهیم خروجی $y_1(t)+y_2(t)$ از آن بگیریم



---

* قاعده ضرب:

→ if $a\,x(t) \longrightarrow \square \longrightarrow a\,y(t)$

عنصری خطی است که اگر ورودی آن a برابر شد خروجی آن هم a برابر شود

ترکیب دو قاعده ضرب و جمع :

$x_1(t) \longrightarrow \square \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow \square \longrightarrow y_2(t)$

$\longrightarrow a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow \square \longrightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$

مثال:

$V(t) = R i(t)$

$i_1(t) \longrightarrow \square \longrightarrow R i_1(t)$

$i_2(t) \longrightarrow \square \longrightarrow R i_2(t)$

$i_1(t) + i_2(t) \longrightarrow \square \longrightarrow R(i_1(t) + i_2(t)) = R i_1(t) + R i_2(t) = V_1(t) + V_2(t)$

ب) تغییرپذیری یا تغییرناپذیری بازمان :

$x(t) \longrightarrow \square \longrightarrow y(t)$

تغییرناپذیر است : $\longrightarrow$ if $x(t-t_0) \longrightarrow \square \longrightarrow y(t-t_0)$

با تغییر زمان خروجی نسبت به ورودی تغییری نکند

دسته‌بندی انواع عناصر المانی :

الف) خطی بودن ب) تغییرناپذیری بازمان ج) پسیو یا اکتیو بودن

ج) passive or Active

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau > 0 : \text{passive}$$

عنصر مصرف کننده انرژی

مثل مقاومت خطی

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau < 0 : \text{Active}$$

تولید کننده انرژی مثل باطری یا ترانزیستور

د) نقطه یا گسترده بودن عنصر

$\lambda f = c$

طول موج

$c(m/s)$: سرعت نور

$f(Hz)$: فرکانس

$\lambda(m)$: طول موج

نقطه : طول موجی که از عنصر عبور می‌کند در مقابل جریان عبوری از آن قابل صرف نظر است

عنصر گسترده :

جریان ورودی و جریان خروجی تفاوتی دارد

۱ مثال: $f = 50\ Hz$

$c = 3 \times 10^8\ m/s$

$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{50} = 6000\ Km$

طول سیم باید بزرگتر از 6000^{Km} باشد تا آن را نسبت به طول موج در نظر گیریم

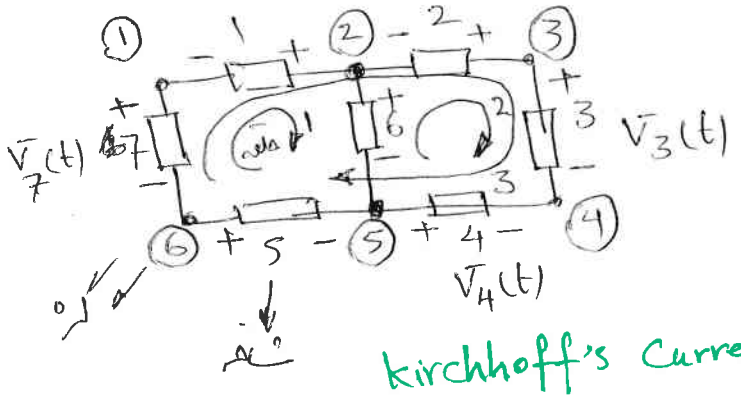
قانون ولتاژ و جریان کیرشف (kcl ، kvl)

kirchhoff's Current and Voltage Law

گره در مدار الکتریکی: نقطه ای که چند عنصر الکتریکی به یکدیگر متصل می شوند

شاخه: به هر عنصر و سیم که گره های مدار الکتریکی را به یکدیگر وصل می کند شاخه گفته می شود

حلقه: اگر از یک گره در مدار الکتریکی شروع کرده و با گذر از شاخه ها به همان گره برسیم اصطلاحا گفته می شود که حلقه ای بسته شده است



شکل (۱)

kirchhoff's Current law

قانون جریان کیرشف (kcl):

طبق این قانون جمع جبری جریان های وارد شونده و خارج شونده از هر گره مدار در هر لحظه از زمان برابر صفر است

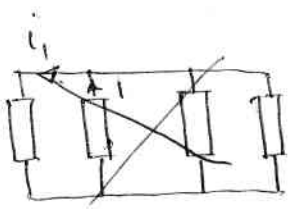
به عبارت دیگر بیان دیگر این قانون این است که مجموع جریان های الکتریکی وارد شونده به یک گره برابر با مجموع جریان های خارج شونده از آن است

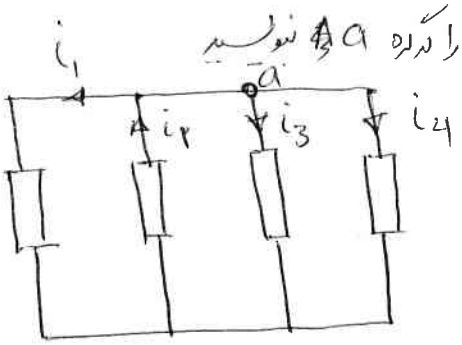
$$\sum_{i=1}^{N} i_k(t) = 0$$

N: تعداد شاخه های متصل به گره

i_k: جریان وارد شونده (خارج شونده) گره

مثال: رابطه kcl را در گره a بنویسید





① وارد شونده $-i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$

② خارج شونده $i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$

③ $i_2 = i_1 + i_3 + i_4$

Kirchhoff's Voltage law (KVL) قانون ولتاژ کیرشف

طبق این قانون جمع جبری ولتاژهای هر حلقه در هر لحظه از زمان برابر صفر است

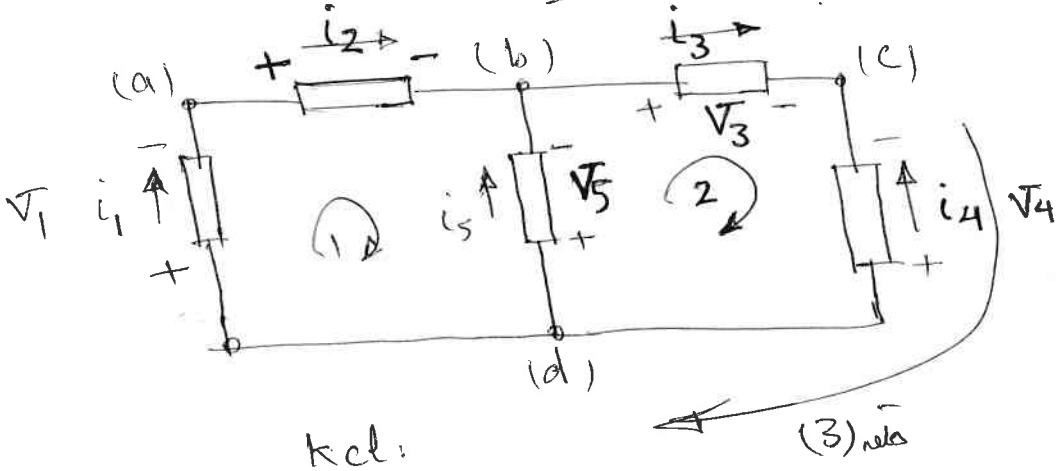
$$\sum_{k=1}^{M} V_k(t) = 0$$

M: تعداد عناصر حلقه
(تعداد شاخه‌های یک حلقه)
V_k: ولتاژ شاخه

حلقه ۱ طبق شکل ۱ : KVL : $+V_2(t) - V_1(t) + V_6(t) - V_5(t) = 0$

حلقه ۲ طبق شکل ۱ KVL $-V_1(t) + V_3(t) - V_4(t) - V_6(t) = 0$

مثال معادلات KCL , KVL را برای تمام حلقه‌ها بنویسید



KCL:

a) طبق شکل $-i_1 + i_2 = 0$

b) " $-i_2 - i_5 + i_3 = 0$

c) " $-i_3 - i_4 = 0$

d) " $i_1 + i_4 + i_5 = 0$

KVL

حلقه ① $V_1 + V_2 - V_5 = 0$

حلقه 2: $V_5 + V_3 - V_4 = 0$

حلقه 3: $V_2 + V_3 - V_4 + V_1 = 0$

- در حالتی که $i_2(t) = 3 + 2t$ و $i_3(t) = 2 + \sin t$ باشد جریان‌های $i_1(t)$, $i_4(t)$ را بیابید

$i_5(t)$ را بیابید

- دو معادله KVL حلقه‌های داخلی را هم جمع کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

- اگر $V_1(t) = 2 + 7t$, $V_2(t) = -2 + \sin t$ و $V_5(t) = 3 + e^{-t}$ باشد

$V_3(t) = ?$, $V_4(t) = ?$

a) $-i_1 + i_4 = 0 \longrightarrow i_1(t) = 3 + 2t$

c) $i_4 = -i_3 \longrightarrow i_4 = -3 - \sin t$

b) $i_5 = i_3 - i_2 = \sin t - 2t$

(۱) حلقه KVL
(۲) حلقه KVL $\longrightarrow V_1 + V_2 + V_3 - V_4 = 0 \longrightarrow$ معادله حلقه 3 یکی شد

KVL① : $V_2 = V_5 - V_1 = 3 + e^{-t} - (2 + Vt) = 1 + e^{-t} - Vt$

KVL(2) : $V_3 = V_4 - V_5 = -7 + \sin t - e^{-t}$

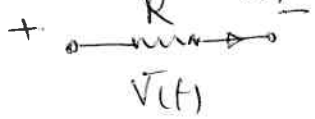
تعریف شبکه‌های مسطح و غیر مسطح:

مسطح بودن یک شبکه به این معناست که بتوان مدار را به گونه‌ای رسم کرد که هیچ کدام از عناصر یکدیگر را قطع نکنند

تمرین: ۲ و ۳ و ۵ و ۶

فصل دوم: منابع الکتریکی، مقاومت‌ها و مدارهای ساده مقاومتی:

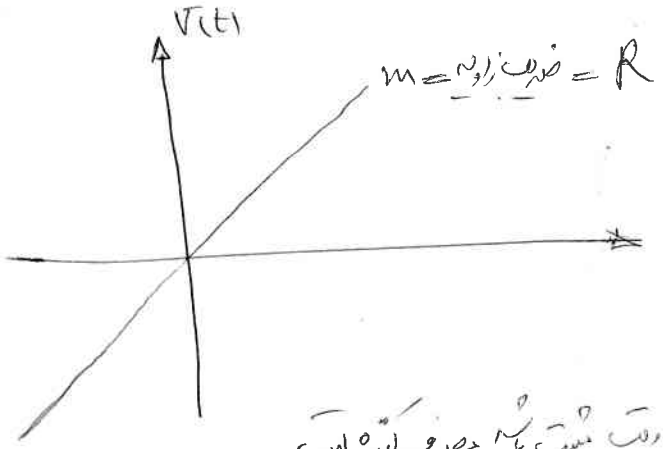
۱. مقاومت الکتریکی: خطی و تغییرناپذیر با زمان $R(\Omega)$



$$R = \frac{V(t)}{i(t)}$$

$$\begin{cases} V(t) = R\,i(t) \\ i(t) = G\,V(t) \end{cases} \qquad G = \frac{1}{R}$$

G: هدایت الکتریکی واحدش (مهو) $\mho$ (mho)

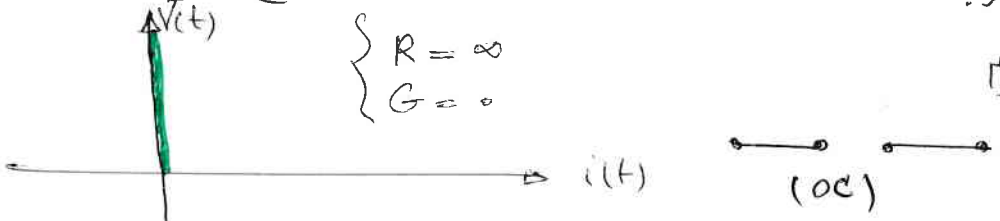


کلیه مقاومت خطی تغییر ناپذیر ایده آل

تمام وقت منفی که قطعه الکتریکی است و تولید کننده است اگر مقاومت مثبت باشد مصرف کننده است

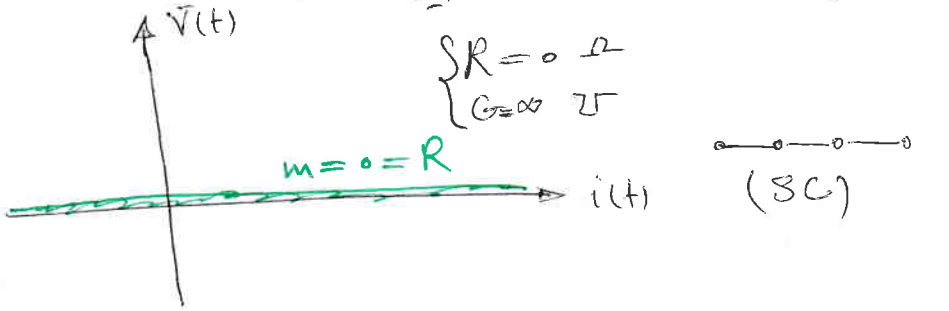
توان لحظه‌ای مصرف شده $p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$ ،

۲. عنصر مدار باز (open circuit) (OC) : هیچ عنصر الکتریکی مدار باز است اگر به ازای تمام ولتاژهای اعمال شده به دو سر آن جریانش برابر با صفر باشد . عنصر مدار باز مقاومت بی نهایت است چون به هیچ وجه جریانی عبور نمی دهد مثل کلید سیم که



وسطش را برده باشد

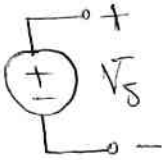
۳. عنصر اتصال کوتاه : هیچ عنصر الکتریکی اتصال کوتاه است اگر به ازای تمام جریان های عبوری از آن ولتاژ دو سرش برابر صفر باشد (Short Circuit)



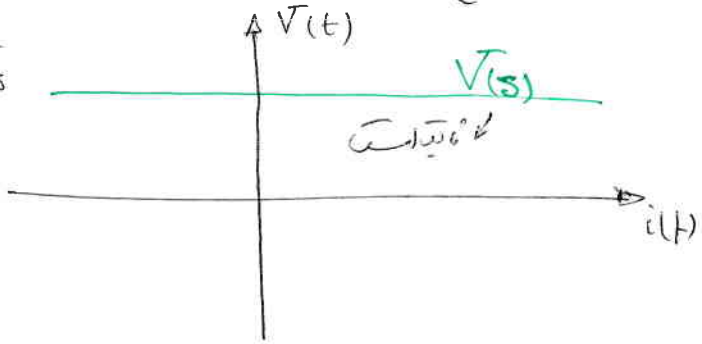
مثل هیچ سیم

۴. منابع الکتریکی مستقل : در مباحثی گفته می شود که اندازه ولتاژ یا جریان آنها مستقل از برآیند یا هر چیز دیگر ثابت باشد

در صورتی که منبع الکتریکی ایده آل باشد مقاومت داخلی آن صفر بوده و مشخصه آن خط راست می باشد



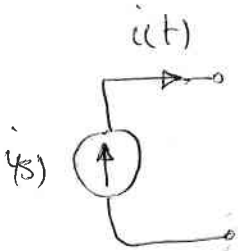
V_S : هر باطری که هست هیچ ولتاژ مشخص می دهد نیز فرقی نکند

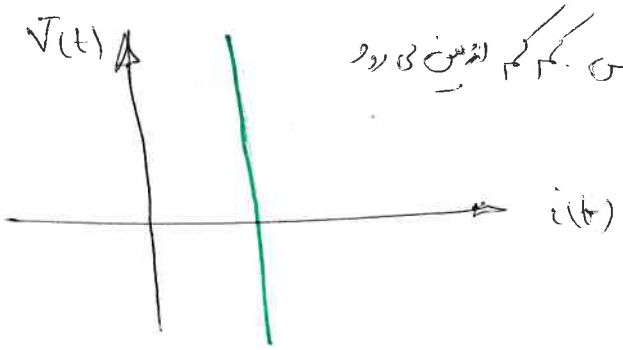


که ثابت است

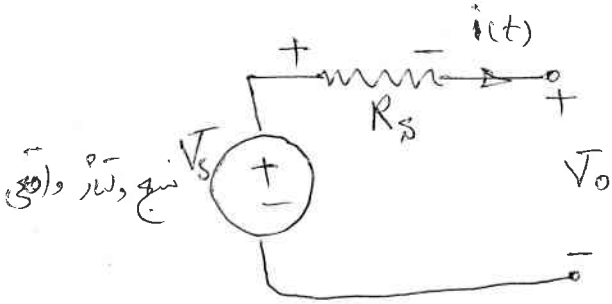
۱۰
۴

در عمل حالت ایده‌آل اتفاق نمی افتد چون مثلاً از یک حد بیشتر انرژی نمی‌دهیم افت می‌کند





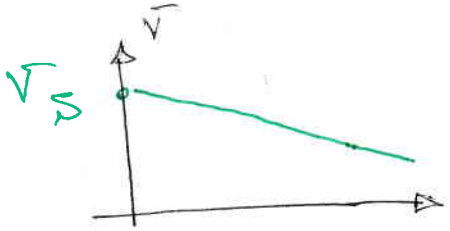
چون ولتاژ کم کم افزایش می‌یابد



R_S مدل شده مقاومت درونی باتری است

$$-V_S + R_S\, i(t) + V_0(t) = 0$$

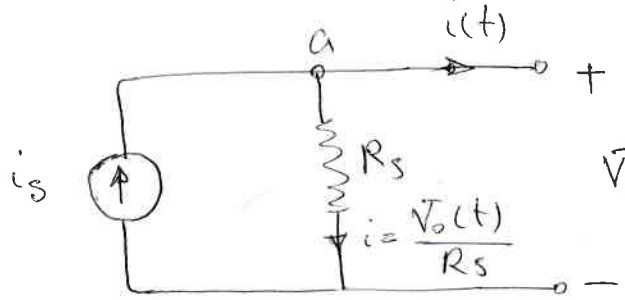
$$V_0(t) = V_S - R_S\, i(t)$$



هرچقدر R_S کوچکتر باشد به ولتاژ واقعی نزدیکتر می‌شویم

به ازای ولتاژ (بی نهایت ایده‌آل) به ولتاژ واقعی نزدیکتر می‌شویم

منبع جریان واقعی:



KCL (a):

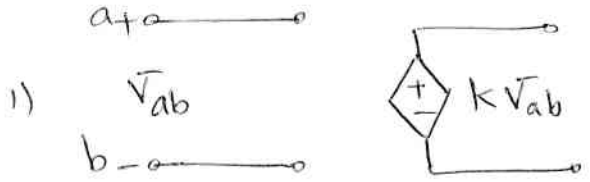
$$i_S = i(t) + \frac{V_0(t)}{R_S}$$

$$\longrightarrow i(t) = i_S - \frac{V_0(t)}{R_S}$$

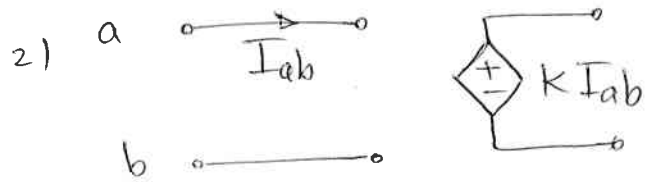
---

۵. منابع الکتریکی وابسته: منظور این است که ولتاژ یا جریان تولیدی توسط آن وابسته به ولتاژ یا جریان قسمتی دیگر از مدار باشد

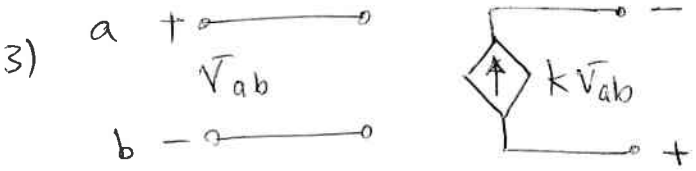
۱) منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ



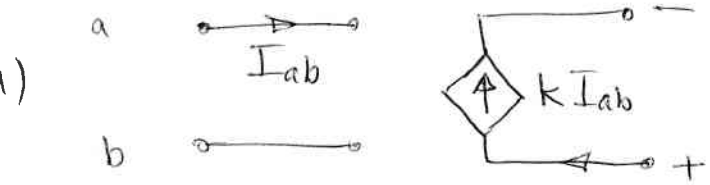
۲) منبع ولتاژ وابسته به جریان



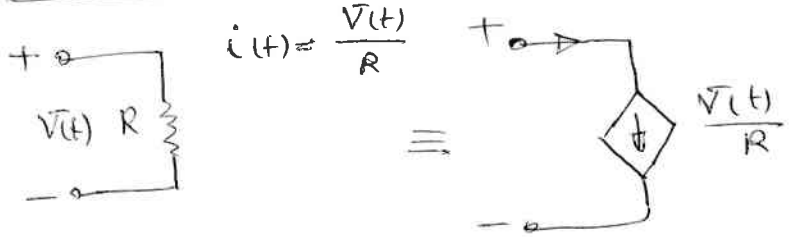
۳) منبع جریان وابسته به ولتاژ



۴) منبع جریان وابسته به جریان

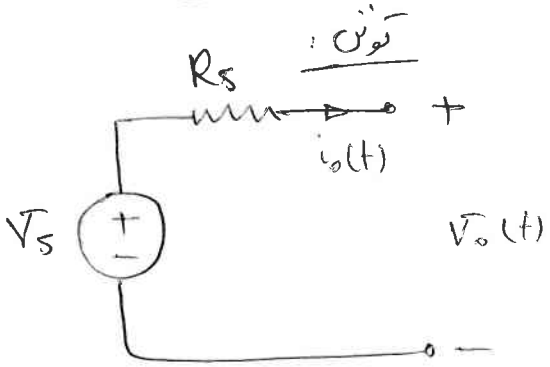


مع مقاومت الکتریکی هر منبع وابسته:

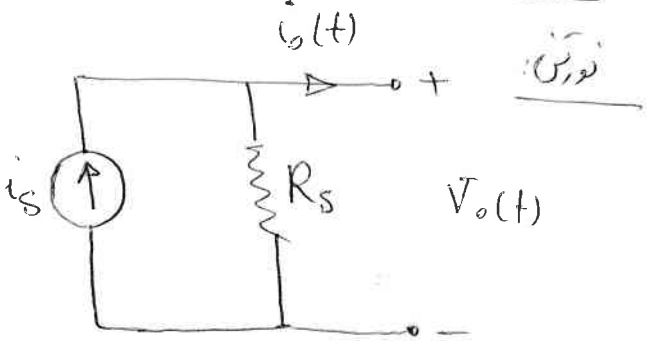


معادل تونن و نورتن:

تونن:



نورتن:



① $\bar{V}_o(t) = \bar{V}_S - R_S\, i_o(t)$

$i_o(t) = i_S - \frac{\bar{V}_o(t)}{R_S}$ ②

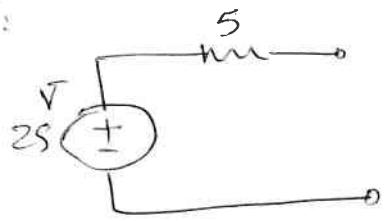
$\times R_S \rightarrow$ $i_o(t) R_S = i_S R_S - \bar{V}_o(t) \longrightarrow \bar{V}_o(t) = R_S i_S - i_o(t) R_S$

$$1,2 \longrightarrow \quad V_S - R\,i_o(t) = R_S\,i_S - R_S\,i_o(t)$$

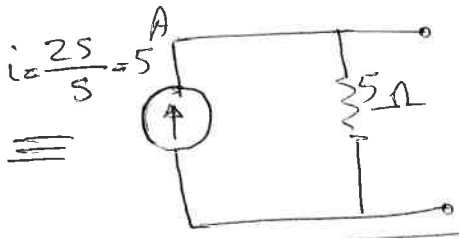
$$\rightarrow V_S = R_S\,i_S$$

مثال: در صورتی که مدار معادل تونن یک منبع ولتاژ مستقل باشد مدار معادل نورتن آن را رسم کنید

تونن:



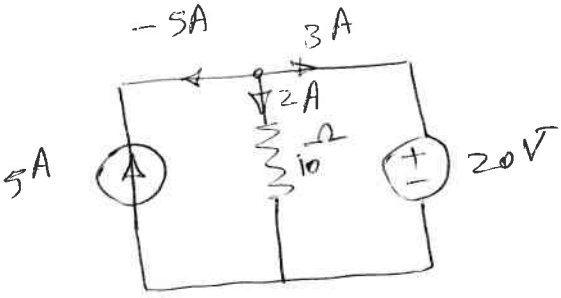
$$\equiv$$



نورتن:

توان در مدارهای الکتریکی: توان تولید شده در مدارهای الکتریکی در هر لحظه از زمان باید با توان مصرف شده برابر باشد

مثال: در مدار داده شده توان تمام عناصر را بدست آورید

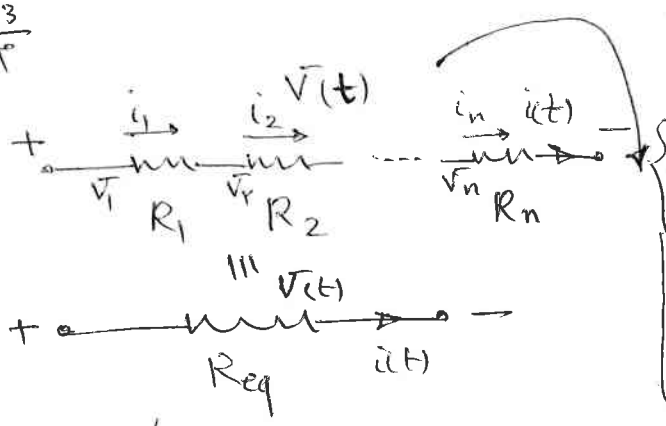


$$P_R = R\,i^2 = 10 \times 2^2 = 40\,W > 0 \quad \text{مصرف شده}$$

$$P_V = V\,i = 20 \times 3 = 60\,W > 0 \quad \text{مصرف شده}$$

$$P_i = V\,i = 20 \times -5 = -100 < 0 \quad \text{تولید شده}$$

* اتصال سری و موازی مقاومت‌ها:



الف: اتصال سری مقاومت‌ها

$$\begin{cases} i = i_1 = i_2 = \cdots = i_n \\ \bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \cdots + \bar{V}_n \\ \bar{V} = R_1 i_1 + R_2 i_2 + \cdots + R_n i_n = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i \\ \bar{V} = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i \quad (*) \end{cases}$$

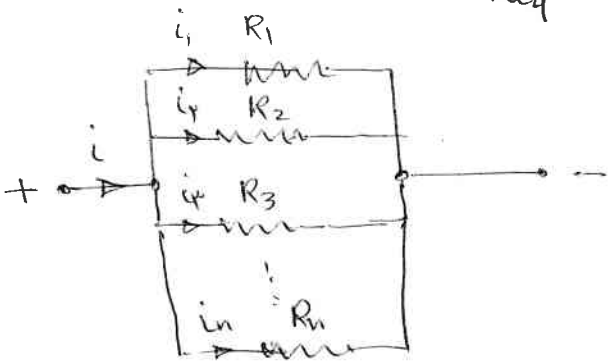
$$\bar{V} = R_{eq}\, i$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$\frac{1}{G_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{G_i}$$

اگر: $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R \longrightarrow R_{eq} = nR$

ب) اتصال موازی مقاومت‌ها:



نتایج:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \cdots = \bar{V}_n$$

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

$$\frac{\bar{V}}{R_{eq}} = \frac{\bar{V}}{R_1} + \frac{\bar{V}}{R_2} + \cdots + \frac{\bar{V}}{R_n}$$

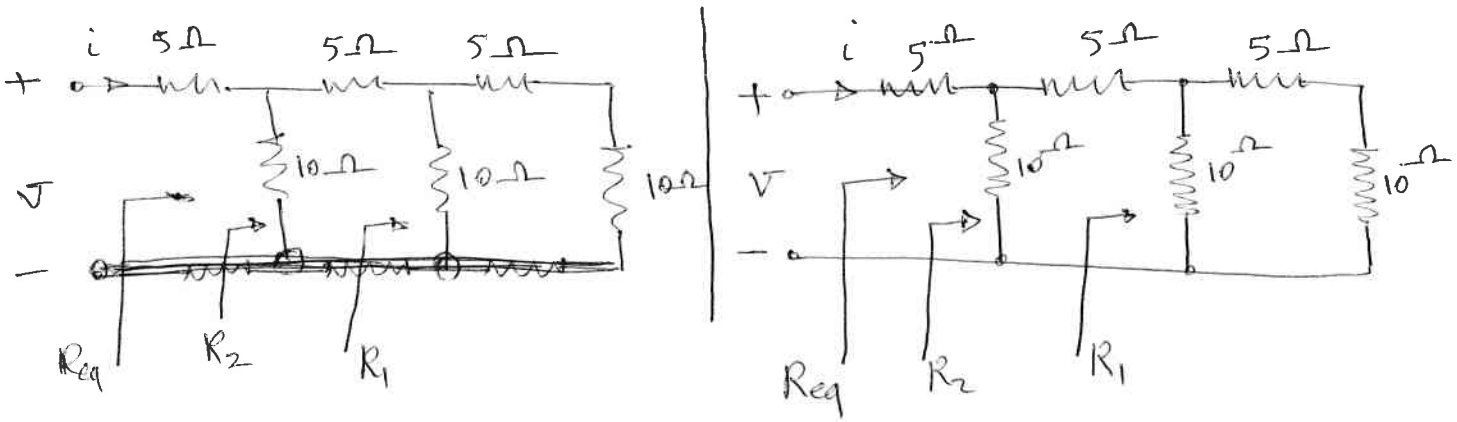
$$\rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \\ G_{eq} = \sum_{i=1}^{n} G_i \end{cases}$$

$$\text{if } R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R \rightarrow R_{eq} = \frac{R}{n}$$

اگر دو مقاومت موازی: $R_1 \| R_2 \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

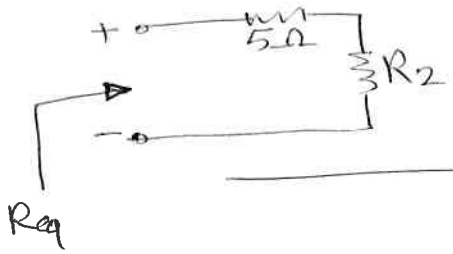
مثال: با استفاده از خاصیت سری و موازی مقاومتها مقاومت معادل را در هر مدار زیر بدست آورید



$$R_1 = (10+5) \,||\, 10 = 6\,\Omega$$

$$R_2 = 10 \,||\, (R_1+5) = \frac{10 \times 11}{10+11} \simeq 5\,\Omega$$

$$R_{eq} = R_2 + 5\,\Omega = 5+5 \simeq 10\,\Omega$$



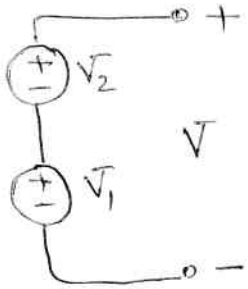
★ اتصال سری و موازی منابع مستقل:

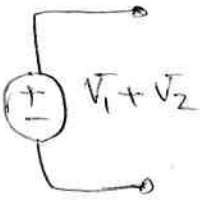
الف) منابع ولتاژ سری:

KVL: $-\bar{V}_1 - \bar{V}_2 + \bar{V} = 0$

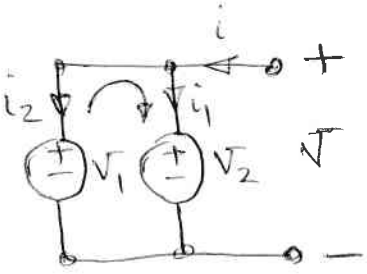
$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$

جمع ولتاژها جمع جبری است





ب) منابع ولتاژ موازی



KVL: $-\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = 0$

$\longrightarrow \bar{V}_1 = \bar{V}_2$

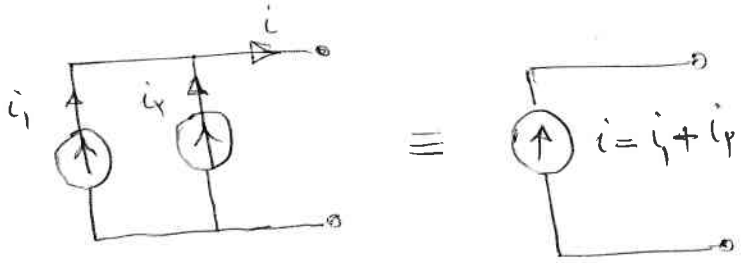
if $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \longrightarrow \bar{V} = \bar{V}_1 = \bar{V}_2$

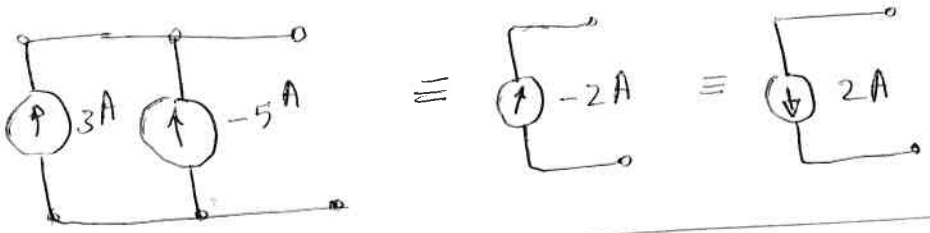
نیز: $i = i_1 + i_2$

منابع ولتاژ موازی باید با هم برابر باشند و الا KVL نقض می‌شود.

ج) منابع جریان موازی:

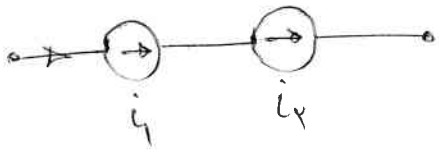
جمع جبری تک جمع جبری است





د) منابع جریان سری:

منابع جریان سری باید با هم برابر باشند والا KCL نقض می‌شود.

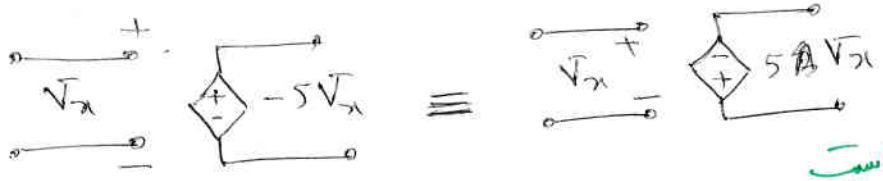


دلیل وجوب KCL باید $i_1 = i_2$ باشد

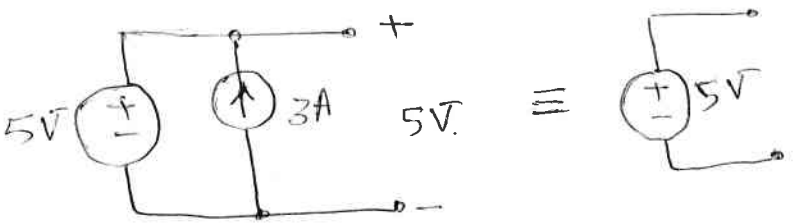
if $i_1 \neq i_2$ ⟶ KCL نقض می‌شود

بنابراین عملی نیست

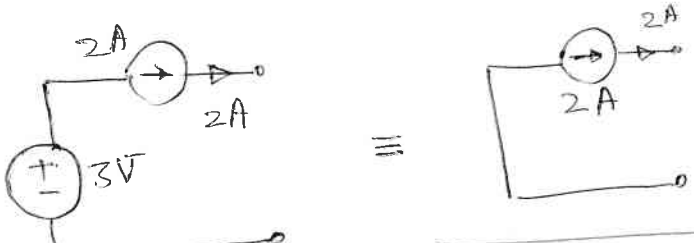
if $i_1 = i_2$ ⟶ $i = i_1 = i_2$



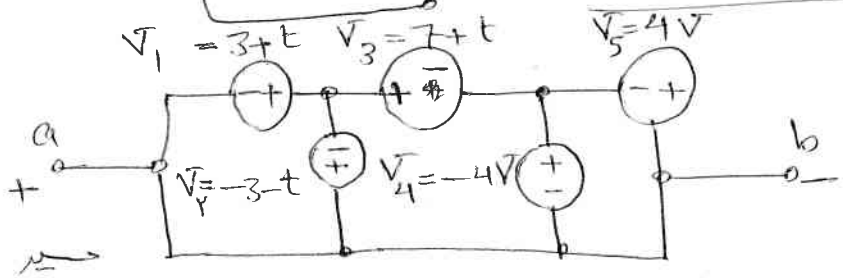
* منبع ولتاژ سری با منبع جریان بی اثر است
ولی در محاسبه توان باید در محاسبه باشد



* منبع جریان موازی با منبع ولتاژ بی اثر است
ولی در محاسبه توان باید در محاسبه باشد.



مثال: منبع ولتاژ معادل را بیابید؟



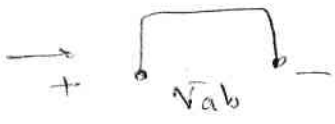
KVL

$$-V_{ab} - V_1 + V_3 - V_5 = 0 \longrightarrow V_{ab} = -V_1 + V_3 - V_5 = 3+t+7+t-4 = 0$$

مسیر ۲ : $-V_{ab} - V_1 + V_3 + V_4 = 0$

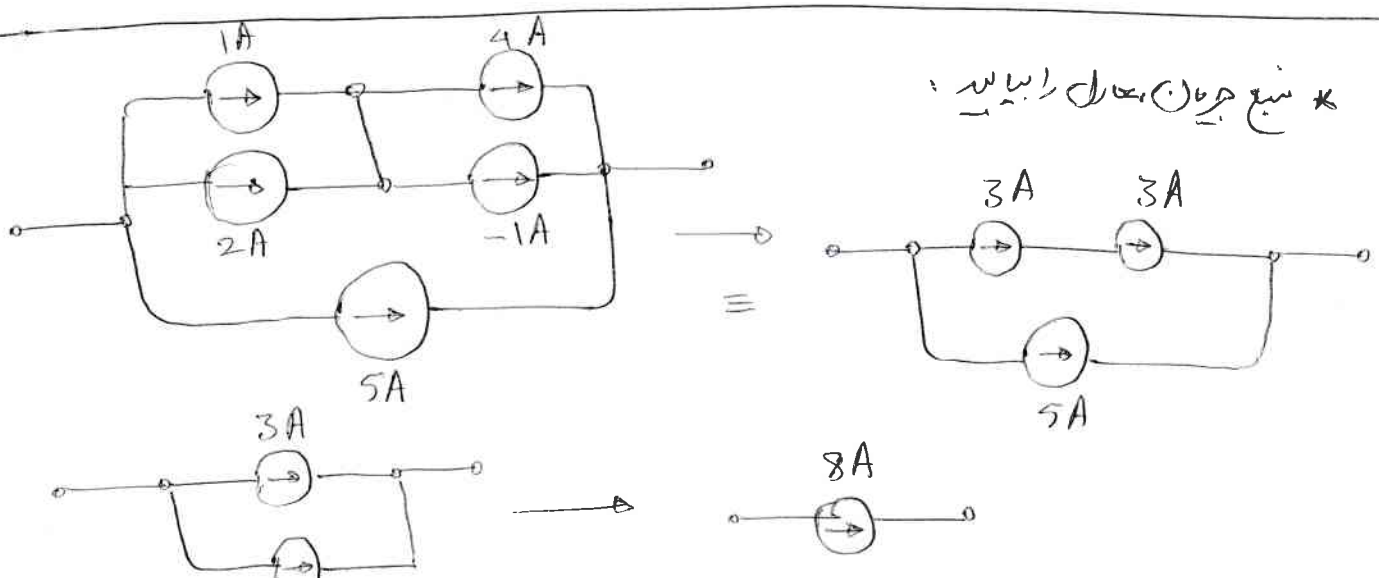
$V_{ab} = -V_1 + V_3 + V_4 = -(3+t) + 7V + t - 4 = 0\ V$

مسیر ۳ : $-V_{ab} - V_1 - V_2 = 0 \rightarrow V_{ab} = -V_1 - V_2 = -(3+t) - (-3-t) = 0\ V$

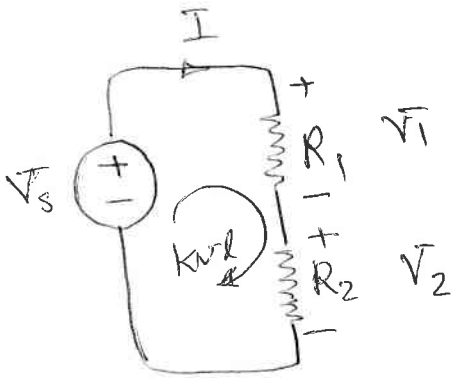


---

* منبع جریان متصل را بیابید:

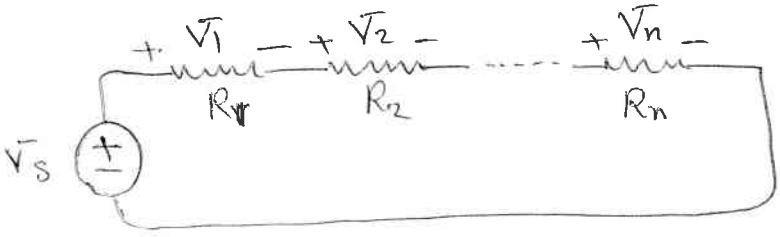


تقسیم ولتاژ روی مقاومت‌های سری:



$-V_S + R_1 I + R_2 I = 0$

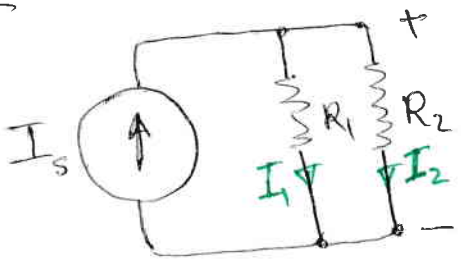
$I = \frac{V_S}{R_1 + R_2} \rightarrow \begin{cases} V_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S \\ V_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S \end{cases}$



$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} \cdot V_S$

17/۲

* تقسیم جریان در شاخه‌های موازی:

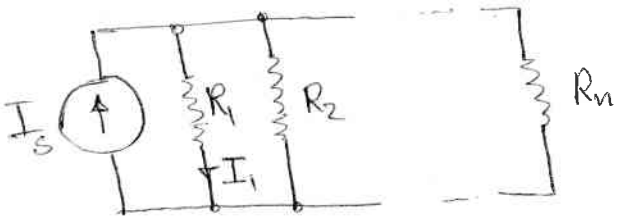


$$V = (R_1 \| R_2) I_S = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_S$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V}{R_1} \quad I_2 = \dfrac{V}{R_2} = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} I_S \\ I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I_S \end{cases}$$

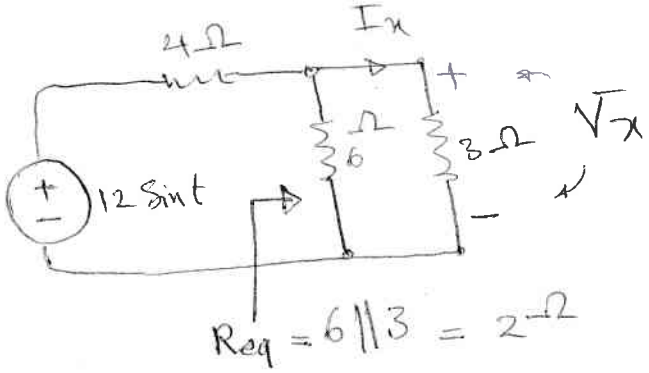
$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_S \qquad I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_S \qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I_S \\ I_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} I_S \end{cases}$$

به همین ترتیب اگر n مقاومت موازی به هم داریم:

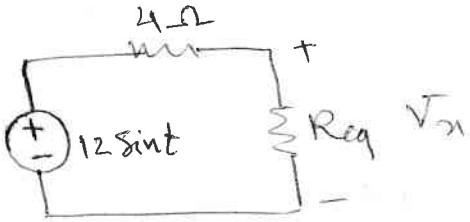


$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} I_S$$

مثال: در شکل V_x و جریان I_x را بیابید.



$$R_{eq} = 6 \| 3 = 2\Omega$$



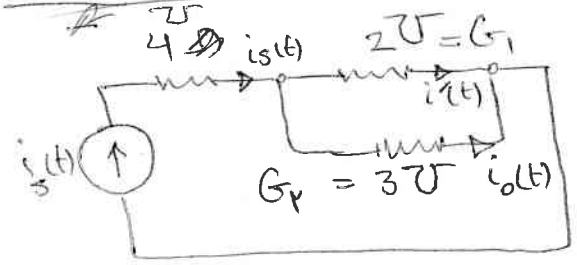
$$V_x = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + 4} \times 12 \sin t = 4 \sin t \ (V)$$

$$I_x = \frac{V_x}{3} = \frac{4}{3} \sin t \ (A)$$

جریان $I_o(t)$ را بیابید.

$$i_o(t) = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot i_S(t)$$

$$i_o(t) = \frac{8}{3+2} \times 3 \cos 2t = 1.8 \cos 2t$$

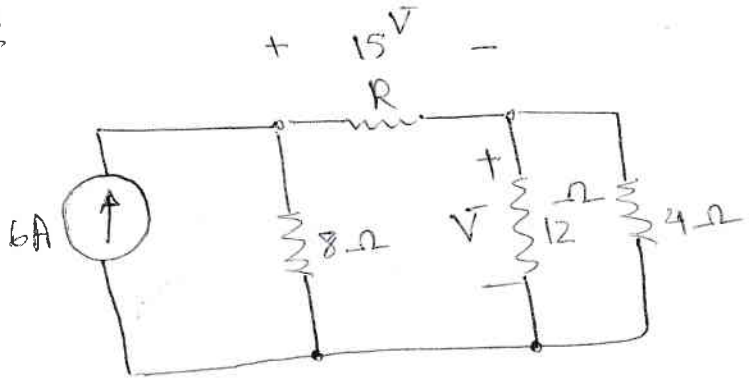


$$i'(t) = 3\cos 2t - 1.8 \cos 2t = 1.2 \cos 2t$$

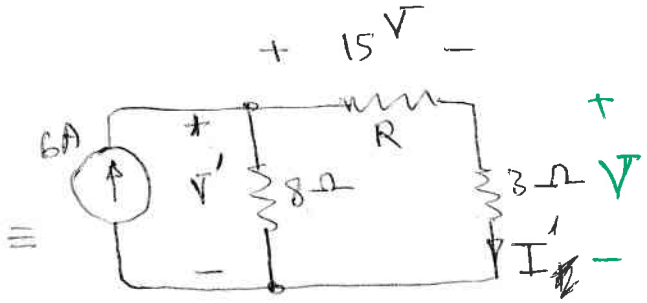
یا $i'(t) = \dfrac{2}{2+3} \cdot i_S(t) = 1.2 \cos 2t$

۳/۲ $i_S(t) = 3 \cos 2t$

18



مقاومت R را پیدا کنید که ولتاژ V چند ولت شود.



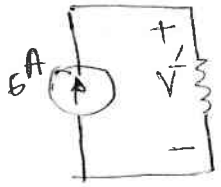
$\equiv$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$R_{eq} = R + \frac{1}{3}$ $\quad R_{eq}\left(\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{8}\right)$ $\quad \left(\frac{1}{R+\frac{1}{3}} + \frac{1}{8}\right)6 = V$

R

$8 \,||\, (R+3) = \frac{8R+24}{R+11}$



$8||(R+3) = \frac{8R+24}{R+11}$

$V' = \frac{8R+24}{R+11} \times 6$

$I' = \frac{V'}{R+3} = \left(\frac{8R+24}{R+11} \times 6\right) / (R+3) = \frac{(8R+24)\times 6}{(R+11)(R+3)}$

2▷ $I' = \frac{48}{R+11}$ $\quad V = 3I' = \frac{3\times 48}{R+11}$

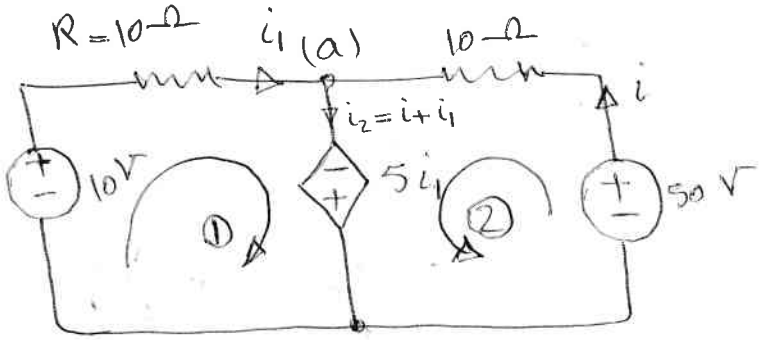
$R = \frac{15}{\frac{48}{R+11}} \rightarrow 48R = 15R + 15\times 11$

$\rightarrow 33R = 165 \rightarrow R = 5\,\Omega$

$\rightarrow V = 3I' = \frac{3\times 48}{R+11} = 9\,V$

مثال:

در مدار داده شده جریان‌های i و i_1 را بدست آورید



(a) $\boxed{i_1+i=i_2}$

KVL①: $-10+10i_1-5i_1=0 \quad 5i_1=10 \rightarrow i_1=2\ A$

بنابراین افت منبع ولتاژ وابسته به جریان i_1، $10V$ است

KVL(2): $-50+10i-5i_1=0 \rightarrow 10i=50+5i_1=60 \rightarrow i=6(A)$

فصل ۲ تمرین ۲، ۵، ۷، ۱۰، ۱۱

فصل سوم: روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی

۱. روش تحلیل مش (KVL)
۲. روش تحلیل گره (KCL)

۱. روش تحلیل مش: (تعریف چند تعریف مستقل و بدست آوردن V و I از طریق آنها)

هدف: پیدا کردن جریان مش‌ها

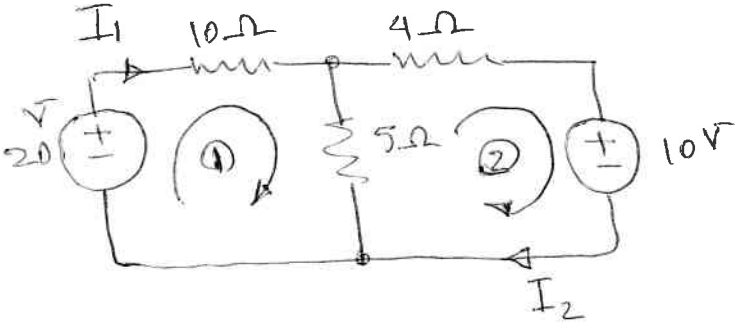
مش: حلقه‌های داخلی مدار هستند بگونه‌ای که کوچکتر از آن حلقه‌ها موجود نباشد

جریان مش: یک جریان فرضی با جهت دلخواه (معمولا ساعتگرد) است که از تمام شاخه‌های مش می‌گذرد

مراحل تحلیل مش:

* مرحله اول: نامگذاری مش‌ها
* مرحله دوم: تبدیل منابع جریان نوع نرتن، مقاومتها به منابع ولتاژ سری (امپدانس) (نورتن و تونن)
* مرحله سوم: KVL را در مش‌ها اعمال می‌کنیم و دستگاهی که برای هر مش جبری منظور شده است

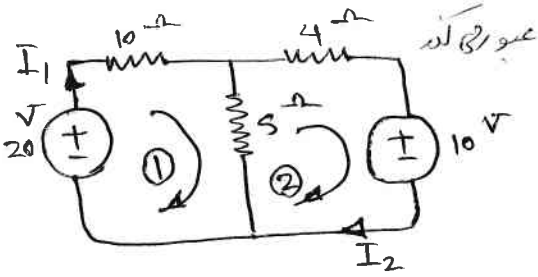
* مثال: با استفاده از روش تحلیل مش جریان مقاومتها را بدست آورید



20

۲

فرض می‌کنیم I_1 از حلقه‌ی ۱ و I_2 از حلقه‌ی ۲ عبور می‌کند



$$KVL①: \quad -20 + 10I_1 + 5(I_1 - I_2) = 0$$

$$15I_1 - 5I_2 = 20 \quad ①*$$

$$KVL②: \quad 5(I_2 - I_1) + 4I_2 + 10 = 0$$

$$-5I_1 + 9I_2 = -10 \quad ②*$$

$*1, *2 \longrightarrow I_1, I_2$ بدست می‌آید

به عنوان تمرین مجهول‌های مستقل در نظر می‌گیریم

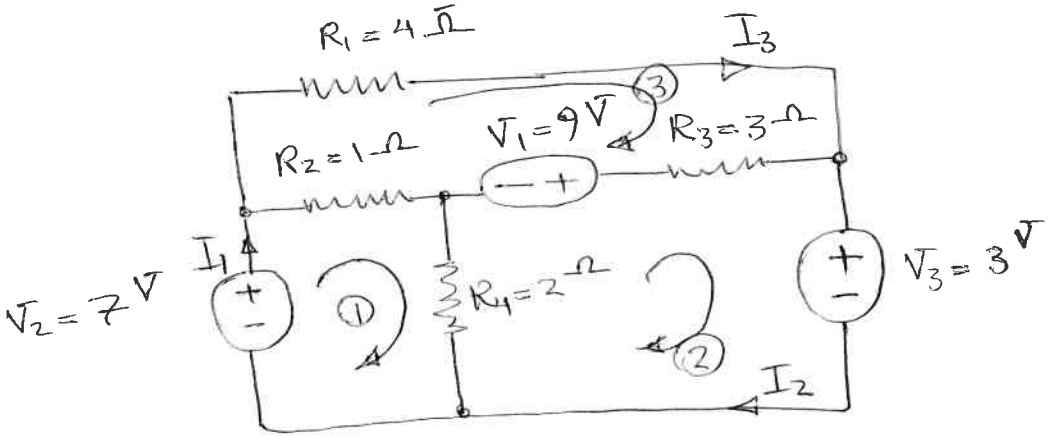
و جمع و تفاضل‌ها و ضرب‌ها را می‌توانیم به واسطه‌ی آن بدست آوریم

و کل مدار به واسطه‌ی این دو تحلیل می‌شود

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -5 \\ -10 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -5 \\ -5 & +9 \end{vmatrix}} = \cdots$$

روش کرامر

مثال: جریان مشخص نمایید سپس جریان مقاومت‌های 3Ω ، 4Ω را بدست آورید



$$KVL①: \quad -7 + R_2(I_1 - I_3) + R_4(I_1 - I_2) = 0$$

$$KVL(2): \quad R_4(I_2 - I_1) - 9 + R_3(I_2 - I_3) + 3 = 0$$

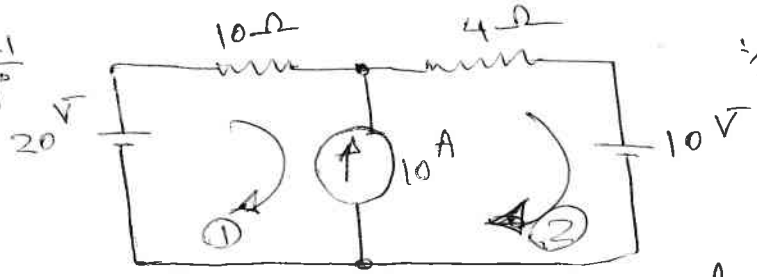
$$KVL(3): \quad R_4(I_3 - I_1) + R_1 I_3 + R_3(I_3 - I_2) + 9 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 3I_1 - 2I_2 - I_3 = 7 \\ -2I_1 + 5I_2 - 3I_3 = 6 \\ -I_1 - 3I_2 + 8I_3 = -9 \end{cases}$$

$$I_{R_1} = I_3$$

$$I_{R_3} = I_2 - I_3$$

21/۴



مثال: جریان‌های I_1 و I_2 را بدست آورید:

$$I_2 - I_1 = 10$$ key

جریان 10 A در جهت حلقه (2) هم جهت است

ابرمش: SuperMesh

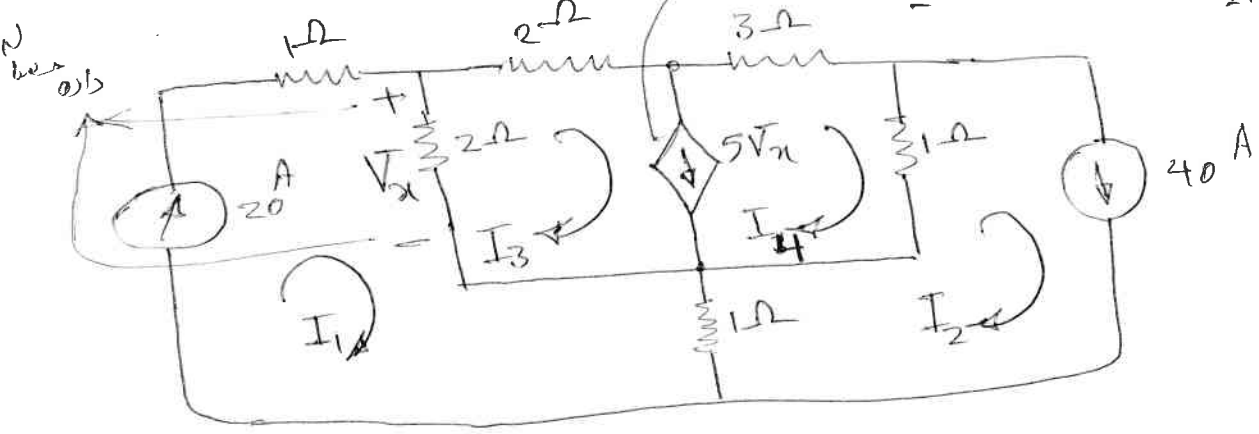
وقتی بین دو مش منبع جریانی وجود داشته باشد که مش ترکیبی از دو مش در نظر گرفته می‌شود که ابرمش نامیده می‌شود.

$$\begin{cases} I_2 - I_1 = 10 \\ -20 + 10I_1 + 4I_2 + 10 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Super Mesh}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}} \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}$$

مثال: جریان مش‌ها را محاسبه کنید:

SuperMesh (۱) و (۲)



$$\begin{cases} I_1 = 20\ A \\ I_2 = 40\ A \end{cases}$$

$$I_3 - I_4 = 5V_x$$

$$V_x = 2(I_1 - I_3) = 40 - 2I_3$$

$$\longrightarrow I_3 - I_4 = 5(40 - 2I_3)$$

$$11I_3 - I_4 = 200 \quad (1)$$

$$2(I_3 - I_1) + 2I_3 + 3I_4 + I_4 - I_2 = 0 \longrightarrow \text{Super Mesh}(3,4)$$

$$4I_3 + 4I_4 = 80 \longrightarrow I_3 + I_4 = 20 \quad (2)$$

(1), (2) $\longrightarrow$ I_3, I_4 بدست آمد

5/۴

۲. روش تحلیل گره: (KCL)

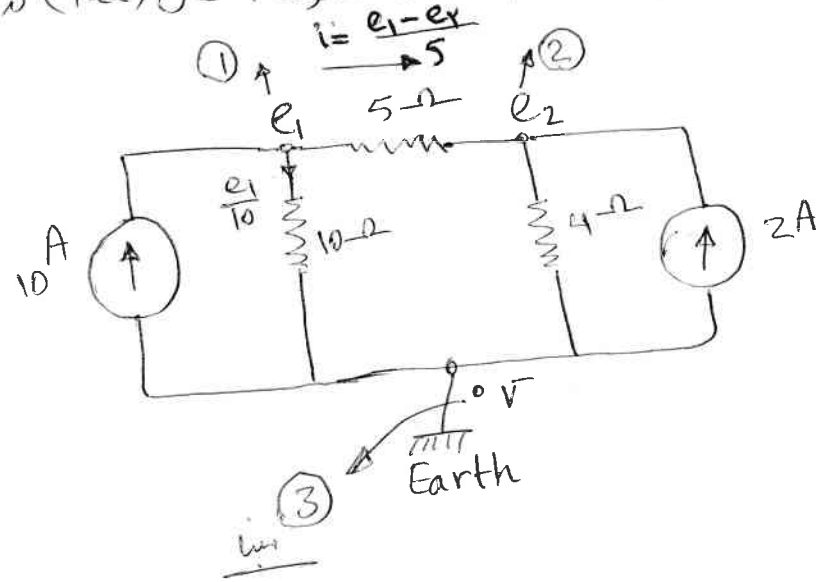
هدف پیدا کردن ولتاژ های گره های مدار با جز گره مبنا با ولتاژ صفر ولت می باشد. ($\bar{V}=0$)

مرحله اول: گره های مدار را تعیین نموده و نامگذاری می کنیم

2. یکی گره را بعنوان مبنا انتخاب کرده و ولتاژ سایر گره ها را بعنوان مجهول در نظر می گیریم

3. اگر مدار دارای n گره باشد، (n-1) معادله با (n-1) مجهول با KCL حل می شود

(n-1) گره تشکیل می گیرد



e_1، e_2 ولتاژ هستند

KCL را در هر یک از گره ها می زنیم

همه جریان ها را خارج شونده در نظر می گیریم

$$KCL\ ①: \quad -10+\frac{e_1}{10}+\frac{e_1-e_2}{5}=0$$

$$0.3e_1-0.2e_2=10$$

$$KCL\ ②: \quad -2+\frac{e_2}{4}+\frac{e_2-e_1}{5}=0$$

$$-0.2e_1-0.45e_2=2$$

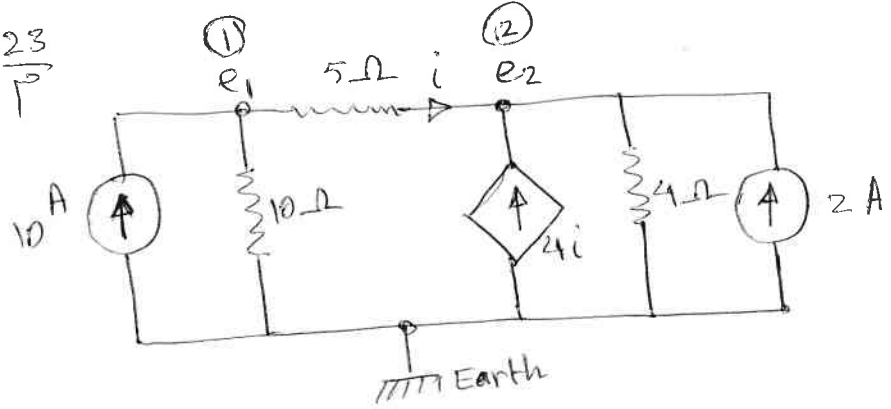
$$\begin{cases} 0.3e_1-0.2e_2=10 \\ -0.2e_1-0.45e_2=2 \end{cases}$$

کرامر:

$$e_1=\frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.2 \\ 2 & -0.45 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & -0.45 \end{vmatrix}}$$

مرحله 4: در صورتی که در مدار منابع وابسته وجود نداشته باشد آنها را برحسب ولتاژ گره ها بیان می کنیم

مثال:



$$\text{Kcl(1)}: -10 + \frac{e_1}{10} + \frac{e_1 - e_2}{5} = 0 \qquad 0.3e_1 - 0.2e_2 = 10 \quad (1)$$

$$\text{Kcl(2)}: \frac{e_2 - e_1}{5} + \frac{e_2}{4} - 2 - 4i = 0$$

$$\rightarrow -0.2e_1 + 0.45e_2 = 2 + 4i$$

$$i = \frac{e_1 - e_2}{5} = 0.2e_1 - 0.2e_2 \quad (*)$$

$$-0.2e_1 + 0.045e_2 = 2 + 4(0.2e_1 - 0.2e_2)$$

$$\rightarrow -e_1 + 1.25e_2 = 4 \quad (2)$$

(1), (2) $\rightarrow$ e_1, e_2 بدست آمد

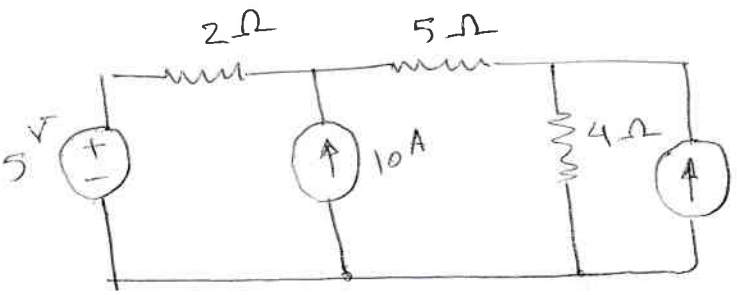
فصل سوم: روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی:

ادامه روش تحلیل گره:

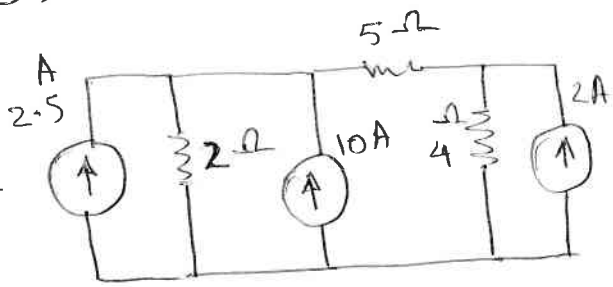
نکته: جهت اعمال ضرایع و تبدیل سری، مقاومت، منبع جریان حولی، مقاومت جایگزین شود.

نورتن

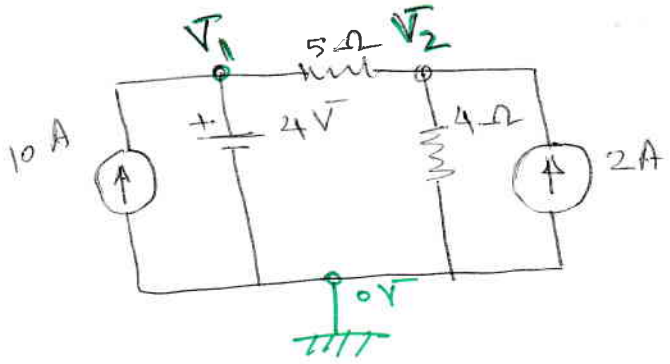
تونن



≡



مثال:



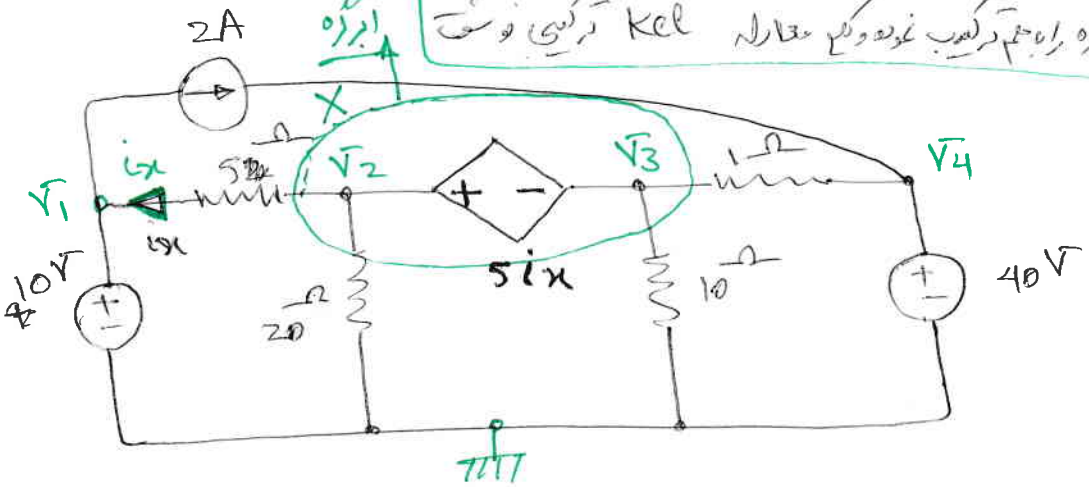
$V_1 = 4V$

$kcl\ 2: \frac{V_2}{4} + \frac{V_2 - V_1}{5} - 2 = 0$

تعریف ابرگره

تعریف: ابرگره، گره ای است که بین دو گره حاوی منبع ولتاژ (وابسته یا مستقل) ایجاد می شود که در این حالت kcl دو گره را با هم ترکیب نموده و یک معادله kcl ترکیبی نوشت

مثال:



$V_1 = 10V$, $V_4 = 40V$

منابع ولتاژ وابسته یا مستقل در ابتدا جریان شان نامشخص است

بنابراین ابرگره در نظر می گیریم

(بعبارتی جریان منبع ولتاژ وابسته یا ولتاژ منبع جریان نامشخص است) ← ابرگره

$kcl\ X: \frac{V_2 - V_1}{5} + \frac{V_2}{20} + \frac{V_3}{10} + \frac{V_3 - V_4}{1} = 0$

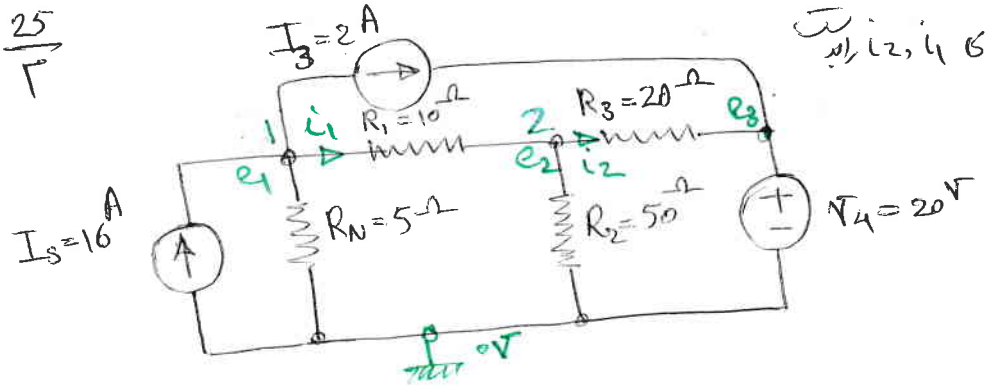
$\frac{V_2 - V_1}{5} = i_x$

$V_2 - V_3 = 5 i_x = V_2 - V_1 \rightarrow V_3 = V_1 = 10V$

$V_2 = 12V$

25/۲

مثال: با استفاده از روش تحلیل گره جریان‌های i_1, i_2 را بدست آورید.



$e_3 = 20V$

KCL(1): $\frac{e_1-e_2}{10} + \frac{e_1}{5} - 16 + 2 = 0 \rightarrow 0.3e_1 - 0.1e_2 = 14$

KCL(2): $\frac{e_2-e_1}{10} + \frac{e_2}{50} + \frac{e_2-e_3}{20} = 0 \rightarrow -0.1e_1 + 0.17e_2 = 1$

$\rightarrow e_1 = 60.5V \quad e_2 = 41.46V$

$\rightarrow i_1 = \frac{e_1-e_2}{10} = 1.9A \quad i_2 = \frac{e_2-e_3}{20} = 1A$

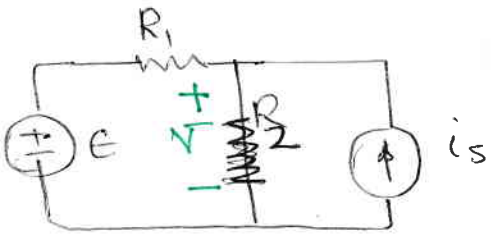
---

* خاصیت جمع آثار:

هرگدام از منابع ولتاژ یا جریان را بصورت مستقل تأثیرشان را بر مدار بررسی می‌کنیم سپس تمام منابع مستقل بدست آمده را جمع می‌کنیم

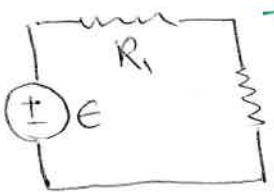
مثال:

ولتاژ V را بدست آورید.



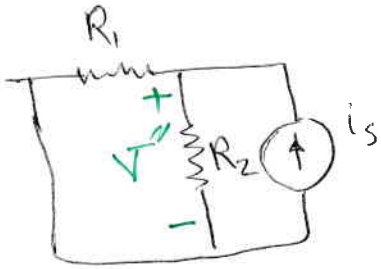
* منبع جریان وشاخه آن را از مدار حذف کرده (اتصال باز)
و منبع ولتاژ را اتصال کوتاه در نظر می‌گیریم

۱) منبع جریان را در نظر می‌گیریم (اثر ϵ بر روی V)



$V' = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \epsilon$

۲) اثر i_S بر روی V (V بر روی i_S)
منبع ولتاژ را اتصال کوتاه در نظر می‌گیریم



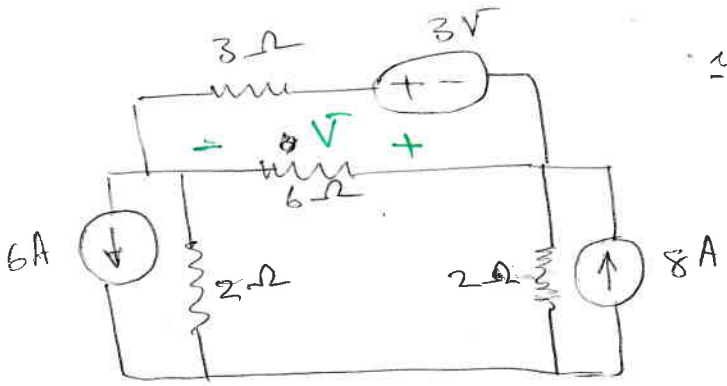
$V'' = (R_1 \| R_2) i_S \rightarrow V'' = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} i_S$

$V'' = (R_1 \| R_2) \cdot i_S \rightarrow V'' = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \cdot i_S$

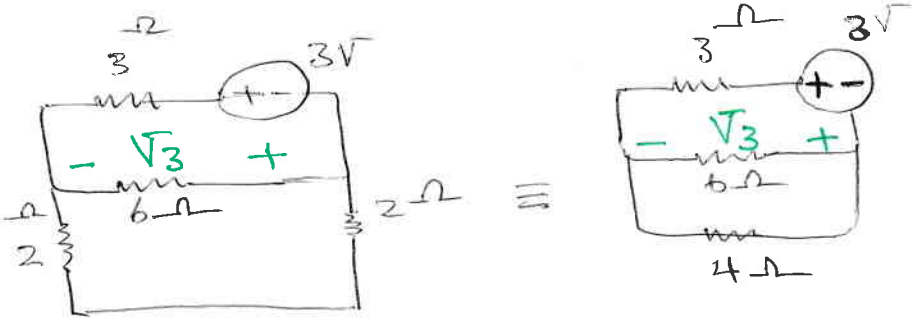
$$V = V' + V'' = \frac{R_2}{R_1+R_2}\epsilon + (R_1 \| R_2) i_S = \frac{R_2}{R_1+R_2}\epsilon + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} i_S$$

26

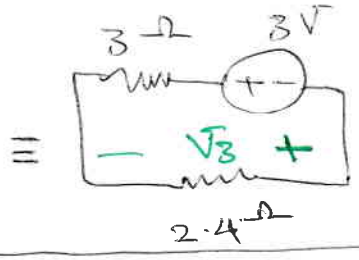
حل: با استفاده از قاعده جمع آثار، ولتاژ V را بیابید.



۱) اثر منبع 3V



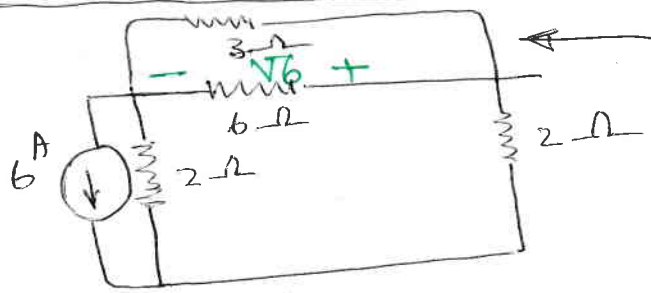
(4||6)



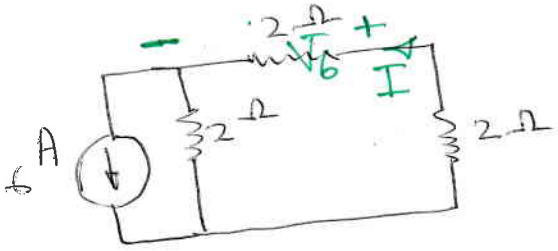
$$V_3 = -\frac{2.4}{2.4+3} \times 3 = 1.33\ V = -1.33\ V$$

---

۲) اثر منبع 6A:



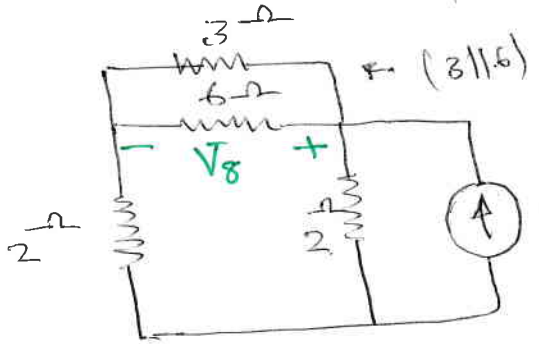
$(6||3) = 2\Omega$



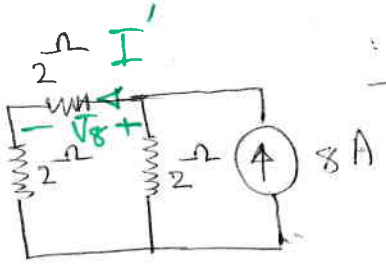
$$I = \frac{2}{2+4} \times 6\ A = 2\ A$$

$$V_6 = 2I = 4\ V$$

۳) اثر منبع 8A:



≡



$$I' = \frac{2}{2+4} \times 8 = \frac{8}{3}\ A \rightarrow V_8 = 2I' = \frac{16}{3}\ V$$

$$V_8 = 5.33\ V$$

$$V = V_3 + V_6 + V_8 = -1.33 + 4 + 5.33 = 8\ V$$

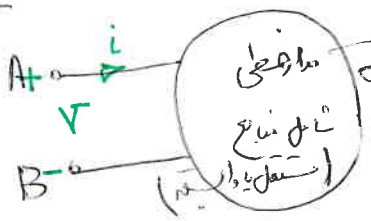
جمع آثار بود.

روش تونن و نورتن:

مدار شامل عناصر خطی

رابطه بین ولتاژ و جریان در یک مدار خطی، خطی است

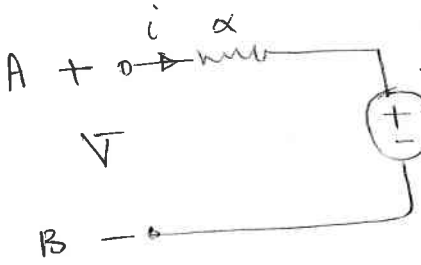
$V = \alpha i + \beta$



$V = \alpha i + \beta$

$V = R_{th} i + V_{th}$

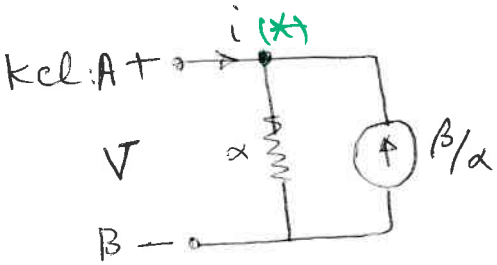
معادل تونن ترمینال AB



KVL: $-V + \alpha i + \beta = 0$

$\rightarrow V = \alpha i + \beta$

معادل نورتن ترمینال AB:



KCL(*) $i = \frac{V}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}$

$\rightarrow V = \alpha i + \beta$

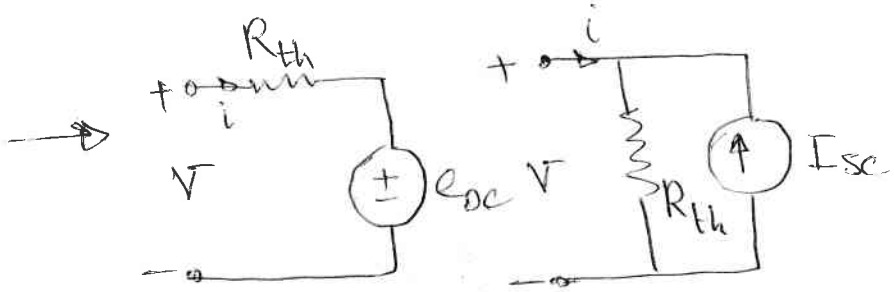
از دیدگاه ترمینال یک مدار پیچیده خطی شامل عناصر خطی مختلف که مقاومت معادل α دارد

$\alpha = R_{th} = R_N$: α مقاومت معادل تونن یا نورتن

$\beta = e_{oc} = V_{th}$: β { ولتاژ تونن (open circuit) / ولتاژ مدار باز

$\frac{\beta}{\alpha} = I_N = I_{sc}$ جریان نورتن (جریان اتصال کوتاه)

$\frac{e_{oc}}{R_{th}} = I_{sc} \rightarrow e_{oc} = R_{th} \cdot I_{sc}$



$V = \alpha i + \beta = R_{th} i + e_{oc}$

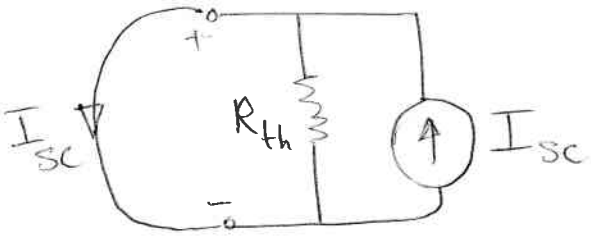
۱) بدست آوردن e_{oc}:

ترمینال را اتصال باز می‌کنیم، ولتاژ دیده شده در دو سر آن e_{oc} خواهد بود

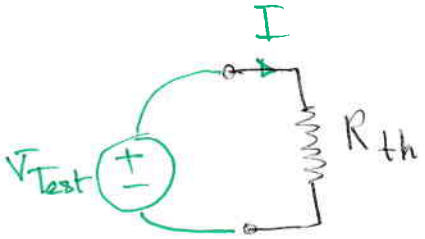
(ترمینال AB)

۲. بدست آوردن I_{sc} :

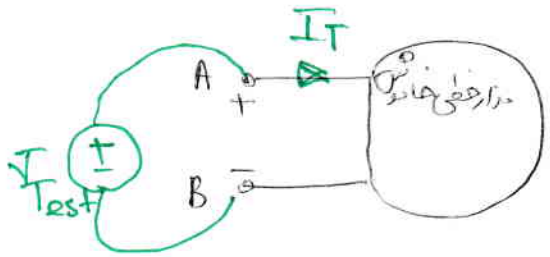
ترمینال AB را اتصال کوتاه می‌کنیم



۳. بدست آوردن R_{th} : (منابع را از مدار پیچیده بزرگ حذف می‌کنیم)



$$R_{th} = \frac{V_T}{I_T}$$

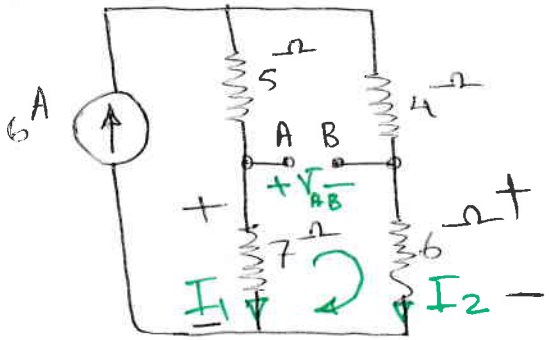


منابع خاموش می‌شوند، ولتاژ V_T به ترمینال اعمال می‌گردد، جریان I_T اندازه‌گیری می‌شود.

$$R_{th} = \frac{V_T}{I_T}$$

نسبت $\frac{V_T}{I_T}$ برابر R_{th} خواهد بود

مثال: معادل تونن و نورتن را از دو سر A,B بدست آورید



۱) محاسبه e_{oc}

با توجه به اتصال باز جهان ترمینال ولتاژ ایجاد شده V_{AB} برابر e_{oc} است

$$I_1 = \frac{4+6}{4+6+5+7} \times 6^A = \frac{10}{22} \times 6 \rightarrow I_1 = 2.727^A$$

$$I_2 = I - I_1 \rightarrow I_2 = 3.3^A$$

$$\rightarrow I_2 = 3.272$$

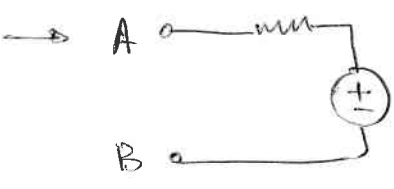
KVL

$$\rightarrow -7I_1 + V_{AB} + 6I_2 = 0$$

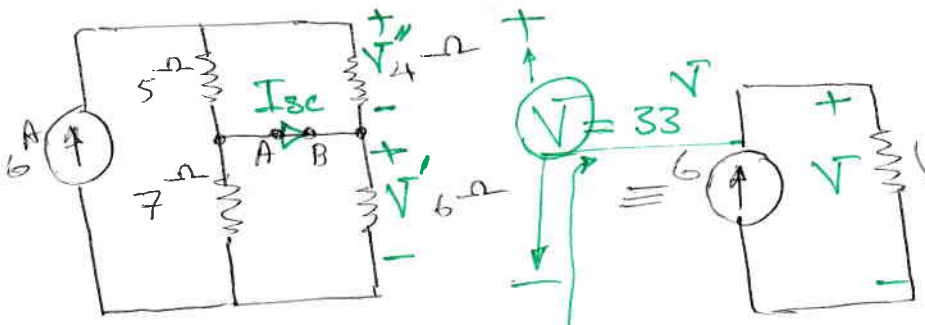
$$\rightarrow V_{AB} = 7I_1 - 6I_2 = 18.9 - 19.8 = -0.9^V$$

$$V_{AB} = 7I_1 - 6I_2 = -0.543$$

$$\rightarrow e_{oc} = -0.543$$



29



I_{sc} را پیدا کنید

$(5\|4)+(6\|7)$

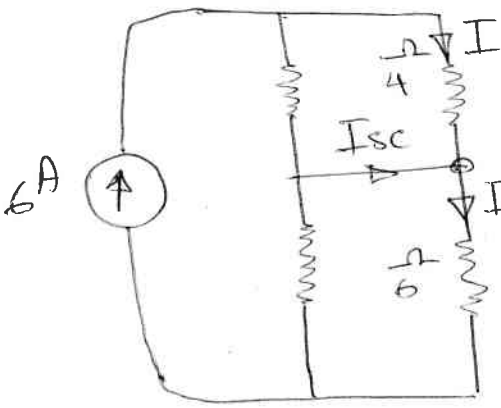
$= 2.22 + 3.23$

$= 5.45\ \Omega$

$\rightarrow V = 5.45 \times 6 = 33 \rightarrow 32.7\ V$

$V' = \dfrac{6\|7}{6\|7+5\|4} * 33 = 19.5\ V \rightarrow V' = 19.5\ V \rightarrow 19.37\ V$

$\rightarrow V'' = V - V' = 33 - 19.5 = 13.5\ V \rightarrow 13.33 = 32.7 - 19.37$



$I = \dfrac{13.5}{4} \rightarrow \dfrac{13.33}{4}$

$I' = \dfrac{19.5}{6} \rightarrow \dfrac{19.37}{6}$

$\rightarrow$ kcl: $I_{sc} = I' - I = \dfrac{19.5}{6} - \dfrac{13.5}{4} =$

$\rightarrow I_{sc} = -0.12\ A$

$\rightarrow I_{sc} = \dfrac{19.37}{6} - \dfrac{13.33}{4} \rightarrow I_{sc} = -0.104\ A$

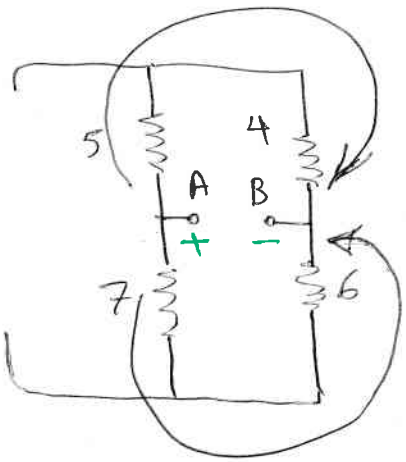
نکته: اگر V_{oc} منفی بدست آمد I_{sc} هم حتما باید منفی بدست آید و برعکس.

1) $R_{th} = \dfrac{e_{oc}}{I_{sc}} = \dfrac{-0.9\ V}{-0.12\ A} = 7.5\ \Omega$

R_{th} را از حالت 2 هم حساب کنید:

$R_{th} = \dfrac{e_{oc}}{I_{sc}} = \dfrac{-0.543}{-0.104} = 5.22\ \Omega$

2)



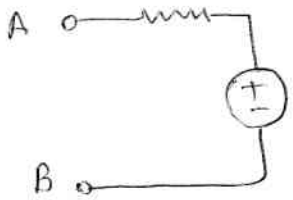
$(9\|13) \rightarrow ((5+4)\|(6+7))$

$\rightarrow R = \dfrac{9 \times 13}{13+9} = 5.5 \rightarrow 5.3\ \Omega$

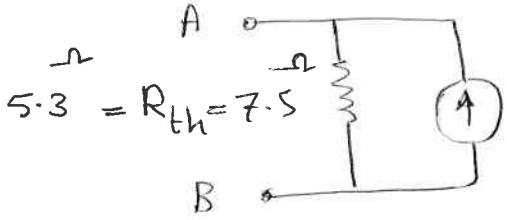
این سوال باید یکی دوبار دیده شود که در خاطر تمرین ذهن دچار اشتباه نشود

30

$5.3\,\Omega = R_{th} = 7.5\,\Omega$



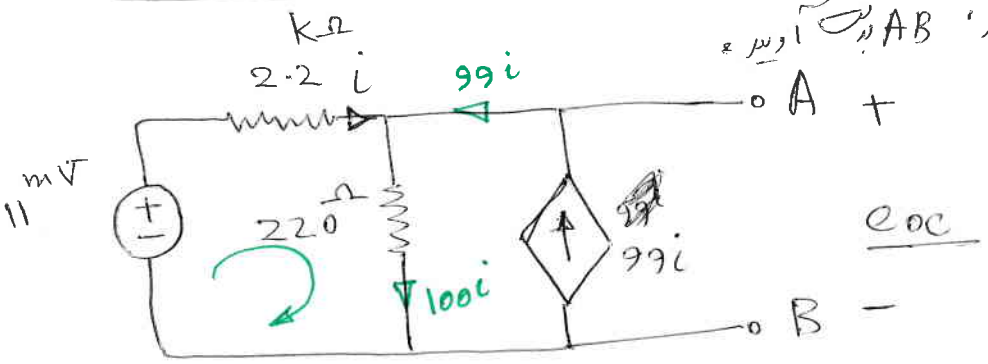
ولتاژ تونن:



جریان نورتن

---

* جریان نورتن را از دو سر AB به آن وصل کنید.



۱. محاسبه e_{oc} :

$$e_{oc} = 220 \times 100\, i = 22000\, i$$

$$e_{oc} = 2.2 \times 10^{4}\, i = 22k\, i$$

---

kvl :

$$-11\,mV + 2.2k \times i + 22k\, i = 0 \rightarrow 24.2k\, i = 11\,mV$$

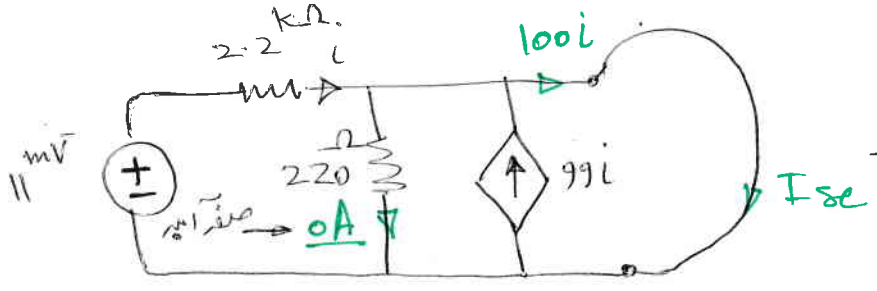
$$\rightarrow i = \frac{11\,mV}{24.2k} = 0.45\,\mu A$$

$$\frac{\text{milli}}{\text{kilo}} = \mu$$

$$\frac{10^{-3}}{10^{3}} = 10^{-7} = \mu$$

$$e_{oc} = 22k \times 0.45\mu = 9.9\,mV$$

۲. محاسبه I_{sc} :



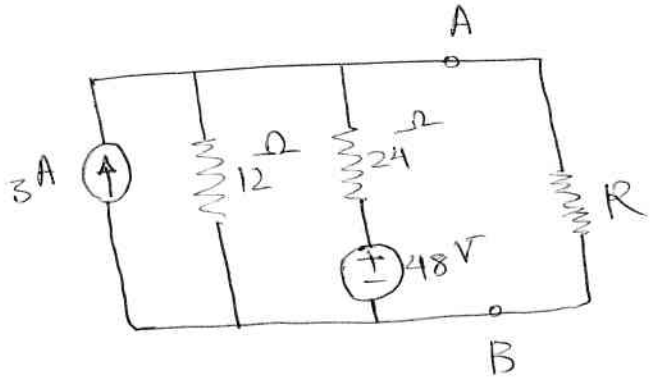
$$-11\,mV + 2.2k \cdot i = 0$$

$$\rightarrow i = \frac{11\,mV}{2.2k} = 5\,\mu A$$

$$\rightarrow I_{sc} = 100i = 100 \times 5\mu A = 500\mu A = 0.5\,mA$$

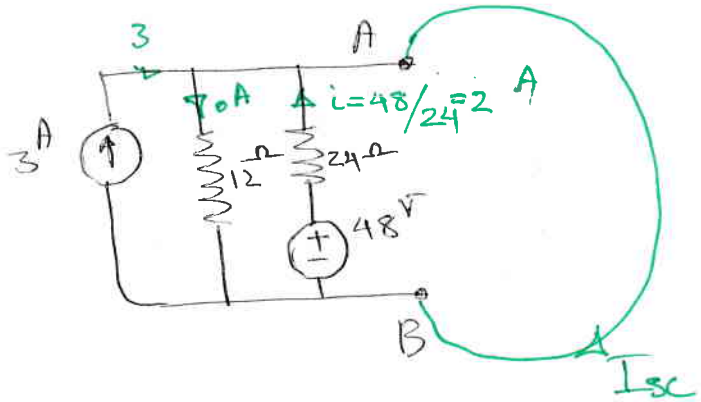
$$R_{th} = \frac{e_{oc}}{I_{sc}} = \frac{9.9\,mV}{0.5\,mA} = 19.8\,\Omega$$

31/۴ مثال: در مدار زیر ابتدا مدار معادل تونن از سمت چپ AB را بدست آورید و سپس مقدار R را بگونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان مصرفی را از آن داشته باشیم



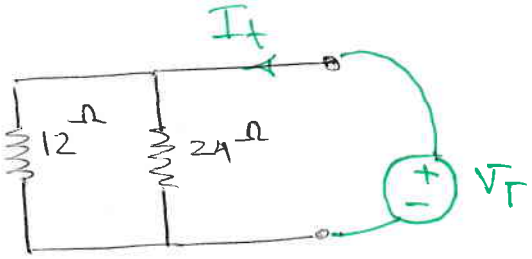
* بدست آوردن مدار معادل تونن:

الف: بدست آوردن I_{sc}:



$$I_{sc} = 3 + 2 = 5 \ A$$

ب) بدست آوردن R_{th}:

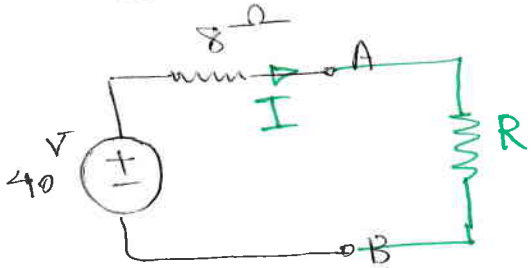


$$-V_T + (24 \| 12) I_T = 0$$

$$\rightarrow R_{th} = \frac{V_T}{I_T} = 24 \| 12 = 8 \ \Omega$$

$$e_{oc} = R_{th} I_{sc} = 5 \times 8 = 40 \ V$$

مدار تونن:



ب) حداکثر سازی توان مقاومت R

$$I = \frac{40}{8+R} \qquad P = RI^2 = R\left(\frac{40}{8+R}\right)^2 = \frac{1600R}{(8+R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \rightarrow \frac{1600(8+R)^2 - 2(8+R)(1600R)}{(8+R)^4} = 0$$

$$(8+R)\left(1600(R+8) - 3200R\right) = 0 \begin{cases} R = -8 \ \Omega \text{ غ ق} \\ R = 8 \ \Omega \end{cases} \rightarrow R = 8 \ \Omega$$

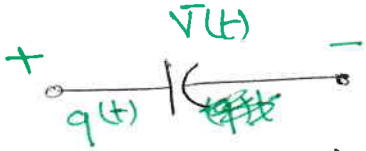
32/P → $I_{qmax} = \frac{40}{8+8} = \frac{40}{16} = 2.5\ A$

→ $P_{max} = 8 \times 2.5^2 = 50\ Watt$

فصل چهارم : خازن و سلف :

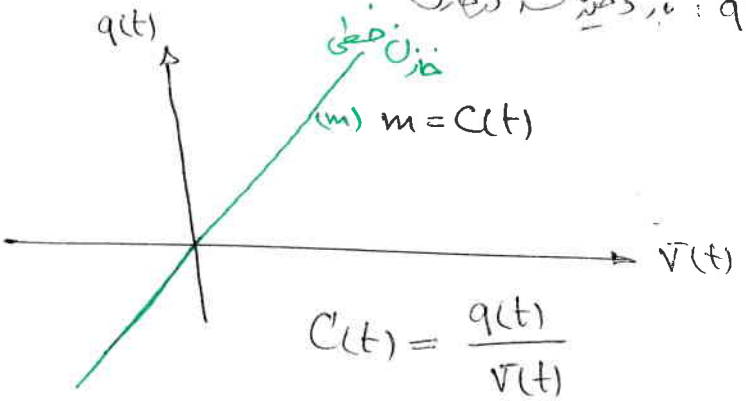
(سلف سیم پیچ)

* خازن : عنصری است که در هر لحظه از زمان رابطه مشخصی میان بار ذخیره شده در آن و ولتاژ دو سر آن وجود دارد. حال در صورتی که این رابطه خطی بوده و از مبدا بگذرد خازن را خطی و در غیر این صورت، غیر خطی می گوئیم. در صورتیکه این رابطه با گذشت زمان تغییر نکند خازن را تغییر ناپذیر با زمان گوئیم



$q(t) = f(\bar{V}(t))$

$q(t)$: بار ذخیره شده در خازن



$C(t) = \frac{q(t)}{\bar{V}(t)}$

$i = C\frac{d\bar{V}}{dt} \;/\; q = C\bar{V}$

$\bar{V} = \bar{V}(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

C : ظرفیت خازن برحسب فاراد (F)

ذاتی خطی می تواند کم یا زیاد شود ولی اگر بصورت خط باشد خازن خطی است.

$q(t) = C(t)\ \bar{V}(t)$ خازن خطی

$q(t) = C\ \bar{V}(t)$ خطی و تغییر ناپذیر با زمان

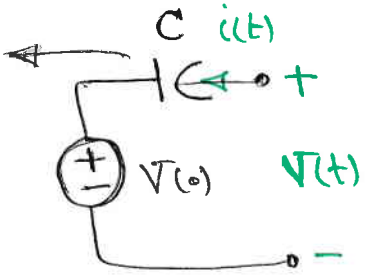
$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} f(\bar{V}(t))$ رابطه کلی :

$i(t) = \frac{d}{dt}(C\ \bar{V}(t)) = C\frac{d}{dt}\bar{V}(t)$ خطی تغییر ناپذیر با زمان :

→ $\bar{V}(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)dt}_{\bar{V}(0)} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$

۴ $\longrightarrow \bar{V}(t) = \bar{V}(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$ $\qquad \bar{V}(0) = \frac{q(0)}{C}$

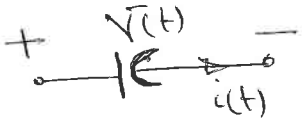
خازن بدون بار سری شده با یک منبع ولتاژ $\longleftarrow$



مدل خازن با بار اولیه:

توان لحظه‌ای جذب شده توسط خازن:

$$p(t) = \bar{V}(t)\, i(t)$$



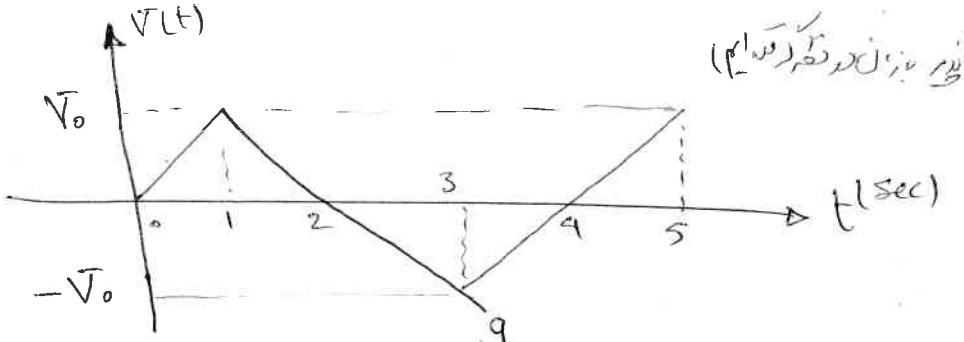
جهات مثبت قراردادی

$$p(t) = \bar{V}(t)\, i(t) = \bar{V}(t) \cdot C \cdot \frac{d\bar{V}(t)}{dt}$$

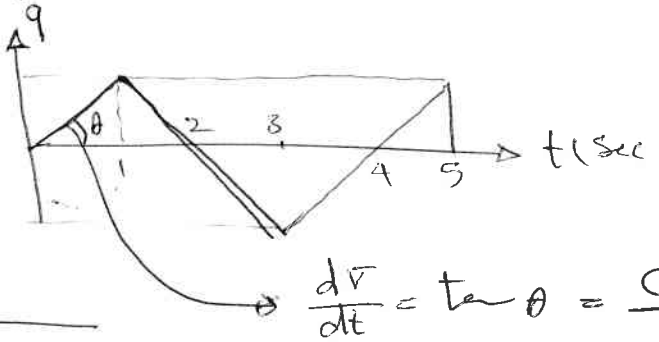
انرژی ذخیره شده $\quad w(t) = \int_0^t p(t)\,dt = \int_0^t \bar{V}(t) \cdot C \cdot \frac{d\bar{V}(t)}{dt}\,dt$

$$\longrightarrow W(t) = \int_0^{\bar{V}(t)} C\bar{V}\,d\bar{V} \longrightarrow \boxed{W(t) = \frac{1}{2} C\bar{V}^2(t)}$$

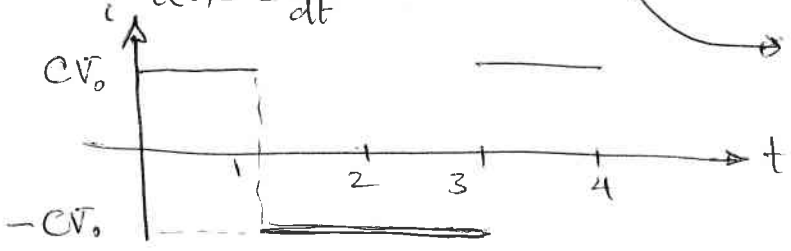
مثال: شکل موج ولتاژ اعمالی به خازنی با ظرفیت C بصورت زیر می‌باشد. شکل موج جریان و بار ذخیره شده در آن چگونه است؟ (حتی تغییر ناپذیر بودن ولتاژ در نظر گرفته شود)



$q(t) = C\,\bar{V}(t) \longrightarrow$



$i(t) = C\frac{dv}{dt}$

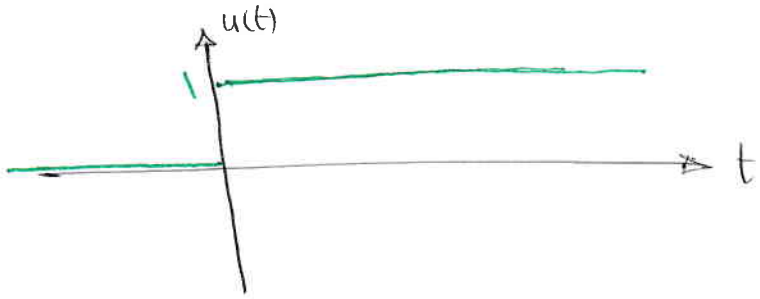


$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \tan\theta = \frac{C\bar{V}_0}{1} = C\bar{V}_0$$

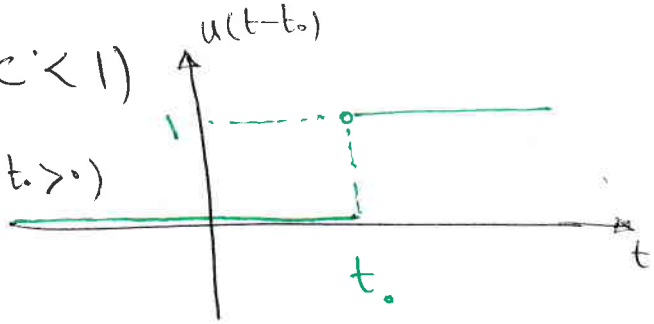
* برخی توابع زمانی مورد نیاز:

تابع پله (S):

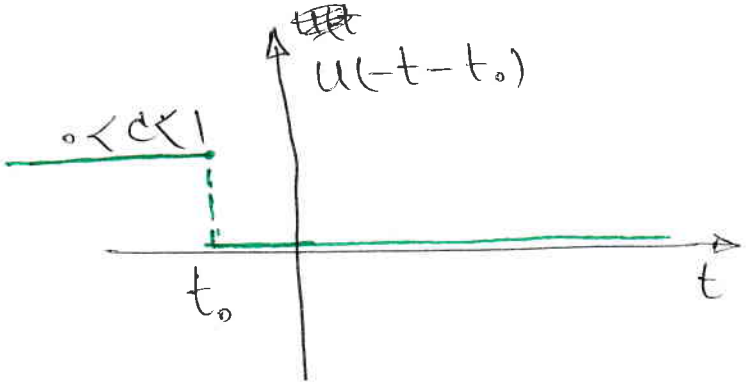
$$u_t = \begin{cases} 0 & t<0 \\ c & t=0 \quad (0<c<1) \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t<t_0 \quad (t-t_0<0) \\ c & t=t_0 \quad (0<c<1) \\ 1 & t>t_0 \quad (t-t_0>0) \end{cases}$$



$$u(-t-t_0) = \begin{cases} 1 & t<t_0 \\ c & t=t_0 \\ 0 & t>t_0 \end{cases}$$



تمرین فصل ۳ — ۱۷ -۱۴ -۱۲ -۹ ، ۷ ، ۵ ، ۳

حل تمرین:

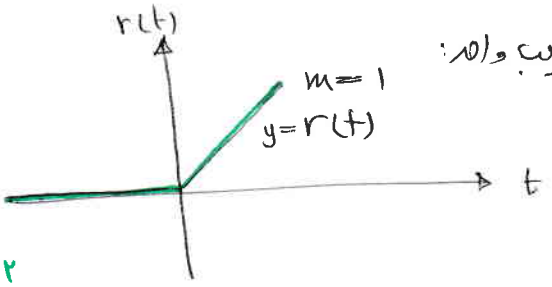
$$i = \frac{dq(t)}{dt} \qquad w(t) = \int p(t)\,dt$$

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} \qquad p = iv$$

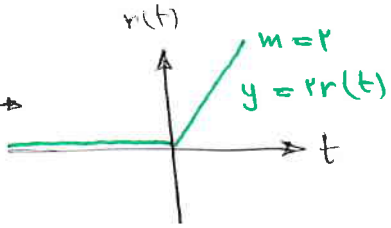
$$u(-t-t_0) = \begin{cases} 0 & -t-t_0<0 \rightarrow -t<t_0 \rightarrow t>-t_0 \\ 1 & -t-t_0>0 \rightarrow -t>t_0 \rightarrow t<-t_0 \end{cases}$$

$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

۲. تابع شیب واحد:



$y=2r(t)$ →



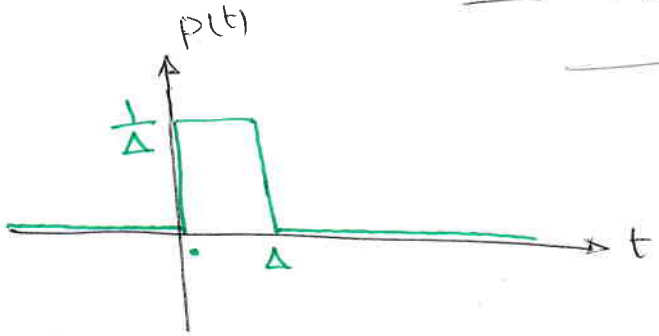
$r(t)=tu(t)$

تابع شیب واحد — تابع پله

$$\rightarrow u(t)=\frac{d}{dt}r(t)$$

$$\rightarrow r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\,d\tau$$

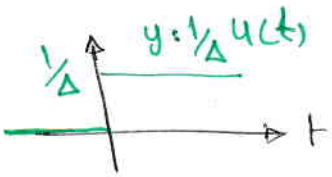
۳. تابع پالس:

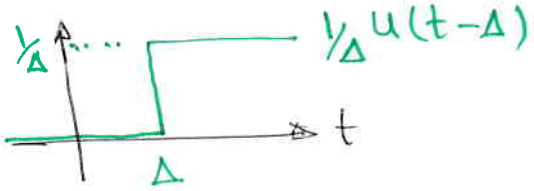


$$p(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & t>\Delta \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(t)\,dt=1$$

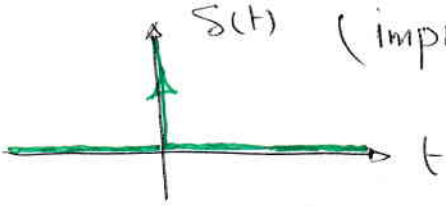
$$p(t)=\frac{1}{\Delta}\left(u(t)-u(t-\Delta)\right)$$





۴. تابع ضربه:

$$\delta(t)=\begin{cases} 0 & t\neq 0 \\ \infty & t=0 \end{cases}$$



تعریف: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$

$\lim_{\Delta \to 0} p(t) = \delta(t)$ / $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1$

(تابع ضربه در نقطه $t=0$ یک تابع است که شیب تابع $u(t)$ در $t=0$ بی‌نهایت است.)

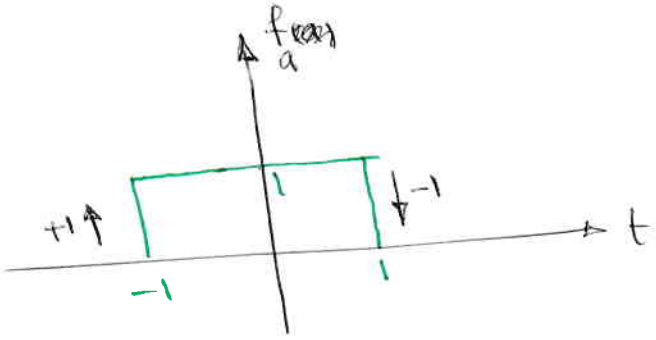
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

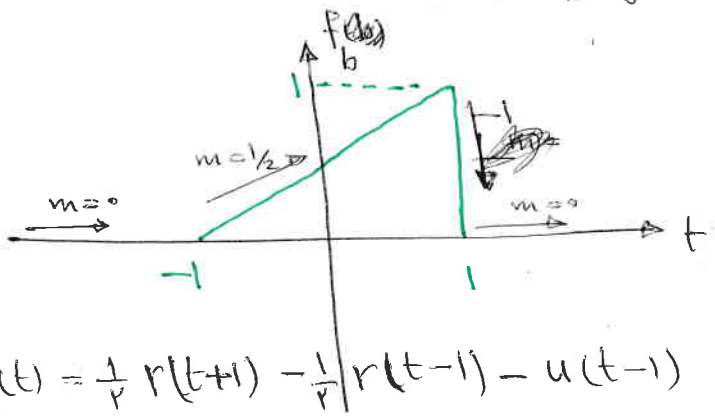
$\delta(t)$ خاصیت:

$$f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$$

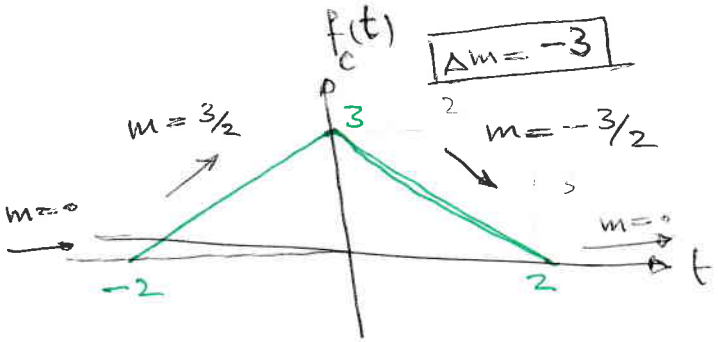
مثال: بیان ریاضی شکل موج‌های زیر را مشخص نمایید.



$$f_a(t) = u(t+1) - u(t-1)$$



$$f_b(t) = \frac{1}{2} r(t+1) - \frac{1}{2} r(t-1) - u(t-1)$$



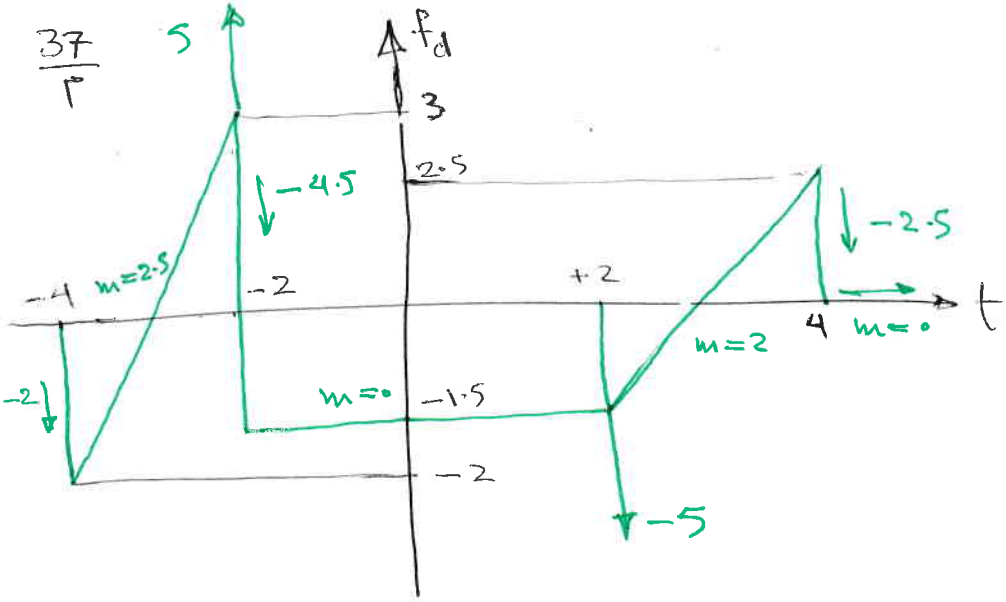
$$f_c(t) = \frac{3}{2} r(t+2) - 3\,r(t) + \frac{3}{2} r(t-2)$$

شیب ابتدا − شیب انتها $= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$

$m = \frac{3}{2}$

~~$\frac{3}{2} r(t+2) - \frac{3}{2} r(t) - \frac{3}{2} r(t-2) + \frac{3}{2} r(t-2)$~~

37/۲



$$-2u(t+4) + \frac{5}{2}r(t+2) + 5\delta(t+1) - 4.5u(t+1) + 1.5u(t-2)$$

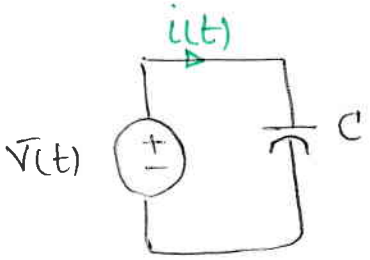
$$-5\delta(t-2) + \frac{4}{2}r(t-2)$$

$$f_d(t) = -2u(t+4) + 2.5r(t+1) + 5\delta(t+2) - 4.5u(t+2) - 2.5r(t+2)$$

$$-5\delta(t-2) + 2r(t-2) - 2.5u(t-4) - 2r(t-4)$$

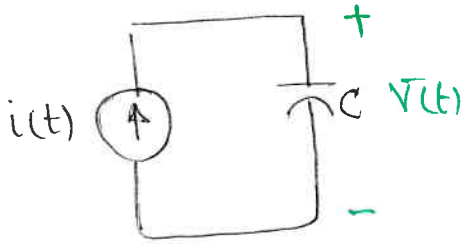
---

* خازن: رابطه ولتاژ و جریان و توان و انرژی

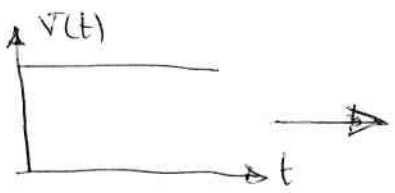


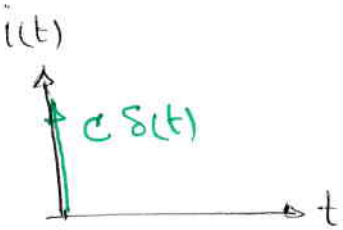
$$i(t) = C\frac{d\bar{V}}{dt}$$

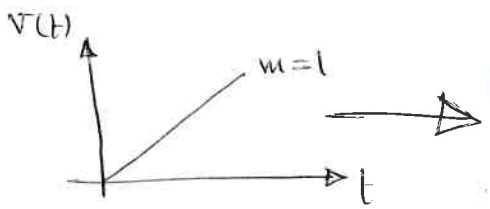
$$\bar{V}(t) = \bar{V}(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

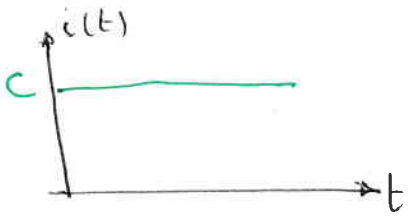


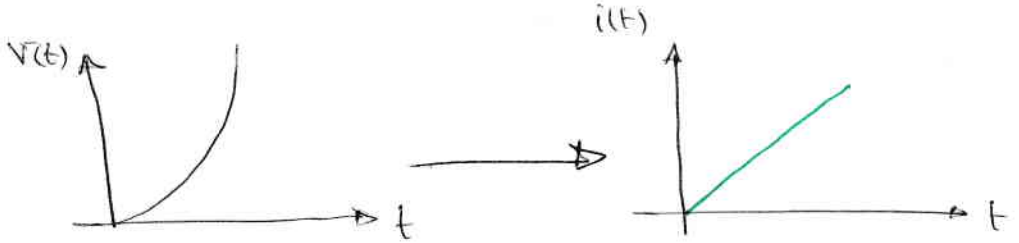
if:



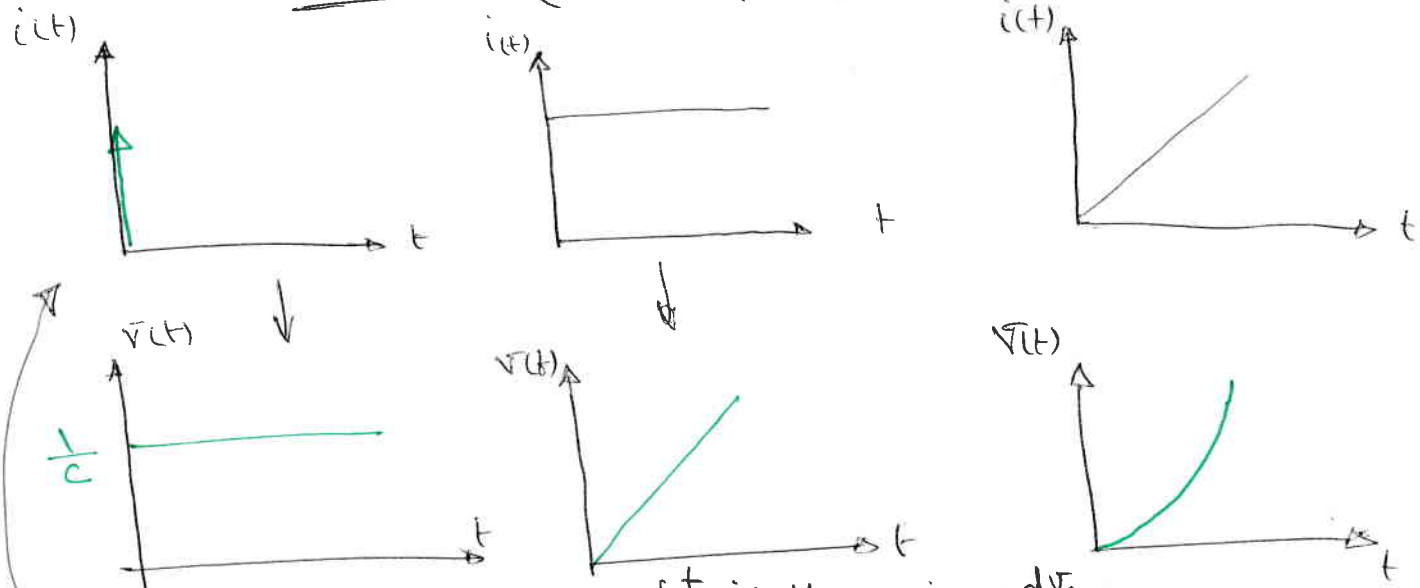








جریان متغیر است و ولتاژ تابع آن است در خازن



$$\bar{V}(t) = \bar{V}(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \qquad i = C\frac{dV_c}{dt}$$

ولتاژ دو سر خازن (خود آن) همواره پیوسته است مگر اینکه جریان بصورت ضربه ای باشد که تغییرات آن بصورت پله ای $\frac{1}{C}$ خواهد شد

تعریف ریاضی

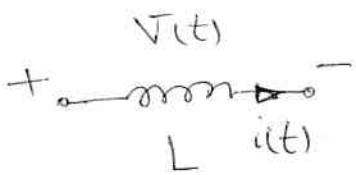
برای هر t_0:

$$\forall t_0 : V(t_0^-) = V(t_0) = V(t_0^+)$$

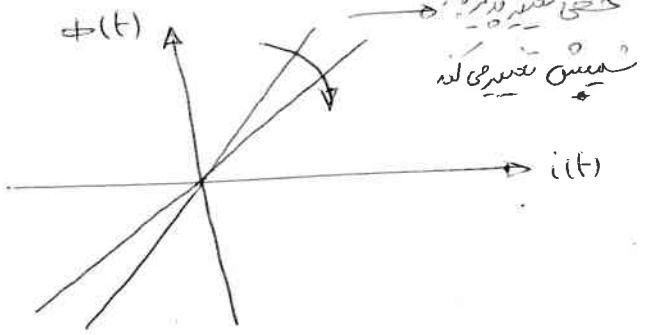
یعنی در t_0 هیچگاه اتفاق نمی‌افتد که ولتاژ خازن بصورت آنی مقدار زیادی تغییر کند

---

* سلف: عنصری است که در هر لحظه از زمان رابطه مشخصی بین شار مغناطیسی و جریان آن وجود دارد.



رابطه بین شار مغناطیسی و جریان $\Phi(t) = f(i(t))$ ← تعریف سلف



خطی $\Phi(t) = L(t)\, i(t)$

خطی و تغییر ناپذیر با زمان: $\Phi(t) = L\, i(t)$

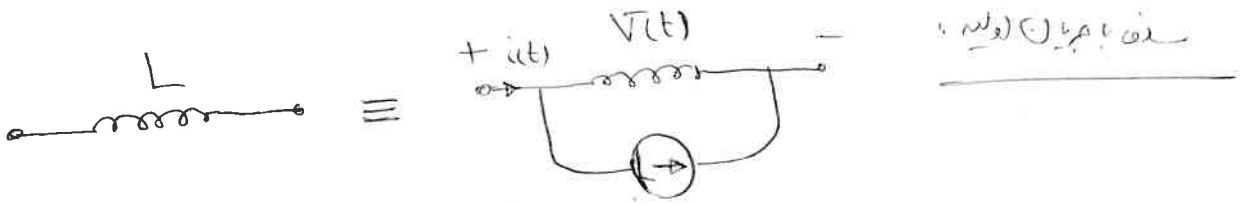
L: اندوکتانس سلف بر حسب هانری (H)

$$\begin{cases} \bar{V}(t) = \dfrac{d}{dt}\Phi(t) = L\dfrac{di}{dt} \\ i(t) = i(0) + \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t \bar{V}(t)\,dt \end{cases}$$

$$p(t) = \bar{V}(t)\, i(t) = L\, i(t)\dfrac{di}{dt}$$ توان لحظه‌ای در سلف:

$$W(t) = \int_0^t p(t)\,dt = \int_0^t L\, i(t)\dfrac{di}{dt}\,dt = \int_0^{i(t)} L\, i\, di = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$$

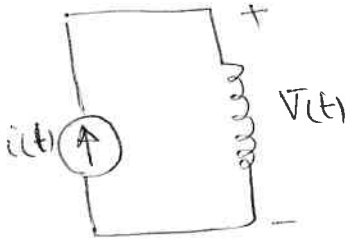
مدار معادل سلف در حوزه لاپلاس:

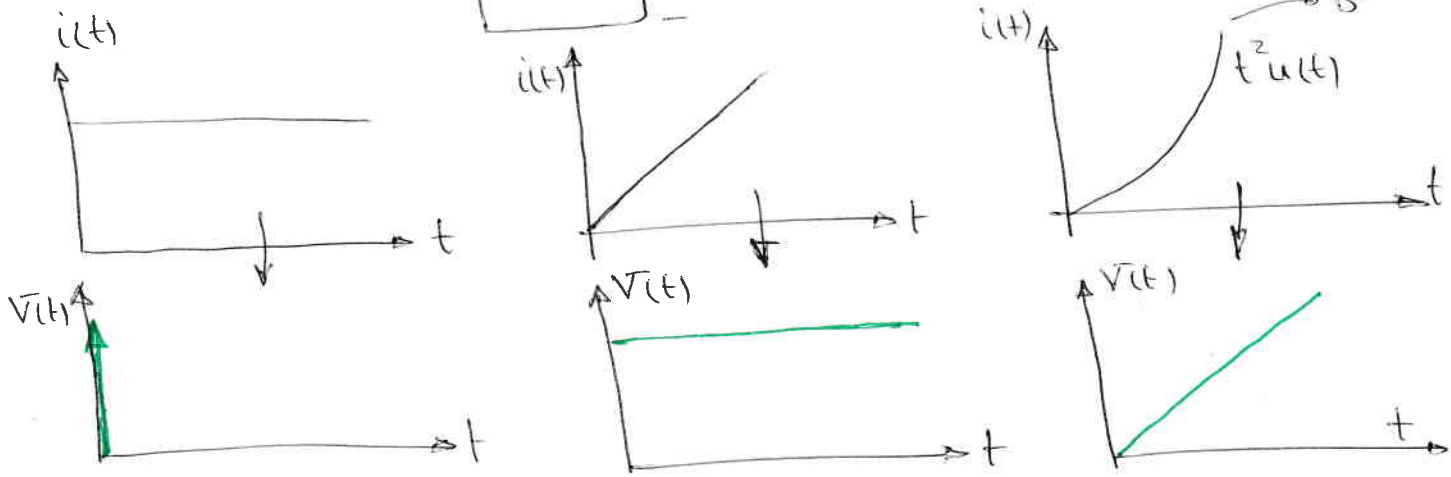


جریان اولیه سلف را $i(0)$ نامیده‌ایم.

* شکل موج‌های ولتاژ و جریان در سلف:

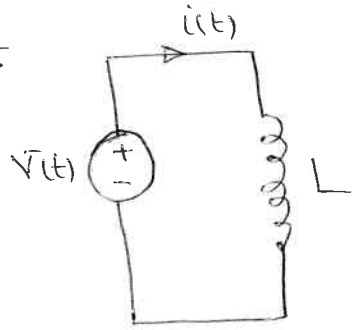
$$\bar{V}(t) = L\dfrac{di}{dt}$$



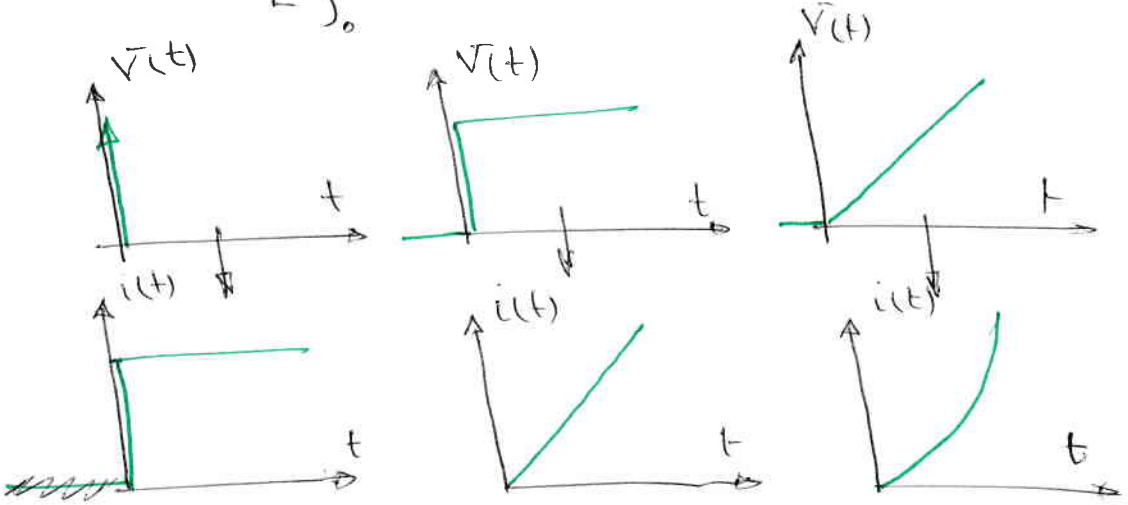


$$\begin{cases} \bar{V} = L\dfrac{di}{dt} \\ i(t) = i(0) + \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t \bar{V}(t)\,dt \end{cases}$$

40



$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V(t)\,dt$$

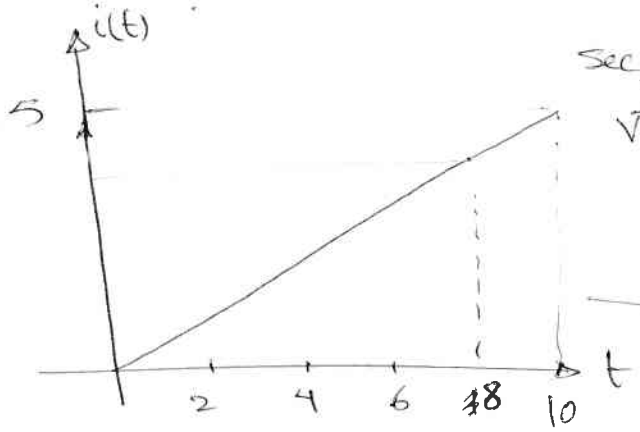


$$V = L\frac{di}{dt}$$

نتیجه: جریان گذرنده از سلف همواره پیوسته است مگر اینکه ولتاژ دو سر آن بصورت ضربه باشد

$$\forall t_0: \quad i(t_0^-) = i(t_0) = i(t_0^+)$$

مثال: در صورتیکه جریان القایی یک سلف با اندازه یک هانری بصورت زیر باشد مطلوب است:



الف) تغییرات $q(t)$ ، $V(t)$

ب) $V(10)$ ، $\phi(10)$ ، $q(10)$

$y = mx \rightarrow i(t) = 0.5t$ (sec)

$\rightarrow i(t) = 0.5\,r(t)$

$$q(t) = \int_0^t i(t)\,dt = \int_0^t 0.5\,r(t)\,dt = \int_0^t 0.5t\,u(t)\,dt = \int_0^t 0.5t\,dt$$

$$\rightarrow \boxed{q(t) = 0.25t^2\,u(t)} \rightarrow q(10) = 0.25(100) = 25^C \qquad = 0.25t^2u(t)$$

$$V(t) = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{L=1} V(t) = \frac{di}{dt} = 0.5\,u(t)$$

تابع شیب: تابع پله است

$$\rightarrow V(10) = 0.5^V$$

$$\phi(t) = Li(t) = i(t) = 0.5\,r(t)$$

$$\phi(10) = 0.5\,r(10) = 0.5\times 10 = 5\,Wb$$

$\boxed{r(a) = a}$: تابع