# پاسخنامه تشریحی درس ریاضیات کنکور ارشد عمران ۱۴۰۱

پاسخگویی به سؤالات توسط:

استاد ابراهیم شاه‌ابراهیمی

@EShahebrahimi

جزئیات دوره‌های آموزشی:

www.CafeTadris.com/Omran

مشاوره، سوال و راهنمایی:

@ShahinSagharchi

نمونه فیلم‌های آموزشی و آزمون‌های تستی مؤسسه نوین نگرش، در کانال‌های تلگرامی زیر قابل مشاهده است:

@Omran_Video

@Omran_Tests

شاد، موفق و سلامت باشید.

## تحلیل سوالات ریاضی کنکور ارشد ۱۴۰۱ مهندسی عمران

| سطح/درس | ریاضی ۱ | ریاضی ۲ | معادلات دیفرانسیل |
|---|---|---|---|
| ساده | ۲ | ۳ | ۳ |
| متوسط | ۱ | ۱ | ۱ |
| سخت | ۲ | ۱ | ۱ |

**پوشش *فاز ۱ ریاضیات نوین نگرش در آزمون ارشد عمران ۱۴۰۱:**

(*فاز ۱ مجموعه ای مختصر و مفید ۱۸ ساعتی است)

**۹ سوال**

۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۸، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴

در کمتر از ۲۰ ساعت آموزش از صفر به حداقل ۵۰ درصد میرسید.

**پوشش *فاز ۲ ریاضیات نوین نگرش در آزمون ارشد عمران ۱۴۰۰:**

(*فاز ۲ مجموعه ای مختصر و مفید ۲۱ ساعتی است)

**۶ سوال**

۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۷، ۳۹، ۴۵

ابراهیم شاه ابراهیمی

نوین نگرش عمران

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

## سوالات

۳۱) حاصل $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) $e^{\frac{1}{3}}$ ۴) $e^{\frac{1}{6}}$

۳۲) شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}\right)^2(1-x)^n$ کدام است؟

۱) $R=1$ و $(0,2)$ ۲) $R=1$ و $(0,2]$ ۳) $R=1$ و $(-2,0)$ ۴) $R=\frac{1}{2}$ و $(0,1]$

۳۳) حاصل $\int_1^2\frac{x^2-1}{x^3+x}dx$ کدام است؟

۱) $\ln\frac{5}{4}$ ۲) $\ln\frac{4}{5}$ ۳) $\ln\frac{5}{2}$ ۴) $\ln\frac{25}{16}$

۳۴) حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2})\ln(1+\frac{i}{n})$ کدام است؟

۱) واگرا ۲) $2\ln 2+\frac{1}{4}$ ۳) $2\ln 2-\frac{5}{4}$ ۴) $2\ln 2-\frac{3}{4}$

۳۵) مساحت محصور بین نمودارهای $x=y^2$ و $8y=x^2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۸

۳۶) در تابع دو متغیره $z=x^2\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ حاصل $xz_x+yz_y$ به ازای $x=\sqrt{3}$ , $y=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\pi$

۳۷) کدام گزینه در مورد نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^3-x^2y^2$ درست است؟

۱) فقط یک نقطه مینیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک نقطه ماکزیمم نسبی دارد.

۳) فقط یک نقطه زینی دارد. ۴) فاقد نقاط بحرانی است.

@nnAcademy
CAFETADRIS.COM

۳۸) حاصل $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sin x}\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}dy\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۳۹) حجم بالای صفحه $xy$ محصور به منحنی‌های $z=x^2+y^2$ و $x^2+y^2=4$ کدام است؟

۱) $2\pi$ ۲) $4\pi$ ۳) $8\pi$ ۴) $16\pi$

۴۰) حاصل انتگرال دوگانه $\iint_D (x+1)^2 y^2 dx\,dy$ که در آن $D$ ناحیه محصور به خطوط $y=x, y=-x$ و $x=1$ است کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{41}{90}$ ۳) $\frac{49}{90}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۱) منحنی‌های عمود بر خانواده منحنی‌های $x^2y=c$ کدام است؟

۱) $2y^2-x^2=c$ ۲) $2y^2+x^2=c$ ۳) $2x^2-y^2=c$ ۴) $2x^2+y^2=c$

۴۲) پاسخ معادله دیفرانسیل زیر به ازای $x=\ln 2$ کدام است؟

$$\begin{cases} y''-2y'+y=xe^x+4 \\ y(0)=1,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

۱) $8\ln 2$ ۲) $8\ln 2-\frac{(\ln 2)^3}{3}$ ۳) $8\ln 2+\frac{(\ln 2)^3}{3}-2$ ۴) $8\ln 2+\frac{(\ln 2)^3}{3}+2$

۴۳) اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y'=xe^{-x^2+y}$ به شرط $y(0)=0$ باشد، آنگاه مجانب افقی $y(x)$ کدام است؟

۱) $y=0$ ۲) $y=1$ ۳) $y=\ln 2$ ۴) تابع جواب فاقد مجانب افقی می‌باشد.

۴۴) اگر $y$ پاسخ معادله $\begin{cases} y'=2\frac{y}{x}+x\tan\frac{y}{x^2} \\ y(\sqrt{2})=\pi \end{cases}$ باشد، آنگاه $y(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\pi$ ۴) $0$

۴۵) حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-2x}\sin 3x}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ ۲) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ ۳) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ ۴) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$

۳۱) حاصل $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟ (فازا ـ حد مهم توانی ـ ساده)

۱) ۱ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) $e^{\frac{1}{3}}$ ۴) $e^{\frac{1}{6}}$ ✓

$=1^{\infty}$

$\ln f^g = 1^{\infty} \rightarrow$ جواب $= e^{\ln(f-1)g}$

$\rightarrow$ جواب $= e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}}$

$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x - x}{x^3}} \rightarrow$ سرت تو مخرج با تنه هم اری تا درجه ۳، $\sin^{-1}x$ لازمه

$\sin^{-1}x \simeq x + x^3/6$

جواب $= e^{\lim_{x\to 0}\frac{x+x^3/6 - x}{x^3}} = e^{1/6}$

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

**۳۲)** شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\right)^2(1-x)^n$ کدام است؟

۱) $R=1$ و $(0,2)$ ۲) $R=1$ و $(0,2]$ ۳) $R=1$ و $(-2,0)$ ۴) $R=\frac{1}{2}$ و $(0,1]$

**حل:**

با استفاده از آزمون نسبت:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n+2)}\right)^2\times\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{(1-x)^{n+1}}{(1-x)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}\times\frac{(1-x)^{n+1}}{(1-x)^n}\right|=|1-x|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\prec1\rightarrow|x-1|\prec1\rightarrow0\prec x\prec2$$

$$x=2\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2(-1)^n$$

سری متناوب (لایب‌نیتس)، حد جمله عمومی در بی‌نهایت مخالف صفر است. پس واگراست.

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

**۳۳)** حاصل $\int_{1}^{2} \frac{x^2-1}{x^3+x} dx$ کدام است؟ (فازا - انتگرال - متوسط)

۱) $\ln\frac{5}{4}$ ✓ ۲) $\ln\frac{4}{5}$ ۳) $\ln\frac{5}{2}$ ۴) $\ln\frac{25}{16}$

روش اول: کلا دیالوتری انتگرالش (فیلم در یوتیوب)

$f(2) = \frac{3}{10}$

$f(1) = 0$

$\rightarrow$ جواب $\simeq \frac{\frac{3}{10}+0}{2} \times (2-1) \simeq \frac{3}{20} = 0.15$

$\ln 2 = \ln$ ← حذف

$\ln 2.5 = \ln$ ← می‌دانیم $\ln 2 \simeq 0.7$ پس خیلی از 0.15 بیشتره

$2\ln\frac{5}{4} = \ln$ ← از آن خیلی بیشتره

$\ln\frac{5}{4} = \ln$ ← صفر تردیکتره

روش دوم: تجزیه کسری

$$\int \frac{x^2-1}{x^3+x} dx = \int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx$$

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$\times x$, $x=0$: $-1 = A$

$\times x$, $x \to \infty$: $1 = A + B \rightarrow B = 2$

$x=1$ دلخواه: $0 = A + \frac{B+C}{2} \rightarrow C = 0$

$$\rightarrow \int \frac{2x^2-1}{x^3+x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx = -\ln x + \ln(x^2+1)$$

$$= \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\Big|_{x=1}^{2} = \ln\frac{5}{2} - \ln 2 = \ln\frac{5}{4}$$

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

# سوال مشابه از فیلم آموزشی فاز یک

**مثال:** حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (کسری و تجزیه)

$$1)\int\frac{1-x}{x^3+x^4}dx=\int\frac{1-x}{x^3(1+x)}dx=\int\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3}dx+\int\frac{D}{1+x}dx$$

$$=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x^2}dx+\int\frac{C}{x^3}dx+\int\frac{D}{1+x}dx=A\ln(|x|)-\frac{B}{x}-\frac{C}{2x^2}+D\ln(|x+1|)+c$$

@nnAcademy
CAFETADRIS.COM

(فاز ۲ - کاربرد انتگرال - تست)

**۳۴)** حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2})\ln(1+\frac{i}{n})$ کدام است؟

۱) واگرا ۲) $2\ln 2+\frac{1}{4}$ ۳) $2\ln 2-\frac{5}{4}$ ۴) $2\ln 2-\frac{3}{4}$

ترکیب سوال ۱۲ و ۱۳ فیلم فاز ۲

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\ln(1+\frac{i}{n})+\frac{i}{n^2}\ln(1+\frac{i}{n})\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n}) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{n}\ln(1+\frac{i}{n})$$

سوال ۱۲ فیلم فاز ۲ — سوال ۱۳ فیلم فاز ۲

$$= \int_0^1 \ln(1+x)\,dx + \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

دقیقا توی حل اول ۲ سوال گفتم که سوال تست محسوب میشه.

$$= \int_0^1 (x+1)\ln(x+1)\,dx$$ جزء جزء ← تغییر متغیر میدم

$$\begin{cases}\ln(x+1)=t\\ \frac{dx}{x+1}=dt\end{cases} \rightarrow \int_0^{\ln 2}\underbrace{(x+1)^2}_{e^{2t}}\cdot t\cdot dt = \int te^{2t}dt$$

| | |
|---|---|
| $t$ | $e^{2t}$ |
| $1$ | $\frac{1}{2}e^{2t}$ |
| $0$ | $\frac{1}{4}e^{2t}$ |

$$= e^{2t}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\right)\Big|_{t=0}^{\ln 2}$$

$$= e^{2\ln 2}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\right) - e^0\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

## این سوال در واقع ترکیب دو سوال از فیلم آموزشی فاز دو میباشد
## (سوال دوازده و سیزده فصل کاربرد انتگرال)

۱۲) حاصل $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n^2}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{2}{n^2}}\dots(1+\frac{n}{n})^{\frac{n}{n^2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\sqrt[4]{e}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt{e}$

حل:

$$y=(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n^2}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{2}{n^2}}\dots(1+\frac{n}{n})^{\frac{n}{n^2}}$$

$$Lny=Ln\left((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n^2}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{2}{n^2}}\dots(1+\frac{n}{n})^{\frac{n}{n^2}}\right)=Ln(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n^2}}+Ln(1+\frac{2}{n})^{\frac{2}{n^2}}+\dots+Ln(1+\frac{n}{n})^{\frac{n}{n^2}}$$

$$=\frac{1}{n^2}Ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n^2}Ln(1+\frac{2}{n})+\dots+\frac{n}{n^2}Ln(1+\frac{n}{n})=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}Ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n}Ln(1+\frac{2}{n})+\dots+\frac{n}{n}Ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}Ln(1+\frac{i}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 xLn(1+x)dx \xrightarrow{\text{انتگرال جزبه‌جز}} =\frac{1}{4}$$

$$\to Lny=\frac{1}{4}$$

۱۳) حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{e}$ ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) $\frac{4}{e}$ ۴) $\frac{e}{4}$

حل:

$$y=\sqrt[n]{\frac{(n+1)}{n}\frac{(n+2)}{n}\dots\frac{(n+n)}{n}}=(\frac{n+1}{n})^{\frac{1}{n}}(\frac{n+2}{n})^{\frac{1}{n}}\dots(\frac{n+n}{n})^{\frac{1}{n}}$$

$$Lny=Ln\left((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{n}}\dots(1+\frac{n}{n})^{\frac{1}{n}}\right)=Ln(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}+Ln(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{n}}+\dots+Ln(1+\frac{n}{n})^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\left(Ln(1+\frac{1}{n})+Ln(1+\frac{2}{n})+\dots+Ln(1+\frac{n}{n})\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})$$

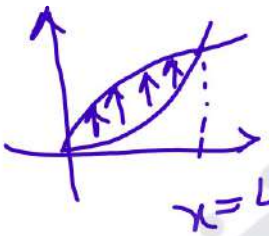
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 Ln(1+x)dx$$

(فاز ۱ ـ ترکیبی پایه و پیشرفته ـ ساده)

**۳۵)** مساحت محصور بین نمودارهای $x=y^2$ و $8y=x^2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۸




$$A=\iint dA$$

$$\rightarrow A=\int_{x=0}^{4}\int_{y=\frac{1}{8}x^2}^{y=\sqrt{x}} dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{8}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{24}x^3\right)\Big|_{x=0}^{4}=\frac{16}{3}-\frac{64}{24}$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$

روش اول ← انتگرال گیری به روش لایه

تقاطع: $\sqrt{x}=\frac{1}{8}x^2 \rightarrow x=4$

روش دوم ← انتگرال گیری به روش لایه

$$A=\int_{x=0}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{8}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{24}x^3\right)\Big|_{x=0}^{4}=\frac{16}{3}-\frac{64}{24}$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$

@nnAcademy
CAFETADRIS.COM

(فاز ۲ ـ توابع چند متغیره ـ ساده)

**۳۶)** در تابع دو متغیره $z = x^{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$ حاصل $x z_x + y z_y$ به ازای $x = \sqrt{۳}\ ,\ y = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\pi$ ✓

روش اول دقیقاً سوال حل شده ویدئو فاز ۲ ص

۱) اگر $z = x^{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$ آنگاه حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $z$

۳) $۲z$ ✓ ۴) $۳z$

حل:

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} z_x = ۲x\tan^{-۱}(\frac{y}{x}) + x^{۲}\frac{-\frac{y}{x^{۲}}}{۱+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}} = ۲x\tan^{-۱}(\frac{y}{x}) - \frac{yx^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} z_y = x^{۲}\frac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}} = \frac{x^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}$$

$$\rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۲x^{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{x}) - \frac{yx^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}} + \frac{yx^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}} = ۲x^{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$$

روش دوم منزه ص ←

$xz_x + yz_y = nz$

$z = x^{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{x}) \longrightarrow z(\lambda) = x^{۲}\lambda^{۲}\tan^{-۱}(\frac{\lambda y}{\lambda x}) \rightarrow \lambda = ۲$

$\rightarrow xz_x + yz_y = ۲z$ ص $= ۲x^{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{x})\Big|_{x=\sqrt{۳}}^{y=۱} = ۶(\frac{\pi}{۶})$

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

**۳۷)** کدام گزینه در مورد نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^۳-x^۲y^۲$ درست است؟

**۱)** فقط یک نقطه مینیمم نسبی دارد. **۲)** فقط یک نقطه ماکزیمم نسبی دارد.

**۳)** فقط یک نقطه زینی دارد. **۴)** فاقد نقاط بحرانی است.

**حل:**

$$f_x=۳x^۲-۲xy^۲=x(۳x-۲y^۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{۲}{۳}y^۲\end{cases}$$

$$f_y=-۲x^۲y=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\ y=۰\end{cases}$$

$$x=۰\rightarrow f_x=f_y=۰\rightarrow f(۰,y)=۰$$

$$x=\frac{۲}{۳}y^۲\rightarrow f_y=\frac{-۸}{۹}y^۵=۰\rightarrow y=۰\rightarrow x=۰$$

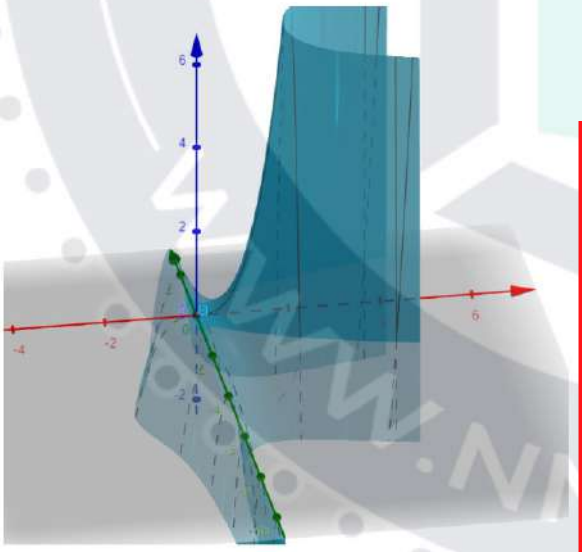
$$f_{xx}=۶x-۲y^۲\xrightarrow{(۰,y)}-۲y^۲$$

$$f_{xy}=-۴xy\xrightarrow{(۰,y)}۰$$

$$f_{yy}=-۲x^۲\xrightarrow{(۰,y)}۰$$

$$f(\Delta x,y+\Delta y)-f(۰,y)\simeq\frac{۱}{۲!}(-۲y^۲)(\Delta x)^۲=-y^۲(\Delta x)^۲\le۰$$

تنها نقطه مشکوک تابع $(۰,۰)$ است که بحرانی نیست، زیرا نسبت به بعضی از نقاط اطراف تغییرات موضعی نداریم (در یکی از جهات همواره ثابت است)



## تست مشابه از فیلم آموزشی فاز دو

۱) در مورد تابع $z=x^۴+y^۴-۴xy$ کدام صحیح است؟

۱) ✓ دو نقطه مینیمم دارد و یک نقطه زینی ۲) یک نقطه مینیمم دارد و دو نقطه زینی

۳) دو نقطه ماکزیمم دارد و یک نقطه زینی ۴) یک نقطه ماکزیمم دارد و دو نقطه زینی

**حل:**

$$f_x=۰\ ,\ f_y=۰$$

$$\xrightarrow{f_x=۰}۴x^۳-۴y=۰\rightarrow x^۳=y$$
$$\xrightarrow{f_y=۰}۴y^۳-۴x=۰\rightarrow y^۳=x$$
$$\rightarrow x^۹=x\rightarrow x=y=۰,۱,-۱$$

$$\xrightarrow{(۰,۰)}\Delta=\begin{vmatrix}۰&-۴\\-۴&۰\end{vmatrix}<۰$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{vmatrix}\rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}۱۲x^۲&-۴\\-۴&۱۲y^۲\end{vmatrix}\xrightarrow{(۱,۱)}\Delta=\begin{vmatrix}۱۲&-۴\\-۴&۱۲\end{vmatrix}>۰$$

$$\xrightarrow{(-۱,-۱)}\Delta=\begin{vmatrix}۱۲&-۴\\-۴&۱۲\end{vmatrix}>۰$$

۳۸) حاصل $\int_0^1 \int_0^{\sin x} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy\,dx$ کدام است؟ (فازا ـ انتگرال دوگانه ـ ساده)

۱) $\frac{1}{3}$ ✓ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{6}$

روش اول دانش ریاضی! و بدون تعریف کرال

$$= \int_0^1 \int_0^{\sin x} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sin^{-1} y$$

$$= \int_0^1 x \left( \sin^{-1} y \Big|_{y=0}^{\sin x} \right) dx$$

$$\sin^{-1}(\sin x) = x$$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

(فصل ۲ ـ انتگرال سه‌گانه)

۳۹) حجم بالای صفحه $xy$ محصور به منحنی‌های $z=x^2+y^2$ و $x^2+y^2=4$ کدام است؟

۱) $2\pi$ ۲) $4\pi$ ۳) $8\pi$ ✓ ۴) $16\pi$

استوانه‌ای

$$V=\iiint dz\,.\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{r^2} dz\,.\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \times \theta\Big|_0^{2\pi}$$

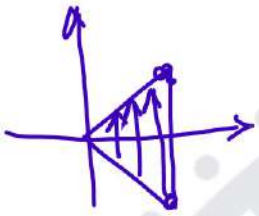
$$=4\times 2\pi=\boxed{8\pi}$$

@nnAcademy
CAFETADRIS.COM

۴۰) حاصل انتگرال دوگانه $\iint_D (x+1)^2 y^2 dx\,dy$ که در آن $D$ ناحیه محصور به خطوط $y=x, y=-x$ و $x=1$ است کدام است؟

(خارج ۱- انتگرال دوگانه- متوسط)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{41}{90}$ ۳) $\frac{49}{90}$ ✓ ۴) $\frac{1}{2}$



$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=-x}^{x} (x+1)^2 y^2 \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 (x+1)^2 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-x}^{x} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x^3 (x+1)^2 \quad (x+1)^2 \to x^2+2x+1$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x^5 + 2x^4 + x^3)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^6}{6} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{10+24+15}{60}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{49}{60} = \frac{49}{3\times 30} = \frac{49}{90}$$

@nnAcademy
CAFETADRIS.COM

(فاز ۱ - معادلات مرتبه ۱ - ساده)

۴۱) منحنی‌های عمود بر خانواده منحنی‌های $x^2y=c$ کدام است؟

۱) $2y^2-x^2=c$ ✓

۲) $2y^2+x^2=c$

۳) $2x^2-y^2=c$

۴) $2x^2+y^2=c$

مشتق ← $2xy+x^2y'=0 \rightarrow x^2y'=-2xy \rightarrow xy'=-2y$

مسیر قائمه ← $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$

$$-\frac{x}{y'}=-2y \rightarrow 2yy'=x$$

$$\rightarrow 2y\,dy=x\,dx$$

$$\int \rightarrow y^2=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\times 2 \rightarrow 2y^2-x^2=2C \rightarrow \alpha$$

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

**۴۲)** پاسخ معادله دیفرانسیل زیر به ازای $x=\ln 2$ کدام است؟ (فازا - معادلات مرتبه ۲ - سخت (زمانبر))

$$\begin{cases} y''-2y'+y=xe^x+4 \\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

۱) $8\ln 2$
۲) $8\ln 2-\frac{(\ln 2)^3}{3}$
۳) $8\ln 2+\frac{(\ln 2)^3}{3}-2$
۴) $8\ln 2+\frac{(\ln 2)^3}{3}+2$

$y''-2y'+y=0 \xrightarrow{\text{تبدیل}} t^2-2t+1=0 \to (t-1)^2=0 \to t=1,1$

$\to y_h=c_1e^x+c_2xe^x$

$\begin{cases} y_1=e^x \\ y_2=xe^x \end{cases} \to W=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}=e^{2x}$

$y''-2y'+y=xe^x \xrightarrow{\text{لاگرانژ}} \begin{cases} c_1=-\int \frac{xe^x\cdot xe^x}{e^{2x}}dx=-x^3/3 \\ c_2=\int \frac{e^x\cdot xe^x}{e^{2x}}dx=x^2/2 \end{cases}$

$\to y_p=\text{ضرب لاگرانژ}\ -\frac{x^3}{3}e^x+\frac{x^3}{2}e^x=\frac{1}{6}x^3e^x$

$y''-2y'+y=4 \to y=\frac{4}{D^2-2D+1} \xrightarrow{D=0} y_p=4$ (ضرب اویلر)

جواب کل $\to y=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{1}{6}x^3e^x+4$

اعمال شرایط اولیه $\to y(0)=1$

$1=c_1+4 \to c_1=-3$

مشتق بگیریم $\to y'=c_1e^x+c_2e^x+\dots$ (جمله صفری‌شون)

$y'(0)=1 \to 1=c_1+c_2 \to 1=-3+c_2 \to c_2=4$

$\to y_p'=-3e^x+4xe^x+\frac{1}{6}x^3e^x+4 \xrightarrow{x=\ln 2} y=-6+8\ln 2+\frac{1}{3}(\ln 2)^3+4$

@nnAcademy
CAFETADRIS.COM

**۴۳)** اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y' = xe^{-x^2+y}$ به شرط $y(0)=0$ باشد، آنگاه مجانب افقی $y(x)$ کدام است؟

۱) $y=0$ ۲) $y=1$ ۳) $y=\ln 2$ ✓ ۴) تابع جواب فاقد مجانب افقی می‌باشد.

(فازا - معادلات مرتبه ۱ - ساده)

$\rightarrow y' = xe^{-x^2}\cdot e^{y} \rightarrow e^{-y}dy = xe^{-x^2}dx$ تفکیک پذیر

$\xrightarrow{\int} -e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

$\xrightarrow{y(0)=0} -1 = -\frac{1}{2} + C \rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}$

مجانب افقی $\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -e^{-y} = 0 - \frac{1}{2} \rightarrow e^{-y} = \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{\ln} -y = \ln\frac{1}{2}$

$\rightarrow y = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

۴۴) اگر $y$ پاسخ معادله $\begin{cases} y' = 2\frac{y}{x} + x^2 \tan\frac{y}{x^2} \\ y(\sqrt{2}) = \pi \end{cases}$ باشد، آنگاه $y(1)$ کدام است؟ (فاز ۱ - معادلات مرتبه ۱ - متوسط)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ✓ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\pi$ ۴) ۰

روش اول: حل به روش همگن $\frac{y}{x}$

$\frac{y}{x}$ کد همگن $\rightarrow \begin{cases} y/x = u \\ y' = u'x + u \end{cases} \rightarrow u'x + u = 2u + x\,tg\frac{u}{x}$

$\div x \rightarrow u' + \frac{u}{x} = 2\frac{u}{x} + tg\frac{u}{x}$ جدا کردن متغیرها $\rightarrow \begin{cases} \frac{u}{x} = t \\ u' = t'x + t \end{cases}$

$\rightarrow t'x + t + t = 2t + tgt$

$\rightarrow t'x = tgt \rightarrow \cot t\,dt = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(\sin t) = \ln cx$

$\rightarrow \sin t = cx \rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{y}{x^2}\right) = cx}$ $\xrightarrow[y=\pi]{x=\sqrt{2}}$ $1 = c\sqrt{2} \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}x}$ $\xrightarrow{x=1}$ $\sin(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{4}}$

روش دوم: تغییر متغیر مستقیم

$\begin{cases} y/x^2 = u \\ y' = 2xu + x^2u' \end{cases}$

$\rightarrow 2xu + x^2u' = 2xu + x\,tg(u) \rightarrow u'x = tgu$ ✓

ادامه حل مشابه مورد قبل ✓

@nnAcademy
کافه تدریس CAFETADRIS.COM

۴۵) حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\sin 3x}{x}dx$ کدام است؟ (فاز ۲ - لاپلاس - ساده)

۱) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ ۲) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ ۳) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ ✓ ۴) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$

سوال بسیار مشابه از فیلم فاز دو :)

۶۳) حاصل انتگرال ناسره $I=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ✓ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل:

$F(s)=L(f(x))=\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx$ تعریف لاپلاس

$I=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx=L\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{s=1}=\int_s^\infty L(\sin x)ds\Big|_{s=1}=\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds\Big|_{s=1}=\tan^{-1}s\Big|_s^\infty\Big|_{s=1}$

$=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s\Big|_{s=1}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

$= \mathcal{L}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)\Big|_{s=2}$

$= \int_s^\infty \mathcal{L}(\sin 3x)\,ds\Big|_{s=2}$

$= \int_s^\infty \frac{3}{s^2+9}ds\Big|_{s=2}$

$= tg^{-1}\frac{s}{3}\Big|_s^\infty = \left(\frac{\pi}{2}-tg^{-1}\frac{s}{3}\right)\Big|_{s=2}$

$= \frac{\pi}{2}-tg^{-1}\frac{2}{3}$

رابطه تکراری مهم!

$tg^{-1}x+tg^{-1}\frac{1}{x}=\pi/2$

$= tg^{-1}\frac{3}{2}$

آکادمی نوین نگرش

# برخی از نتایج درخشان دانشجویان مجموعه نوین نگرش در کنکور ارشد عمران ۱۴۰۱

**علیرضا عبداللهی**

رتبه کشوری: ۱۱

خدمات: مشاوره، کلاس، آزمون

**امیرحسن واحدی**

رتبه کشوری: ۱۴

خدمات: مشاوره، کلاس، آزمون

**رضا ملکشاه**

رتبه کشوری: ۲۱

خدمات: فیلم آموزشی

**محمدصادق ملکی**

رتبه کشوری: ۲۲

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**مرتضی ریاحی**

رتبه کشوری: ۳۵

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**عماد مطلب‌زاده**

رتبه کشوری: ۳۸

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**امیرعباس هرندی**

رتبه کشوری: ۶۲

خدمات: مشاوره، کلاس، آزمون

**فرید قاسمی**

رتبه کشوری: ۶۸

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**علی کریمی**

رتبه کشوری: ۷۰

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**علی رحیمی**

رتبه کشوری: ۸۱

خدمات: مشاوره، کلاس، آزمون

**محمدرضا محمودی**

رتبه کشوری: ۹۴

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، آزمون

**امیرمهدی تیموری**

رتبه کشوری: ۹۹

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**محمدعرفان طلوعی**

رتبه کشوری: ۱۱۱

خدمات: مشاوره، کلاس، آزمون

**پوریا بالال**

رتبه کشوری: ۱۱۳

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**امیرمحمد مسورچهر**

رتبه کشوری: ۱۳۱

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**محمدامین نجفلی**

رتبه کشوری: ۱۴۶

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، آزمون

**مهدیه سلیمانی**

رتبه کشوری: ۱۵۶

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس

**فردین برفر**

رتبه کشوری: ۱۶۹

خدمات: مشاوره، آزمون

**میکائیل تندکاران‌فر**

رتبه کشوری: ۱۷۹

خدمات: فیلم آموزشی، کلاس

**مهدی اسلامی**

رتبه کشوری: ۱۸۲

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، آزمون

**عرفان سعیدی‌بهروز**

رتبه کشوری: ۱۹۱

خدمات: مشاوره، فیلم آموزشی، کلاس، آزمون