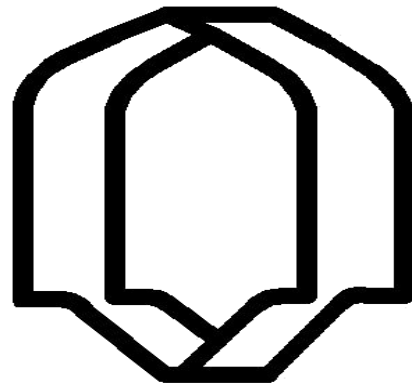




دانشگاه شهرد

سمینار درس هندسه محاسباتی

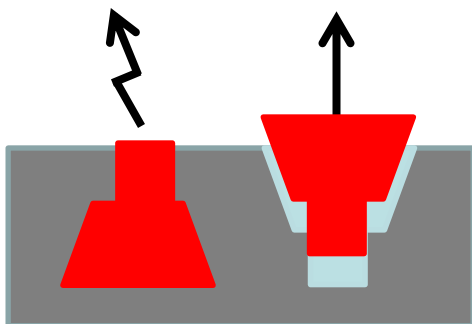
ارایه دهنده :
هادی خادم پور

زمستان 90



برنامه ریزی خطی - قالب گیری 1

Linear programming
Manufacturing with models

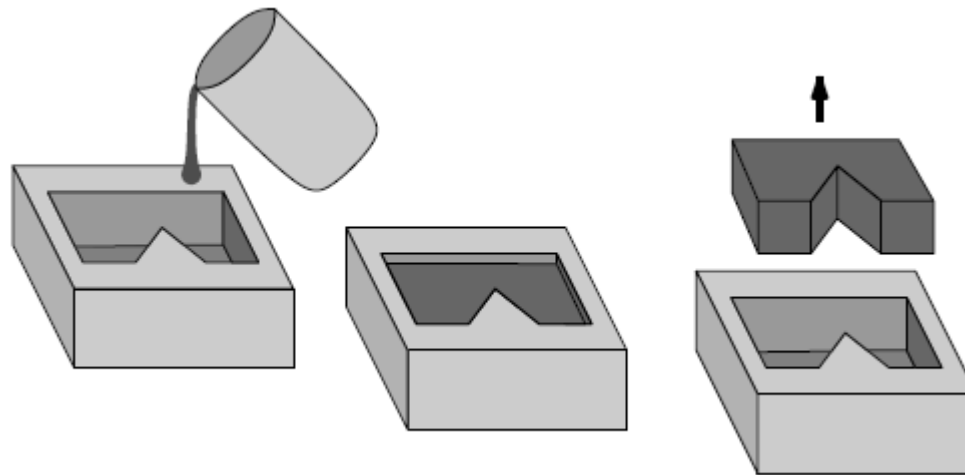


منبع:

Computational Geometry,
Theory and Applications, de Berg,
et al.

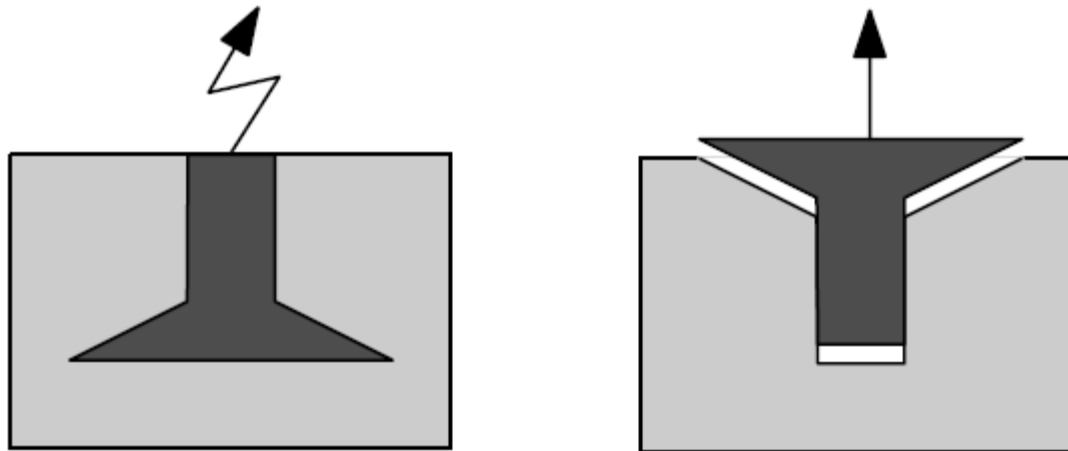
صورت مساله

در صنعت برای ساختن اشیای مختلف، آنها را قالب‌گیری می‌کنند. برای این کار فلز یا پلاستیک مذاب را در قالب می‌ریزند و پس از سرد شدن آن را از قالب خارج می‌کنند.



صورت مساله

- خارج کردن محتویات قالب پس از سرد شدن همیشه ساده نیست. در بعضی موارد برای خارج کردن قطعه سرد شده از قالب باید قالب را شکست. گاهی اوقات می‌توان با تغییر دادن قالب این مشکل را حل کرد.



صورت مساله

- سوال این است که برای ساختن یک قطعه چه قالبی طراحی شود که قطعه پس از سرد شدن به راحتی از آن خارج شود.

برای حل این مساله شرایط زیر را در نظر می‌گیریم:

– قطعه‌ها چندضلعی هستند.

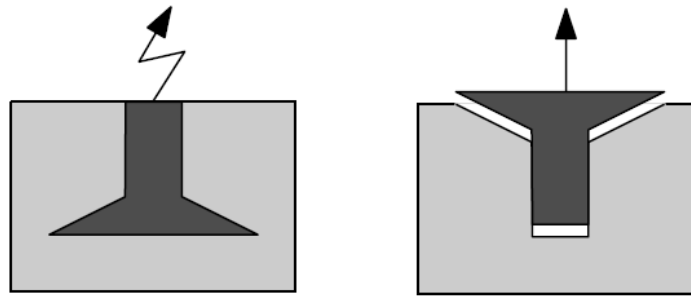
– قالب‌ها یک تکه هستند.

– برای خارج کردن قطعه از قالب تنها از یک انتقال استفاده شود.

- قطعه‌ای که بتوان قالبی با خصوصیات بالا برای آن طراحی کرد را قابل قالب‌گیری (castable) می‌نامیم.

مساله قالب گيري

- مساله به دو بخش تقسيم مي شود.
 1. بررسي قابل قالب گيري بودن يك قطعه
 2. تعيين جهت قطعه در قالب



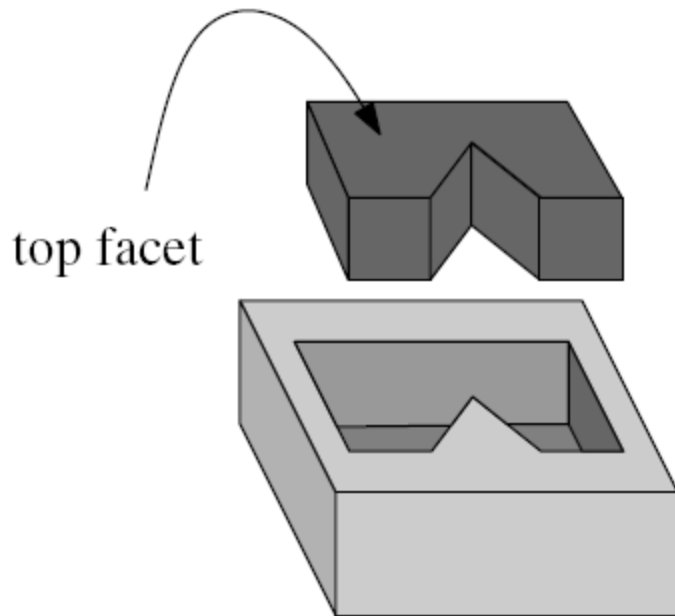
- براي بررسي مورد اول مي توان تک تک وجه ها را به عنوان وجه بالايي در نظر گرفت و بررسي کرد آيا براي اين قطعه با اين وجه بالايي مي توان قالبی طراحی کرد.

هندسه مساله قالب گیری

- قطعه یک چندوجهی کراندار است که وجه‌های آن مسطح هستند.

- قالب یک مکعب مستطیل با یک فرورفتگی است که این فرورفتگی کاملاً متناظر با P است.

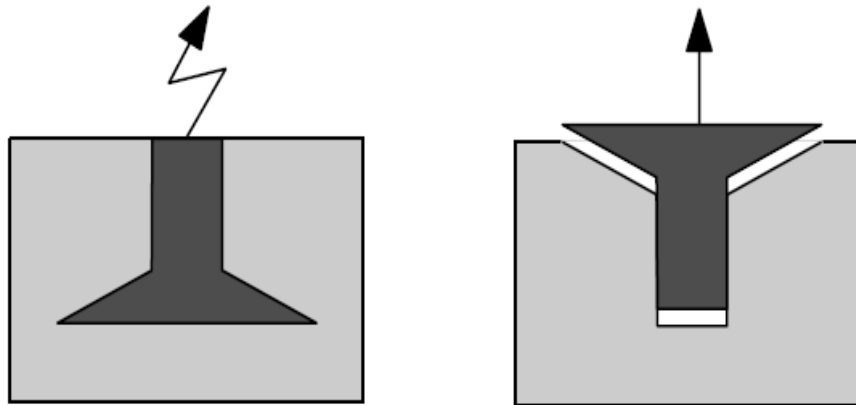
- وقتی قطعه درون قالب قرار می‌گیرد وجه بالایی آن باید کاملاً با وجه بالایی مکعب مستطیل (صفحه xy) همسطح باشد.



- فرض می‌کنیم روی سطح قالب هیچ زائده اضافی وجود ندارد و قطعه با یک انتقال ساده از قالب خارج می‌شود.

هندسه مساله قالب گیری

- برای قالب گیری یک قطعه، شکل قالب ثابت است اما این شکل می تواند دوران کند. در یک جهت قطعه از قالب خارج می شود ولی در جهت های دیگر ممکن است خارج نشود.

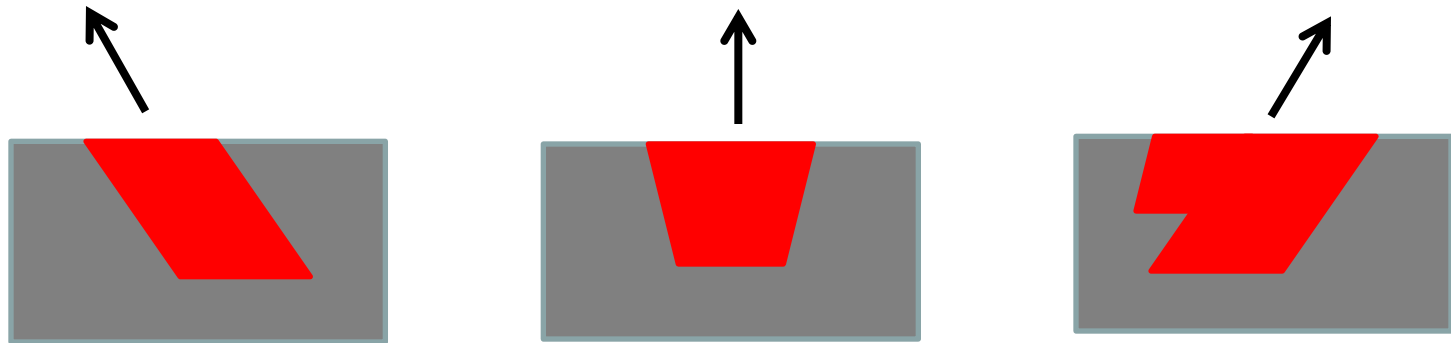


هندسه مساله قالب‌گیری

- یکی از محدودیت‌هایی که برای تعیین جهت باید در نظر گرفته شود این است که چندضلعی (قطعه) باید یک **وجه بالایی** داشته باشد. وجه بالایی تنها وجهی است که با قالب تماس ندارد.
- هر وجه P به جز وجه بالایی یک وجه عادی نام دارد. متناظر با هر وجه عادی f از P ، قالب هم یک وجه دارد که با $\bar{f}$ نشان داده می‌شود.

هندسه مساله قالب گیری

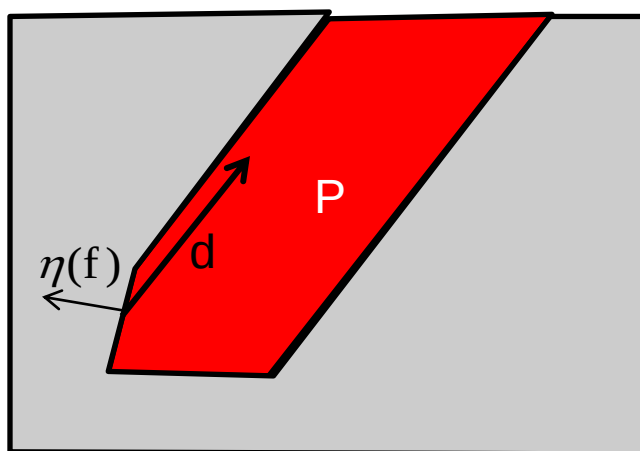
- برای خارج کردن قطعه از قالب یک جهت باید تعیین شود.



- با توجه به این که وجهی از قطعه که با قالب تماس ندارد در بالای قالب است، جهت انتخابی باید رو به بالا (یعنی در راستای محور Z صعودی) باشد.

هندسه مساله قالب‌گیری

- فرض کنید f یک وجه عادی از قطعه باشد. برای خارج کردن قطعه از قالب باید وجه f از روی وجه $\hat{f}$ بلند شود یا روی آن بلغزد.
- اگر d بردار متناظر با جهت خارج کردن قطعه از قالب و $\eta(\hat{f})$ بردار عمود خارجی $\hat{f}$ باشند، برای اینکه قطعه از قالب جدا شود باید اندازه زاویه d و $\eta(f)$ بزرگتر یا مساوی با 90° درجه باشد.



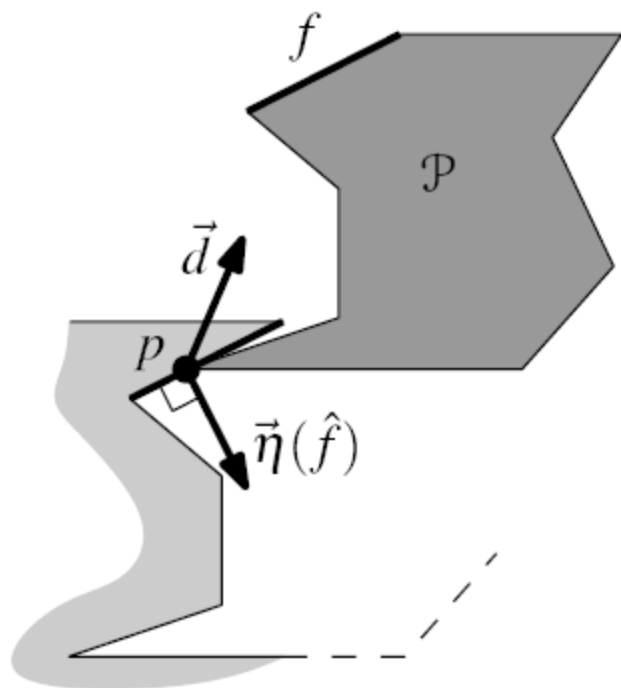
هندسه مساله قالب گیری

- **قضیه 1:** چندضلعی P می تواند با یک انتقال در جهت بردار d از قالب خود خارج شود اگر و تنها اگر بردار d با بردارهای نرمال همه وجه های عادی قطعه زاویه بزرگتر یا مساوی با 90 درجه بسازد.

ایده اثبات: اگر d با بردار نرمال وجه f زاویه کمتر از 90 درجه بسازد، آنگاه وقتی قطعه در راستای d حرکت کند هر نقطه از f با قالب برخورد می کند. برعکس، اگر در حرکتی P با قالب در نقطه p برخورد کند، نشان می دهیم جهت این حرکت با بردار نرمال یکی از وجه های عادی زاویه کمتر از 90 درجه می سازد.

هندسه مساله قالب گیری

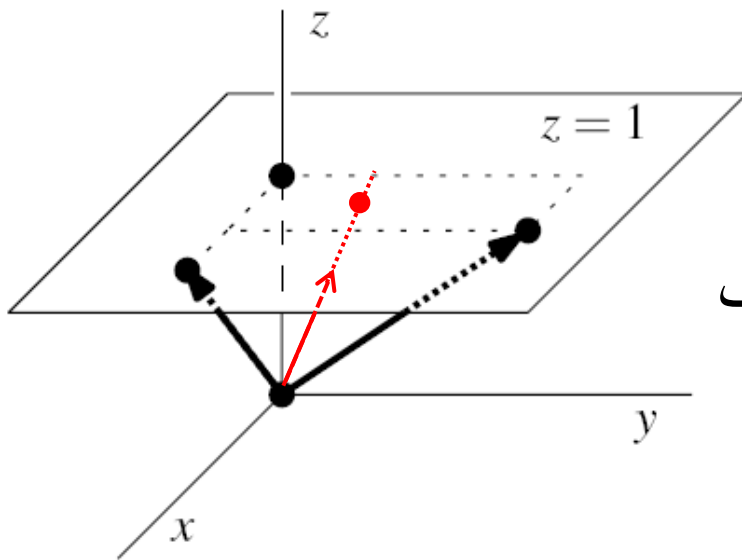
اگر p با وجه $\hat{f}$ از قالب برخورد داشته باشد، d با بردار نرمال $\hat{f}$ زاویه بزرگتر از 90° می‌سازد. پس d با بردار نرمال وجه f از قطعه زاویه کمتر از 90° می‌سازد.



هندسه مساله قالب گیری

- **نتیجه:** اگر بتوان قطعه را با چند انتقال از قالب خارج کرد، آنگاه این قطعه را می توان با یک حرکت از قالب جدا کرد.
- با استفاده از قضیه 1 برای به دست آوردن جهت مناسب باید برداری پیدا کنیم که با همه بردارهای نرمال وجه های P زاویه بزرگتر یا مساوی با 90° بسازد.

هندسه مساله قالب گیری



- بین نقاط صفحه $z=1$ و همه جهت های روبه بالا تناظر یک به یک برقرار است.

هندسه مساله قالب گیری

- بررسی این که زاویه دو بردار کمتر یا بیشتر از 90° است:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

– اگر علامت حاصلضرب داخلی آنها مثبت باشد، زاویه کمتر از 90° است.

– اگر علامت حاصلضرب داخلی آنها منفی باشد، زاویه بیشتر از 90° است.

هندسه مساله قالب‌گیری

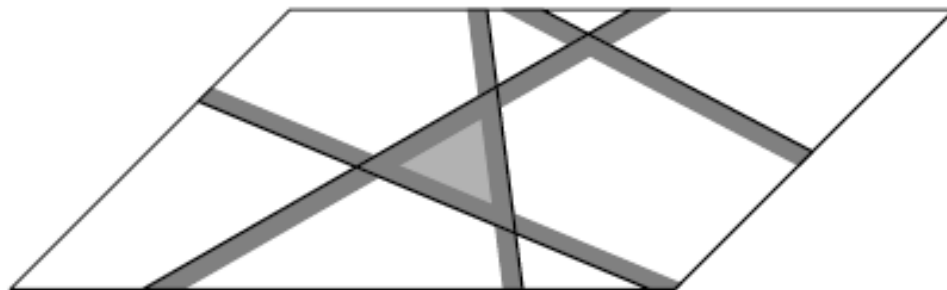
برای بررسی شرط قضیه 1، برای بردار نرمال هر وجه عادی باید مجموعه نقطه‌هایی از صفحه $z = 1$ تعیین شود که بردار با جهت متناظر با آنها زاویه بزرگتر از 90° درجه می‌سازد.

اگر $\vec{n} = (\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ بردار نرمال یک وجه از قطعه و $\vec{d} = (d_x, d_y, 1)$ یک بردار جهت باشد، برای آن که زاویه بین آنها بزرگتر یا مساوی 90° باشد باید $\vec{n}_x d_x + \vec{n}_y d_y + \vec{n}_z \leq 0$.

این رابطه یک نیم صفحه را نشان می‌دهد. در صورتی که $\vec{n}_x = \vec{n}_y = 0$ این رابطه به یک نامساوی تبدیل می‌شود.

هندسه مساله قالب گیری

- پس برای تعیین جهت مناسب کافی است نقطه‌ای در اشتراک نیم‌صفحه‌ها تعیین شود. این نقطه در صورت وجود جهت خارج کردن قطعه را نشان می‌دهد.



هندسه مساله قالب گیری

- با روش بالا مساله خارج کردن یک چندوجهی از قالب با وجه بالایی داده شده به یک مساله كاملا هندسی تبدیل شد:
- برای مجموعه‌ای از نیم صفحه‌ها یک نقطه در اشتراک آنها به دست آورید یا تعیین کنید اشتراک تهی است.
- اگر چند وجهی داده شده دارای n وجه باشد، مساله دارای حداکثر $n-1$ نیم صفحه است. برای بررسی این که یک چندوجهی قابل قالب گیری هست یا نه میتوان هر وجه آن را به عنوان وجه بالایی در نظر گرفت و مساله اشتراک نیم صفحه‌ها را حل کرد.

اشتراک نیم صفحه ها

- فرض کنید $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ مجموعه ای از قیدهای با دو متغیر باشد که هر h_i با یک نامساوی به شکل $a_i x + b_i y \leq c_i$ که در آن a_i و b_i هر دو صفر نیستند، مشخص شده است. هر قید یک نیم صفحه را نشان می دهد.

- هدف تعیین همه نقاط (x, y) است که در همه قیدهای H صدق می کنند.

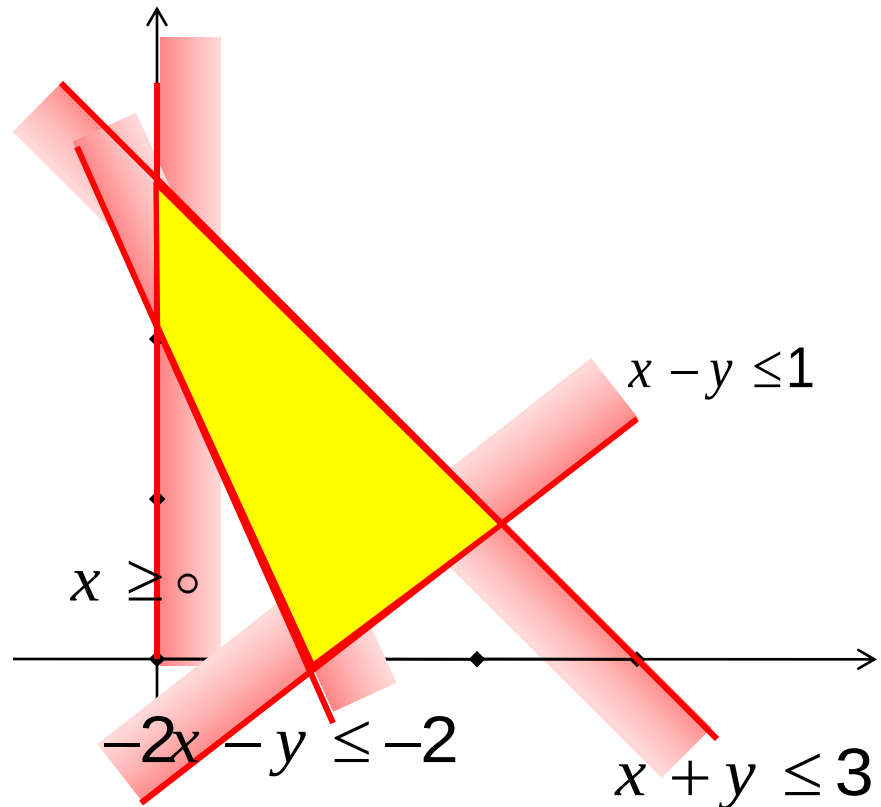
مثال

$$x - y \leq 1$$

$$x + y \leq 3$$

$$-2x - y \leq -2$$

$$x \geq 0$$

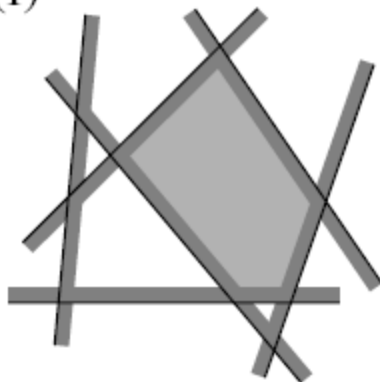


اشتراک نیم صفحه‌ها

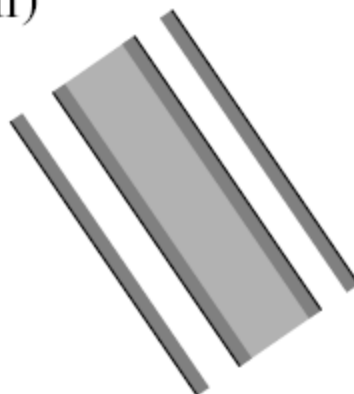
- هر نیم صفحه محدب است پس اشتراک نیم صفحه‌ها یک چندضلعی محدب است.
- هر نقطه روی مرز ناحیه مشترک روی یکی از خط‌ها قرار دارد پس مرز ناحیه از قسمتهایی از خط‌ها تشکیل شده است.
- ناحیه محدب است، پس هر خط حداکثر یک ضلع را محدود می‌کند.
- ناحیه اشتراک حداکثر n ضلع دارد.

اشتراک نیم صفحه ها

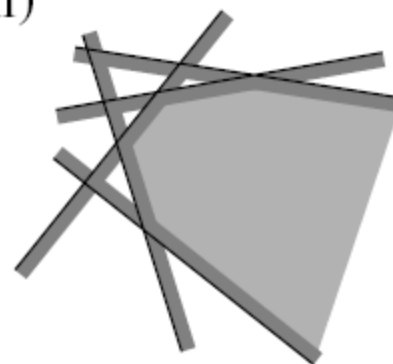
(i)



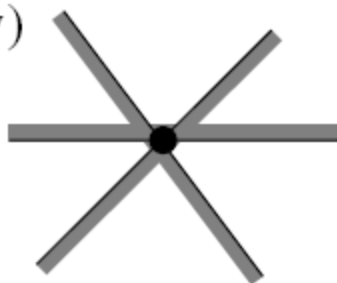
(ii)



(iii)



(iv)



(v)



اشتراک نیم صفحه‌ها

الگوریتم کلی با استفاده از روش تقسیم و غلبه

Algorithm INTERSECTHALFPLANES(H)

Input. A set H of n half-planes in the plane.

Output. The convex polygonal region $C := \bigcap_{h \in H} h$.

1. **if** $\text{card}(H) = 1$
2. **then** $C \leftarrow$ the unique half-plane $h \in H$
3. **else** Split H into sets H_1 and H_2 of size $\lceil n/2 \rceil$ and $\lfloor n/2 \rfloor$.
4. $C_1 \leftarrow \text{INTERSECTHALFPLANES}(H_1)$
5. $C_2 \leftarrow \text{INTERSECTHALFPLANES}(H_2)$
6. $C \leftarrow \text{INTERSECTCONVEXREGIONS}(C_1, C_2)$

اشتراک نیم صفحه ها

- فرض کنید دو چندضلعی C_1 و C_2 به دست آمده است که هر کدام حداکثر $n/2+1$ ضلع دارند. در فصل 2 الگوریتمی با زمان $O((n+k) \log n)$ برای به دست آوردن اشتراک C_1 و C_2 به دست آمد.
- k تعداد تقاطع های دو چندضلعی است. نقطه تقاطع یک راس از اشتراک C_1 و C_2 است، پس $k \leq n$.
- تعیین چندضلعی اشتراک C_1 و C_2 زمان $O(n \log n)$ لازم دارد.

اشتراک نیم صفحه‌ها

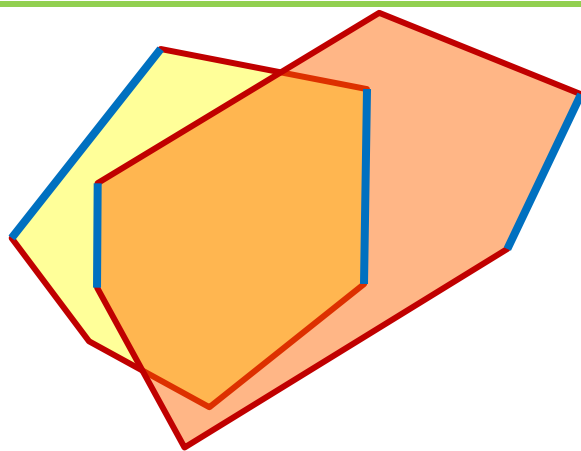
- زمان اجرای الگوریتم:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & \text{if } n = 1 \\ O(n \log n) + 2T(n/2), & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

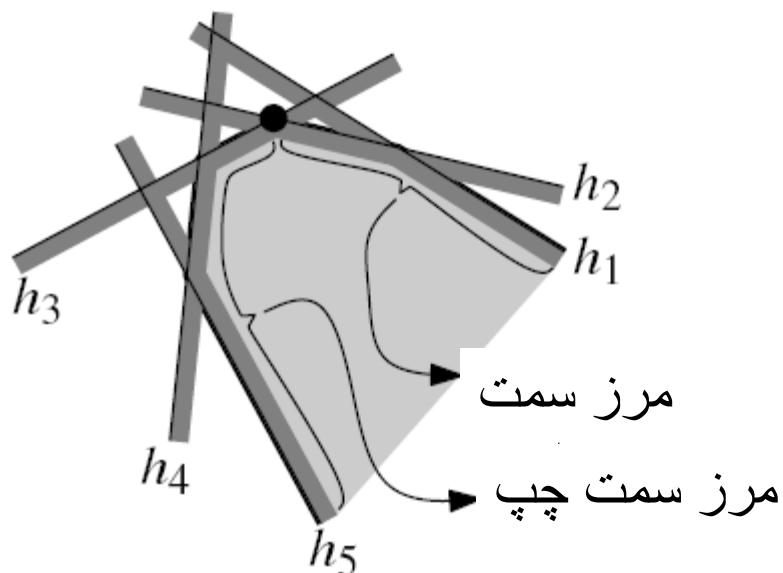
پس $T(n) = O(n \log^2 n)$.

- با توجه به این که چندضلعی‌ها در این مساله همیشه محدب هستند، آیا الگوریتم کاراتری برای حل مساله وجود دارد؟

- ایده: برای محاسبه اشتراک دو چندضلعی محدب از روش جاروب استفاده می‌کنیم. خط جاروب در هر لحظه حداکثر چهار ضلع را قطع می‌کند. دو تا از این ضلع‌ها، ناحیه مشترک دو چندضلعی را محدود می‌کنند.



یک الگوریتم سریع تر



$$\mathcal{L}_{\text{left}}(C) = h_3, h_4, h_5$$

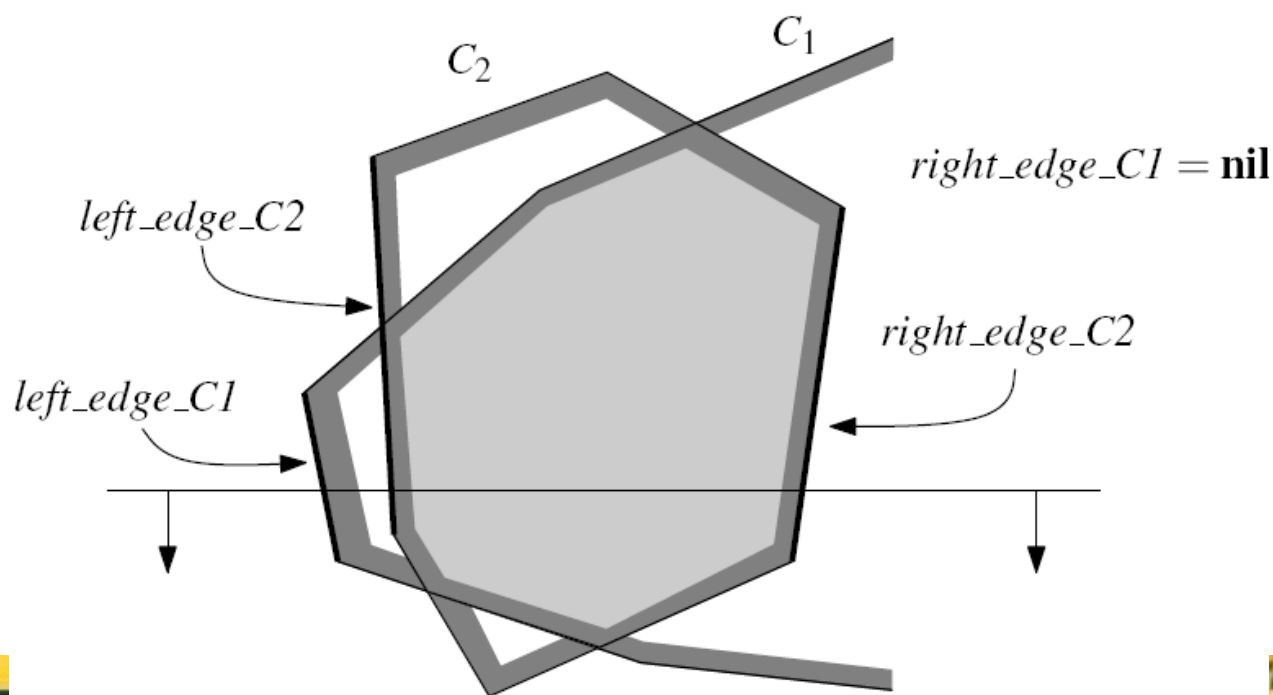
$$\mathcal{L}_{\text{right}}(C) = h_2, h_1$$

- در این الگوریتم مرز سمت چپ و راست چندضلعی C را جداگانه در لیست‌های $\mathcal{L}_{\text{left}}(C)$ و $\mathcal{L}_{\text{right}}(C)$ ذخیره می‌کنیم.
- ضلع‌های افقی بسته به این که داخل چندضلعی بالا یا پایین آنها باشد در مرز راست یا چپ قرار می‌گیرند. پس،

فرض می‌کنیم چندضلعی ضلع افقی ندارد.

یک الگوریتم سریع تر

- از روش جاروب (sweep) با یک خط افقی I که از بالا به پایین حرکت می‌کند، استفاده می‌کنیم. آنها را $right_edge_C2$ ، $left_edge_C1$ ، $right_edge_C1$ ، $left_edge_C2$ می‌نامیم



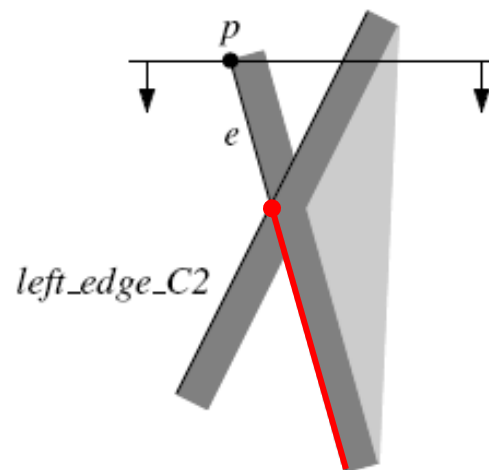
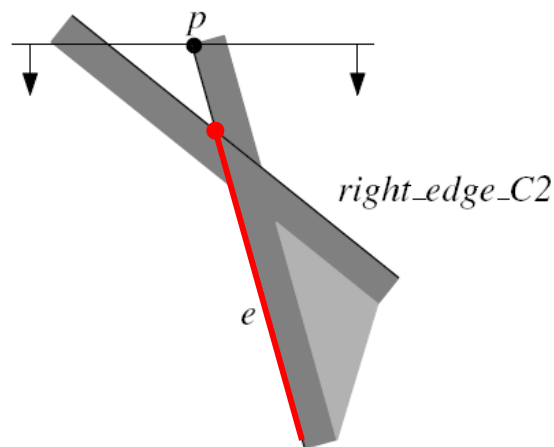
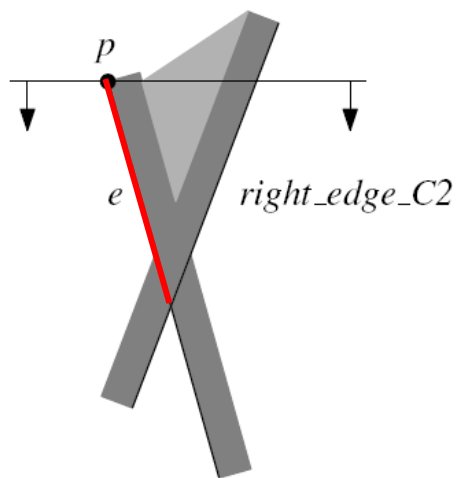
در این روش
جاروب نیازی
به درخت
وضعیت نیست.

یک الگوریتم سریع تر

- شروع حرکت خط $/$ از نقطه $y = \min\{y_1, y_2\}$ که در آن y_1 و y_2 به ترتیب بالاترین نقطه C_1 و C_2 هستند.
- نقطه‌های پیشامد راس‌های چندضلعی‌ها هستند. نقطه پیشامد بعدی بالاترین راس از یکی از ضلع‌های $left_edge_C2$, $left_edge_C1$, $right_edge_C1$, $right_edge_C2$ است و در زمان ثابت قابل تعیین است. پس صف پیشامد هم در این الگوریتم لازم نیست.
- در هر نقطه پیشامد یک ضلع جدید e خط $/$ را قطع می‌کند. با توجه به این که e روی مرز C_1 یا C_2 است و در مرز سمت راست یا چپ قرار دارد، مرز C ساخته می‌شود.

یک الگوریتم سریع تر

- فرض کنید e یال مرز چپ چندضلعی C_1 و p نقطه انتهای بالای e باشد. C یکی از ضلع‌های زیر را دارد:
 - ضلعی که p نقطه بالای آن است.
 - ضلعی که نقطه بالای آن $e \cap \text{right_edge_}C2$ است.
 - ضلعی که نقطه بالای آن $e \cap \text{left_edge_}C2$ است.



یک الگوریتم سریع تر

- فرض کنید e یال مرز چپ چندضلعی C_1 و p نقطه انتهای بالای e باشد. C ممکن است یکی از ضلع‌های زیر را داشته باشد:

– ضلعی که p نقطه بالای آن است.

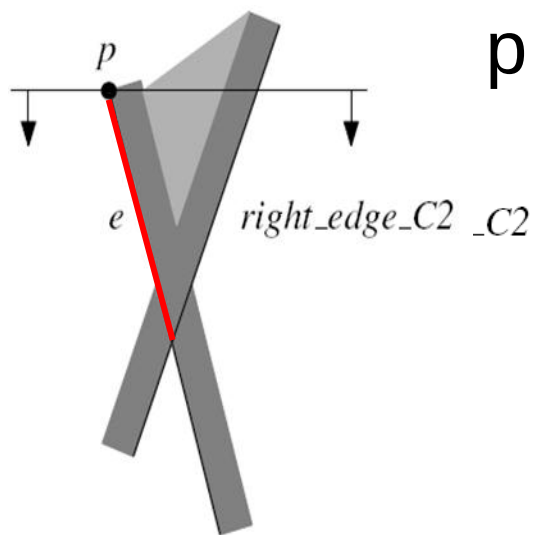
در این حالت p بین $left_edge_C2$ و $right_edge_C2$ قرار

دارد. پس e روی یک ضلع C قرار دارد و p

راستی از C است. نیم‌صفحه‌ای که e آن

را محدود می‌کند به $\mathcal{L}_{left}(C)$ اضافه

می‌کنیم.

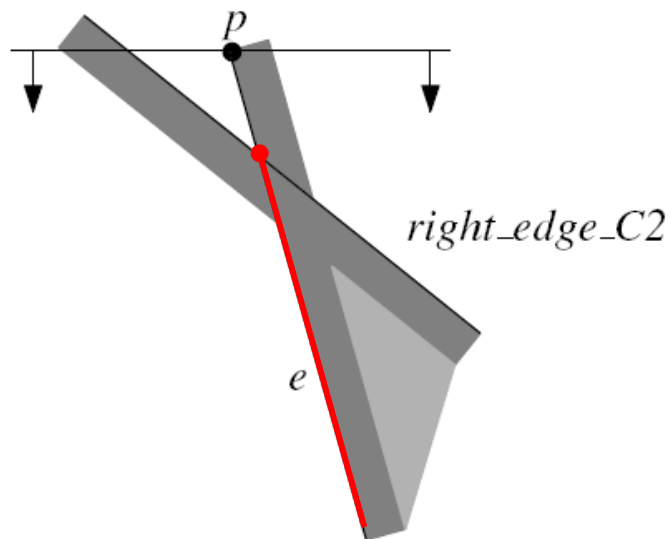


یک الگوریتم سریع تر

– ضلعی که نقطه بالای آن $e \cap \text{right_edge_C2}$ است.

در این حالت e با right_edge_C2 تقاطع دارد. پس نقطه تقاطع راسی از C است و هر دو ضلع روی مرز C هستند.

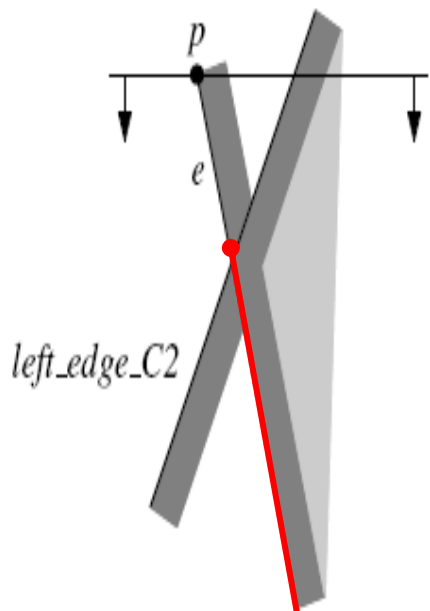
نیم صفحه‌ای که e مرز آن است را $\mathcal{L}_{\text{left}}(C)$ و نیم صفحه‌ای که right_edge_C2 مرز آن است را به $\mathcal{L}_{\text{right}}(C)$ اضافه می‌کنیم.



یک الگوریتم سریع تر

– ضلعی که نقطه بالای آن $e \cap \text{left_edge_C2}$ است.

اگر e با left_edge_C2 تقاطع داشته باشد، آنگاه نقطه تقاطع راسی از C است. اگر p سمت چپ قرار داشته باشد آنگاه قسمتی از e و در غیر این صورت قسمتی از left_edge_C2 ضلعی از C است. نیم صفحه مناسب را به $\mathcal{L}_{\text{left}}(C)$ اضافه می کنیم.



یک الگوریتم سریع تر

قضیه: اشتراک دو چندضلعی محدب در صفحه که هر کدام n راس دارند را می توان در زمان $O(n)$ به دست آورد.
ایده اثبات:

الگوریتم نیم صفحه هایی که ضلع های C را تعریف می کنند با ترتیب صحیح وارد لیست های $\mathcal{L}_{\text{left}}(C)$ و $\mathcal{L}_{\text{right}}(C)$ می کند.
برای هر ضلع، الگوریتمی که توصیف شد در زمان ثابت اجرا می شود.

نکته: هر الگوریتمی که برای مساله اشتراک n نیم صفحه طراحی شود زمان اجرای $\Omega(n \log n)$ دارد.

