

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۱

سوال ۱

تابع $f(x) = \sin(x) - x \cos(x+1)$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) با استفاده از مقدار معلوم $f(x)$ در نقطه 0 ، مقدار تقریبی $f(-\frac{1}{8})$ را با استفاده از تقریب خطی پیدا کنید. (نیازی به استفاده از ماشین حساب برای محاسبه اعشاری عبارت به دست آمده به وسیله روش تقریب خطی نیست، صرفاً عبارت به دست آمده توسط تقریب خطی را بنویسید).

(ب) نشان دهید قدر مطلق خطای محاسبه قسمت (الف) کمتر یا مساوی $\frac{1}{32}$ است.

(ج) نشان دهید $f(-\frac{1}{8})$ منفی است. (استفاده از ماشین حساب مجاز نیست. راهنمایی: در صورت نیاز می‌توانید از قسمت (ب) استفاده کنید و همچنین نامساوی $\cos(1) < \frac{3}{4}$ را با مقایسه زاویه 1 بر حسب رادیان، با زوایای آشنایی که کسینوس آنها را می‌دانید ثابت کنید).

(د) نشان دهید نقطه c در بازه $[-1, 0]$ هست به طوری که $f(c) = 0$.

(ه) نشان دهید نقطه d در بازه $[-1, 0]$ هست به طوری که $f'(d) = 0$.

سوال ۲

می‌خواهیم یک لیوان استوانه‌ای شکل از مقوا بسازیم که به اندازه حجم معینی ظرفیت داشته باشد و مقدار مقوای به کار رفته در آن کمترین مقدار باشد. نسبت ارتفاع لیوان به قطر کف آن چقدر باید باشد؟
توضیح: در این سوال لیوان، مثل یک لیوان معمولی سر باز است.

سوال ۳

تابع $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست آورید.

(ب) به ازای چه x هایی $f(x)$ ماکسیمم موضعی می‌شود؟ (استفاده از ماشین حساب یا نرم افزارهای محاسباتی به جهت محاسبه اعشاری یک عبارت برای تعیین مثبت یا منفی بودن آن در آزمون مشتق دوم مجاز است).

سوال ۴

(الف) با استفاده از بسط مکلاورن انتگرال $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$ را به صورت یک سری توانی بیان کنید. (شکل کلی ضرایب آن را بنویسید و حداقل چهار جمله اول آن را به دست آورید).

(ب) مقدار تقریبی این انتگرال برای $x = 1$ را تا 3 رقم اعشار حساب کنید.

به نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۱

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- در قسمت ب) و در فرمول خطا، یعنی $E = \frac{f''(c)}{2}x^2$ ، برای یک c مناسب بین 0 تا x ، دانشجویان c را صفر یا x قرار می دهند و کران بالای مربوط به f'' را محاسبه نمی کنند.
- در قسمت ج) و برای اثبات $0 < f\left(-\frac{1}{8}\right)$ ، دانشجویان از نتیجه حاصل از محاسبه خطا، یعنی نامساوی $\left|f\left(-\frac{1}{8}\right) - L\left(-\frac{1}{8}\right)\right| < \frac{1}{32}$ استفاده نمی کنند و به طور مستقیم از ماشین حساب برای محاسبه $L\left(-\frac{1}{8}\right)$ اقدام می کنند.
- اشتباه رایج دیگر استفاده از ماشین حساب برای نشان دادن $\cos 1 < \frac{3}{4}$ است.
- در قسمت د) از نتیجه قسمت ج) استفاده نمی کنند و فقط $0 > f(-1)$ و $f(0) = 0$ را در نظر می گیرند و به خطا می روند ...

پاسخ سوال ۱ آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی یک

راه حل قسمت الف)

می دانیم تقریب خطی $f(x)$ حول نقطه $x = a$ ، برابر است با

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

پس برای $f(x) = \sin x - x \cos(x + 1)$ ، حول نقطه $x = 0$ ، تقریب خطی می شود

$$L(x) = f(0) + f'(0)x,$$

که با توجه به محاسبات زیر

$$f(0) = \sin 0 - 0 \cdot \cos 1 = 0,$$

$$f'(x) = \cos x - \cos(x + 1) + x \sin(x + 1),$$

$$\implies f'(0) = \cos 0 - \cos 1 + 0 \cdot \sin 1 = 1 - \cos 1,$$

داریم

$$L(x) = 0 + (1 - \cos 1)x = (1 - \cos 1)x.$$

پس مقدار تقریبی $f\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$ می شود

$$f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \approx L\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\cos 1 - 1}{\lambda}.$$

راه حل قسمت ب)

اگر $L(x)$ تقریب خطی $f(x)$ حول صفر و $E = f(x) - L(x)$ خطای تقریب باشد، می دانیم

$$E = \frac{f''(c)}{2} x^2, \quad \text{برای یک } c \text{ مناسب بین } 0 \text{ تا } x$$

پس می توان تخمین زیر را داشت

$$|E| \leq \frac{M}{2} x^2,$$

که در آن M سوپریم $|f''|$ روی بازه $[0, x]$ ، برای $x > 0$ ، می باشد. (اگر $x < 0$ باشد، سوپریم روی بازه $[x, 0]$ خواهد بود.)

برای $f(x) = \sin x - x \cos(x+1)$ داریم

$$f''(x) = -\sin x + 2 \sin(x+1) + x \cos(x+1).$$

پس برای خطای تقریب قسمت (الف) داریم

$$|E| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{M}{128},$$

که در آن M سوپریم $|f''|$ روی بازه $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right]$ است.

از طرفی به کمک نامساوی مثلث و با توجه به این که $0 \leq x \leq \frac{1}{\lambda}$ ، داریم

$$|f''(x)| = |-\sin x + 2 \sin(x+1) + x \cos(x+1)|,$$

$$\leq |-\sin x| + |2 \sin(x+1)| + |x \cos(x+1)| \leq 1 + 2 + \frac{1}{\lambda} = \frac{25}{8} < 4.$$

در نتیجه $4 > M \leq \frac{25}{8}$ ، و

$$|E| \leq \frac{M}{128} \leq \frac{25}{128} < \frac{4}{128} = \frac{1}{32}.$$

راه حل قسمت ج)

طبق قسمت (الف) و (ب) می دانیم

$$\frac{\cos 1 - 1}{\lambda} - E \leq f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{\cos 1 - 1}{\lambda} + E,$$

که در آن $|E| \leq \frac{1}{32}$ می باشد.

از طرفی چون تابع کسینوس روی $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ نزولی است، می توان نوشت

$$0 < \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2} \implies 0 < \cos 1 < \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4},$$

یا خلاصتا

$$\cos 1 < \frac{3}{4}.$$

حال به کمک

$$f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{\cos 1 - 1}{\lambda} + E,$$

و با توجه به تخمین اخیر برای $\cos 1$ ، یعنی $\cos 1 < \frac{3}{4}$ ، و این که $E \leq |E| \leq \frac{1}{32}$ داریم

$$f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{\cos 1 - 1}{\lambda} + E < \frac{\frac{3}{4} - 1}{\lambda} + \frac{1}{32} = -\frac{1}{32} + \frac{1}{32} = 0,$$

یا

$$f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) < 0.$$

راه حل قسمت د)

با توجه به قسمت (ج) می دانیم

$$f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) < 0.$$

از طرفی

$$f(-1) = \sin(-1) - (-1)\cos(-1+1) = -\sin 1 + 1 = 1 - \sin 1 > 0.$$

حال چون $f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) < 0$ و $f(-1) > 0$ ، و چون f تابعی پیوسته است، از قضیه مقدار بینی وجود حداقل یک $c \in \left(-1, -\frac{1}{\lambda}\right) \subset (-1, 0)$ به طوری که $f(c) = 0$ تضمین شده است.

راه حل قسمت ه)

روش اول:

با توجه به تخمین مربوط به $\cos 1$ در قسمت (ج)، یعنی $\frac{3}{4} < \cos 1$ ، و محاسباتی ساده، داریم

$$f'(x) = x \sin(x+1) + \cos x - \cos(x+1),$$

$$f'(0) = 0 + 1 - \cos 1 > 1 - \frac{3}{4} > \frac{1}{4} > 0,$$

$$f'(-1) = -1 \sin 0 + \cos(-1) - \cos 0 = \cos 1 - 1 < \frac{3}{4} - 1 < -\frac{1}{4} < 0.$$

حال چون $f'(0) > 0$ و $f'(-1) < 0$ ، و چون f' تابعی پیوسته است، از قضیه مقدار بینی وجود حداقل یک $d \in (-1, 0)$ به طوری که $f'(d) = 0$ تضمین شده است.

روش دوم:

از قسمت (د) می دانیم $f(c) = 0$ برای یک $c \in (-1, 0)$ برقرار است. از طرفی چون که $f(0) = 0$ می باشد، پس طبق قضیه رول وجود حداقل یک $d \in (c, 0) \subset (-1, 0)$ به طوری که $f'(d) = 0$ تضمین شده است.

به نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۲

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- نسبت ارتفاع به قطر خواسته شده است و به تفاوت شعاع و قطر باید دقت شود.
- در این سوال، چون دو متغیر داریم، یعنی ارتفاع و قطر، پس نیاز داریم از هر دو رابطه حجم و مساحت جانبی، استفاده کنیم.
- باید توجه داشت که مشتق حجم نسبت به قطر، به دلیل ثابت بودن آن، صفر است. همچنین مشتق مساحت را برابر صفر می گذاریم تا کاندید نقطه مینیمم را بیابیم.

پاسخ سوال ۲ آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی یک

قرار می دهیم

$$D = \text{قطر قاعده}$$

$$h = \text{ارتفاع استوانه}$$

$$V = \text{حجم استوانه} = \pi h \frac{D^2}{4}$$

$$S = \text{مساحت کف استوانه} = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$S = \text{مساحت جانبی استوانه} = \pi Dh$$

طبق مفروضات مسئله، برای حجم ثابت استوانه، یعنی

$$V = \text{حجم استوانه} = \pi h \frac{D^2}{4} = \text{ثابت}$$

می خواهیم مقدار

$$S = \text{مساحت کل بدنه ی استوانه} = \pi \frac{D^2}{4} + \pi Dh$$

را کمینه کنیم. قبل از بهینه سازی مساحت کل بدنه ی استوانه، توجه کنید که

$$V = \pi h \frac{D^2}{4} \implies h = \frac{4V}{\pi D^2} \implies S = \text{مساحت کل بدنه ی استوانه} = \pi \frac{D^2}{4} + \frac{4V}{D}$$

حال مساحت کل بدنه‌ی استوانه را به کمک مشتق گرفتن کمینه می‌کنیم؛ یعنی مشتق آن نسبت به متغیر قطر را برابر صفر قرار داده و قطر را می‌یابیم. این مقدار به دست آمده برای قطر، باعث کمینه شدن مساحت کل بدنه‌ی استوانه می‌شود.

$$S' = \frac{dS}{dD} = \pi \frac{D}{2} - \frac{4V}{D^2} = 0 \implies D^3 = \frac{4V}{\pi}.$$

حال با توجه به رابطه‌های $h = \frac{4V}{\pi D^2}$ و رابطه‌ی اخیر فوق، یعنی $D^3 = \frac{4V}{\pi}$ ، نسبت ارتفاع به قطر برابر می‌شود با

$$\frac{h}{D} = \frac{4V}{\pi D^3} = \frac{4V}{\pi \cdot \frac{4V}{\pi}} = 1.$$

به نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۳

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- برای قسمت الف) بهترین راه یافتن مشتق، استفاده از قاعده زنجیره‌ای و قضیه اساسی حسابان است تا بتوان ریشه‌های مشتق مرتبه اول (یعنی نقاط بحرانی) را یافت و در قسمت ب) استفاده کرد.
- در قسمت ب) تنها برای محاسبات مربوط به تعیین مثبت یا منفی بودن مشتق دوم در نقاط بحرانی، مجاز به استفاده از ماشین حساب بودید و نه یافتن ریشه‌های مشتق!

پاسخ سوال ۳ آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی یک

راه حل قسمت الف) از قاعده زنجیره‌ای و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x)).$$

پس محاسبه‌ای ساده برای $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ نتیجه می‌دهد

$$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2},$$

و متعاقبا

$$f''(x) = -16xe^{-4x^2} + 2xe^{-x^2}.$$

راه حل قسمت ب) برای یافتن ماکسیمم کفایت مشتق اول صفر و مشتق دوم منفی باشد. ابتدا نقاطی که در آن مشتق اول صفر است را می‌یابیم.

$$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = 0 \implies 2e^{-4x^2} = e^{-x^2}$$

$$\implies e^{3x^2} = 2 \implies x = \pm \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}.$$

حال چون

$$f''\left(+\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}\right) = -16\sqrt{\frac{\ln 2}{3}} 2^{-\frac{4}{3}} + 2\sqrt{\frac{\ln 2}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} < 0,$$

و

$$f''\left(-\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}\right) = +16\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}^{\frac{1}{3}} > 0,$$

است، پس طبق آزمون مشتق مرتبه دوم،

$$x = +\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$

نقطهٔ ماکسیمم موضعی است.

به نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در سوال ۴

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- در قسمت ب) دانشجویان $n = 3$ را درست محاسبه می‌کنند، ولی ۴ جمله اول را با هم جمع می‌کنند، به جای ۳ جمله اول. در صورت درست بودن بقیه قسمت‌ها، ۷ نمره کم شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان $f(1)$ را نوشته‌اند که بعد بگویند سری متناوب است و بنابراین خطا را با استناد به خطای سری‌های متناوب، در نظر گرفته و به ادامه مطلب بپردازند. در این حالت، در صورت درستی بقیه قسمت‌ها، ۵ نمره کم شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان جمله $(n+1)$ -ام سری را کمتر از 0.01 در نظر گرفته‌اند که نادرست است. باید کمتر از 0.0005 در نظر می‌گرفتند.
- در قسمت ب) دانشجویان بدون هیچ توضیحی ۴ جمله یا ۳ جمله اول را با 0.0005 یا 0.01 مقایسه کرده‌اند و نتیجه گرفته‌اند باید چند جمله اول را با هم جمع کنند. حتی در صورت نتیجه‌گیری درست، نمره‌ای به این پاسخ‌های بی‌توضیح داده نشده است، مگر در حالتی که توجه کنند که مقدار جمله $(n+1)$ -ام باید از 0.0005 کمتر باشد که در صورت قید این مطلب ۵ نمره و در صورت درست نوشتن جمله $(n+1)$ -ام در مقایسه، $5 + 8$ نمره به ایشان داده شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان جمله $(n+1)$ -ام سری را اشتباه نوشته‌اند که ۴ نمره برای این اشتباه و بالطبع ۱۲ نمره دیگر برای ادامه راه حل کم شده است.
- در قسمت الف) تعداد زیادی از دانشجویان سعی کرده بودند سری تیلور انتگرال داده شده را مستقیماً بنویسند که البته موفق هم نبوده‌اند، ولی به خاطر تلاش آنها، ۱ یا ۲ نمره به آن‌ها داده شده است.

پاسخ سوال ۴ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف)

ابتدا بسط مکلاورن $\sin x$ را می‌نویسیم، یعنی

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

حال قرار می‌دهیم $x = t^2$ و داریم

$$\sin(t^2) = t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots$$

با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوق، روی بازه $[0, x]$ ، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sin(t^2) dt \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \frac{x^{11}}{11 \times 5!} - \frac{x^{15}}{15 \times 7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3) \times (2n+1)!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3) \times (2n+1)!} \end{aligned}$$

راه حل قسمت ب)

مقدار انتگرال قسمت قبل به ازای $x = 1$ ، یعنی $f(1)$ ، می‌شود

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 \sin(t^2) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{11 \times 5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(4n+3) \times (2n+1)!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3) \times (2n+1)!} \end{aligned}$$

برای این که جواب فوق که یک سری متناوب است را تا ۳ رقم اعشار حساب کنیم، کفایت تا جمله‌ای پیش برویم که خطای آن کمتر از $\frac{5}{100000}$ باشد. می‌دانیم حداکثر خطا در یک سری متناوب که تا جمله n -ام نوشته شده است، از قدر مطلق اولین جمله استفاده نشده، یعنی جمله $(n+1)$ -ام، کمتر است. پس

می‌نویسیم

$$\left| \frac{(-1)^n}{(4n+3) \times (2n+1)!} \right| \leq \frac{5}{100000}$$

که کوچک‌ترین عدد صحیح برای برقراری این عبارت $n = 3$ می‌باشد. یعنی نامساوی فوق برای هر $n \geq 3$ برقرار است. پس مقدار تقریبی را برای $x = 1$ ، تا ۳ رقم اعشار، با جمع جملات مربوط به اندیس‌های ۰، ۱، ۲، به صورت زیر داریم.

$$\int_0^1 \sin(t^2) dt \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{11 \times 5!} = \frac{2867}{9240}$$

تذکر: در راه حل، از قرارداد کتاب آدامز در معنای دقت تا ۳ رقم اعشار استفاده کردیم: دقیق بودن تا ۳ رقم اعشار یعنی تفاضل دو مقدار کمتر از 5×10^{-5} شود. دقت شود که اگر تفاضل دو عدد کمتر از 1×10^{-5} باشد

لزوما نتیجه نمی دهد که دو عدد با هم تا ۳ رقم اعشار برابر هستند، مثلا دو عدد

$$a = \pi = ۳,۱۴۱۵۹۲\dots$$

و

$$b = ۳,۱۴۰۹$$

را در نظر بگیرید. به موضوع $|a - b| < ۰,۰۰۱$ می باشد، ولی a و b تا ۳ رقم اعشار برابر نیستند.