به نام خدا

مروری بر روابط مدارهای الکتریکی

نوشته:

مهندس اسماعیل احمدی

با تشکر از دوست خوبم صادق اسپرجانی که در طراحی و ترسیم اشکال مربوطه با اینجانب همکاری نموده اند.

فصل اول: مدارهای الکتریکی جریان مستقیم

۱-تحلیل مدار به روش اصل جمع آثار: در این روش ما اثر تک تک منابع را بر روی اجزای مدار (مقاومتها) بررسی می کنیم و در نهایت برای بدست آوردن ولتاژ یا جریان یک شاخه تمام آثاری را که ازمنابع مدار بدست آورده ایم با در نظر گرفتن قطبیت و جهت جریانها با یکدیگر جمع می کنیم.

منبع ولتاژ : دو سر آن اتصال کوتاه می شود.

بی اثر کردن منابع:

منبع جریان : دو سر آن مدار باز می شود.

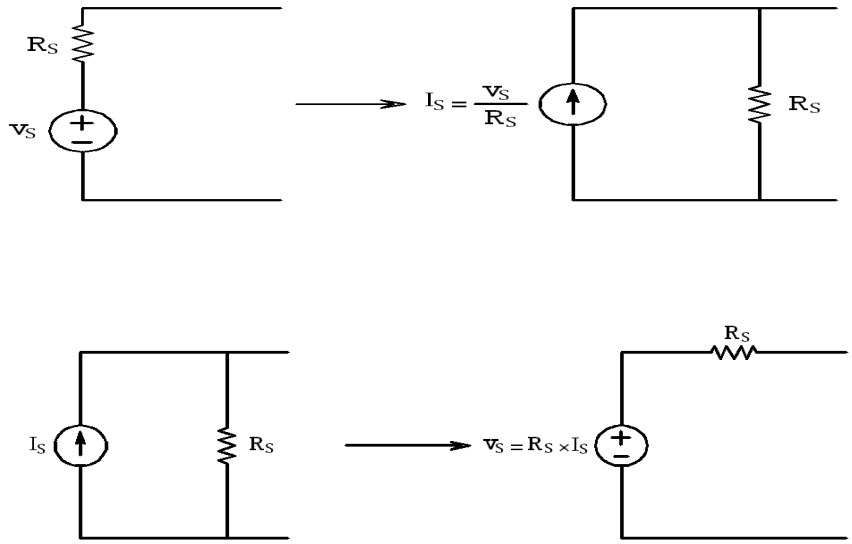
۲-تحلیل مدار به روش پتانسیل گره: در این روش ابتدا مدار را تا حد امکان ساده می کنیم . پس از آن یکی از گره های مدار را که بهتر است پر انشعاب ترین گره باشد به عنوان گره مبنا انتخاب می کنیم . در این مرحله به هر یک از گره های دیگر یک پتانسیل نسبت می دهیم، مثل V_1 و V_2 و... و V_n . برای هر یک از گره ها معادله ی KCL را می نویسیم.در نهایت با حل یک دستگاه معادلاتی چند مجهولی پتانسیل گره ها بدست می آید.

۳-تحلیل مدار به روش جریان حلقه: در این روش ابتدا مدار را تا حد امکان ساده می کنیم. برای هر حلقه یک جریان (مثلا در جهت ساعتگرد) منظور می کنیم. با حرکت در جهت جریان هرحلقه معادله ی KVL را برای هر کدام از حلقه ها می نویسیم . در نهایت با حل یک دستگاه معادلات چند مجهولی جریان حلقه های مدار بدست می آیند.

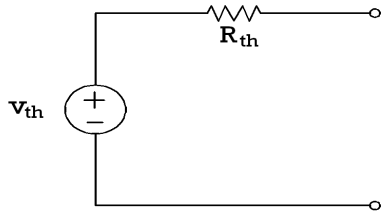
تذکر

در روش پتانسیل گره به تعداد گره های مجهول معادله ی KCL و در روش جریان حلقه به تعدادحلقه های مدار معادله ی KVL داریم.

تبدیل منابع ولتاژ و جریان به یکدیگر:



مدار معادل تونن: ابتدا عنصری را که به دو سر a , b متصل است ،از مدار جدا می کنیم.در این مرحله کلیه منابع مدار را بی اثر می کنیم (منابع ولتاژ اتصال کوتاه و منابع جریان مدار باز می شوند) و مقاومت معادل مدار را از دید این دو پایانه (a,b) بدست می آوریم (مقدار R_{th}). در نهایت اختلاف پتانسیل دو پایانه ی a,b (V_{oc} یا V_{th}) را به یکی از روشهای قبلی بدست می آوریم.

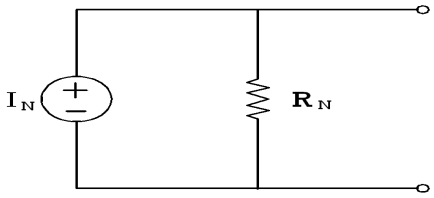


مدار معادل تونن

مدار معادل نورتن: همانند روش تونن بار را از دو پایانه ی a , b جدا می کنیم . مقاومت R_N همانند R_{th} بدست می آید. (منابع را بی اثر کرده و مقاومت معادل از دید دو پایانه a,b بدست می آید).

$$R_{th} = R_N$$

در این مرحله با اتصال کوتاه کردن دو پایانه a , b جریان عبوری از اتصال کوتاه (I_{SC} یا I_N) را بدست می آوریم.



مدار معادل نورتن

انتقال ماکزیمم توان به بار (تطابق توان):

شرط توان ماکزیمم : $R_L = R_{th} = R_N$

محاسبه ی توان ماکزیمم (P_{max}):

چنانچه مدار معادل تونن را داشته باشیم: $P_{max} = \frac{V_{th}^{۲}}{۴ R_{th}}$

تذکر

اگر مدار معادل نورتن را داشته باشیم، می توان ابتدا آن را به مدار معادل تونن تبدیل نمود (با تبدیل منبع) سپس از رابطه ی فوق استفاده نمود.

مدارات جریان مستیم شامل سلف و خازن

در مدارات جریان مستقیم و در حالت پایدار(پس از گذشت ۵ ثابت زمانی) سلف به صورت اتصال کوتاه و خازن به صورت مدار باز در می آید.

فصل دوم : بردار

اعمال روی بردارها:

برآیند(جمع) بردارها

روش هندسی: دو بردار $|\vec{R}| = \sqrt{F_۱^{۲} + F_۲^{۲} + ۲F_۱ F_۲ \cos\alpha}$

روش تحلیلی: بیش از دو بردار

جمع جبری مولفه های افقی $\sum F_x$

جمع جبری مولفه های عمودی $\sum F_y$

$|\vec{R}| = \sqrt{(\sum F_x)^{۲} + (\sum F_y)^{۲}}$

تفاضل دو بردار: $F_1 - F_2 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2 \cos\alpha}$

ضرب داخلی (نقطه ای) دو بردار : $F_1 . F_2 = |F_1|\,|F_2| \cos\alpha$

زاویه جریان - زاویه ولتاژ $= \theta_V - \theta_i = \emptyset$ زاویه اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان مدار

۱) اگر $\emptyset$ مثبت باشد ($\theta_V > \theta_i$) ، مدار حالت سلفی دارد- مدار حالت پس فاز.

۲) اگر $\emptyset$ منفی باشد ($\theta_V < \theta_i$) ، مدار حالت خازنی دارد- مدار حالت پیش فاز.

۳) اگر $\emptyset$ برابر صفر باشد ($\theta_V = \theta_i$) ، مدار حالت اهمی خالص دارد- ولتاژ و جریان همفازند.

روابط توان:

توان موثر (اکتیو) $P_e = V_e I_e \cos\emptyset$

توان غیر موثر (راکتیو) $P_d = \pm V_e I_e \sin\emptyset$ مثبت برای حالت سلفی و منفی برای حالت خازنی

توان ظاهری $P_s = V_e I_e$

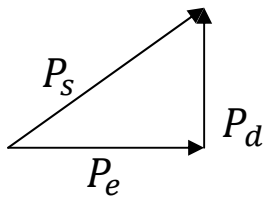
یا اینکه:

$$P_e = P_S \cos\emptyset$$
$$P_d = \pm P_S \sin\emptyset$$
$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2}$$

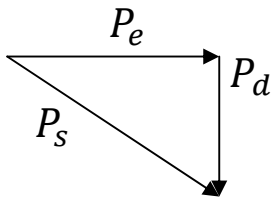
تذکر

۱) توان اکتیو مربوط به توان مصرفی در مقاومتهای اهمی است که همواره مثبت است.

۲) توان راکتیو، توان مربوط به عناصر سلف و خازن مدار می باشد.



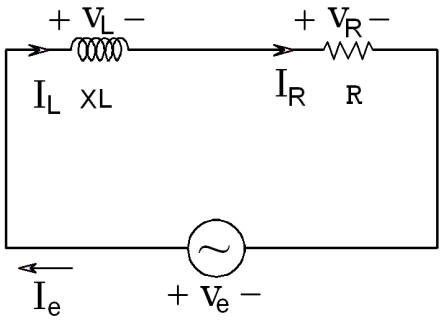
مثلث توان سلفی

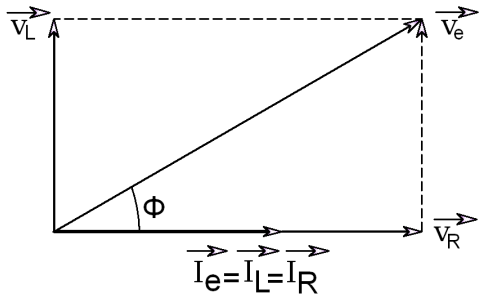


مثلث توان خازنی

فصل سوم: مدارات R-L جریان متناوب

مدار R-L سری:



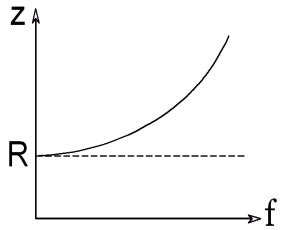


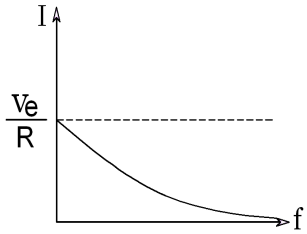
$$\begin{cases} \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_L} \\ \overrightarrow{I_e} = \overrightarrow{I_R} = \overrightarrow{I_L} \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{R^۲ + XL^۲}$$

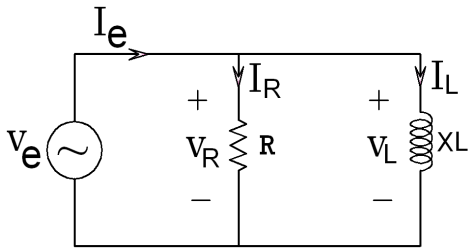
$\sin \emptyset = \frac{XL}{Z}$ $\cos \emptyset = \frac{R}{Z}$ ضریب کیفیت $Q = \tan \emptyset = \frac{XL}{R}$

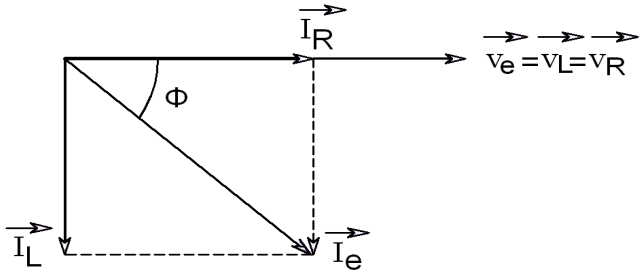
زاویه ولتاژ مقاومت اهمی $\theta V_R = \theta i$ زاویه ولتاژ مقاومت سلفی $\theta V_L = \theta i + ۹۰$





مدار R-L موازی:





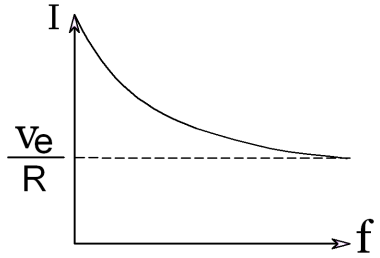
$$\begin{cases} \overrightarrow{I_e} = \overrightarrow{I_R} + \overrightarrow{I_L} \\ \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_R} = \overrightarrow{V_L} \end{cases}$$

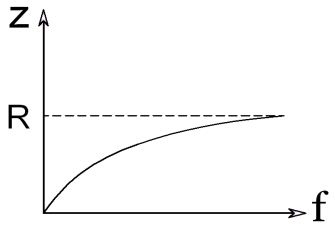
$$Z = \frac{R \times XL}{\sqrt{R^۲ + XL^۲}}$$

$\sin \emptyset = \frac{Z}{XL}$ $\cos \emptyset = \frac{Z}{R}$ ضریب کیفیت $Q = \tan \emptyset = \frac{R}{XL}$

$\theta i_L = \theta V - ۹۰$ زاویه جریان شاخه مقاومت سلفی

$\theta i_R = \theta V$ زاویه جریان شاخه مقاومت اهمی



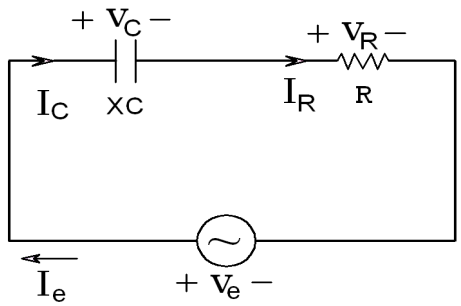


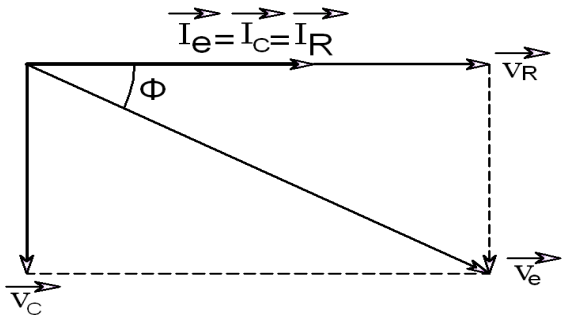
تذکر

در مدارات R-L چه سری و چه موازی Ø همواره مثبت است.

فصل چهارم: مدارات R-C جریان متناوب

مدار R-C سری:





$$Z = \sqrt{R^۲ + XC^۲}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_C} \\ \overrightarrow{I_e} = \overrightarrow{I_R} = \overrightarrow{I_C} \end{cases}$$

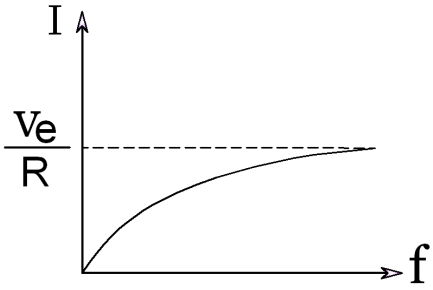
ضریب کیفیت $Q = \tan \emptyset = \frac{XC}{R}$

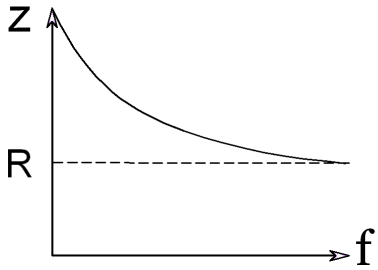
$\cos \emptyset = \frac{R}{Z}$

$\sin \emptyset = \frac{XC}{Z}$

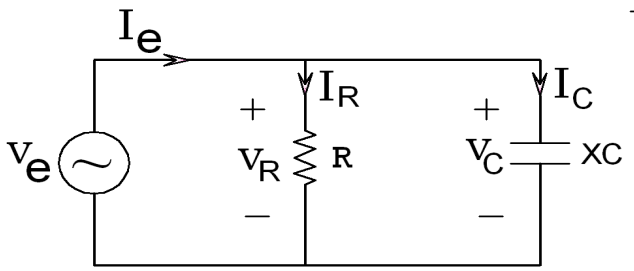
$\theta V_C = \theta i - ۹۰$ زاویه ولتاژ مقاومت خازنی

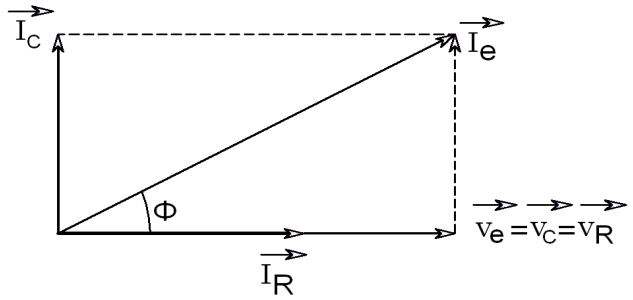
$\theta V_R = \theta i$ زاویه ولتاژ مقاومت اهمی





مدار R-C موازی:



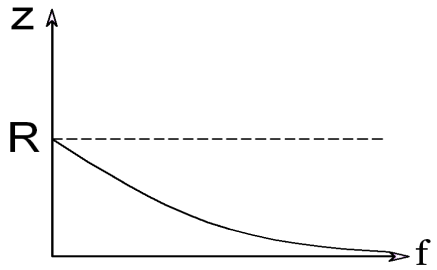


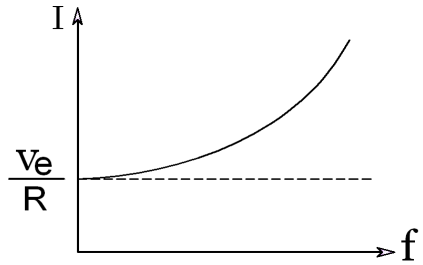
$$\begin{cases} \overrightarrow{I_e} = \overrightarrow{I_R} + \overrightarrow{I_C} \\ \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_R} = \overrightarrow{V_C} \end{cases}$$

$$Z = \frac{R \times XC}{\sqrt{R^{۲} + XC^{۲}}}$$

$\sin \emptyset = \frac{Z}{XC}$ $\cos \emptyset = \frac{Z}{R}$ ضریب کیفیت Q $= \tan \emptyset = \frac{R}{XC}$

زاویه جریان شاخه مقاومت اهمی $\theta i_R = \theta V$ زاویه جریان شاخه مقاومت خازنی $\theta i_C = \theta V + ۹۰$



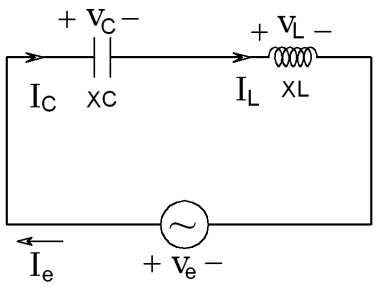


تذکر

در مدارات R-C چه سری و چه موازی Ø همواره منفی است.

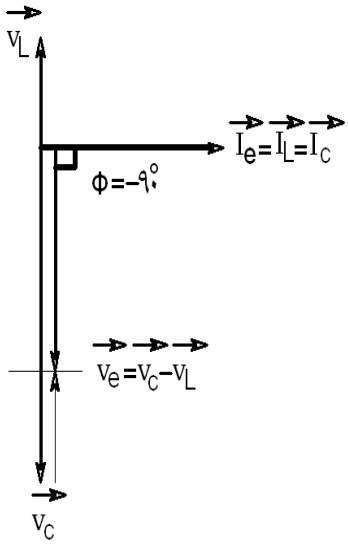
فصل پنجم: مدارات L-C جریان متناوب

مدار L-C سری:

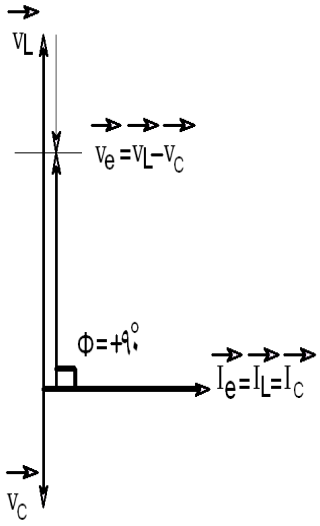


$$\begin{cases} \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_L} + \overrightarrow{V_C} \\ \overrightarrow{I_e} = \overrightarrow{I_L} = \overrightarrow{I_C} \end{cases}$$

اگر مقدار XC > XL باشد،در نتیجه VC >VL



اگر مقدار XL > XC باشد،در نتیجه VL >VC



$$Z = |\underbrace{XL}_{\text{بزرگتر}} - \underbrace{XC}_{\text{کوچکتر}}|$$

تذکر

چنانچه در حل مدارات L-C سری به مقادیر XL و XC توجه شود ، هر کدام از این دو مقدار بزرگتر بودند ، چون ولتاژ مربوط به آن عنصر بزرگتر است، مدار داری همان خاصیت است. در حل اینگونه مدارات $\emptyset = \pm ۹۰$ است.

$\emptyset = \pm ۹۰$ → $\cos\varphi = ۰$ همواره $P_e = ۰$

$\emptyset = \pm ۹۰$ → $\sin\varphi = \pm ۱$ $|P_d| = |P_s|$

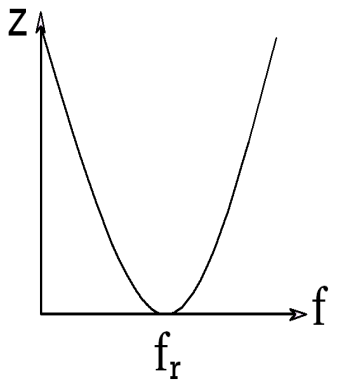
تشدید (رزونانس) : مقدار فرکانس رزونانس از رابطه زیر بدست می آید:

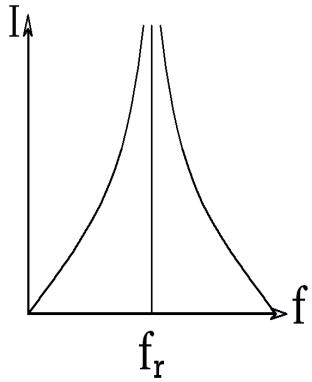
$$F_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}$$

در حالت رزونانس XL=XC و در نتیجه $Z = XL - XC = ۰$ و مدار L-C سری به حالت اتصال کوتاه در می آید.

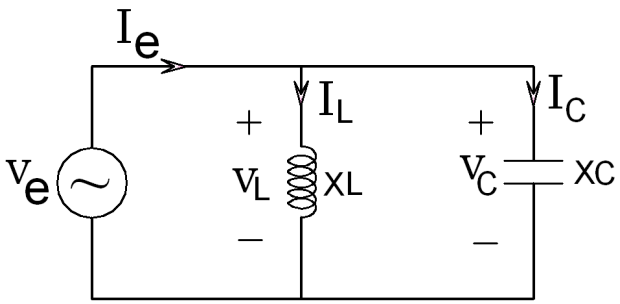
تذکر

در هر مدار که هر دو عنصر سلف و خازن را با هم داشته باشیم بحث فرکانس رزونانس به میان می آید.



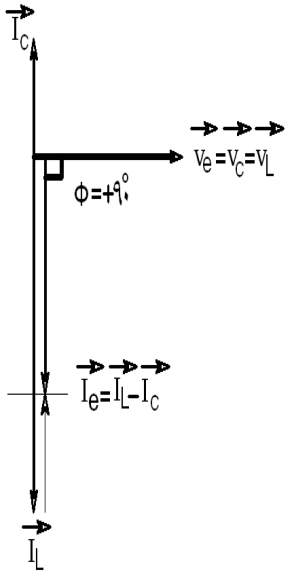


مدار L-C موازی:

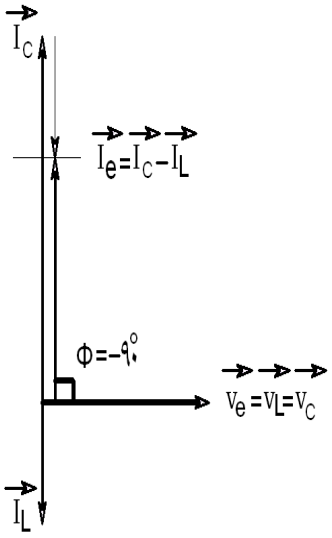


$$\begin{cases} \vec{I_e} = \vec{I_L} + \vec{I_C} \\ \vec{V_e} = \vec{V_L} = \vec{V_C} \end{cases}$$

اگر مقدار XC > XL باشد،در نتیجه IL > IC



اگر مقدار XL > XC باشد،در نتیجه IC > IL



$$\frac{1}{Z} = \left|\frac{1}{XL} - \frac{1}{XC}\right|$$

کوچکتر ← XL XC → بزرگتر

تذکر

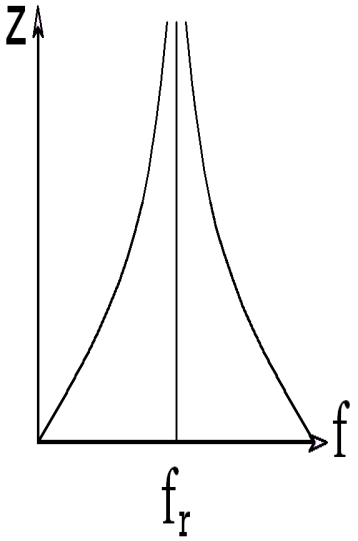
چنانچه در حل مدارات L-C موازی به مقادیر XL و XC توجه شود، هر کدام از این دو مقدار کوچکتر بودند، چون جریان مربوط به آن عنصر بزرگتر است، مدار داری همان خاصیت است.در حل اینگونه مدارات $\emptyset = \pm ۹۰$ است.

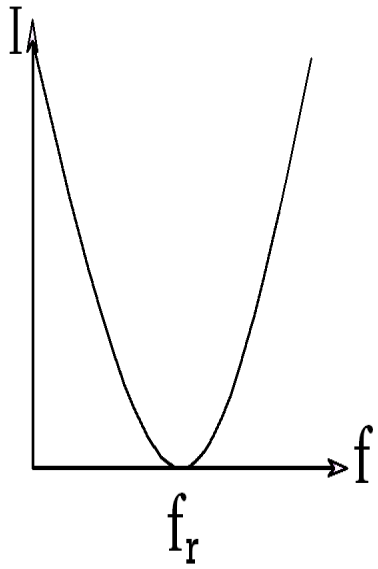
$\emptyset = \pm ۹۰$

- $\cos\varphi = ۰$ همواره $P_e = ۰$
- $\sin\varphi = \pm ۱$ $|P_d| = |P_s|$

تشدید (رزونانس):

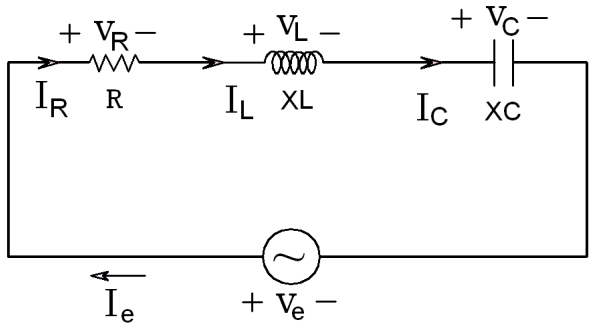
در حالت رزونانس XL = XC و در نتیجه $\frac{۱}{Z} = \frac{۱}{XL} - \frac{۱}{XC} = ۰$ و نتیجه اینکه حتما $Z = \infty$ است . در نتیجه مدار L-C موازی به حالت مدار باز درمی آید.





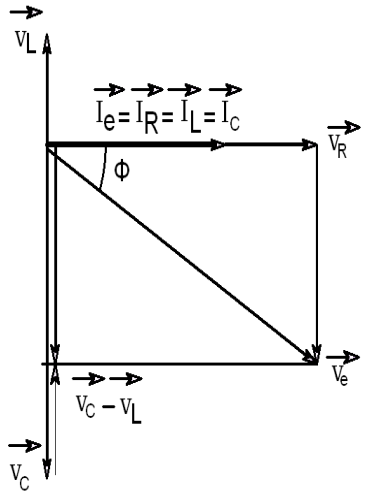
فصل ششم: مدارات R-L-C جریان متناوب

مدار R-L-C سری:



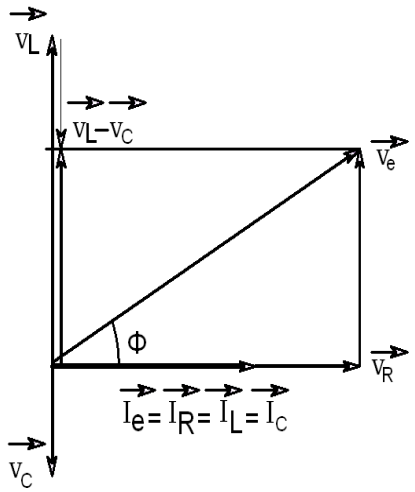
$$\begin{cases} \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_L} + \overrightarrow{V_C} \\ \overrightarrow{I_e} = \overrightarrow{I_R} = \overrightarrow{I_L} = \overrightarrow{I_C} \end{cases}$$

اگر مقدار XC > XL باشد،در نتیجه VC >VL



علامت زاویه Ø منفی است.

اگر مقدار XL > XC باشد،در نتیجه VL >VC



علامت زاویه Ø مثبت است.

تذکر

چنانچه در حل مدارات R-L-C سری به مقادیر XL و XC توجه شود ، هر کدام از این دو مقدار بزرگتر بودند ، چون ولتاژ مربوط به آن عنصر بزرگتر است ، مدار داری همان خاصیت است. و می توان علامت زاویه Ø را مستقیما از همین نکته بدست آورد.

امپدانس مدار $Z = \sqrt{R^{۲} + |XL - XC|^{۲}}$

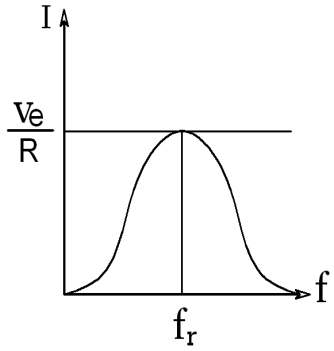
بزرگتر ← XL ، XC → کوچکتر

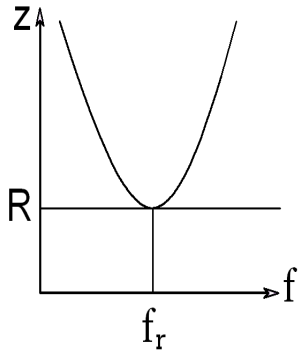
$\sin \emptyset = \frac{|XL-XC|}{Z}$ $\cos \emptyset = \frac{R}{Z}$ $\tan \emptyset = \frac{|XL-XC|}{R}$

زاویه ولتاژ مقاومت سلفی $\theta V_L = \theta i + ۹۰$

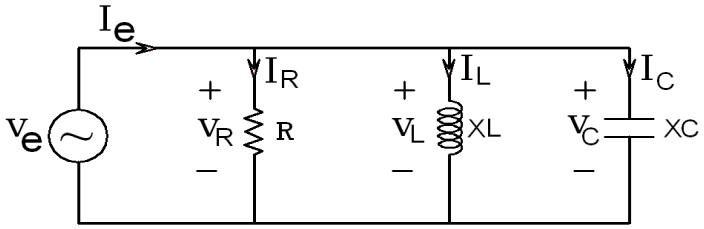
زاویه ولتاژ مقاومت اهمی $\theta V_R = \theta i$

زاویه ولتاژ مقاومت خازنی $\theta V_C = \theta i - ۹۰$



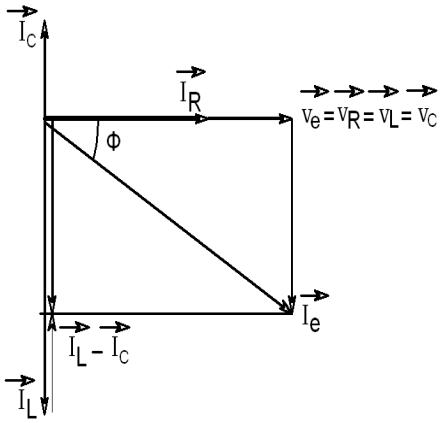


مدار R-L-C موازی:



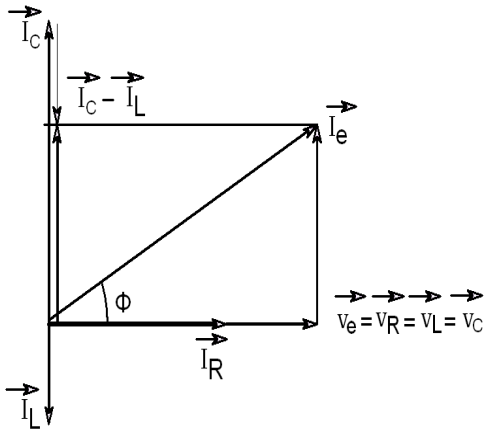
$$\begin{cases} \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_R} = \overrightarrow{V_L} = \overrightarrow{V_C} \\ \overrightarrow{I_e} = \overrightarrow{I_R} + \overrightarrow{I_L} + \overrightarrow{I_C} \end{cases}$$

اگر مقدار XC > XL باشد،در نتیجه IL > IC



علامت زاویه Ø مثبت است.

اگر مقدار XL > XC باشد،در نتیجه IC > IL



علامت زاویه Ø منفی است.

تذکر

چنانچه در حل مدارات R-L-C موازی به مقادیر XL و XC توجه شود ، هر کدام از این دو مقدارکوچکتر بودند ، چون جریان مربوط به آن عنصر بزرگتر است ، مدار داری همان خاصیت است. و می توان علامت زاویه Ø را مستقیما از همین نکته بدست آورد.

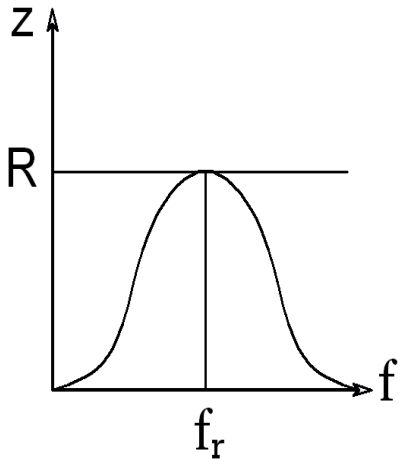
$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left|\frac{1}{XL} - \frac{1}{XC}\right|^2$$

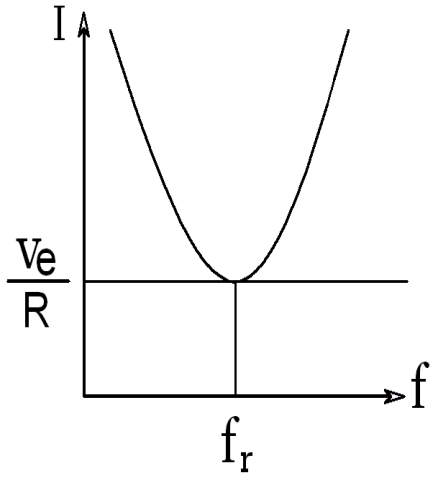
کوچکتر ← $\frac{1}{XL}$ ، $\frac{1}{XC}$ → بزرگتر

$$\sin \emptyset = Z\left|\frac{1}{XL} - \frac{1}{XC}\right| \qquad \cos \emptyset = \frac{Z}{R} \qquad \tan \emptyset = R\left|\frac{1}{XL} - \frac{1}{XC}\right|$$

$\theta i_L = \theta V - ۹۰$ زاویه جریان شاخه مقاومت سلفی $\theta i_R = \theta V$ زاویه جریان شاخه مقاومت اهمی

$\theta i_C = \theta V + ۹۰$ زاویه جریان شاخه مقاومت خازنی





ضریب کیفیت ، پهنای باند و فرکانسهای نیم توان در مدار R-L-C :

قدم اول: محاسبه فرکانس رزونانس: $F_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}$

قدم دوم: محاسبه فرکانس زاویه ای رزونانس: $\omega_o = ۲\pi F_r$

قدم سوم: محاسبه ضریب کیفیت در حالت رزونانس

- مدار R-L-C سری: $Q_o = \frac{L\omega_o}{R}$
- مدار R-L-C موازی: $Q_o = RC\omega_o$

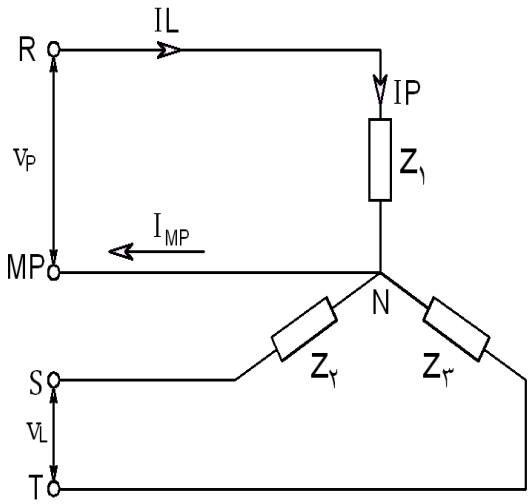
قدم چهارم: محاسبه پهنای باند: $B.W = \frac{F_r}{Q_o}$

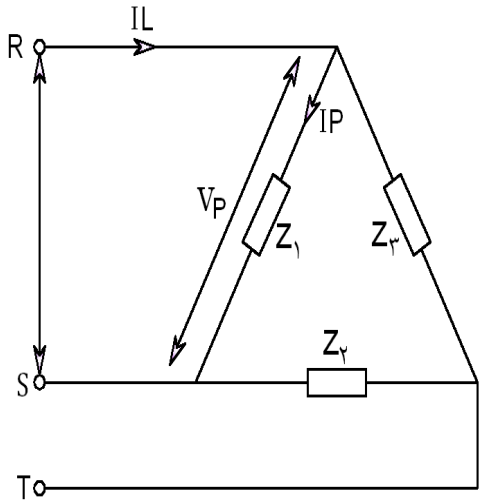
قدم پنجم: محاسبه فرکانسهای نیم توان:

فرکانس قطع پایین $f_L = f_r - \frac{B.W}{۲}$

فرکانس قطع بالا $f_H = f_r + \frac{B.W}{۲}$

فصل هفتم: جریان های سه فازه





$$\begin{cases} V_L = \sqrt{۳} V_P \\ I_L = I_P \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_L = \sqrt{۳} I_P \\ V_L = V_P \end{cases}$$

نکته

چنانچه سه امپدانس متصل شده به صورت اتصال ستاره یا مثلث همه ی مشخصه های آنها از قبیل اندازه و زاویه ی اختلاف فاز با یکدیگر برابر باشند در این صورت بار متعادل است . در غیر اینصورت اگر حتی یکی از مشخصه ها تغییر کند بار نامتعادل خواهد بود.

نکته

در اتصال ستاره چنانچه بار متعادل باشد، مقدار جریان عبوری از سیم نول برابر صفر است. اما در حالت اتصال ستاره نامتعادل مقدار جریانی از سیم نول عبور می کند ، که برای محاسبه ی آن پس از محاسبه ی جریان عبوری از فازهای مختلف و زوایای اختلاف فاز هر شاخه ، برآیند جریانهای سه شاخه به روش تحلیلی مقدار جریان عبوری از سیم نول را بدست خواهد داد.

$$\overrightarrow{I_{MP}} = \overrightarrow{I_{P۱}} + \overrightarrow{I_{P۲}} + \overrightarrow{I_{P۳}}$$

محاسبه ی توان در اتصال ستاره و مثلث:

اتصال ستاره متعادل: استفاده از فرمولهای کلی :

$$P_e = \sqrt{۳} V_L I_L \cos \emptyset$$

$$P_d = \sqrt{۳} V_L I_L \sin \emptyset$$

$$P_S = \sqrt{۳} V_L I_L$$

اتصال ستاره نامتعادل:

- محاسبه ی $P_{e_۱}$ و $P_{e_۲}$ و $P_{e_۳}$ به صورت جداگانه از رابطه: $P_{e_۱} = V_{P_۱} I_{P_۱} \cos \emptyset_۱$
- محاسبه ی $P_{d_۱}$ و $P_{d_۲}$ و $P_{d_۳}$ به صورت جداگانه از رابطه: $P_{d_۱} = V_{P_۱} I_{P_۱} \sin \emptyset_۱$
- محاسبه ی توان اکتیو مجموعه سه فاز: $P_{e_T} = P_{e_۱} + P_{e_۲} + P_{e_۳}$
- محاسبه ی توان راکتیو مجموعه سه فاز: $P_{d_T} = P_{d_۱} + P_{d_۲} + P_{d_۳}$
- محاسبه ی توان ظاهری مجموعه سه فاز: $P_s = \sqrt{{P_{e_T}}^۲ + {P_{d_T}}^۲}$

اتصال مثلث متعادل: استفاده از فرمولهای کلی :

$$P_e = \sqrt{۳} V_L I_L \cos \emptyset$$
$$P_d = \sqrt{۳} V_L I_L \sin \emptyset$$
$$P_S = \sqrt{۳} V_L I_L$$

نکته

اثبات می شود که توان درحالت اتصال مثلث سه برابر توان اتصال ستاره است ($P_{e_\Delta} = ۳P_{e_\gamma}$). از طرفی جریان دریافتی هر خط در اتصال مثلث نیز سه برابر جریان دریافتی هر خط در اتصال ستاره است($I_{L_\Delta} = ۳I_{L_\gamma}$).