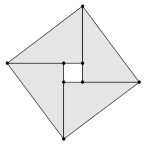
دومین المپیاد هندسهٔ ایران

شهریور ۱۳۹۴

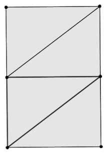
فهرست مطالب

آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱.چهار مثلث چوبی مساوی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ داریم. با استفاده از این چهار مثلث، چه تعداد چندضلعی محدب می توان ساخت؟ نیازی به اثبات نیست و تنها کافی است چندضلعی های موردنظر را رسم کنید.
چندضلعی محدب به چندضلعی ای گفته می شود که درون آن هیچ حفره و سوراخی نباشد و هیچ یک از زوایای آن بیشتر از ۱۸۰ درجه نباشد. برای مثال :



این چندضلعی محدب نیست



این چند ضلعی محدب است

مهدی اعتصامی فرد

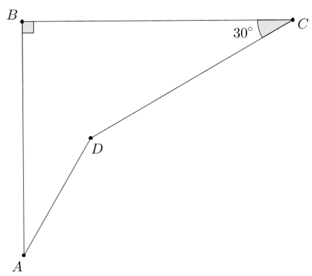
۲.در مثلث ABC زاویه رأس A برابر با ۶۰ درجه می باشد. نقاط M، N و K به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB مثلث قرار دارند به طوری که $BK = KM = MN = NC$ شده است. اگر بدانیم $AN = ۲AK$ است، مقدار زوایای رأس های B و C را بدست آورید.

مهدی اعتصامی فرد

۳.مطابق شکل زیر زاویه ABC قائمه است و داریم :

$$CD = AB \quad , \quad BC = ۲DA \quad , \quad \angle BCD = ۳۰^\circ$$

ثابت کنید زاویه BAD مساوی ۳۰ درجه خواهد بود.



مرتضی ثقفیان

۴.در مستطیل $ABCD$ نقاط Q، P، N و M به ترتیب روی اضلاع DA، CD، BC و AB طوری انتخاب شده اند که مساحت مثلث های DQP، CPN، BNM و AMQ با هم برابر است. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است.

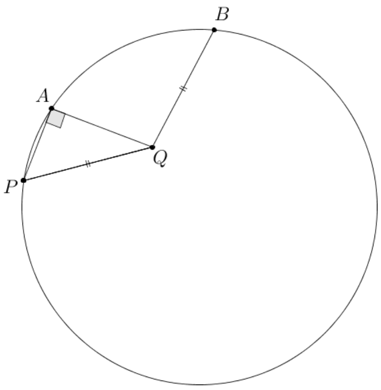
مهدی اعتصامی فرد

۵.آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱.نقاط P، A و B روی محیط دایره ای قرار دارند. نقطه ی □ درون دایره به گونه ای انتخاب شده است که این دو شرط را دارا باشد : $\angle PAQ = ۹۰^\circ$ و $PQ = BQ$. ثابت کنید مقدار تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.



داوود وکیلی

۲.در مثلث حاده الزاویه ABC ارتفاع BH را رسم می کنیم. نقاط D و E وسط اضلاع AB و AC مثلث می باشند. اگر قرینه نقطه H نسبت به خط DE را F بنامیم، ثابت کنید خط BF از مرکز دایره محیطی مثلث ABC می گذرد.

داوود وکیلی

۳.در مثلث ABC نقاط M، N و K به ترتیب وسط اضلاع BC، CA و AB مثلث هستند. دو نیم دایره روی اضلاع AB و AC مثلث و خارج از مثلث رسم کرده ایم. خطوط MK و MN نیم دایره ها را در نقاط X و Y قطع کرده اند. در نقاط X و Y بر نیم دایره ها مماس رسم کرده ایم تا با یکدیگر در نقطه Z برخورد کنند. ثابت کنید خط ZA بر BC عمود می باشد.

مهدی اعتصامی فرد

۴.فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > ۹۰^\circ$.

ایمان مقصودی

۵. الف)آیا می توان ۵ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟
ب)آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

۱.دو دایره $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B متقاطع اند. نقطه X را روی دایره $\omega_۲$ در نظر بگیرید. از B بر BX عمودی رسم می کنیم تا دایره $\omega_۱$ را در نقطه Y قطع کند. خطی از مرکز دایره $\omega_۱$ به X رسم می کنیم تا دایره $\omega_۲$ را برای بار دوم در نقطه X' قطع کند. خط $X'Y$ دایره $\omega_۲$ را در نقطه K قطع می کند. ثابت کنید نقطه X وسط کمان AK از دایره $\omega_۲$ است.

داوود وکیلی

۲.فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > ۹۰^\circ$.

ایمان مقصودی

۳.نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. خطوط عمود بر هم $l_۱$ و $l_۲$ از نقطه H می گذرند. خط $l_۱$ ضلع BC و امتداد ضلع AB را در نقاط D و Z قطع کرده و خط $l_۲$ ضلع BC و امتداد ضلع AC را در نقاط E و X قطع می کند. از نقطه D خطی به موازات AC و از نقطه E خطی به موازات AB رسم می کنیم که با یکدیگر در نقطه Y تلاقی می کنند. ثابت کنید نقاط X، Y و Z هم خط می باشند.

علی گل مکانی

۴.در مثلث ABC شش دایره بدین صورت رسم می کنیم: دایره اول به مرکز رأس A و شعاع AB، تا ضلع AC را در دو نقطه $A_۱$ و $A_۲$ قطع کند. دایره دوم به مرکز A و شعاع AC تا ضلع AB را در نقاط $A_۳$ و $A_۴$ قطع کند. بقیه نقاط $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$ و $B_۴$ و $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ به همین ترتیب ایجاد می شوند.. ثابت کنید اگر ۱۲ نقطه ایجاد شده توسط این دایره ها روی دو دایره قرار داشته باشند، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

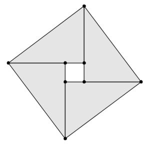
مرتضی ثقفیان

۵.روی اضلاع مثلث ABC و خارج از آن مستطیل های $ABA_۱B_۲$ ، $BCB_۱B_۲$ و $ACA_۲C_۱$ را رسم کرده ایم. نقطه A' را بدین گونه بدست می آوریم که $\angle A_۱C_۲A' = \angle A_۲B_۱A' = ۹۰^\circ$. نقاط B' و C' به صورت مشابه تعریف می شوند. ثابت کنید خطوط AA'، BB' و CC' همرس هستند.

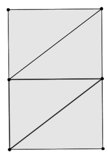
الکسی زاسلاوسکی (روسیه)

پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱.چهار مثلث چوبی مساوی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ داریم. با استفاده از این چهار مثلث، چه تعداد چندضلعی محدب می توان ساخت؟ نیازی به اثبات نیست و تنها کافی است چندضلعی های موردنظر را رسم کنید.
چندضلعی محدب به چندضلعی ای گفته می شود که درون آن هیچ حفره و سوراخی نباشد و هیچ یک از زوایای آن بیشتر از ۱۸۰ درجه نباشد. برای مثال :



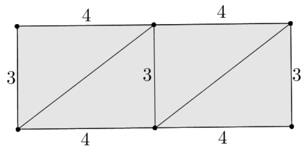
این چندضلعی محدب نیست

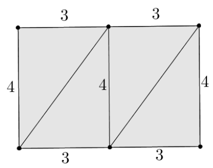


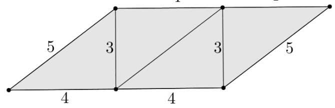
این چند ضلعی محدب است

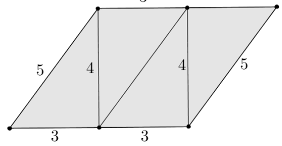
مهدی اعتصامی فرد

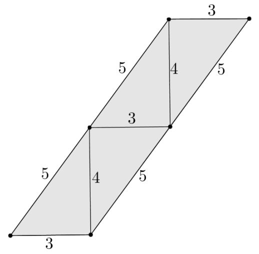
راه حل.

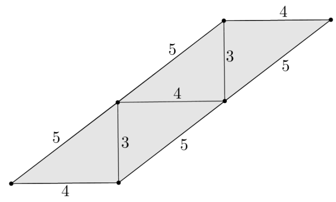


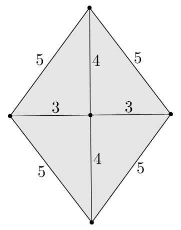


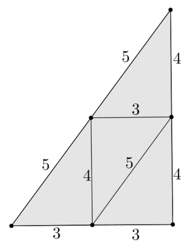


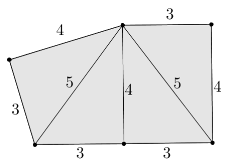


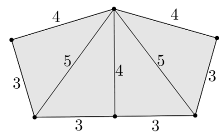

3
5
4
5
3
5
4
5
3

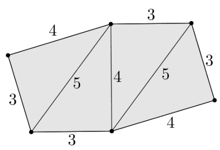

4
5
3
5
4
5
3
5
4

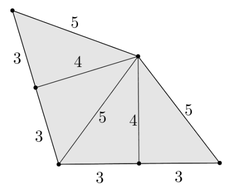

5
4
5
3
3
5
4
5

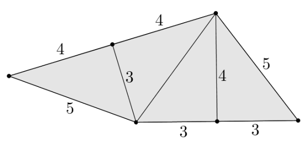

5
4
3
5
4
5
4
3
3

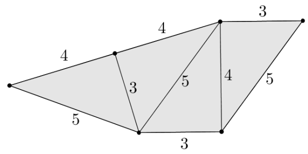

4
3
5
4
5
4
3
3
3


4
4
5
4
5
3
3
3
3


4
3
3
5
4
5
3
3
4


5
3
4
5
3
5
4
3
3


4
4
3
4
5
5
3
3

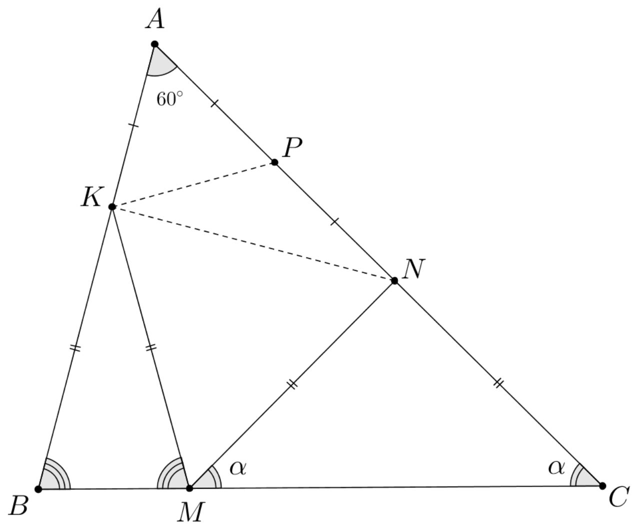

4
3
4
5
3
5
4
5
5
3

۲.در مثلث ABC زاویه رأس A برابر با ۶۰ درجه می باشد. نقاط M، N و K به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB مثلث قرار دارند به طوری که $BK = KM = MN = NC$ شده است. اگر بدانیم $AN = ۲AK$ است، مقدار زوایای رأس های B و C را بدست آورید.

مهدی اعتصامی فرد

راه حل.

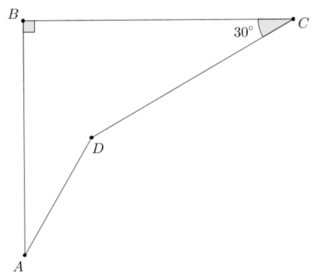
فرض کنید نقطه P وسط ضلع AN باشد. در این صورت $AK = AP = AN$ و در نتیجه مثلث APK متساوی الاضلاع است. بنابراین $\angle ANK = \frac{\angle KPA}{۲} = ۳۰^\circ$. اگر فرض کنیم $\angle ACB = \angle NMC = \alpha$ در این صورت $\angle ABC = \angle KMB = ۱۲۰^\circ - \alpha$. پس $\angle KMN = ۶۰^\circ$. بنابراین مثلث KMN متساوی الاضلاع است. از طرفی دیگر می دانیم که $\angle MNA = ۹۰^\circ$. بنابراین $\alpha = ۴۵^\circ$. پس مقدار زوایای B و C به ترتیب برابر ۷۵ درجه و ۴۵ درجه بدست می آیند.



۳.مطابق شکل زیر زاویه ABC قائمه است و داریم :

$$CD = AB \quad , \quad BC = ۲DA \quad , \quad \angle BCD = ۳۰^\circ$$

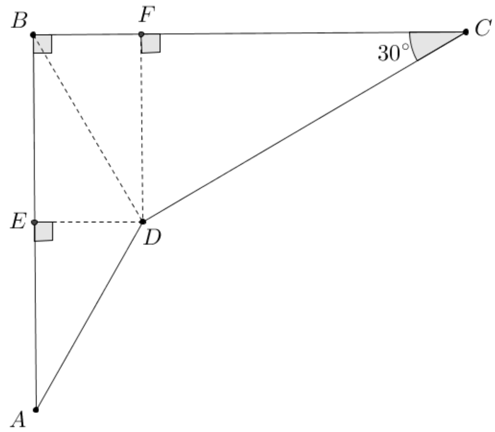
ثابت کنید زاویه BAD مساوی ۳۰ درجه خواهد بود.



مرتضی ثقفیان

راه حل اول.

فرض کنید دو نقطه E و F را روی BC و AB به نحوی انتخاب کنیم که $DF \perp BC$ و $DE \perp AB$. حال نتیجه می گیریم $DF = \frac{DC}{۲} = \frac{AB}{۲}$. (چرا که $\angle BCD = ۳۰^\circ$ و $\angle DFC = ۹۰^\circ$)
علاوه بر این از آنجا که $DF = BE$، پس DE عمودمنصف AB است. در نتیجه $BD = AD$.

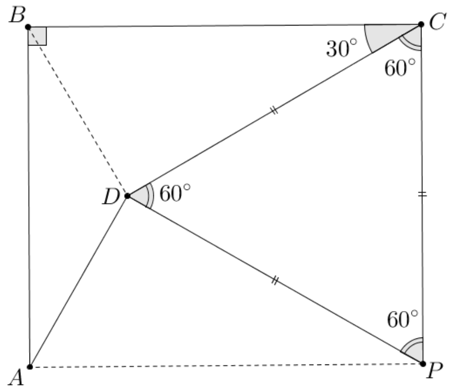


حال فرض کنید H را روی CD طوری انتخاب کنیم که $BH \perp CD$. بنابراین $BH = \frac{BC}{۲} = BD$. پس می توان نتیجه گرفت که H بر D منطبق است و $\angle BDC = ۹۰^\circ$. در نتیجه $\angle ABD = \angle BAD = ۳۰^\circ$.

راه حل دوم.
فرض کنید نقطه P را به صورتی انتخاب کنیم که مثلث DCP متساوی الاضلاع باشد. می دانیم که $PC \perp BC$ و $PC = CD = AB$. بنابراین چهار ضلعی $ABCP$ یک مستطیل است. پس:

$$\Rightarrow \quad \angle APD = \angle APC - \angle DPC = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$$

از طرف دیگر می دانیم $DP = DC$ و $AP = BC$. بنابراین مثلث های ADP و BDC با یکدیگر همنهشت اند. بنابراین $AD = BD$.



حال فرض کنید H را روی CD طوری انتخاب کنیم که $BH \perp CD$. بنابراین $BH = \frac{BC}{۲} = BD$. پس می توان نتیجه گرفت که H بر D منطبق است و $\angle BDC = ۹۰^\circ$. در نتیجه $\angle ABD = \angle BAD = ۳۰^\circ$.

۴.در مستطیل $ABCD$ نقاط Q، P، N و M به ترتیب روی اضلاع DA، CD، BC و AB طوری انتخاب شده اند که مساحت مثلث های DQP، CPN، BNM و AMQ با هم برابر است. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است.

مهدی اعتصامی فرد

— —

راه حل.

فرض کنید $AB = CD = a, AD = BC = b$ و $AM = x, AQ = z, PC = y, NC = t$. اگر $x \neq y$ باشد در این صورت می توان فرض کرد که $x > y$. حال داریم:

$$y < x \;\Rightarrow\; a - x < a - y \quad (۱)$$

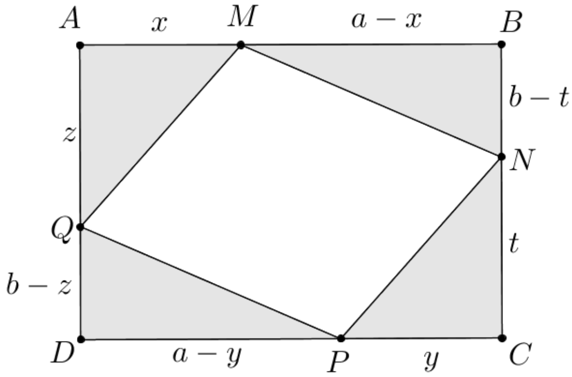
$$S_{AQM} = S_{CNP} \;\Rightarrow\; zx = yt \;\Rightarrow\; z < t \;\Rightarrow\; b - t < b - z \quad (۲)$$

با توجه به نابرابری های ۱ و ۲ :

$$(a - x)(b - t) < (a - y)(b - z) \;\Rightarrow\; S_{BMN} < S_{DPQ}$$

که نادرست است. پس $x = y$ و در نتیجه $z = t$. پس دو مثلث AMQ و CPN با یکدیگر همنهشت اند. بنابراین $MQ = NP$. به طریق مشابه نتیجه می گیریم $MN = PQ$.

بنابراین چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است.



— —

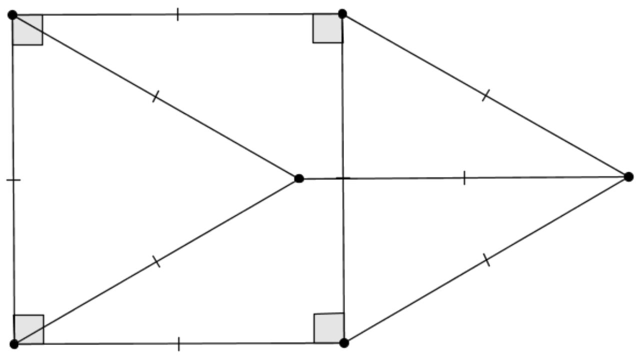
نکته. حکم برای حالتی که $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد نیز درست است.

— —

۵.آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

راه حل.
در تصویر زیر مراکز ۶ دایره مورد نظر رسم شده است. طول تمامی پاره خط های رسم شده برابر ۱ واحد است.



پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱.نقاط P، A و B روی محیط دایره ای قرار دارند. نقطه ی □ درون دایره به گونه ای انتخاب شده است که این دو شرط را دارا باشد : $\angle PAQ = ۹۰^\circ$ و $PQ = BQ$. ثابت کنید مقدار تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.

داوود وکیلی

راه حل اول.

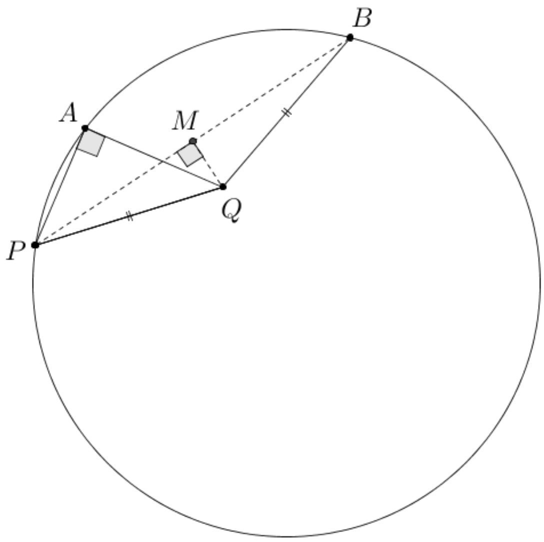
اگر نقطه M وسط پاره خط PB باشد در این صورت زاویه PMQ برابر ۹۰ درجه است. همچنین ما می دانیم که $\angle PAQ = ۹۰^\circ$. بنابراین چهارضلعی $PAMQ$ محاطی است. پس :

$$\angle APM = \angle AQM$$

از طرف دیگر :

$$\angle AQB - \angle AQP = \angle PQM + \angle AQM - \angle AQP = ۲\angle AQM$$

بنابراین تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.



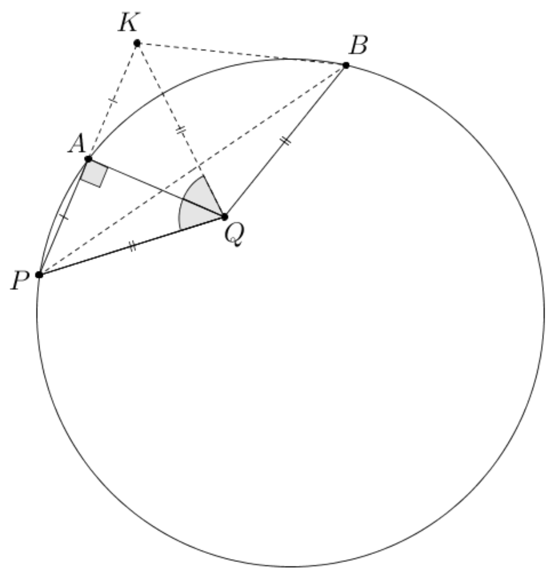
راه حل دوم.
قرینه نقطه P نسبت به AQ را K می نامیم. کافیست نشان دهیم :

$$۲\angle APB = \angle AQB - \angle AQP$$

AQ عمود منصف PK است. پس $\angle AQP = \angle AQK$ و $PQ = KQ = BQ$. بنابراین نقطه Q مرکز دایره محیطی PKB است. می دانیم :

$$۲\angle APB = \angle KQB = \angle AQB - \angle AQK = \angle AQB - \angle AQP$$

بنابراین تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.

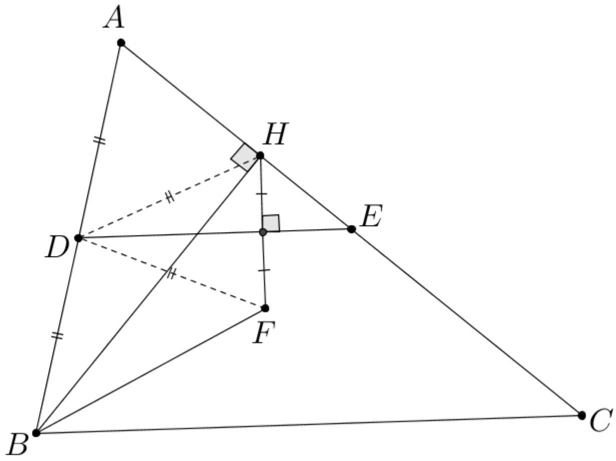


۲.در مثلث حاده الزاویه ABC ارتفاع BH را رسم می کنیم. نقاط D و E وسط اضلاع AB و AC مثلث می باشند. اگر قرینه نقطه H نسبت به خط DE را F بنامیم، ثابت کنید خط BF از مرکز دایره محیطی مثلث ABC می گذرد.

داوود وکیلی

راه حل اول.

فرض کنید O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد. می دانیم $\angle OBA = ۹۰^\circ - \angle C$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\angle FBA = ۹۰^\circ - \angle C$.



می دانیم که $AD = BD = DH$، همچنین $DH = DF$. بنابراین چهارضلعی $AHFB$ محاطی است و مرکز دایره محیطی آن D است.پس :

$$\Rightarrow \quad \angle FBA = \angle FHE = ۹۰^\circ - \angle DEH \quad , \quad DE \parallel BC \quad \Rightarrow \quad \angle DEH = \angle C$$

$$\Rightarrow \quad \angle FBA = ۹۰^\circ - \angle C$$

راه حل دوم.

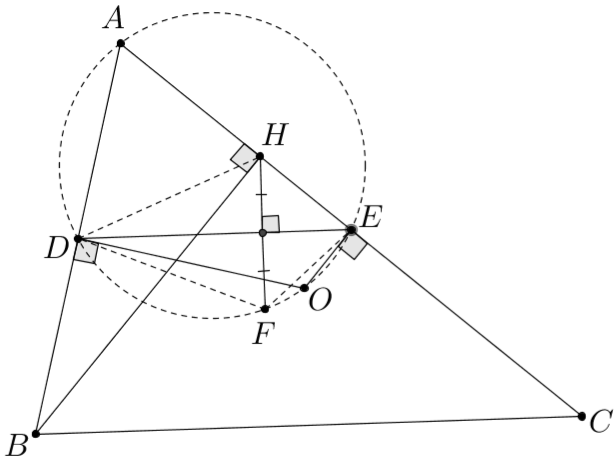
فرض کنید O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد. می دانیم چهارضلعی $ADOE$ محاطی است و از طرفی دیگر $AD = HD = DB$. بنابراین :

$$\angle A = \angle DHA = ۱۸۰^\circ - \angle DHE = ۱۸۰^\circ - \angle DFE$$

پس چهارضلعی $ADFE$ محاطی است. نتیجه می گیریم پنج ضلعی $ADFOE$ محاطی است. بنابراین چهارضلعی $DFOE$ محاطی است. پس داریم :

$$\angle C = \angle DEA = \angle DEF = \angle DOF$$

از طرف دیگر $\angle DOB$ □□ $\angle C = \angle DOB$ $= \angle DOF$. بنابراین B، F و O همخط اند.



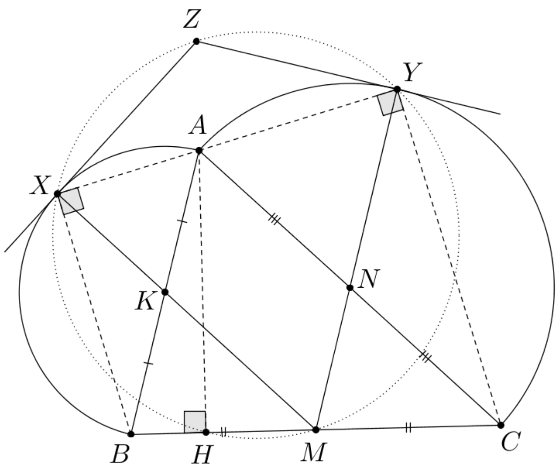
۳.در مثلث ABC نقاط M، N و K به ترتیب وسط اضلاع BC، CA و AB مثلث هستند. دو نیم دایره روی اضلاع AB و AC مثلث و خارج از مثلث رسم کرده ایم. خطوط MK و MN نیم دایره ها را در نقاط X و Y قطع کرده اند. در نقاط X و Y بر نیم دایره ها مماس رسم کرده ایم تا با یکدیگر در نقطه Z برخورد کنند. ثابت کنید خط ZA بر BC عمود می باشد.

مهدی اعتصامی فرد

راه حل اول.

نقطه H را روی ضلع BC طوری در نظر بگیرید که $AH \perp BC$. بنابراین چهارضلعی های $AXBH$ و $AYCH$ محاطی اند. واضح است که KM و MN به ترتیب موازی با AC و AB هستند. پس نتیجه می گیریم که $\angle AKX = \angle ANY = \angle A$، بنابراین $\angle ABX = \angle ACY = \frac{\angle A}{۲}$ و همچنین $\angle XAB = \angle YAC = ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲}$. پس X، A و Y همخط اند. در نتیجه :

$$\angle AHX = \angle ABX = \frac{\angle A}{۲}\,, \angle AHY = \angle ACY = \frac{\angle A}{۲} \Rightarrow \angle XHY = \angle XMY = \angle A$$



بنابراین چهارضلعی $XHMY$ محاطی است. همچنین از آنجا که $\angle MXZ = \angle MYZ = ۹۰^\circ$ نتیجه می گیریم که چهارضلعی $MXZY$ محاطی است. در نتیجه پنج ضلعی $ZXHMY$ محاطی است. بنابراین چهارضلعی $HXZY$ محاطی است.

از طرف دیگر :

$$\angle ZYX = \angle ACY = \frac{\angle A}{۲}$$

$$\angle ZHX = \angle ZYX = \frac{\angle A}{۲}\,,\ \angle AHX = \frac{\angle A}{۲} \quad \Rightarrow \quad \angle ZHX = \angle AHX$$

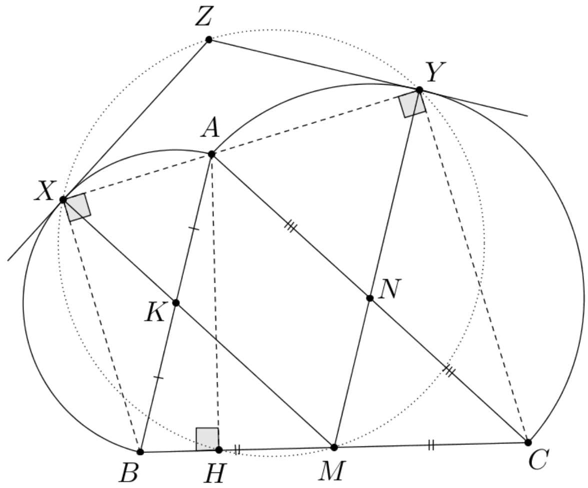
بنابراین نقاط Z، A و H همخط اند. در نتیجه $AZ \perp BC$.

راه حل دوم.

نقطه H را روی ضلع BC طوری در نظر بگیرید که $AH \perp BC$. واضح است که KM و MN به ترتیب موازی با AC و AB هستند. پس نتیجه می گیریم که $\angle AKX = \angle ANY = \angle A$، بنابراین $\angle ABX = \angle ACY = \frac{\angle A}{۲}$ و همچنین $\angle XAB = \angle YAC = ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲}$. پس X، A و Y همخط اند.

$$\Rightarrow \quad \angle ZXY = \angle ZYX = \frac{\angle A}{۲} \quad \Rightarrow \quad ZX = ZY$$

بنابراین نقطه Z روی محوراصلی این دو نیم دایره قرار دارد. همچنین ما می دانیم که خط AH محور اصلی این دو نیم دایره است. بنابراین نقاط Z، A و H همخط اند. در نتیجه $AZ \perp BC$.



۴.فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > ۹۰^\circ$.

ایمان مقصودی

راه حل اول.

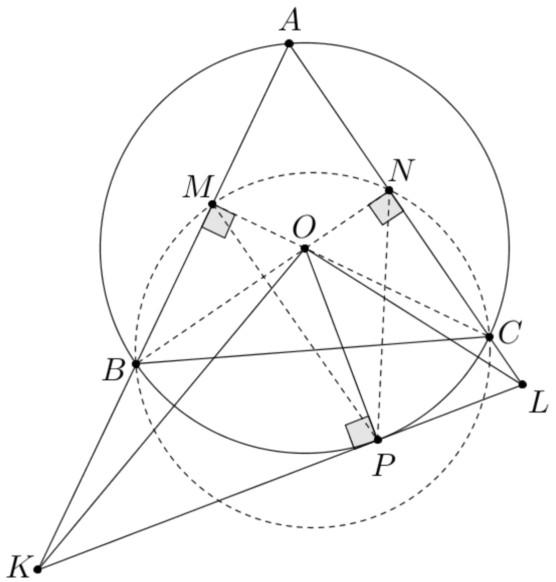
فرض کنید M و N اوساط پاره خط های AB و AC باشند. به وضوح چهارضلعی $BMNC$ محاطی است. علاوه بر آن $\angle BPC = ۱۲۰^\circ > ۹۰^\circ$. بنابراین نتیجه می گیریم که نقطه P درون دایره محیطی چهارضلعی قرار دارد. پس :

$$\angle MPN > \angle MBN = ۳۰^\circ$$

از طرفی دیگر، چهارضلعی های $KMOP$ و $NOPC$ نیز محاطی هستند. پس داریم :

$$\angle MKO = \angle MPO \,,\ \angle NLO = \angle NPO \ \Rightarrow\ \angle AKO + \angle ALO = \angle MPN > ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KOL = \angle A + \angle AKO + \angle ALO > ۹۰^\circ$$



راه حل دوم.
فرض کنید $\angle KOL \leq ۹۰^\circ$ باشد. بنابراین $KL^۲ \leq OK^۲ + OL^۲$. حال فرض کنید R شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع باشد. اگر فرض کنیم $BK = x$ و $LC = y$ و $AB = AC = BC = a$ در این صورت طبق قضیه کسینوس ها در مثلث AKL خواهیم داشت :

$$KL^۲ = AK^۲ + AL^۲ - AK.AL.cos(\angle A) \;\Rightarrow\; KL^۲ = (a+x)^۲ + (a+y)^۲ - (a+x)(a+y)$$

از طرفی دیگر :

$$KB.KA = OK^۲ - R^۲ \quad \Rightarrow \quad OK^۲ = R^۲ + x(a+x)$$

$$LC.LA = OL^۲ - R^۲ \quad \Rightarrow \quad OL^۲ = R^۲ + y(a+y)$$

با توجه به $KL^۲ \leq OK^۲ + OL^۲$ و $a = R\sqrt{۳}$ داریم :

$$(a+x)^۲ + (a+y)^۲ - (a+x)(a+y) \leq ۲R^۲ + x(a+x) + y(a+y)$$

$$\Rightarrow \; R^۲ \leq xy \quad (۱)$$

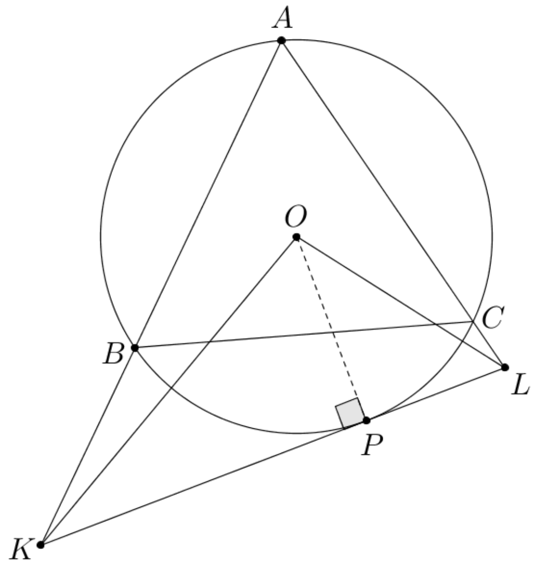
KL بر دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع در نقطه P مماس است. بنابراین داریم :

$$KP^۲ = KB.KA = x(a+x) > x^۲ \;\Rightarrow\; KP > x \quad (۲)$$

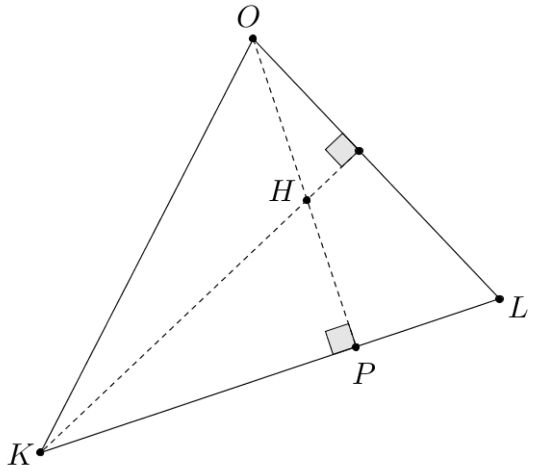
$$LP^۲ = LC.LA = y(a+y) > y^۲ \;\Rightarrow\; LP > y \quad (۳)$$

با توجه به نابرابری های ۲ و ۳: $(۴) \quad xy < KP.LP$

و بنابر نابرابری های ۱ و ۴: $(۵) \quad R^۲ < KP.LP$



می دانیم $\angle KOL \leq 90^\circ$. بنابراین مثلث KOL حاده الزاویه است. فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث KOL باشد. در نتیجه نقطه H روی پاره خط OP قرار دارد و می توان گفت : $HP \leq OP$.



از طرف دیگر $\angle POL = \angle HKP$ و $\angle OLP = \angle KHP$. بنابراین دو مثلث KHP و OPL متشابه هستند. پس داریم :

$$\frac{KP}{HP} = \frac{OP}{LP} \quad \Rightarrow \quad KP.LP = HP.OP \leq OP^2 = R^2$$

اما با توجه به نابرابری ۵، $R^2 < KP.LP$. تناقض حاصل حکم را نتیجه می دهد.

۵. الف)آیا می توان ۵ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

ب)آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

– –

راه حل.

الف)

چنین پنج دایره ای وجود ندارند. فرض کنید پنج نقطه با خواص مسئله موجود باشند. پس مراکز آنها پنج نقطه هستند که هر نقطه از ۳ نقطه دیگر فاصله یکسان دارد و از تنها یک نقطه دیگر فاصله متفاوت دارد. از هر نقطه به نقطه ای که با آن فاصله متفاوتی دارد یک فلش می کشیم.

لم ۱.دو نقطه مانند O_i و O_j وجود ندارند که از هر یک به دیگری فلش رسم شده باشد.

اثبات.اگر چنین چیزی وجود داشته باشد در این صورت فاصله O_i از ۳ نقطه دیگر برابر است و فاصله O_j از سه نقطه دیگر هم برابر است. پس هم O_i و هم O_j مرکز دایره محیطی ۳ نقطه دیگر هستند که تناقض است.

لم ۲.چهار نقطه مانند O_i، O_j، O_k و O_l وجود ندارند که O_i و O_j به O_k فلش داشته باشند و O_k به O_l فلش داشته باشد.

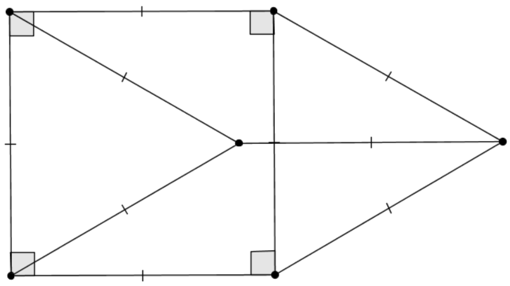
اثبات.اگر چنین چیزی باشد و نقطه دیگر را O_m بنامیم آنگاه فاصله O_i از O_j و O_l و O_m برابر است و فاصله O_j از O_i و O_l و O_m برابر است. در نتیجه O_l و O_m باید هر دو به یکدیگر فلش داشته باشند که طبق لم ۱ ممکن نیست.

بنابراین از هر نقطه یک فلش خارج شده و به هر نقطه یک فلش وارد شده است. از لم ۱ می توان نتیجه گرفت که دور ۳ و ۴ رأسی نداریم. پس یک دور جهت دار پنج رأسی داریم.(با رئوس O_i، O_j، O_m، O_k و O_l) پس فاصله O_i از O_k و O_l و O_m برابر است و فاصله O_k از O_i، O_j و O_m برابر است. پس طول O_iO_m با طول O_iO_k، O_iO_l و O_jO_k برابر است. به همین ترتیب می توان گفت که طول همه اضلاع و اقطال این پنج ضلعی باید برابر باشد که ممکن نیست. پس چنین پنج دایره ای وجود ندارند.

– –

ب)

در تصویر زیر مراکز ۶ دایره مورد نظر رسم شده است. طول تمامی پاره خط های رسم شده برابر ۱ واحد است.



آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

۱.دو دایره $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در نقاط A و B متقاطع اند. نقطه X را روی دایره $\omega_۲$ در نظر بگیرید. از B بر BX عمودی رسم می کنیم تا دایره $\omega_۱$ را در نقطه Y قطع کند. خط $X\omega_۱$ دایره $\omega_۲$ را برای بار دوم در نقطه X' قطع کند. خط $X'Y$ دایره $\omega_۲$ را در نقطه K قطع می کند. ثابت کنید نقطه X وسط کمان AK از دایره $\omega_۲$ است.

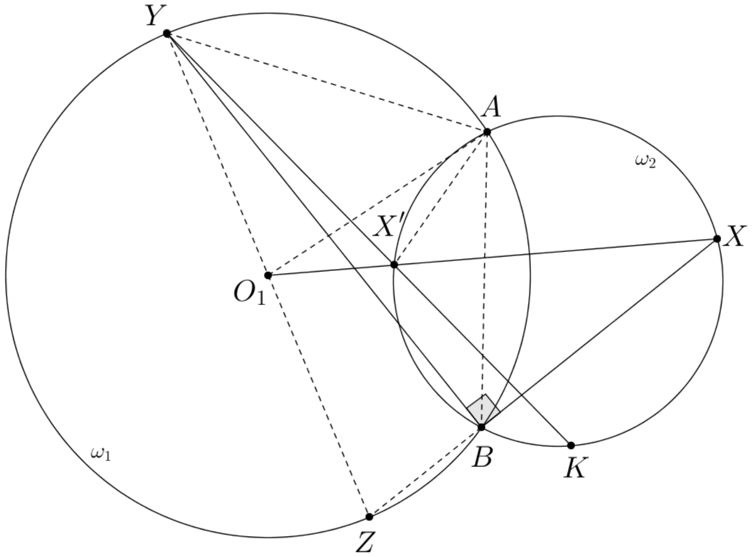
داوود وکیلی

راه حل.

فرض کنید امتداد BX دایره $\omega_۱$ را در Z قطع کند. چون $\angle YBZ = ۹۰^\circ$ پس سه نقطه $Y, O_۱, Z$ همخط هستند.

$$\angle O_۱YA = \angle ABX = \angle AX'X$$

پس $YAX'O_۱$ محاطی است. همچنین می دانیم $AO_۱ = YO_۱$ پس $\angle AX'X = \angle YX'O_۱ = \angle XX'K$.
درنتیجه نقطه X وسط کمان AK از دایره $\omega_۲$ است.



۲.فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > ۹۰^\circ$.

ایمان مقصودی

راه حل اول.

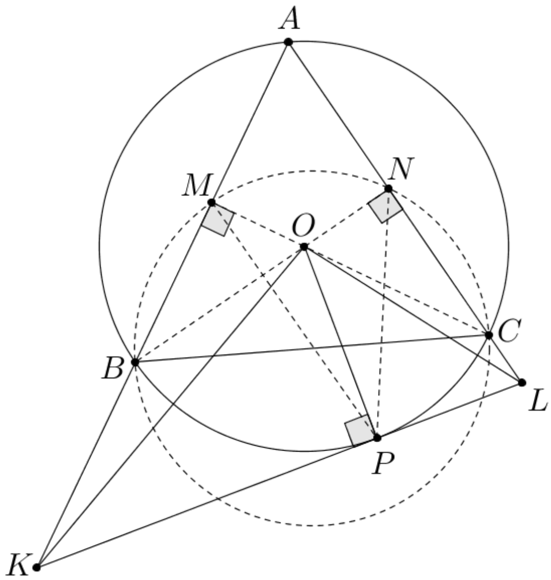
فرض کنید M و N اوساط پاره خط های AB و AC باشند. به وضوح چهارضلعی $BMNC$ محاطی است. علاوه بر آن $\angle BPC = ۱۲۰^\circ > ۹۰^\circ$. بنابراین نتیجه می گیریم که نقطه P درون دایره محیطی چهارضلعی قرار دارد. پس :

$$\angle MPN > \angle MBN = ۳۰^\circ$$

از طرفی دیگر، چهارضلعی های $KMOP$ و $NOPC$ نیز محاطی هستند. پس داریم :

$$\angle MKO = \angle MPO \, , \, \angle NLO = \angle NPO \, \Rightarrow \, \angle AKO + \angle ALO = \angle MPN > ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KOL = \angle A + \angle AKO + \angle ALO > ۹۰^\circ$$



راه حل دوم.

فرض کنید $\angle KOL \leq ۹۰^\circ$ باشد. بنابراین $KL^۲ \leq OK^۲ + OL^۲$. حال فرض کنید R شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع باشد. اگر فرض کنیم $BK = x$ و $LC = y$ و $AB = AC = BC = a$ در این صورت طبق قضیه کسینوس ها در مثلث AKL خواهیم داشت :

$$KL^۲ = AK^۲ + AL^۲ - AK.AL.cos(\angle A) \;\Rightarrow\; KL^۲ = (a+x)^۲ + (a+y)^۲ - (a+x)(a+y)$$

از طرفی دیگر :

$$KB.KA = OK^۲ - R^۲ \quad \Rightarrow \quad OK^۲ = R^۲ + x(a+x)$$

$$LC.LA = OL^۲ - R^۲ \quad \Rightarrow \quad OL^۲ = R^۲ + y(a+y)$$

با توجه به $KL^۲ \leq OK^۲ + OL^۲$ و $a = R\sqrt{۳}$ داریم :

$$(a+x)^۲ + (a+y)^۲ - (a+x)(a+y) \leq ۲R^۲ + x(a+x) + y(a+y)$$

$$\Rightarrow\; R^۲ \leq xy \quad (۱)$$

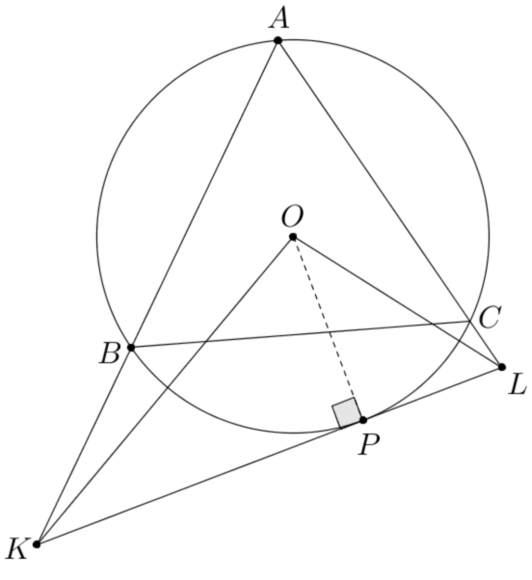
KL بر دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع در نقطه P مماس است. بنابراین داریم :

$$KP^۲ = KB.KA = x(a+x) > x^۲ \;\Rightarrow\; KP > x \quad (۲)$$

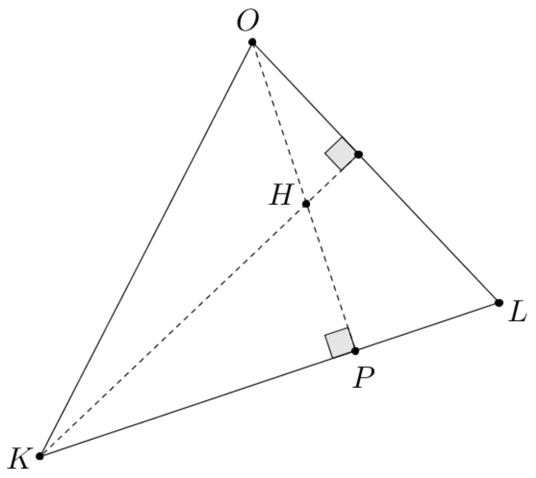
$$LP^۲ = LC.LA = y(a+y) > y^۲ \;\Rightarrow\; LP > y \quad (۳)$$

با توجه به نابرابری های ۲ و ۳: $xy < KP.LP \quad (۴)$

و بنابر نابرابری های ۱ و ۴: $R^۲ < KP.LP \quad (۵)$



می دانیم $\angle KOL \leq ۹۰^\circ$. بنابراین مثلث KOL حاده الزاویه است. فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث KOL باشد. در نتیجه نقطه H روی پاره خط OP قرار دارد و می توان گفت : $HP \leq OP$.



از طرف دیگر $\angle HKP = \angle POL$ و $\angle KHP = \angle OLP$. بنابراین دو مثلث KHP و OPL متشابه هستند.
پس داریم :

$$\frac{KP}{HP} = \frac{OP}{LP} \quad \Rightarrow \quad KP.LP = HP.OP \leq OP^۲ = R^۲$$

اما با توجه به نابرابری ۵، $R^۲ < KP.LP$. تناقض حاصل حکم را نتیجه می دهد.

۳.نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. خطوط عمود بر هم $l_۱$ و $l_۲$ از نقطه H می گذرند. خط $l_۱$ ضلع BC و امتداد ضلع AB را در نقاط D و Z قطع کرده و خط $l_۲$ ضلع BC و امتداد ضلع AC را در نقاط E و X قطع می کند. از نقطه D خطی به موازات AC و از نقطه E خطی به موازات AB رسم می کنیم که با یکدیگر در نقطه Y تلاقی می کنند. ثابت کنید نقاط X، Y و Z هم خط می باشند.

علی گل مکانی

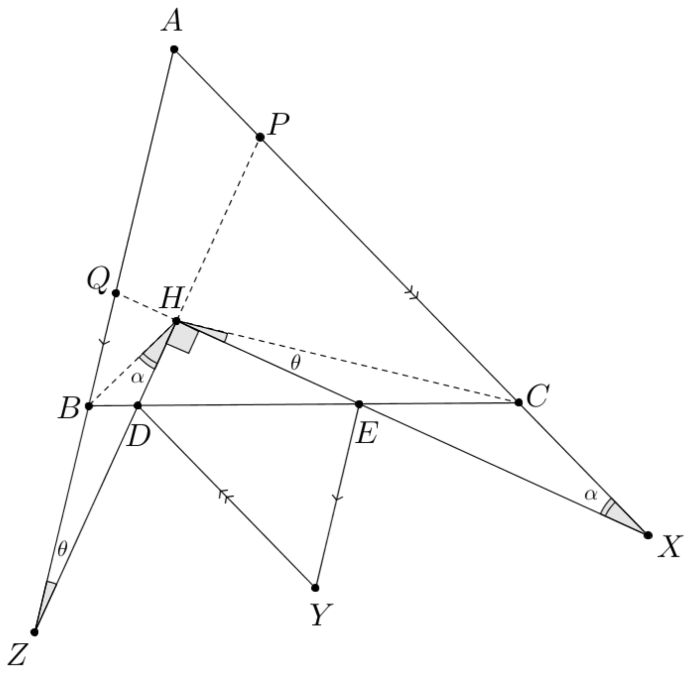
راه حل.

فرض کنید HZ و HX به ترتیب AC و AB را در P و Q قطع کنند. بر اساس قضیه منلائوس در دو مثلث AQX و APZ داریم:

$$\frac{CX}{AC}.\frac{AB}{BQ}.\frac{QE}{EX} = ۱ \quad (۱)$$

$$\frac{BZ}{AB}.\frac{AC}{PC}.\frac{PD}{DZ} = ۱ \quad (۲)$$

نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است پس $BH \perp AC$ همچنین می دانیم $\angle DHE = ۹۰^\circ$ درنتیجه $\angle HXA = \angle BHZ = \alpha$. به طریق مشابه میتوان نشان داد $\angle HZA = \angle CHX = \theta$.



بر اساس قضیه سینوس ها در سه مثلث HPC و HCX و HPX داریم:

$$\frac{sin(۹۰-\theta)}{PC}=\frac{sin(\angle HCP)}{HP} \quad , \quad \frac{sin(\theta)}{CX}=\frac{sin(\angle HCX)}{HX} \quad , \quad \frac{HP}{HX}=\frac{sin(\alpha)}{sin(۹۰-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{PC}{CX}=\frac{tan(\alpha)}{tan(\theta)}$$

به طریق مشابه بر اساس قضیه سینوس ها در سه مثلث HBQ و HBZ و HQZ داریم:

$$\Rightarrow \quad \frac{BZ}{BQ}=\frac{tan(\alpha)}{tan(\theta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{BZ}{BQ}=\frac{PC}{CX} \quad \Rightarrow \quad \frac{PC}{BZ}=\frac{CX}{BQ} \quad (۳)$$

از روابط ۱، ۲ و ۳ نتیجه می شود:

$$\frac{XE}{EQ}=\frac{PD}{ZD} \quad (۴)$$

فرض کنید خطی که از E می گذرد و موازی AB است، ZX را در $Y_۱$ قطع کند و خطی که از D می گذرد و موازی AC است، ZX را در $Y_۲$ قطع کند. بر اساس قضیه تالس خواهیم داشت:

$$\frac{Y_۱X}{ZY_۱}=\frac{XE}{EQ} \quad , \quad \frac{Y_۲X}{ZY_۲}=\frac{PD}{ZD}$$

بنابراین $Y_۱$ و $Y_۲$ بر یکدیگر منطبق می باشند. درنتیجه Y روی ZX قرار دارد.

۴.در مثلث ABC شش دایره بدین صورت رسم می کنیم: دایره اول به مرکز رأس A و شعاع AB، تا ضلع AC را در دو نقطه $A_۱$ و $A_۲$ قطع کند. دایره دوم به مرکز A و شعاع AC تا ضلع AB را در نقاط $A_۳$ و $A_۴$ قطع کند. بقیه نقاط $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$ و $B_۴$ و $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ به همین ترتیب ایجاد می شوند.. ثابت کنید اگر ۱۲ نقطه ایجاد شده توسط این دایره ها روی دو دایره قرار داشته باشند، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

مرتضی ثقفیان

راه حل اول.

برهان خلف:فرض کنید مثلث متساوی الساقین نباشد. می توان فرض کرد که $a > b > c$. در این صورت روی هریک از خطوط اضلاع مثلث ABC چهارتا از این نقاط قرار میگیرد. پس هریک از دو دایره مذکور اضلاع را در دوتا از این نقاط قطع می کند و رئوس مثلث ABC هم بین این نقاط نیست. حال حاصل ضرب قوت های A نسبت به این دو دایره را در نظر بگیرید. این حاصل ضرب برابر است با فواصل A تا چهار نقطه روی خط AB و از طرفی برابر است با حاصل ضرب تا چهار نقطه روی خط AC. بنابراین:

$$b.b.(a-c).(a+c) = c.c.(a-b)(a+b)$$
$$\Rightarrow \quad b^۲(a^۲-c^۲) = c^۲(a^۲-b^۲) \quad \Rightarrow \quad a^۲(b^۲-c^۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad b = c$$

در حالی که در ابتدا فرض کردیم $b > c$ که این تناقض است. تناقض حاصل نشان می دهد که مثلث ABC متساوی الساقین است.

راه حل دوم.

برهان خلف:فرض کنید مثلث متساوی الساقین نباشد. در این صورت روی هریک از خطوط اضلاع مثلث ABC چهارتا از این نقاط قرار میگیرد. پس هریک از دو دایره مذکور اضلاع را در دوتا از این نقاط قطع می کند و رئوس مثلث ABC هم بین این نقاط نیست. در این صورت تعداد تقاطع های هر دایره با مثلث ABC عددی زوج است در حالی که تنها سه تا از این ۱۲ نقطه روی محیط مثلث هستند که عددی فرد است که این تناقض است. تناقض حاصل نشان می دهد که مثلث ABC متساوی الساقین است.

۵.روی اضلاع مثلث ABC و خارج از آن مستطیل های $ABA_۱B_۲$ ، $BCB_۱B_۲$ و $ACA_۲C_۱$ را رسم کرده ایم. نقطه A' را بدین گونه بدست می آوریم که $\angle A_۱C_۲A' = \angle A_۲B_۱A' = ۹۰^\circ$. نقاط B' و C' به صورت مشابه تعریف می شوند. ثابت کنید خطوط AA'، BB' و CC' همرس هستند.

الکسی زاسلاوسکی (روسیه)

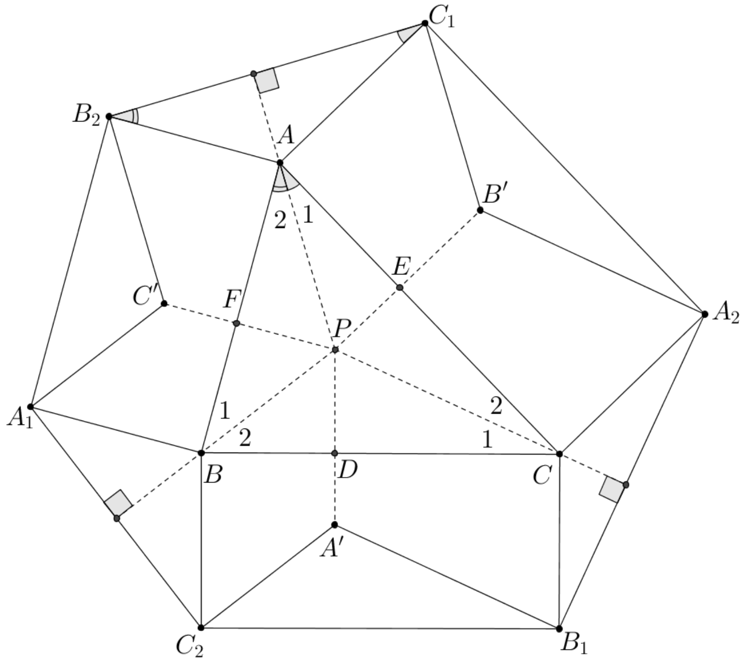
راه حل.

فرض کنید l_A خطی باشد که از A می گذرد و بر $B_۲C_۱$ عمود است. به طور مشابه خطوط l_B و l_C را در نظر بگیرید. فرض کنید $CB_۱ = BC_۲ = x$ و $BA_۱ = AB_۲ = y$ و $AC_۱ = CA_۲ = z$. باتوجه به برابری زاویه ها می توان گفت:

$$\frac{sin(\angle A_۱)}{sin(\angle A_۲)} = \frac{y}{z} \ , \ \frac{sin(\angle B_۱)}{sin(\angle B_۲)} = \frac{x}{y} \ , \ \frac{sin(\angle C_۱)}{sin(\angle C_۲)} = \frac{z}{x}$$

بنابر این بر اساس قضیه سوا سینوسی در مثلث ABC سه خط l_A, l_B, l_C همرس هستند. نقطه همرسی این سه خط را P می نامیم. می دانیم: $BC \parallel B_۱C_۲$ ، $BC = B_۱C_۲$ ، $BP \parallel A'C_۲$ و $CP \parallel A'B_۱$ بنابراین دو مثلث PBC و $A'C_۲B_۱$ همنهشت هستند. درنتیجه:

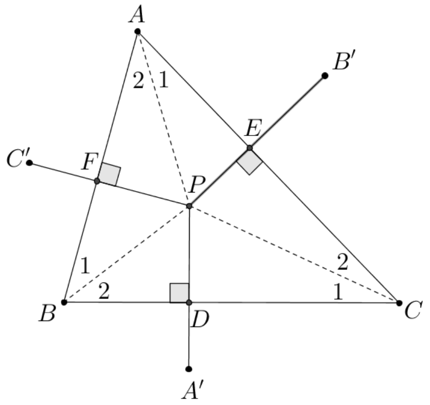
$$PA' = x \ , \ PC' = y \ , \ PB' = z \qquad PA' \perp BC \ , \ PB' \perp AC \ , \ PC' \perp AB$$



فرض کنید PA', PB', PC' به ترتیب BC, AC, AB را در D, E, F قطع کنند و $PD = m\ ,\ PE = n\ ,\ PF = t$. با توجه به شکل قبل داریم:

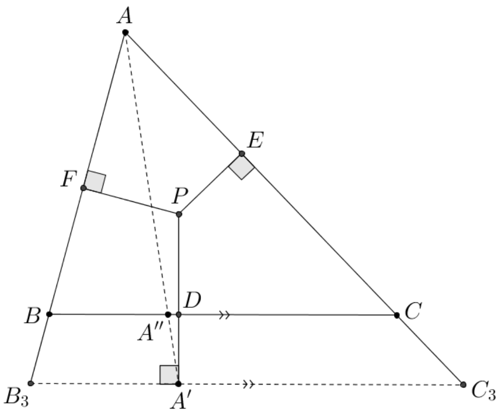
$$\frac{sin(\angle A_۱)}{sin(\angle A_۲)} = \frac{n}{t} = \frac{y}{z}\ \ ,\ \ \frac{sin(\angle B_۱)}{sin(\angle B_۲)} = \frac{t}{m} = \frac{x}{y}\ \ ,\ \ \frac{sin(\angle C_۱)}{sin(\angle C_۲)} = \frac{m}{n} = \frac{z}{x}$$

فرض کنید $n = ky$، بنابراین: $t = kz\ ,\ m = \frac{kyz}{x}$.



اکنون از نقطه A' خطی موازی BC رسم می کنیم تا امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در $B_۳$ و $C_۳$ قطع کند. نقطه A'' تقاطع دوم AA' با BC درنظر بگیرید. بنابر قضیه تالس داریم:

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{B_۳A'}{C_۳A'}$$



فرض کنید $\angle B_۳PA' = \alpha$ و $\angle C_۳PA' = \theta$ باشد. می دانیم چهاضلعی های $PFB_۳A$ و $PEC_۳A'$ محاطی هستند. بنابراین: $\angle B_۳FA' = \alpha$ و $\angle C_۳EA' = \theta$.
بر اساس قضیه سینوس ها در مثلث های $PB_۳A'$ و $PC_۳A'$ و $PC_۳B_۳$ داریم:

$$\frac{B_۳A'}{C_۳A'} = \frac{tan(\alpha)}{tan(\theta)}$$

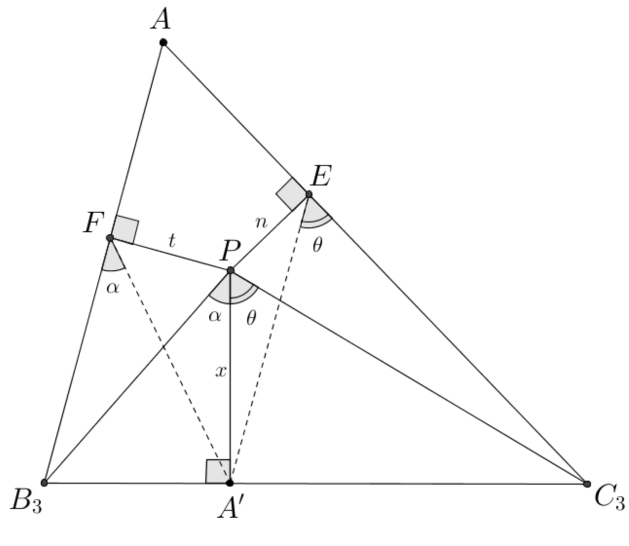
همچنین بر اساس قضیه سینوس ها در مثلث PFA' میتوان گفت:

$$\frac{t}{x} = \frac{sin(\angle B + \alpha - ۹۰)}{cos(\alpha)} = \frac{cos(\angle B + \alpha)}{cos(\alpha)} = cos(\angle B) - tan(\alpha).sin(\angle B)$$

$$\Rightarrow \quad tan(\alpha) = \frac{cos(\angle B) - \frac{t}{x}}{sin(\angle B)}$$

به طریق مشابه می توان نشان داد:

$$tan(\theta) = \frac{cos(\angle C) - \frac{n}{x}}{sin(\angle C)} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_۳A'}{C_۳A'} = \frac{BA''}{CA''} = \frac{x.cos(\angle B) - t}{x.cos(\angle C) - n}.\frac{sin(\angle C)}{sin(\angle B)}$$



نسبت های دیگر به طریق مشابه محاسبه می شوند.برای اثبات حکم بنابر قضیه سوا در مثلث ABC کافی است نشان دهیم:

$$\frac{x.cos(\angle B)-t}{x.cos(\angle C)-n}.\frac{sin(\angle C)}{sin(\angle B)}.\frac{z.cos(\angle C)-m}{z.cos(\angle A)-t}.\frac{sin(\angle A)}{sin(\angle C)}.\frac{y.cos(\angle A)-n}{y.cos(\angle B)-m}.\frac{sin(\angle B)}{sin(\angle A)}=۱$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x.cos(\angle B)-t}{x.cos(\angle C)-n}.\frac{z.cos(\angle C)-m}{z.cos(\angle A)-t}.\frac{y.cos(\angle A)-n}{y.cos(\angle B)-m}=۱$$

از طرفی می دانیم:

$$n=ky \quad , \quad t=kz \quad , \quad m=\frac{kyz}{x}$$

با جایگذاری mو n و t در رابطه بدست آمده برای اثبات حکم به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\Longleftrightarrow \frac{x.cos(\angle B)-kz}{x.cos(\angle C)-ky}.\frac{x.cos(\angle C)-ky}{x.cos(\angle A)-kx}.\frac{x.cos(\angle A)-kx}{x.cos(\angle B)-kz}=۱$$

که این رابطه بدیهی است. بنابر این حکم اثبات می شود.