ص 35

توابع برداری

تعریف: فرض کنیم $x, y, z: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ سه تابع تعریف شده باشند، در این صورت تابع

$$r: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

یک تابع برداری است، که نمایش پارامتری و جهت دار یک منحنی در فضا است. واضح است که $r: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $r(t) = (x(t), y(t))$ هم یک تابع برداری است که نمایش پارامتری یک منحنی در صفحه است.

- دامنه تابع برداری r، اشتراک دامنه توابع x, y, z است یا به عبارت دیگر $D_r = D_x \cap D_y \cap D_z$.

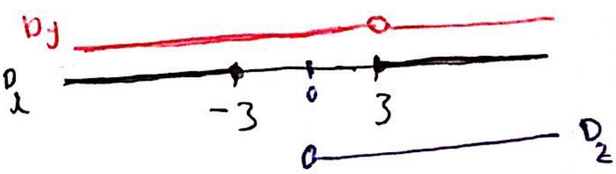
Ex) دامنه تابع $r(t) = \sqrt{t^2-9}\, i + \frac{1}{t-3} j + \ln t\, k$ را بدست آورید.

حل: داریم

$$x(t) = \sqrt{t^2-9} \Rightarrow D_x = \{t \in \mathbb{R} : t^2 - 9 \geq 0\}$$
$$= \{t \in \mathbb{R} : t^2 \geq 9\}$$
$$= \{t \in \mathbb{R} \quad t \geq 3 \text{ یا } t \leq -3\}$$
$$= (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$$

$$y(t) = \frac{1}{t-3} \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

$$z(t) = \ln t \Rightarrow D_z = (0, \infty)$$



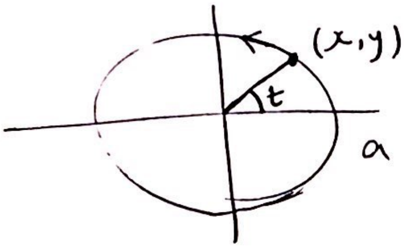
$$D_r = D_x \cap D_y \cap D_z = (3, \infty)$$

چند منحنی پارامتری در صفحه

① دایره پادساعتگرد به مرکز $(0,0)$ و شعاع $a>0$.

$$r(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

یکبار پیموده شده است



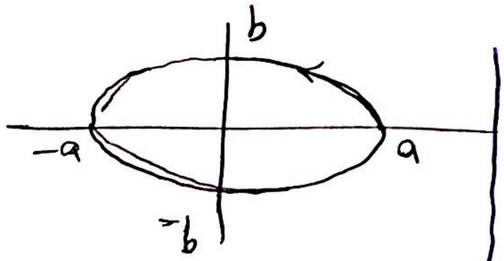
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

---

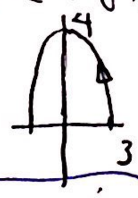
② بیضی پادساعتگرد به مرکز $(0,0)$، طول قطر بزرگ $2a$، طول قطر کوچک $2b$

$$r(t) = a\cos t\, i + b\sin t\, j \qquad 0 \le t < 2\pi$$

$(a > b > 0)$



Ex) برای $r(t) = 3\cos t\, i + 4\sin t\, j$ ، $0 \le t \le \pi$ را شناسایی و رسم کنید.



هر تابع $y = f(x)$ در صفحه را می‌توان به صورت زیر برداری کرد

$$x = t \longrightarrow y = f(t)$$

$$r(t) = t\, i + f(t)\, j$$

Ex) تابع $y = x^2$ را پارامتری کنید

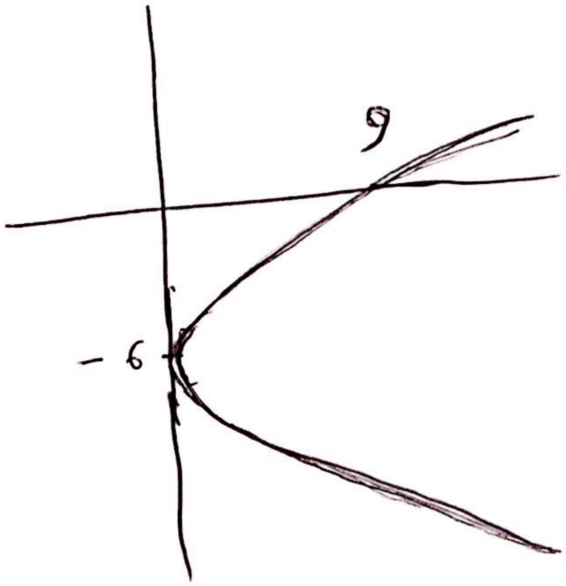
$$r(t) = t\, i + t^2\, j$$

هر تابع $x = f(y)$ در صفحه را می‌توان به صورت زیر برداری کرد

$$y = t \longrightarrow x = f(t) \quad , \quad r(t) = f(t)\, i + t\, j$$

Ex) $r(t)=t^2 i+(2t-6)j$ را شناسایی و رسم کنید

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=2t-6 \end{cases} \longrightarrow t=\frac{y+6}{2} \xrightarrow{x=t^2} x=\left(\frac{y+6}{2}\right)^2$$



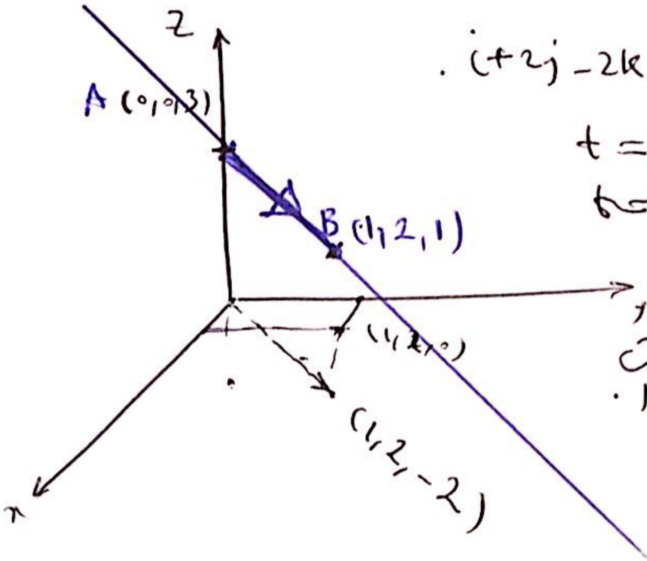
چند منحنی پارامتری در فضا

خطی که از نقطه (x_0,y_0,z_0) می‌گذرد و موازی $\vec{R}=ai+bj+ck$ دارای معادله متقارن $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ است و صورت پارامتری آن عبارت است از:

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

پس $\vec{r}(t)=(at+x_0)i+(bt+y_0)j+(ct+z_0)k$ و $t\in\mathbb{R}$ نمایش برداری یا پارامتری معادله خط گذرنده از نقطه (x_0,y_0,z_0) با هادی $\overline{ai+bj+ck}$.

Ex) برای $r(t) = t\,i + 2t\,j + (-2t+3)\,k$ ، $0 \le t \le 1$ را شناسایی و رسم کنید.



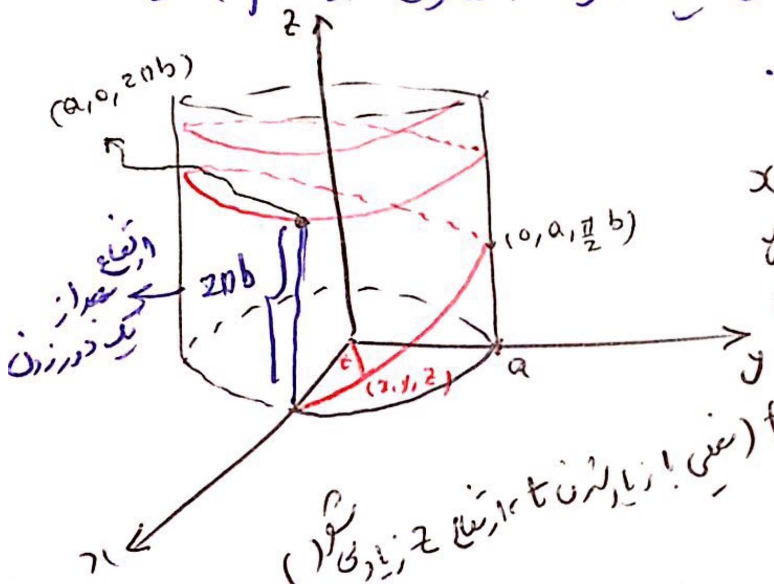
حل: خط گذرنده از $(0,0,3)$ با هادی $i+2j-2k$.

$t=0 \longrightarrow A(0,0,3)$

$t=1 \Longrightarrow B(1,2,1)$

پس $r(t)$ نمایش پاره خط AB است، که از نقطه A به سمت نقطه B پیموده شده است.

Ex) رزوه خارجی یک پیچ را که پیچ آن یک استوانه با معادله $x^2+y^2=a^2$ است $(a>0)$ را پارامتری کنید.



$x(t) = a\cos t$ ، $t \geq 0$

$y(t) = a\sin t$

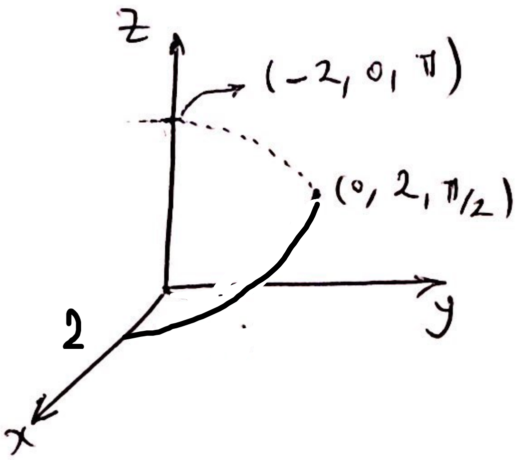
$z(t) \propto t \Longrightarrow z = bt$

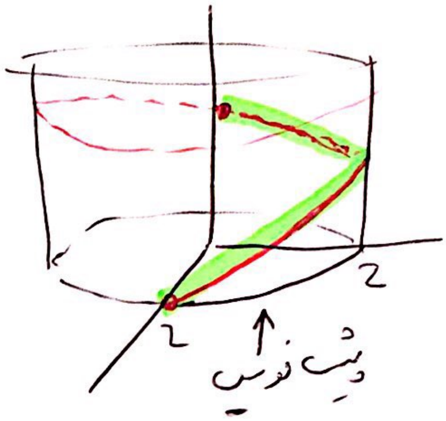
متناسب با t (یعنی با زیاد شدن t ارتفاع z زیاد می‌شود)

ثابت تناسب

پس $r(t) = a\cos t\,i + a\sin t\,j + bt\,k$ ، $t \geq 0$ نمایش برداری رزوه خارجی یک پیچ است که تا بی‌نهایت ادامه دارد. ضریب b اگر کوچک باشد، فاصله بین رزوه‌ها کم و اگر b بزرگ باشد فاصله رزوه‌ها زیاد است. این منحنی به مارپیچ ارشمیدسی معروف است.

Ex) مارپیچ $r(t)=2\cos t\, i+2\sin t\, j+t k$ را برای $0\le t\le \pi$ رسم کنید.





حد، مشتق و انتگرال تابع برداری.

فرض کنید $r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ در این صورت:

$$* \lim_{t\to t_0} r(t)=\lim_{t\to t_0} x(t)\, i+\lim_{t\to t_0} y(t)\, j+\lim_{t\to t_0} z(t)\, k$$

$$* \underbrace{r'(t)}_{\text{یا } \frac{dr}{dt}}=x'(t)\, i+y'(t)\, j+z'(t)\, k$$

$$* \int r(t)\,dt=\left(\int x(t)\,dt+c_1\right) i+\left(\int y(t)\,dt+c_2\right) j+\left(\int z(t)\,dt+c_3\right) k$$

$$* \int_a^b r(t)\,dt=\left(\int_a^b x(t)\,dt\right) i+\left(\int_a^b y(t)\,dt\right) j+\left(\int_a^b z(t)\,dt\right) k.$$

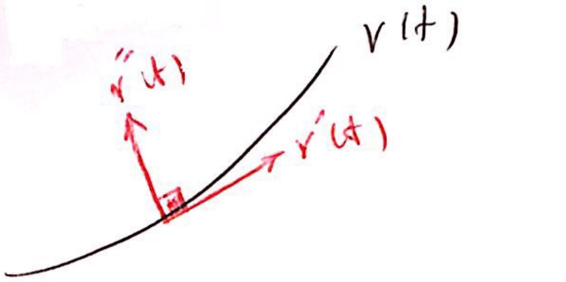
دقت کنید برخی از اوقات می نویسیم $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ در نتیجه مثلاً

$$r'(t)=(x'(t),\, y'(t),\, z'(t)).$$

Scanned with CamScanner

ص ۴۵

اگر فرض کنیم $r(t)$ بردار موضع یک ذره متحرک باشد، در این صورت $r'(t)$ بردار سرعت آن، $r''(t)$ بردار شتاب آن است و آنها را به ترتیب با $V(t)$ و $a(t)$ نشان می دهیم. و از نظر هندسی $r'(t)$ بردار مماس بر منحنی $r(t)$ است و $r''(t)$ بردار عمود به $r'(t)$ است که جهت آن به سمت خمیدگی منحنی است به شرط آنکه $\|r'\|$ مقدار ثابت باشد.



Ex $r(t) = \cos t\, i + 3\, tg\, t\, j + 5t^2 k$

$V(t), a(t) = ?$

حل: با توجه به توضیحات بالا، r' و r'' را بدست می آوریم، پس

$$r'(t) = V(t) = -\sin t\, i + 3\sec^2 t\, j + 10t\, k$$

$$r''(t) = a(t) = -\cos t\, i + 6 \sec t \sec t\, tg\, t\, j + 10k$$

یا $r''(t) = a(t) = -\cos t\, i + 6\sec^2 t\, tg\, t\, j + 10k.$

اگر قرار باشد مثلاً بردارهای $V(0)$، $a(0)$ بدست آوریم، می نویسیم

$$V(0) = 0i + 3j + 0k = (0,3,0)$$

$$a(0) = -i + 0j + 10k = (-1,0,10)$$

ص ۹۱

۱۶۴ معادله خط مماس بر منحنی $r(t)=\cos t\, i+\sin t\, j+t k$ را در نقطه $t=\frac{\pi}{2}$ بنویسید.

حل:

$$r(\pi/2) = 0i + 1j + \pi/2\, k = \underbrace{(0, 1, \pi/2)}_{\text{نقطه تماس}}$$

با توجه به توضیحات بالای صفحه ۴۵، هادی خط مماس همان بردار $r'(\pi/2)$ است، پس می‌نویسیم

$$r'(t) = -\sin t\, i + \cos t\, j + k$$

$$r'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$$

حال کافی معادله خط گذرنده از $(0, 1, \pi/2)$ با هادی $(-1, 0, 1)$ را بنویسیم

$$\frac{x-0}{-1} = \frac{z-\pi/2}{1}, \quad y=1$$

و معادله پارامتری آن

$$\begin{cases} x = -t \\ z = t+\pi/2 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ y = 1 \end{cases}$$

یا $r(t) = -t i + j + (t+\pi/2) k \; ; t\in\mathbb{R}$

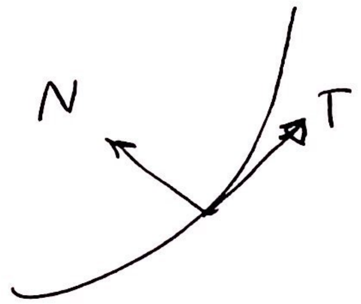
تعریف:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$ بردار یکه مماس

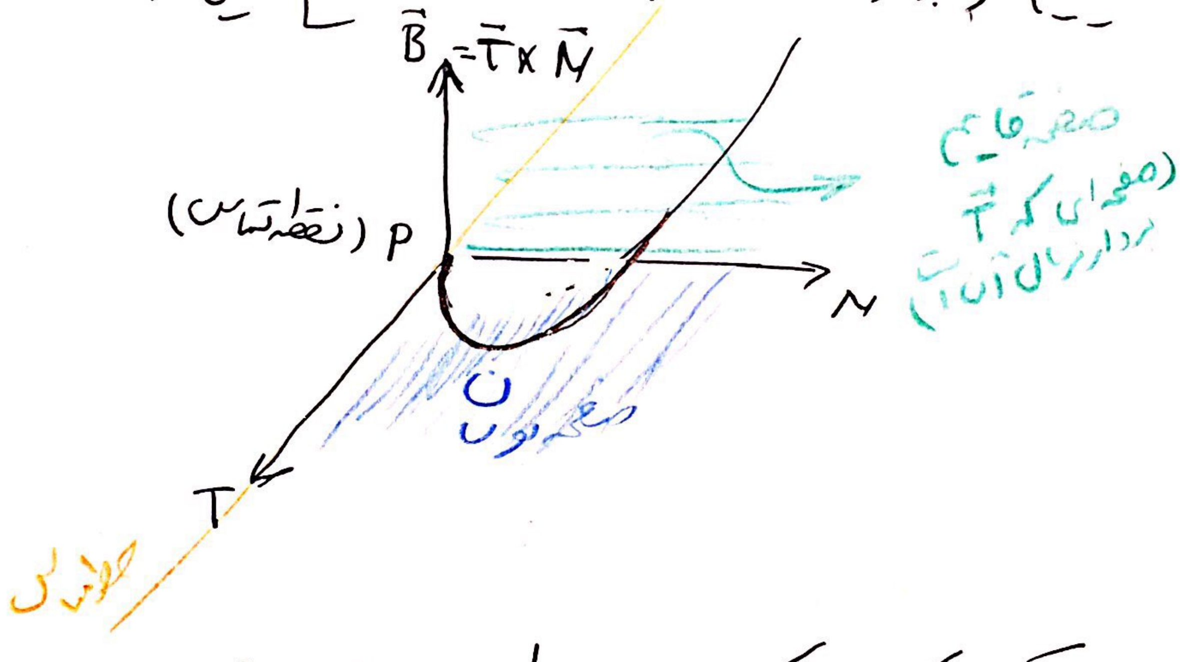
$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$ بردار یکه قائم

دقت کنید r' با T هم جهت هستند و r'' با N هم جهت هستند، پس

$\vec{T}$ مماس به منحنی و $\vec{N}$ عمود بر منحنی به سمت خمیدگی آن است.



تعریف: بردارهای یکه $\vec{T}$ و $\vec{N}$ وقتی از منحنی فضایی $\vec{r}(t)$ در نقطه تماس P در یک صفحه واقع اند. صفحه‌ای که شامل بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و گذرنده از نقطه P دارای بردار نرمال $\vec{T}\times\vec{N}$ است، به این صفحه، صفحه بوسان یا مماس منحنی $\vec{r}(t)$ گوییم و بردار نرمال آن را با $\vec{B}$ نشان می‌دهیم. یعنی $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$.



دقت کنید که در شکل بالا، سه مطلب درسی آورده شده است:

① خط مماس که هادی آن $\vec{T}$ یا $\vec{r}'$ است

② صفحه قائم که نرمال آن $\vec{T}$ یا $\vec{r}'$ است

③ صفحه مماس که نرمال آن $\vec{T}\times\vec{N}$ = B یا ... است.

EX) خط مماس، صفحه قائم، صفحه بوسان به منحنی ارشمیدسی

$r(t) = 2\cos t\, i + 2\sin t\, j + t k$ را در نقطه $t = \pi/6$ بنویسید.

حل:

$$r(\pi/6) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} i + 2 \times \frac{1}{2} j + \pi/6\, k = (\sqrt{3}, 1, \pi/6)$$ (نقطه تماس)

$$r'(t) = -2\sin t\, i + 2\cos t\, j + k \longrightarrow r'(\pi/6) = -i + \sqrt{3} j + k$$

(هادی خط مماس، نرمال صفحه قائم)

$$r''(t) = -2\cos t\, i - 2\sin t\, j + 0k \Rightarrow r''(\pi/6) = -\sqrt{3} i - j + 0k$$

$$r'(\pi/6) = (-1, \sqrt{3}, 1)$$

$$r''(\pi/6) = (-\sqrt{3}, -1, 0)$$

$$r'(\pi/6) \times r''(\pi/6) = (1, -\sqrt{3}, 1+3)$$ (نرمال صفحه بوسان)

معادله خط مماس: $$\frac{x - \sqrt{3}}{-1} = \frac{y - 1}{\sqrt{3}} = \frac{z - \pi/6}{1}$$

معادله صفحه قائم: $$-1(x - \sqrt{3}) + \sqrt{3}(y - 1) + 1(z - \pi/6) = 0$$

معادله صفحه بوسان: $$1(x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(y - 1) + 4(z - \pi/6) = 0$$

ص 44) اگر فرض کنید $\vec{r}(t) = i + tj + t^2k$، مطلوبست $\vec{T}(0)$, $\vec{N}(0)$, $\vec{B}(0)$.

حل:

$$\vec{r}'(t) = j + 2tk \longrightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$T(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\, j + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\, k \Rightarrow T(0) = j + 0k$$

$$(1+4t^2)^{-1/2}$$

$$T'(t) = -\frac{1}{2}(8t)(1+4t^2)^{-\frac{3}{2}}\, j + \left(2(1+4t^2)^{-1/2} + 2t\left(-\frac{1}{2}\right)(8t)(1+4t^2)^{-\frac{3}{2}}\right) k$$

$$\left.\begin{array}{l} T'(0) = 0j + 2K \\ \|T'(0)\| = 2 \end{array}\right\} \rightarrow N(0) = \frac{2\bar{k}}{2} = \bar{k}$$

$$B(0) = T(0) \times N(0) = j \times k = +i$$

$j = (0, 1, 0)$

$k = (0, 0, 1)$

$j \times k = (1, 0, 0) = i$

64) اگر در لحظه $t=0$ سرعت متحرک $i+j$ و $\vec{a}(t)=6ti+e^{t}j$ ص45
مطلوبست محاسبه $\vec{v}(1)$ ، $\vec{a}(1)$.

حل : بنابه فرض مساله

$$V(0)=r'(0)=i+j$$

و

$$a(t)=v'(t)=r''(t)=6ti+e^{t}j$$

پس

$$a(1)=6i+e^{1}j=6i+ej$$

$$v(t)=\int a(t)\,dt=\left(\int 6t\,dt+c_1\right)i+\left(\int e^{t}dt+c_2\right)j$$

$$v(t)=(3t^2+c_1)i+(e^{t}+c_2)j \xrightarrow{V(0)=i+j}$$

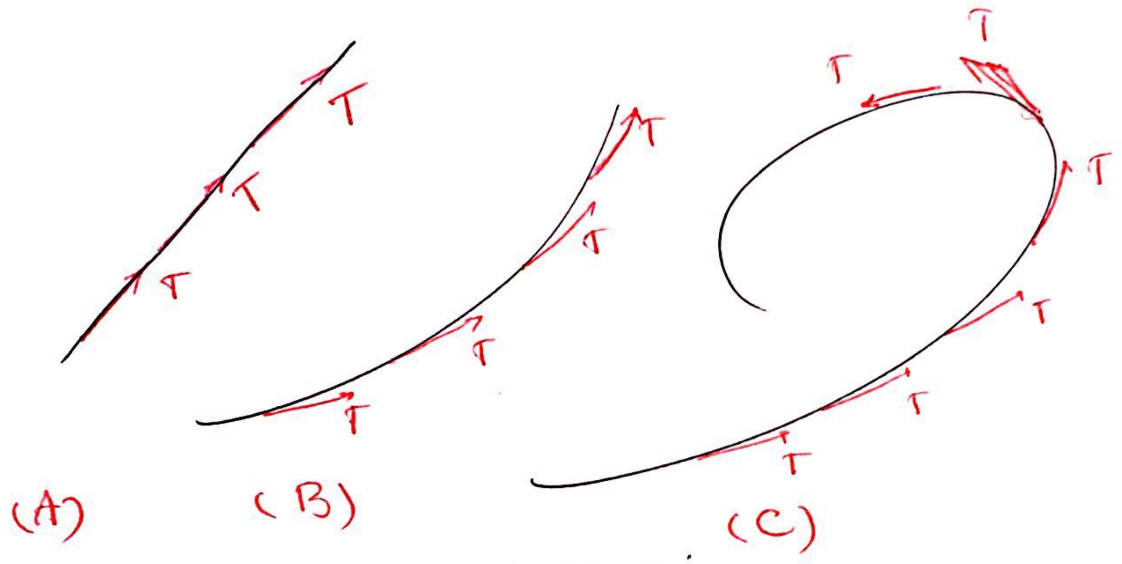
$$(0+c_1)i+(e^{0}+c_2)j=i+j \Rightarrow \begin{cases} 0+c_1=1 \rightarrow c_1=1 \\ 1+c_2=1 \Rightarrow c_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t)=(3t^2+1)i+e^{t}j$$

$$\Rightarrow v(1)=4i+ej$$

انحنا یا خمیدگی

تعریف: اندازه آهنگ تغییرات بردار $\vec{T}$ نسبت به طول قوس را انحنای یک منحنی می‌نامیم، و آن را با κ (کاپا) نشان می‌دهیم. وارون انحنا در هر نقطه را شعاع انحنا می‌نامیم و آن را با ρ نشان می‌دهیم و $\rho = \frac{1}{\kappa}$.



انحنای C > انحنای B > انحنای A = 0

① فرمول مفید برای محاسبه‌ی انحنای منحنی فضایی $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ در نقطه‌ی t برابر است با:

$$\kappa(t) = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$$

Ex – انحنای منحنی ارشمیدی $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ را بیابید.

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \Rightarrow \|r'\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$r''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$r'(t) \times r''(t) = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)$$

$$r'(t) \times r''(t) = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\|r'(t) \times r''(t)\| = \sqrt{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = \sqrt{a^2b^2 + a^4}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3} = \frac{\sqrt{a^2(b^2+a^2)}}{(a^2+b^2)^{3/2}} \overset{a>0}{=} \frac{a\sqrt{\cancel{a^2+b^2}}}{(a^2+b^2)\sqrt{\cancel{a^2+b^2}}}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}$$

انحنای منحنی مارپیچ همین طور که می‌بینید به t وابسته نیست یعنی در هر نقطه از منحنی مقدار آن $\frac{a}{a^2+b^2}$ است.

---

② فرمول مفید برای محاسبه انحنای $r(t) = x(t)i + y(t)j$ (منحنی در صفحه) در نقطه t برابر است با:

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \qquad \left(x' = \frac{dx}{dt},\ y' = \frac{dy}{dt},\ x'' = \frac{d^2x}{dt^2},\ y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \right)$$

EX) انحنا و شعاع انحنای منحنی $r(t) = 2e^t i + 2e^{-t} j$ را در $t=0$ به دست آورید.

$$\begin{cases} x = 2e^t \\ y = 2e^{-t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 2e^t \\ y' = -2e^{-t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x'' = 2e^t \\ y'' = 2e^{-t} \end{cases}$$

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} = \frac{|4e^0 + 4e^0|}{(4e^{2t}+4e^{-2t})^{3/2}}$$

$$\kappa(0) = \frac{8}{(8)^{3/2}} = \frac{8}{8\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\rho(0) = 2\sqrt{2}.$$

ص 43

③ فرمول مفید برای محاسبه انحنای منحنی به صورت $y=f(x)$ در نقطه (x,y)

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

برابر است با

$$\begin{cases} y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}, \\ y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \end{cases}$$

Ex) انحنا و شعاع انحنای منحنی $y = \ln x$ را در نقطه $(1,0)$ به دست آورید.

حل:

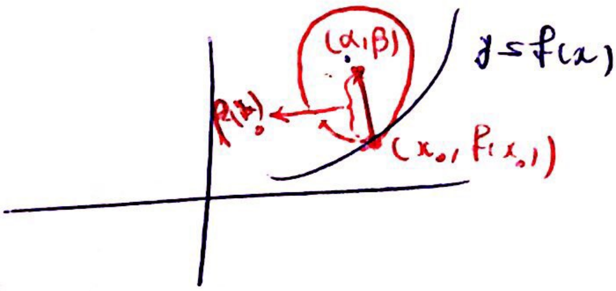
$$y = \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x} \Longrightarrow y'' = \frac{-1}{x^2}$$

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Longrightarrow \kappa(x) = \frac{\left|\frac{-1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}$$

$$\kappa(1) = \frac{|-1|}{(1+1)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow \rho(1) = 2\sqrt{2}.$$

دایره مماس (یا بوسان یا انحنا)

تعریف: دایره ای که در هر نقطه بر یک منحنی در صفحه مماس است و مرکز آن به سمت خمیدگی، و شعاع آن همان شعاع انحنا (ρ) است دایره انحنا یا دایره مماسی یا دایره بوسان نام دارد.



* (α,β) مرکز دایره مماس منحنی $y=f(x)$ در نقطه (x,y) عبارتست از:

$$
\circledast\begin{cases}
\alpha = x - \dfrac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \times \dfrac{dy}{dx} \overset{\text{یا}}{=} x - \dfrac{1+(f'(x))^2}{f''(x)} \times f'(x). \\[2ex]
\beta = y + \dfrac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \overset{\text{یا}}{=} y + \dfrac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}.
\end{cases}
$$

● ~~EX~~ معادله دایره مماس $y=\ln x$ را در نقطه $(\overset{x}{1},\overset{y}{0})$ را بدست آورید

حل: از مثال قبل بدست آوردیم $\rho(1)=2\sqrt{2}$ و

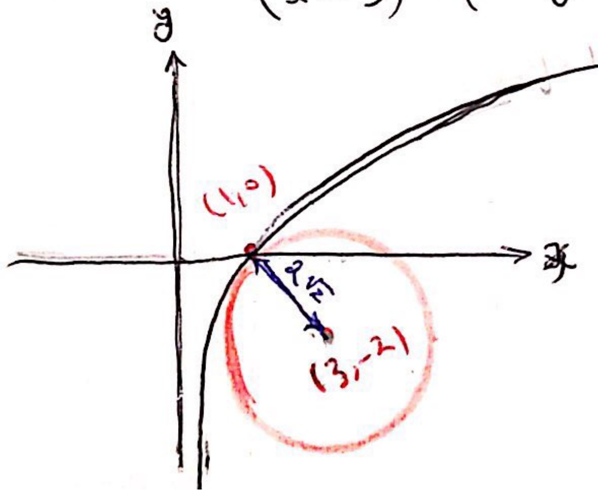
$$
\begin{cases} y' = f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(1) = 1 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} y'' = f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} \\ f''(1) = -1 \end{cases}
$$

$$
\overset{\circledast}{\longrightarrow}\begin{cases}
\alpha = 1 - \dfrac{1+(1)^2}{-1} \times 1 = 3. \\[2ex]
\beta = 0 + \dfrac{1+(1)^2}{-1} = -2
\end{cases}
$$

●

معادله به مرکز $(3,-2)$ و شعاع $2\sqrt{2}$ برابر است با:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8.$$



ص 50

6) شعاع دایره مماس منحنی $r(t)=2\cos t\, i+3\sin t\, j$ را در نقطه $(0,3)$ را $(0\le t\le 2\pi)$ بدست آورید

حل:
$$\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=3\sin t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x'(t)=-2\sin t \\ y'(t)=3\cos t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x''(t)=-2\cos t \\ y''(t)=-3\sin t \end{cases}$$

$$r(?)=\overset{x}{\overset{\parallel}{0}}i+\overset{y}{\overset{\parallel}{3}}j \Rightarrow t=\pi/2$$

$$\begin{cases} x'(\pi/2)=-2 \\ y'(\pi/2)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x''(\pi/2)=0 \\ y''(\pi/2)=-3 \end{cases}$$

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\left|x'(\frac{\pi}{2})\,y''(\frac{\pi}{2})-x''(\pi/2)\,y'(\pi/2)\right|}{\left((x'(\pi/2))^2+(y'(\pi/2))^2\right)^{3/2}}=\frac{|6-0|}{(4+0)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{6}{4\sqrt{4}}=3/4 \Rightarrow \rho(\pi/2)=\frac{4}{3}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}\cot g\, t$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/2}=0$$

برای راحتی f فرض کنیم

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\Big(\overbrace{-\frac{3}{2}\cot g\, t}^{f}\Big)=\frac{df}{dt}\,\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{df/dt}{dx/dt}=\frac{+\frac{3}{2}\csc^2 t}{-2\sin t}=\frac{-3}{4}\csc^3 t.$$

[redacted]

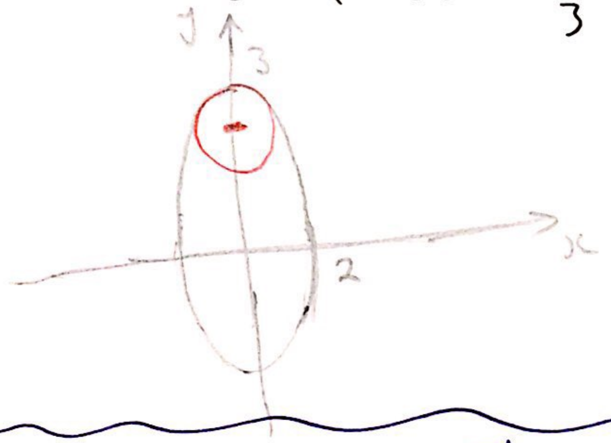
ص ۵۱

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/2} = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}.$$

$$* \begin{cases} \alpha = x - \dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \dfrac{dy}{dx} = 0 - \dfrac{1+0^2}{-\frac{3}{4}} \times 0 = 0 \\[2ex] \beta = y + \dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 3 + \dfrac{1+0}{-\frac{3}{4}} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

معادله دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{5}{3})$، شعاع $\frac{4}{3}$ عبارتست از:

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$



تعریف: اندازه آهنگ تغییرات بردار $\vec{B}$ نسبت به طول قوس را تاب یک منحنی گوییم و آن را با τ نشان می‌دهیم و برای محاسبه تاب یک منحنی به معادله $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$\tau(t) = \frac{|r''' \cdot (r' \times r'')|}{\|r' \times r''\|^2}.$$

ص52

سوال : آیا می توانید راجع تاب (انحنای) مثال ملموس بزنید ؟

Ex) تاب منحنی ارشمیدسی $r(t)=a\cos t\, i+a\sin t\, j+bt\, k$ را بدست آورید .

حل :

$$r'=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$

$$r''=(-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$

$$r'\times r''=(ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2)\Rightarrow \|r'\times r''\|=\sqrt{a^2b^2+a^4}$$

$$r'''=(a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

$$r'''\cdot(r'\times r'')=a^2b\sin^2 t+a^2b\cos^2 t=a^2b\,\overbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}^{1}=a^2b$$

$$\tau(t)=\frac{|r'''\cdot(r'\times r'')|}{\|r'\times r''\|^2}=\frac{a^2b}{a^2b^2+a^4}=\frac{\cancel{a^2}\,b}{\cancel{a^2}(b^2+a^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

تاب منحنی ارشمیدسی مانند انحنای آن به نقطه t بستگی ندارد و در هر نقطه مقدار ثابت $\frac{b}{a^2+b^2}$ است.

سوال : اگر یک منحنی در صفحه باشد تاب آن چه مقداری است ؟

سوال : در چه صورتی یک منحنی در یک صفحه قرار دارد .

Ex) آیا منحنی $r(t)=t^2 i+(1-3t)j+(4t-2)k$ در یک صفحه قرار دارد ؟

اگر پاسخ شما مثبت است آن صفحه را بیابید .