ویرایش سوم

ریاضی عمومی (۱)

جلد اول

قابل استفاده برای داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد و دکتری
مرجع کامل کمک درسی برای رشته های علوم پایه و فنی مهندسی

- خلاصه درس، مثالهای آموزشی و نکات کاربردی
- خلاصه نکات مهم در انتهای هر فصل
- سوالات آزمونهای فنی و مهندسی و علوم پایه دانشگاه سراسری و آزاد
- ۱۶۰۰ مثال و تست با پاسخ تشریحی
- آزمونهای جامع در انتهای هر فصل شامل ۶۰۰ تست با پاسخ کلیدی

مسعود آقاسی

بسم الله الرحمن الرحیم

ویرایش سوم

ریاضی عمومی ۱
جلد اول

قابل استفاده برای داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد و دکتری دانشگاه سراسری و آزاد

مرجع کامل کمک درسی برای رشته‌های علوم پایه و فنی مهندسی

نویسنده: مسعود آقاسی

سایت پشتیبان: www.m-aghasi.ir

انتشارات پویا
مشهد- خیابان سعدی- پاساژ مهتاب
تلفن: ۲۲۵۷۳۳۲

نشر نگاه دانش

سرشناسه : آقاسی، مسعود
عنوان و نام پدیدآور : ریاضی عمومی ۱ قابل استفاده برای داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد دانشگاه سراسری و آزاد مرجع کامل کمک درسی برای رشته‌های علوم پایه و فنی مهندسی / نویسنده مسعود آقاسی.
وضعیت ویراست : ویراست ۲
مشخصات نشر : تهران: نگاه دانش، ۱۳۸۹.
مشخصات ظاهری : ۲ ج.: جدول، نمودار.
شابک : ج ۱: ۴-۰۵۵-۱۵۷-۹۶۴-۹۷۸ ج ۲: ۸-۰۵۷-۱۵۷-۹۶۴-۹۷۸
دوره: ۱-۰۵۶-۱۵۷-۹۶۴-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : دانشگاهها و مدارس عالی — ایران — آزمونها.
موضوع : ریاضیات — راهنمای آموزشی (عالی).
موضوع : ریاضیات — آزمونها و تمرینها (عالی).
موضوع : آزمونهای دوره‌های تحصیلات تکمیلی — ایران.
رده‌بندی کنگره : QA ۳۷/۲/م ۳۶آ ۸۷ ۱۳۸۹
رده‌بندی دیویی : ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی : ۲۰۲۰۰۸۲

انتشارات نگاه دانش

◆ نام کتاب :	ریاضی عمومی ۱ (جلد اول)
◆ مؤلف :	مسعود آقاسی
◆ ناشر :	نگاه دانش
◆ طراح :	مرتضی فرزاد
◆ حروف‌نگاری، صفحه‌آرایی:	محمد حسین مشتاق / منصور برزگری
◆ نوبت چاپ:	یازدهم (ویرایش سوم) - ۹۳
◆ تیراژ:	۵,۰۰۰ نسخه
◆ قیمت :	۲۵,۰۰۰ تومان
◆ لیتوگرافی / چاپ / صحافی:	باختر / شاهین / کیمیا
◆ شابک:	۴-۰۵۵-۱۵۷-۹۶۴-۹۷۸
◆ شابک دوره:	۱-۰۵۶-۱۵۷-۹۶۴-۹۷۸

حق چاپ محفوظ و مخصوص ناشر است

انتشارات نگاه دانش: انقلاب - خ ۱۲ فروردین - ساختمان ناشران پلاک ۲۷۱ - ط ۲ - واحد ۲
تلفن : ۶۶۹۵۴۸۹۲ تلفکس: ۶۶۴۸۶۱۵۴

تقدیم به

پدر ، مادر و همسرم

و تقدیم به

هدیهٔ آسمانیم ثنا

ستایش می‌کنم آن سرچشمه علم و فضیلت را که قدرت آموختن و آموزش را به من عطا فرمود.

ریاضی عمومی و معادلات دیفرانسیل به عنوان دروس مشترک بین اغلب رشته‌های علوم پایه و فنی مهندسی، مورد توجه طراحان سؤال برای آزمونهای کارشناسی ارشد و دکتری قرار گرفته است. اهمیت ویژه این دروس برای دانشجویان رشته‌های مختلف و تأثیر زیاد آنها در موفقیت داوطلبان در کنکور، مؤلف را به پدید آوردن این مجموعه متمایل نمود تا ***منبعی غنی و کامل از نکات مهم و کلیدی و مباحث مورد سؤال در کنکورهای کارشناسی ارشد و دکتری علوم پایه و فنی مهندسی فراهم کند و دانشجویان و داوطلبان را با پرسشهای مطرح شده در این دروس و نحوه پاسخگویی صحیح به آنها آشنا نموده و آنها را از مراجعه به سایر منابع بی‌نیاز گرداند.***

مجموعه کتابهای حاضر، حاصل تجربه تدریس در دروس ریاضی عمومی و معادلات دیفرانسیل از سال ۱۳۷۸ در دانشگاه صنعتی شریف به عنوان دستیار آموزشی، کلاسهای کنکور کارشناسی ارشد در این دانشگاه و دانشگاه تهران و امیرکبیر و علم و صنعت و مؤسسات مختلف آموزشی می‌باشد.

آنچه در این کتاب آورده شده است می‌تواند به عنوان یک مرجع کامل و کمک درسی شامل خلاصه درس، تمرینهای جامع و آموزشی و گردآوری مسائل متنوع و پاسخگویی به آنها، جهت حل مسائل امتحانی در درس ریاضی عمومی (۱) مورد استفاده دانشجویان قرار گیرد زیرا:

۱) مطالب ارائه شده در این کتاب توانسته است کلیه مباحث مورد نظر آموزش عالی را پوشش دهد.

۲) در برخی تستها که به آسانی و با حذف گزینه‌ها، قابل پاسخگویی است، مؤلف به این روش اکتفا ننموده و توضیحات اضافی برای حل سؤال به صورت جامع، ارائه کرده است.

کتاب حاضر (جلد اول ریاضی عمومی ۱) علاوه بر خلاصه درس و نکات جامع آموزشی، شامل ۱۶۰۰ مثال و تست با پاسخ تشریحی و خودآزمایی‌هایی شامل ۶۰۰ تست با پاسخ کلیدی در انتهای فصول می‌باشد.

اغلب سؤالات موجود در این کتاب، شامل تستهای مطرح شده در کنکورهای کارشناسی ارشد رشته‌های مختلف علوم پایه و فنی مهندسی در دانشگاه سراسری و آزاد از ابتدا تا سال ۱۳۸۲ می‌باشد. (سؤالات مطرح شده در کنکور ارشد و دکتری از سال ۱۳۸۳ به بعد در جلد دوم گردآوری شده‌اند).

مؤلف بنابر صلاحدید خود درصدد اصلاح سؤالات مبهم و دارای اشکال کنکور بر آمده و صورت صحیح آنها را در کتاب آورده است و در مواردی که سؤالی در کنکورهای مختلف تکرار شده، صورت سؤال را براساس اولین دوره‌ای که سؤال مطرح شده، ذکر نموده و سپس به سایر

رشته‌هایی که این سؤال در آنها تکرار شده، اشاره کرده است. ضمناً سؤالاتی که در کتاب بدون ذکر منبع ملاحظه می‌نمایید، تستهای تألیفی می‌باشند که برای جامع بودن کتاب، غالباً از تمرینها یا مثالهای کتب معتبر دانشگاهی یا سؤالات امتحانی استخراج شده و به گونه‌ای گزینش شده‌اند که مطالب درسی در آنها مرور گردد.

راهنمای مطالعه کتاب (ارائه پیشنهاد برای مطالعه بهینه کتاب)

غالباً اولین سؤال مطرح شده در مواجهه با این کتاب، آن است که آیا نیازی به مطالعه کلیه مطالب برای یادگرفتن درس ریاضی عمومی (۱) می‌باشد؟!!

در ویرایش جدید (ویرایش سوم) این سری کتابها، برای هر یک از دروس ریاضی عمومی (۱)، ریاضی عمومی (۲) و معادلات دیفرانسیل دو جلد کتاب تدوین شده است. جلد اول به ذکر مطالب و نکات درسی به طور کامل همراه با مثال و تست (تستهای تا سال ۱۳۸۲ در کنکورهای ارشد) پرداخته است و در جلد دوم سؤالات کنکور از ۸۳ به بعد به تفکیک رشته همراه با پاسخ تشریحی گردآوری شده است.

برای مطالعه بهینه این کتاب مطالبی را ذکر می‌کنیم که باید با دقت به آنها توجه نمایید:

ساختار جلد اول (ریاضی عمومی ۱) به گونه‌ای در نظر گرفته شده که دانشجویان یا داوطلبان کنکور فقط با مطالعه نیمی از مباحث می‌توانند ریاضی (۱) را فرا بگیرند.

این کتاب شامل هفت فصل و هر فصل نیز شامل پنج قسمت می‌باشد.

- قسمت اول هر فصل (که فصل با آن شروع می‌شود) شامل ارائه مباحث درسی، نکات تستی و کلیدی برای حل تستهای کنکور یا سؤالات امتحانی و تعدادی مثال و تست برای تمرین و یادگیری بهتر نکات و فرمولهای بیان شده در هر فصل بوده که در مجموع شامل ۶۵۰ سؤال با پاسخ تشریحی می‌باشد. در انتهای این قسمت نیز خلاصه نکات مهم مطرح شده در فصل، ذکر شده است.

مطمئناً بهترین راه حل برای یادگیری نکات و روابط ریاضی، تمرین و تکرار و استفاده از آنها در حل مسأله است و لذا دانشجویان برای یادگرفتن مطالب درسی و حل سؤالات کنکور باید به کلیه مثالها و تستهای موجود در این قسمت (که مجموع نیمی از کل کتاب را شامل می‌گردند) توجه کنند. این مثالها و تستها به نحوی گزینش شده‌اند که شامل انواع مختلف تست (از نظر درجه سادگی یا دشواری) بوده و بر همین اساس نیز طبقه‌بندی شده‌اند و مهمترین سؤالات مطرح شده در هر مبحث را تشریح می‌کنند.

توجه کنید که در این قسمت برخی سؤالات با نماد مشخص شده‌اند که معمولاً سؤالات دشوار هستند و لذا در مطالعه اولیه کتاب می‌توانید از آنها عبور نمایید. تلاش شده که مباحث درسی در این قسمت کامل و جامع باشند و حتی برای مواردی که در کنکورها به ندرت مورد سؤال قرار گرفته‌اند نیز مبحث درسی لازم به طور کامل ذکر گردیده است که شما بنا به صلاحدید خود می‌توانید از آنها عبور نموده یا وقت کمتری را برای مطالعه آنها صرف نمایید. (لیست دقیقی از این موارد را می‌توانید در منوی «اطلاعات مهم کنکور» در سایت www.m-aghasi.ir ملاحظه نمایید.)

- قسمت دوم هر فصل «تستهای تکمیلی سطح ۱» خواهد بود که در آن سؤالاتی که کلیه مطالب و نکات مهم را پوشش دهند براساس طبقه‌بندی مباحث هر فصل و درجه سختی مرتب شده و در مجموع شامل سؤالات ساده یا متوسط می‌باشند. چنانچه دانشجویان با حل سؤالات قسمت اول، تسلط کافی را بر مبحثی کسب نکرده باشند می‌توانند با مراجعه به این قسمت، سؤالات مربوط به آن مبحث را حل نمایند. این قسمت در مجموع شامل ۷۰۰ تست است.
- قسمت سوم هر فصل «تستهای تکمیلی سطح ۲» می‌باشد که در آن تستهای متوسط یا دشوار طوری گزینش شده‌اند که کلیه مباحث را پوشش دهند. سؤالاتی که در این قسمت با علامت مشخص می‌شوند، برای دانشجویانی که ریاضیات آنها قوی باشد، در نظر گرفته شده است. سؤالات قسمت سوم فاقد طبقه‌بندی موضوعی هستند ولی تلاش شده است که کلیه مباحث مهم هر فصل را بپوشانند. دانشجویانی که تسلط کافی بر قسمت اول کسب نموده‌اند (در صورت داشتن وقت کافی) می‌توانند به این قسمت مراجعه نمایند. این قسمت در مجموع شامل ۲۵۰ تست می‌باشد.
- قسمت چهارم هر فصل «خودآزمایی سطح ۱» می‌باشد. تعدادی از سؤالات کنکور یا تألیفی براساس طبقه‌بندی مطالب درسی در هر فصل و برحسب درجه سختی (عمدتاً سؤالات ساده و متوسط) در این قسمت به نحوی مرتب شده‌اند که کلیه مباحث را پوشش دهند و پاسخ کلیدی آنها در انتهای کتاب آمده است. دانشجویان پس از مطالعه قسمت اول و دوم به صلاحدید خود، (برای ارزیابی آنچه در آن فصل آموخته‌اند) می‌توانند به سؤالات این قسمت مراجعه نمایید. خودآزمایی سطح ۱ در مجموع شامل ۴۳۰ تست است.
- قسمت پنجم هر فصل «خودآزمایی سطح ۲» می‌باشد که شامل سؤالات متوسط یا دشوار و عمدتاً تألیفی است که طبقه‌بندی موضوعی برای آن در نظر گرفته نشده است. ولی تلاش شده

است کلیه مباحث و نکات مهم را پوشش دهد. دانشجویان در صورت مطالعه قسمت اول و سوم در صورت داشتن وقت، برای ارزیابی آموخته‌های خود می‌توانند به سؤالات این قسمت مراجعه نمایند. این قسمت در مجموع شامل بیش از ۱۷۰ تست، با پاسخ کلیدی است.

لازم به ذکر است که مطالعه دقیق مباحث و تست و مثالهای قسمت اول (که در مجموع حدود نیمی از حجم کتاب را شامل می‌شود) نقش مهمی در پاسخگویی به سؤالات کنکور خواهد داشت و در صورت نداشتن وقت و حوصله کافی برای مطالعه کل کتاب، بررسی مباحث و سؤالات قسمت اول می‌تواند کافی باشد.

برای راهنمایی داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد و دکتری برای مطالعه بهتر این کتاب و توضیحات کامل درباره بهترین روش ممکن برای مطالعه این مجموعه و معرفی تستها و مطالبی که اهمیت بیشتری در کنکور دارند و جایگاهی برای پرسش و پاسخ دانشجویان با مؤلف و ارائه پیشنهاد برای رفع نقایص موجود در این مجموعه، یک سایت پشتیبان به آدرس www.m-aghasi.ir در نظر گرفته شده است.

وظیفه خود می‌دانم از آقایان محمد حسین مشتاق و منصور برزگری برای حروفچینی کتاب، آقای مرتضی فرزاد برای طراحی جلد، مدیریت محترم و کارمندان مؤسسه نگاه دانش برای چاپ و نشر این کتاب و بالاخره همسر عزیزم که تمام اوقاتی که برای تهیه این کتاب صرف کردم به وی تعلق داشت، تشکر و قدردانی نمایم.

مسعود آقاسی

فهرست

۳ـ مشتق

۴ـ انتگرال

۵ـ مختصات قطبی

۶ـ اعداد مختلط

۷ـ دنباله و سری

فصل ۱

تابع

این فصل اختصاص به بیان مقدماتی در مورد تابع و بررسی انواعی از آنها دارد که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. [1]

۱—۱ تعاریف اولیه

۱) تعریف تابع

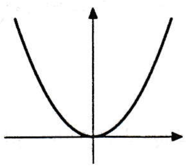
تابع f قاعده‌ای به صورت $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ است که به هر عضو x از A حداکثر یک عضو $y = f(x)$ از مجموعه B را نسبت می‌دهد. در این حالت y را **تصویر** x تحت f می‌نامیم.

تذکر۱. اگر A یا B ذکر نشوند، آنها را برابر $\mathbb{R}$ می‌گیریم و در این صورت f یک **تابع حقیقی** نامیده می‌شود.

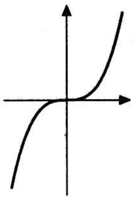
۲) تعریف نمودار

نمودار f عبارت است از مجموعه زوج‌های مرتب $(x, f(x))$ که در صفحه مختصات مشخص می‌شود.

مثال ۱. تابع $f(x) = x^n$ یک تابع حقیقی است که نمودار آن برای n های زوج و فرد به دو شکل زیر است.



n زوج



n فرد

تذکر۲. اگر فرمولی شامل x و y داده شود، یک رابطه توسط آن مشخص می‌شود. اگر در نمودار یک رابطه، هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، رابطه مورد نظر یک تابع را مشخص می‌کند.

---

[1] من همیشه در کلاس به دانشجویان توصیه می‌کنم فصل ۱ را به عنوان یک «مرجع» در نظر بگیرند که فرمولها و روابط موجود بین توابع در آن گردآوری شده است. الزامی بر حفظ کردن (و سپس فراموش کردن!!) جزئیات و روابط بین توابع (فرمولهای مثلثاتی، نمایی، هیپربولیک و ...) نیست. این کار باعث می‌شود در اولین تلاش برای مطالعه این کتاب دچار ناامیدی شوید!! بهترین دیدگاه در این فصل مرور کلی مطالب و توجه به خلاصه نکات مهم در صفحه ۴۳ و ۴۴ است. در مواردی که در فصلهای بعدی مطلبی از بحث تابع مورد نیاز واقع می‌شود(و آنرا فراموش کرده‌اید)، با مراجعه به این فصل مطلب مورد نیاز خود را بخوانید. **برای داشتن یک دیدگاه مناسب در مورد بهترین روش مطالعه این کتاب توصیه می‌شود به مقدمه کتاب و منوی «اطلاعات مهم کنکور» در وب سایت www.m-aghasi.ir مراجعه نمایید.**

۳) دامنه

دامنه تابع f کلیه مقادیری از A است که به ازای آنها تابع f تعریف شده است. به عبارت دیگر زیر مجموعه‌ای از تمام اعضای A که برای تابع f ورودی مجاز باشند، دامنه f را مشخص می‌کنند. اگر نمودار f داده شود، تصویر f بر محور x ها، دامنه f را مشخص می‌کند. دامنه f را با نماد D_f نمایش می‌دهند.

۴) برد

برد تابع f کلیه مقادیری از B است که تصویر عضوی از A تحت تابع f هستند. به عبارت دیگر زیر مجموعه‌ای از B است که از قرار دادن $x \in D_f$ در ضابطه f حاصل می‌شوند و لذا برد برابر $f(A) \cap B$ است. اگر نمودار f داده شود، تصویر f بر محور y ها، برد f را مشخص می‌کند. برد f را با نماد R_f نمایش می‌دهند.

روشهای تعیین برد

قانون کلی که برای محاسبه برد همه توابع قابل استفاده باشد، وجود ندارد. اما موارد زیر مهمترین روشهای تعیین برد را معرفی می‌کنند.

۱) از رابطه $y = f(x)$، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم. کلیه مقادیری از y که به ازای آنها x تعریف شود،(x در دامنه f باشد.) برد تابع f خواهند بود.

۲) اگر دامنه f شامل تعداد متناهی(محدود) عضو باشد، برد f با استفاده از تعریف یعنی با قرار دادن مقادیر x در ضابطه f قابل محاسبه است.

۳) استفاده از برخی نابرابریها:

$i)\quad a > 0 \implies a + \frac{1}{a} \geq 2$ (تساوی فقط برای $a = 1$ رخ می‌دهد.)

$ii)\quad a < 0 \implies a + \frac{1}{a} \leq -2$ (تساوی فقط برای $a = -1$ رخ می‌دهد.)

$iii)\quad |x-a| + |x-b| \geq |b-a|$

$iv)\quad -|b-a| \leq |x-a| - |x-b| \leq |b-a|$

$v)\quad |a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

۴) مربع کامل کردن یعنی استفاده از اتحاد $x^2 + ax = (x+\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$

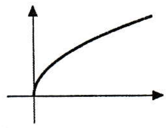
۵) در توابع چند ضابطه‌ای، برد هر ضابطه را جداگانه محاسبه و سپس بین همه آنها اجتماع می‌گیریم.

۶) استفاده از قوانین برد توابع خاص(جزء صحیح، نمایی و ...) که در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

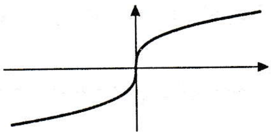
۷) در توابع پیوسته با کمک گرفتن از اکسترممهای مطلق تابع (نکته ۳۷ در صفحه ۱۷۱)

مثال ۲. دامنه تابع $f(x) = x^n$ همواره $\mathbb{R}$ است و برد آن برای n های زوج $[۰, +\infty)$ و برای n های فرد، $\mathbb{R}$ است.

مثال ۳. تابع $f(x) = \sqrt[n]{x}$ برای n های فرد تابع با دامنه و برد $\mathbb{R}$ اما برای n های زوج تابعی با دامنه و برد $[۰, +\infty)$ است. نمودار آنها مطابق شکل می‌باشد.



$y = \sqrt[n]{x}$ و n زوج



$y = \sqrt[n]{x}$ و n فرد

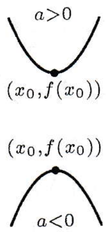
مثال ۴. دامنه و برد تابع $f(x) = x^{۲} + ۲x + ۲$ را مشخص کنید.

دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ است. برای محاسبه برد x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y = x^{۲} + ۲x + ۲ = (x+۱)^{۲} + ۱ \implies (x+۱)^{۲} = y - ۱ \implies |x+۱| = \sqrt{y-۱}$$

$$\implies y - ۱ \geq ۰ \implies R_f = [۱, +\infty)$$

نکته ۱. **تابع $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ تابعی است با دامنه $\mathbb{R}$ و نمودار آن که سهمی نامیده می‌شود، به یکی از دو صورت روبرو است. با فرض $x_۰ = -\dfrac{b}{۲a}$ نقطه $(x_۰, f(x_۰))$ رأس سهمی و خط $x = x_۰$ محور تقارن نمودار است. برد تابع f به صورت زیر تعیین می‌شود.**



$$a > ۰ \;:\; R_f = \left[f(-\frac{b}{۲a}), +\infty\right) \quad \text{و} \quad a < ۰ \;:\; R_f = \left(-\infty, f(-\frac{b}{۲a})\right]$$

۵) تساوی دو تابع

توابع $f(x)$ و $g(x)$ وقتی با هم مساوی هستند که دامنه آنها با هم برابر بوده و ضابطه آنها نیز با هم مساوی باشد.

۶) ترکیب توابع

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

ترکیب دو تابع $f : A \to B$ و $g : B \to C$ به صورت $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ تعریف شده و و دامنه آن $D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ است.

۷) تابع زوج و فرد

تابع f را زوج می‌نامیم هرگاه D_f متقارن باشد (یعنی برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$) و $\forall x \in D_f \;:\; f(-x) = f(x)$ و آنرا فرد می‌نامیم هرگاه D_f متقارن باشد و $\forall x \in D_f \;:\; f(-x) = -f(x)$.

نکته ۲. **محور y ها، محور تقارن توابع زوج و مبدأ مختصات، مرکز تقارن توابع فرد است.**

تذکر۳. موارد زیر در مورد وضعیت تقارن نمودار رابطه $f(x,y) = ۰$ می‌تواند مفید باشد.

۱) خط $x = \alpha$ محور تقارن است هر گاه $f(۲\alpha - x, y) = f(x,y)$.

۲) خط $y = \beta$ محور تقارن است هر گاه $f(x, ۲\beta - y) = f(x,y)$.

۳) نقطه $\omega(\alpha,\beta)$ مرکز تقارن است هر گاه $f(x,y) = f(2\alpha - x, 2\beta - y)$.

۴) خط $y = x$ محور تقارن است هر گاه $f(x,y) = f(y,x)$.

۵) خط $y = -x$ محور تقارن است هر گاه $f(x,y) = f(-y,-x)$

نکته ۳. اگر صفر در دامنه f بوده و تابع f فرد باشد آنگاه $f(0) = 0$.

تذکر۴. حاصلضرب و تقسیم یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی فرد است اما حاصلضرب و تقسیم دو تابع زوج یا دو تابع فرد تابعی زوج است.

تذکر۵. مجموع و تفاضل دو تابع زوج، تابعی زوج و برای دو تابع فرد، تابعی فرد است اما اگر یکی از توابع زوج و دیگری فرد (به جز تابع ثابت $f(x) = 0$) باشد، حاصل نه زوج و نه فرد است.

$\boxed{\text{تست ۱}}$ کدامیک از توابع زیر با تابع $y = x + 2$ برابر است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ۲) $y = 2 + \sqrt{x^2}$

۳) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$ ۴) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

حل: گزینه ۳ درست است. شرط تساوی دو تابع آن است که دامنه و ضابطه آنها با هم برابر باشد. در گزینه (۳) چون مخرج همواره مخالف صفر است پس دامنه برابر $\mathbb{R}$ و با دامنه تابع داده شده در صورت سؤال برابر است. صورت کسر برابر $x^2(x+2) + (x+2) = (x^2+1)(x+2)$ و لذا ضابطه تابع در این گزینه نیز برابر $x + 2$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه (۱) دامنه برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ و ضابطه آن بر این مجموعه برابر $y = x + 2$ است. ولی به خاطر عدم تساوی دامنه‌ها با تابع مورد نظر برابر نیست. در گزینه (۲) حاصل برابر $y = 2 + |x|$ و در گزینه (۴) حاصل برابر $y = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ و لذا با $y = x + 2$ برابر نیستند.

$\boxed{\text{تست ۲}}$ اگر $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ عبارت $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f(x)}_{\text{تکرار } f\text{، ۱۰۰ بار}}$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) x ۲) $\dfrac{1}{x}$ ۳) $\dfrac{1-x}{1+x}$ ۴) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{100}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \implies \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f(x)}_{\text{زوج مرتبه}} = x$$

نکته ۴. در توابع $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (توابع هموگرافیک)، اگر $a + d = 0$، آنگاه $f(x) = f^{-1}(x)$ یعنی $f \circ f(x) = x$.(به شرط آنکه تابع معکوس موجود باشد یعنی $ad - bc \neq 0$)

$\boxed{\text{تست ۳}}$ اگر $f(x) = \ln(x - x^2)$ و $g(x) = [x]$ دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (هوافضا ۸۱)

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $\emptyset$ ۴) $\mathbb{R}^+$

حل: گزینه ۳ درست است. چون دامنه f برابر $x - x^2 > 0$ یعنی $0 < x < 1$ است پس دامنه $f \circ g$ مقادیری از x است که $0 < [x] < 1$ و چون $[x]$ عددی صحیح است، هیچ مقدار x در این نابرابری صدق نمی‌کند و لذا دامنه $f \circ g$ تهی است.

تست ۴ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x+y)=f(x)f(y)$ تعریف شود و متحد صفر نباشد. در این صورت دامنه (حوزه تعریف) $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۵)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,0)$ ۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

حل: گزینه ۱ درست است. دامنه $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ کلیه x هایی است که برای آنها $f(x)>0$. با توجه به رابطه داده شده:

$$f(x)=f\Big(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\Big)=f\Big(\frac{x}{2}\Big)f\Big(\frac{x}{2}\Big)=f^2\Big(\frac{x}{2}\Big)\ge 0\implies f(x)\ge 0 \qquad (*)$$

حال باید بررسی کنیم که $f(x)$ به ازای چه مقدار x صفر می‌شود و آنها را از دامنه حذف نماییم. اگر به ازای یک مقدار خاص x مثلاً x_0 صفر شود یعنی $f(x_0)=0$ آنگاه:

$$f(x)=f\big((x-x_0)+x_0\big)=f(x-x_0)f(x_0)=f(x-x_0)\times 0=0$$

پس برای هر x مقدار $f(x)$ صفر می‌شود ولذا f متحد با صفر است که با توجه به فرضهای سؤال امکان ندارد. حال با توجه به $(*)$ و بحث انجام شده برای هر x نتیجه می‌شود $f(x)>0$ و لذا دامنه برابر $\mathbb{R}$ است.

تست ۵ برد تابع $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ کدام فاصله است؟ (صنایع غذایی ۷۷)

۱) $(-\infty,+\infty)$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. با توجه به (۱) در صفحه ۱۴، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{x}{1+x^2}\implies x^2y-x+y=0$$

اگر $x=0$ آنگاه $y=0$ و لذا $0\in R_f$. برای $x\neq 0$ این معادله بر حسب x، معادله‌ای از درجه دوم است و شرط جواب داشتن این معادله، آن است که $\Delta\ge 0$.

$$1-4y^2\ge 0\implies -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\implies R_f=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$$

روش دوم. به ازای $x=0$ داریم $f(0)=0$ و لذا $0\in R_f$. برای $x\neq 0$ داریم $f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.

$$\text{رابطه (i–۳) در صفحه ۱۴}\implies |x+\frac{1}{x}|\ge 2\implies 0<\Big|\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\Big|\le\frac{1}{2}\implies -\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}$$

تست ۶ برد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+2}$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) $(1,2]$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[1,2)$ ۴) $(1,2)$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. با توجه به گزینه‌ها فقط باید بررسی کنیم که اعداد ۱ و ۲ در برد قرار دارند. اگر $1\in R_f$ باید معادله $f(x)=1$ دارای جواب باشد. این معادله به $x^2+4=x^2+2$ منجر می‌شود که جواب ندارد. اگر $2\in R_f$ آنگاه باید $f(x)=2$ دارای جواب باشد که $x=0$ پاسخ آن است. فقط گزینه (۱) در این وضعیت صدق می‌کند.

روش دوم. چون $f(x)=1+\frac{2}{x^2+2}$ و $x^2+2\ge 2$ پس:

$$0<\frac{1}{x^2+2}\le\frac{1}{2}\implies 0<\frac{2}{x^2+2}\le 1\implies 1<f(x)\le 2\implies R_f=(1,2]$$

تست ۷ تابع $f(x) = \dfrac{|x-1|-|x+1|}{|x|x^2-\cos x}$ تابعی است ... (سیستم ـ آزاد ۷۸)

۱) زوج ۲) نه فرد و نه زوج ۳) هم فرد و هم زوج ۴) فرد

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا توجه کنید که:

$$f(-x) = \frac{|-x-1|-|-x+1|}{|-x|(-x)^2-\cos(-x)} = \frac{|x+1|-|x-1|}{|x|x^2-\cos x} = -f(x)$$

حال باید متقارن بودن D_f را بررسی کنیم. با محاسبه بالا مشخص است که مخرج f تابعی زوج است و لذا اگر مخرج به ازای $x=a$ صفر شود به ازای $x=-a$ نیز صفر می‌شود. پس اگر عددی در دامنه f نباشد، قرینه آن نیز در دامنه f قرار ندارد و برعکس. بنابراین دامنه f متقارن است و لذا تابع f فرد می‌باشد.

۸) تابع یکنوا و اکیداً یکنوا

تابع f را بر فاصله I **صعودی** می‌گویند هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in I$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_2) \geq f(x_1)$ و با حذف علامت تساوی، تعریف تابع **صعودی اکید** به‌دست می‌آید. به طور مشابه اگر $x_1 < x_2$ نتیجه دهد $f(x_2) \leq f(x_1)$، تابع f را **نزولی** می‌نامند و هرگاه $f(x_2) < f(x_1)$ آنرا **نزولی اکید** می‌نامند. تابعی که صعودی یا نزولی باشد، **یکنوا** نامیده می‌شود.

۹) تابع یک به یک

تابع f را یک به یک می‌نامند، هرگاه

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

نکته ۵. شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f یک به یک باشد، آن است که هر خط افقی نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تذکر۶. هر تابع یکنوای اکید یک به یک است اما برعکس این موضوع درست نمی‌باشد.

تذکر۷. اگر f تابعی صعودی اکید باشد، می‌توان آنرا از دو طرف نامساوی حذف کرد یا بر دو طرف نابرابری اثر داد بدون آنکه جهت نابرابری عوض شود. اما در مورد تابع نزولی اکید جهت نابرابری عوض می‌شود. به این مفهوم که از رابطه $f(a) > f(b)$ چنانچه f صعودی اکید باشد، نتیجه می‌شود $a > b$ اما اگر f نزولی اکید باشد نتیجه می‌شود $a < b$. این ویژگی در حل نابرابری یا تعیین برد توابع می‌تواند سودمند باشد.

تذکر۸. اگر f تابعی یک به یک باشد، آنرا از دو طرف تساوی می‌توان حذف کرد.

مثال ۵. نشان دهید تابع $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ تابعی یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \implies \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}$$

با توجه به رابطه اخیر x_1 و x_2 هم علامت هستند. دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+1} = \frac{x_2^2}{x_2^2+1} \implies x_1^2 = x_2^2 \implies x_1 = \pm x_2 \xrightarrow{\text{هم‌علامت بودن}} x_1 = x_2 \implies$$ تابع f یک به یک است.

۱۰) تابع پوشا

تابع $f : A \to B$ را پوشا(پوششی) می‌نامیم هر گاه برد f برابر B باشد. در واقع از نظر هندسی f پوشاست هر گاه هر خط $y = b \in B$ نمودار تابع آنرا حداقل در یک نقطه قطع کند.

۱۱) تابع وارون(معکوس)

اگر f تابعی یک به یک باشد، تابع یکتای g موجود است که

$$f \circ g(x) = x \quad \text{و} \quad g \circ f(x) = x$$

g را وارون (معکوس) f نامیده و با f^{-1} نمایش می‌دهند. در این حالت می‌گوییم f وارونپذیر(معکوس‌پذیر) است.

روش یافتن معکوس یک تابع

برای تعیین ضابطه f^{-1} کافی است از رابطه $y = f(x)$، x را برحسب y محاسبه کنیم و سپس نقش x و y را عوض کنیم.

نکاتی در مورد تابع وارون:

۱) تابع f دارای وارون است اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

۲) اگر (a,b) نقطه‌ای روی نمودار f باشد، (b,a) بر نمودار f^{-1} واقع است، به عبارت دیگر برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه شود.

۳) نقاط برخورد f با محور x ها به نقاط برخورد f^{-1} با محور y ها و نقاط برخورد f با محور y ها به نقاط برخورد f^{-1} با محور x ها فرستاده می‌شود.

۴) $R_{f^{-1}} = D_f$ و $D_{f^{-1}} = R_f$.

۵) اگر f تابعی صعودی (نزولی) اکید باشد، f^{-1} نیز صعودی (نزولی) اکید است.

٦) اگر در تعیین x برحسب y به ازای یک y، چند مقدار برای x به‌دست آید، تابع f یک به یک نخواهد بود.

مثال ٦. وارون تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و دامنه و برد آنرا به‌دست آورید.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \implies \text{و } x \text{ و } y \text{ هم علامت هستند.}$$

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \implies y^2x^2 + y^2 = x^2 \implies x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \implies x = \pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

اما چون x و y هم علامت هستند، پس $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ یعنی تابع f، یک به یک است (که با روش مستقیم در مثال ۵ هم بررسی شد.) و با تعویض نقش x و y داریم $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ پس $D_{f^{-1}} = (-1, 1)$ و $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$.

مثال ۷ بزرگترین بازه‌ای از $\mathbb{R}$ شامل $x_\circ = \frac{۱}{۲}$ را طوری بیابید که $f(x) = x^۴ - ۲x^۲$ بر آن دارای وارون باشد و سپس ضابطه $f^{-۱}$ را بیابید.

روش اول. ضابطه وارون را محاسبه می‌کنیم.

$$y = x^۴ - ۲x^۲ = (x^۲ - ۱)^۲ - ۱ \implies x^۲ - ۱ = \pm\sqrt{y + ۱}$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد f بر کل دامنه خود یک به یک نیست اما چون بازه مورد نظر باید شامل $x_\circ = \frac{۱}{۲}$ باشد، و $x_\circ^۲ - ۱ = -\frac{۳}{۴} < \circ$ پس علامت منفی را انتخاب می‌کنیم و لذا $\circ \leq ۱ - x^۲$ و $-۱ \leq x \leq ۱$.

$$x^۲ - ۱ = -\sqrt{y + ۱} \implies x^۲ = ۱ - \sqrt{y + ۱} \implies x = \pm\sqrt{۱ - \sqrt{y + ۱}}$$

از بین علامت $\pm$ علامت $+$ قابل قبول است، زیرا $x_\circ = \frac{۱}{۲} > \circ$ پس $x > \circ$ و بنابراین $\circ \leq x \leq ۱$ جواب مسأله است و $x = \sqrt{۱ - \sqrt{y + ۱}}$ پس $f^{-۱}(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{x + ۱}}$.

روش دوم. برای تعیین بازه‌ای که f بر آن وارونپذیر است، می‌توانیم بازه‌های یکنوایی آنرا تعیین کنیم. برای بررسی این که این تابع بر چه بازه‌هایی صعودی و نزولی است، از مشتق کمک می‌گیریم.

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۴x = ۴x(x - ۱)(x + ۱) = \circ \implies x = \circ, \pm ۱$$

جدول تعیین علامت f' به صورت مقابل است. بزرگترین بازه‌ای که علامت f' بر آن ثابت است و شامل $x_\circ = \frac{۱}{۲}$ باشد، بازه $[\circ, ۱]$ است.

x		-۱		$\circ$		۱	
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

تذکر۹. برای تعیین علامت توجه کنید که در مورد هر تابعی، پس از آنکه تمامی ریشه‌ها و نقاط ناپیوستگی را در جدول مشخص کردیم، یکی از بازه‌هایی که فاقد ریشه و ناپیوستگی است و مثلاً $(۱, +\infty)$ را به دلخواه انتخاب و عددی از آن بازه را در تابعی که باید علامت آنرا تعیین کنیم جایگذاری می‌کنیم. علامتی که حاصل می‌شود علامت کل بازه است. برای سایر بازه‌ها نیز می‌توانیم عدد گذاری کنیم یا از این مطلب استفاده کنیم که وقتی به یک ریشه می‌رسیم، اگر مرتبه تکرار آن فرد باشد، علامت تغییر می‌کند ولی اگر مرتبه تکرار آن زوج باشد علامت حول آن عوض نمی‌شود. برای تعیین مرتبه ریشه می‌توان به توان آن پس از تجزیه نگاه کرد(که در مورد چند جمله‌ایها می‌تواند مفید باشد) یا از نکته ۳۰ در صفحه ۱۵۷ استفاده نمود. در اینجا چون توان $x - ۱$ عدد یک است پس مرتبه تکرار ریشه $x = ۱$ برابر یک و عددی فرد بوده و لذا علامت حول آن عوض می‌شود. سایر ریشه‌ها نیز دارای وضعیت مشابهی هستند.

۱۲) تابع کراندار

تابع f را کراندار می‌نامیم هر گاه $M > \circ$ موجود باشد که $|f(x)| \leq M$

۱۳) تابع متناوب

تابع f را **متناوب** می‌نامند هرگاه عدد $T > \circ$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم

$f(x+T)=f(x)$. کوچکترین عدد T را (در صورت وجود) دوره تناوب اصلی f می‌نامند.

نکته ۶. اگر f متناوب با دوره تناوب T باشد، $f(x+nT)=f(x)$ برای هر $n\in\mathbb{Z}$ یعنی nT نیز دوره تناوب است.

تذکر ۱۰. اگر f تابعی متناوب باشد، دامنه آن محدود نیست.

نکته ۷. به جز تابع ثابت، سایر چند جمله‌ایها متناوب نیستند.

نکته ۸. اگر f متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد، تابع $f(ax+b)$ نیز متناوب با دوره تناوب اصلی $\frac{T}{|a|}$ است.

تذکر ۱۱. اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، برای رسم نمودار آن کافی است نمودار $f(x)$ را در بازه $[0,T)$ رسم کنیم و سپس آنرا در فاصله‌های به طول T تکرار کنیم.

نکته ۹. دوره تناوب برخی از تابعهای معروف به صورت زیر است.

۱) دوره تناوب $\sin^{2n+1}ax$ و $\cos^{2n+1}ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

۲) دوره تناوب $\tan^n ax$ و $\cot^n ax$ و $\sin^{2n}ax$ و $\cos^{2n}ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

۳) دوره تناوب $|\sin ax|+|\cos ax|$ و $\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax$ و $\tan ax-\cot ax$ و $|\tan^n ax|+|\cot^n ax|$ و $\tan^{2n}ax+\cot^{2n}ax$ برابر $\frac{\pi}{|2a|}$ است.

۴) دوره تناوب $ax-[ax]$ و $[ax]+[-ax]$ برای $a\neq 0$ برابر $\frac{1}{|a|}$ است.

$\boxed{\text{تست ۸}}$ اگر $f(x)=x-\frac{1}{x}, x>0$ نمودار f^{-1} محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

حل: گزینه ۴ درست است. محل تلاقی نمودار f^{-1} با محور y ها متناظر نقطه برخورد نمودار f با محور x ها یعنی ریشه‌های f است.

$$f(x)=0 \implies x=\frac{1}{x} \implies x=\pm 1 \xrightarrow{x>0} x=1$$

$\boxed{\text{تست ۹}}$ وارون تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x\leq 1 \\ x^2 & x>1\end{cases}$ برابر تابع g با کدام ضابطه است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $g(x)=\begin{cases} x & x\leq 1 \\ \sqrt{x} & x>1\end{cases}$

۲) $g(x)=\begin{cases} -x & x\leq 1 \\ -\sqrt{x} & x>1\end{cases}$

۳) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x>1\end{cases}$

۴) $g(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x} & x\leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x>1\end{cases}$

حل: گزینه ۱ درست است. در توابع چند ضابطه‌ای باید در هر ضابطه وارون f را محاسبه کنیم.

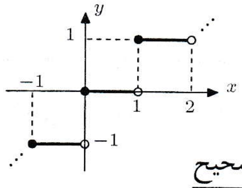
$$x\leq 1 : y=x \implies f^{-1}(x)=x \quad \text{و} \quad x>1 : y=x^2 \xrightarrow{x>0} x=\sqrt{y} \implies f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

دقت کنید که برای $x\leq 1$ داریم $f(x)\leq 1$ پس دامنه f^{-1} در این قسمت $x\leq 1$ است و وقتی $x>1$ داریم $f(x)=x^2>1$ پس دامنه f^{-1} در این قسمت $x>1$ است.

۱ـ۲ معرفی توابع خاص

۱ـ۲ـ۱ تابع جزء صحیح

$f(x)=[x]$ عبارت است از بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی عدد x و بنابراین:



$$f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱\leq x<۰ \\ ۰ & ۰\leq x<۱ \\ ۱ & ۱\leq x<۲ \end{cases}$$

خواص جزء صحیح

۱) تابع $f(x)$، صعودی است.

۲) $[x]\leq x$ و $x-۱<[x]\leq x$ و $[x]\leq x<[x]+۱$ و تساوی وقتی رخ می‌دهد که $x\in\mathbb{Z}$ پس $۰\leq x-[x]<۱$.

۳) اگر $\{x\}$ نمایش جزءاعشاری عدد x باشد، آنگاه $۰\leq\{x\}<۱$ و $x=[x]+\{x\}$ و بنابراین:

$$\{x\}=۰\iff [x]=x\iff x\in\mathbb{Z}$$

۴) $$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

۵) برای هر عدد حقیقی x و y داریم:

$$[x+y]=\begin{cases} [x]+[y] & ۰\leq\{x\}+\{y\}<۱ \\ [x]+[y]+۱ & ۱\leq\{x\}+\{y\}<۲ \end{cases}$$

۶) برای هر $n\in\mathbb{Z}$ داریم $[x+n]=[x]+n$.

۷) $$[nx]=[x]+[x+\frac{۱}{n}]+[x+\frac{۲}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-۱}{n}] \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

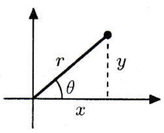
مثال ۸. دامنه تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[۴]{x^۳}}{[x]^۲-۴}$ را تعیین کنید.

باید $[x]^۲\neq ۴$ و $x^۳\geq ۰$، پس:

$$[x]^۲=۴\implies [x]=\pm ۲\implies ۲\leq x<۳ \text{ یا } -۲\leq x<-۱$$

و با توجه به اینکه $x\geq ۰$ پس $D_f=[۰,+\infty)-[۲,۳)$.

۱ـ۲ـ۲ توابع مثلثاتی



اگر (x,y) نقطه‌ای در صفحه مختصات به فاصله r از مبدأ باشد که خط واصل مبدأ به آن نقطه با جهت مثبت محور x ها زاویه θ می‌سازد، خطوط مثلثاتی زاویه θ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}$$

$$\sec\theta=\frac{۱}{\cos\theta}=\frac{r}{x} \qquad \csc\theta=\frac{۱}{\sin\theta}=\frac{r}{y} \qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{x}{y}$$

جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای زوایای معروف به صورت زیر است.

θ بر حسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
θ بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

تذکر۱۲. اگر مقدار یک زاویه بر حسب درجه برابر D و بر حسب رادیان برابر R باشد آنگاه $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$

با توجه به تعاریف نسبتهای مثلثاتی ، روابط زیر بین خطوط مثلثاتی برقرار است.

۱) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ‏ ۲) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ‏ ۳) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

علاوه بر آن فرمول‌های زیر را نیز داریم:

الف) خطوط مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

۱) $\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y$

۲) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

۳) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

۴) $\cot(x \pm y) = \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$

ب) خطوط مثلثاتی دو برابر زاویه

۱) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

۲) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

۳) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

۴) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

۵) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

۶) $\cot 2x = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$

۷) $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

۸) $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

ج) خطوط مثلثاتی سه برابر زاویه

۱) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

۲) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

۳) $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

۴) $\cot 3x = \dfrac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1}$

د) فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب و برعکس

۱) $\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x \pm y}{2}\cos\dfrac{x \mp y}{2}$

۲) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$

۳) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

۴) $\sin x\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y)+\sin(x-y)\big)$

۵) $\cos x\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y)+\cos(x-y)\big)$

۶) $\sin x\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big)$

ه) برخی فرمولهای خاص (فرمول متمم و مکمل زاویه و ....)

با استفاده از فرمولهای مجموع و تفاضل دو زاویه می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت.

۱) $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

۲) $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$

۳) $\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\cot x$

۴) $\cot(\frac{\pi}{2}-x)=\tan x$

۵) $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$

۶) $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$

۷) $\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$

۸) $\cot(\frac{\pi}{2}+x)=-\tan x$

۹) $\sin(\pi-x)=\sin x$

۱۰) $\cos(\pi-x)=-\cos x$

۱۱) $\tan(\pi-x)=-\tan x$

۱۲) $\cot(\pi-x)=-\cot x$

۱۳) $\sin(\pi+x)=-\sin x$

۱۴) $\cos(\pi+x)=-\cos x$

۱۵) $\tan(\pi+x)=\tan x$

۱۶) $\cot(\pi+x)=\cot x$

تذکر۱۳. برای به خاطر سپردن روابط بالا می‌توان به صورت زیر عمل کرد.

تابع $f(x)$ را یک تابع مثلثاتی و $g(x)$ را تابع مثلثاتی متناظر آن در نظر بگیرید.

یعنی سینوس و کسینوس یک زاویه را متناظر هم می‌گیریم. $f(x)=\sin x \longleftrightarrow g(x)=\cos x$

یعنی تانژانت و کتانژانت یک زاویه را متناظر هم می‌گیریم. $f(x)=\tan x \longleftrightarrow g(x)=\cot x$

یعنی سکانت و کسکانت یک زاویه را متناظر هم می‌گیریم. $f(x)=\sec x \longleftrightarrow g(x)=\csc x$

در این صورت اگر به زاویه ضرایب فرد $\frac{\pi}{2}$ اضافه یا کم کنیم، تابع مثلثاتی تغییر کرده و به تابع متناظر آن تبدیل می‌شود و اگر به زاویه ضرایب زوج $\frac{\pi}{2}$ (در واقع ضرایب π) اضافه یا کم کنیم، تابع مثلثاتی تغییری نمی‌کند. در واقع:

$$f(x+k\pi)=\pm f(x) \quad \text{و} \quad k\in\mathbb{Z} \qquad (۱\_۱)$$

$$f(x+k\pi+\frac{\pi}{2})=\pm g(x) \quad \text{و} \quad k\in\mathbb{Z} \qquad (۱\_۲)$$

برای تعیین علامت نسبت مثلثاتی (بدون توجه به اینکه x واقعاً در چه ربعی واقع است) همواره فرض کنید x در ربع اول است و تعیین کنید $y=x+k\pi$ یا $y=x+k\pi+\frac{\pi}{2}$ در کدام ربع قرار می‌گیرد، سپس علامت $f(y)$ را در سمت راست تساوی بنویسید.

مثال ۹. حاصل هر یک از مقادیر زیر را بنویسید.

الف) $\cos(\frac{\pi}{2}+x)$ ب) $\tan(5\pi+x)$ ج) $\csc(\frac{51\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})$

الف) توجه کنید که $f(x)=\cos x$ چون ضریب فرد $\frac{\pi}{۲}$ به x اضافه شده است، بنا به رابطه (۱ ـ ۲) تابع مثلثاتی به متناظر تبدیل می‌شود و چون سینوس متناظر کسینوس است، خواهیم داشت $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=\pm\sin x$. برای انتخاب علامت درست، توجه کنید که اگر x را در ربع اول در نظر بگیریم(یعنی فرض کنیم $۰<x<\frac{\pi}{۲}$) آنگاه $\frac{\pi}{۲}<x+\frac{\pi}{۲}<\pi$ و لذا $x+\frac{\pi}{۲}$ در ربع دوم است و چون علامت $f(x)=\cos x$ در ربع دوم منفی است، علامت منفی را انتخاب می‌کنیم و لذا $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x$ که همان فرمول (۶) در صفحه قبل است.

ب) اگر $f(x)=\tan x$ و با توجه به اینکه $۵\pi=۱۰\times\frac{\pi}{۲}$ ضریب زوج $\frac{\pi}{۲}$ است از رابطه (۱ ـ ۱) تابع مثلثاتی تغییری نمی‌کند و لذا $\tan(۵\pi+x)=\pm\tan x$. با فرض آنکه x در ربع اول است، $\pi+x$ و لذا $۵\pi+x$ در ربع سوم می‌باشد و چون علامت تانژانت در این ربع مثبت است، علامت مثبت را انتخاب می‌کنیم، پس $\tan(۵\pi+x)=\tan x$.

ج) اگر $f(x)=\csc x$ و با توجه به اینکه $\frac{۵۱\pi}{۲}=۵۱\times\frac{\pi}{۲}$ ضریب فرد $\frac{\pi}{۲}$ است از رابطه (۱ ـ ۲) تابع مثلثاتی به تابع متناظر تبدیل می‌شود و لذا $\csc\left(\frac{۵۱\pi}{۲}+\frac{۲\pi}{۳}\right)=\pm\sec\frac{۲\pi}{۳}$ اما $\frac{۵۱\pi}{۲}=۶\times۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ و لذا با فرض آنکه $x=\frac{۲\pi}{۳}$ در ربع اول است [1]، $x+\frac{۵۱\pi}{۲}$ و $x+\frac{۳\pi}{۲}$ در یک ربع قرار دارند که ربع چهارم خواهد بود و چون علامت کسکانت در این ربع منفی است، علامت منفی را انتخاب می‌کنیم، پس $\csc\left(\frac{۵۱\pi}{۲}+\frac{۲\pi}{۳}\right)=-\sec\frac{۲\pi}{۳}$.

معادلات ساده مثلثاتی

اگر $f(x)$ یکی از توابع مثلثاتی باشد، در برخی سؤالات لازم است برای عدد حقیقی t معادله مثلثاتی $f(x)=t$ را حل نماییم.

الف) معادله $\sin x=t$

این معادله فقط برای $-۱\le t\le ۱$ دارای جواب است. برای حل آن ابتدا زاویه‌ای می‌یابیم که سینوس آن برابر t باشد که در واقع $\alpha=\mathrm{Arcsin}t$ خواهد بود. در این صورت $\pi-\alpha$ نیز جواب معادله است و به خاطر متناوب بودن سینوس می‌توان $۲k\pi$ هم به آن اضافه نمود و لذا:

$$\sin x=t \Longleftrightarrow x=۲k\pi+\mathrm{Arcsin}t \quad \text{و} \quad x=۲k\pi+\pi-\mathrm{Arcsin}\,t \qquad (۱ ـ ۳)$$

تذکر۱۴. در حالت خاص پاسخ معادله $\sin x=۰$ به صورت $x=k\pi$ و پاسخ $\sin x=۱$ به صورت $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و پاسخ $\sin x=-۱$ برابر $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ است.

ب) معادله $\cos x=t$

این معادله فقط برای $-۱\le t\le ۱$ دارای جواب است. برای حل آن ابتدا زاویه‌ای می‌یابیم که کسینوس آن برابر t باشد که در واقع $\alpha=\mathrm{Arccos}t$ خواهد بود. در این صورت $-\alpha$ نیز جواب معادله است و به خاطر متناوب بودن کسینوس می‌توان $۲k\pi$ هم به آن اضافه نمود و لذا:

$$\cos x=t \Longleftrightarrow x=۲k\pi\pm\mathrm{Arccos}\,t \qquad (۱ ـ ۴)$$

---

[1] واضح است که $\frac{۲\pi}{۳}$ یا زاویه ۱۲۰° در ربع دوم قرار دارد اما مطمئن باشید، این فرض مشکلی در تعیین علامت ایجاد نخواهد کرد.

تذکر۱۵. در حالت خاص پاسخ معادله $\cos x = 0$ به صورت $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ و پاسخ $\cos x = 1$ به صورت $x = 2k\pi$ و پاسخ $\cos x = -1$ برابر $x = 2k\pi + \pi$ است.

ج) معادله $\tan x = t$

این معادله برای هر $t \in \mathbb{R}$ دارای جواب است. برای حل آن ابتدا زاویه‌ای می‌یابیم که تانژانت آن برابر t باشد که در واقع $\alpha = \mathrm{Arctan} t$ خواهد بود و به خاطر متناوب بودن تانژانت می‌توان $k\pi$ هم به آن اضافه نمود و لذا:

$$\tan x = t \Longleftrightarrow x = k\pi + \mathrm{Arctan}\, t \qquad (۱ - ۵)$$

تذکر۱۶. در حالت خاص پاسخ معادله $\tan x = 0$ به صورت $x = k\pi$ است.

د) معادله $\cot x = t$

این معادله برای هر $t \in \mathbb{R}$ دارای جواب است. برای حل آن ابتدا زاویه‌ای می‌یابیم که کتانژانت آن برابر t باشد که در واقع $\alpha = \mathrm{Arccot} t$ خواهد بود و به خاطر متناوب بودن کتانژانت می‌توان $k\pi$ هم به آن اضافه نمود و لذا:

$$\cot x = t \Longleftrightarrow x = k\pi + \mathrm{Arccot}\, t \qquad (۱ - ۶)$$

تذکر۱۷. در حالت خاص پاسخ معادله $\cot x = 0$ به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ است.

نکته ۱۰. معادلات ساده مثلثاتی $\sin x = t$ و $\cos x = t$ و $\tan x = t$ و $\cot x = t$ همواره دارای جواب ساده هستند به جز معادلات $\sin x = 1$ و $\sin x = -1$ و $\cos x = 1$ و $\cos x = -1$ که دارای ریشه مضاعف (ریشه با مرتبه تکرار دو [۲]) می‌باشند.

نکاتی در مورد توابع مثلثاتی

۱) توابع مثلثاتی متناوب هستند. دوره تناوب $\tan x$ و $\cot x$ برابر π و بقیه 2π است.

۲) در بین توابع مثلثاتی، $\cos x$ و $\sec x$ زوج و بقیه فرد هستند.

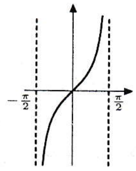
۳) دامنه توابع $\tan x$ و $\sec x$ برابر $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ و دامنه توابع $\cot x$ و $\csc x$ برابر $\mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ و دامنه توابع $\sin x$ و $\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۴) برد توابع $\sin x$ و $\cos x$ برابر $[-1, 1]$ و برد توابع $\sec x$ و $\csc x$ برابر $\mathbb{R} - (-1, 1)$ و برد $\tan x$ و $\cot x$ برابر $\mathbb{R}$ است.

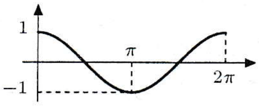
---

[۲] در واقع معادلات سینوس و کسینوس دو دسته جواب دارند، اما در حالاتی که به آن اشاره شد این دو دسته جواب بر هم منطبق می‌شوند و لذا هر جواب دقیقاً دو بار تکرار می‌شود. ضمناً برای بررسی مفهوم و طرز تشخیص مرتبه تکرار ریشه می‌توانید به نکته ۳۰ در صفحه ۱۵۷ مراجعه نمایید.

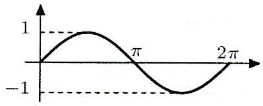
نمودار توابع مثلثاتی در یک دوره تناوب مطابق شکل‌های زیر است.



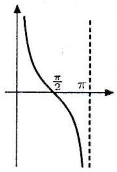
$y=\tan x$



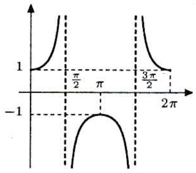
$y=\cos x$



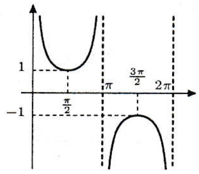
$y=\sin x$



$y=\cot x$



$y=\sec x$

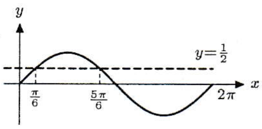


$y=\csc x$

مثال ۱۰. دامنه و برد $f(x)=\sqrt{۲\sin x-۱}$ را تعیین کنید.

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$۲\sin x-۱\geq ۰ \implies \sin x\geq\frac{۱}{۲}$$



پاسخ معادله $\sin x=\frac{۱}{۲}$ در فاصله $[۰,۲\pi]$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ است. پاسخ نابرابری $\sin x\geq\frac{۱}{۲}$ کلیه x هایی است که نمودار $y=\sin x$ بالای خط $y=\frac{۱}{۲}$ قرار می‌گیرد که با توجه به شکل بازه $\frac{\pi}{۶}\leq x\leq\frac{۵\pi}{۶}$ است. اما چون $f(x)$ متناوب با دوره تناوب ۲π است پاسخ سؤال اجتماع بازه‌های $\left[۲k\pi+\frac{\pi}{۶},۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\right]$ برای $k\in\mathbb{Z}$ می‌باشد.

برای برد f چون $\frac{۱}{۲}\leq\sin x\leq ۱$ پس $۰\leq ۲\sin x-۱\leq ۱$ و با توجه به اینکه $\sqrt{\ }$ تابعی صعودی اکید است، با جذر گرفتن از این نامساوی جهت نامساوی تغییر نمی‌کند ولذا $۰\leq f(x)\leq ۱$ یعنی $R_f=[۰,۱]$.

تست ۱۰ برد تابع با ضابطه $f(x)=\sin^۲ x-۲\sin x$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $[-۱,۰]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۱,۳]$ ۴) $[-۲,۳]$

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. توجه کنید که $y=(\sin x-۱)^۲-۱$:

$$-۱\leq\sin x\leq ۱ \implies -۲\leq\sin x-۱\leq ۰ \implies ۰\leq(\sin x-۱)^۲\leq ۴ \implies -۱\leq y\leq ۳$$

روش دوم. با توجه به نکته زیر کافی است مقایر $f(x)$ را به ازای $\sin x=۱,-۱,۱$ بدست آوریم که برابر $f(x)=-۱,۳,-۱$ می‌باشند. پس ماکزیمم و می‌نیمم f برابر ۳ و ۱- بوده و برد $[-۱,۳]$ خواهد بود.

نکته ۱۱. برای یافتن برد توابع $f(x)=a\sin^۲ x+b\sin x+c$ کافی است مقادیر $f(x)$ را به ازای $\sin x=۱,-۱,-\frac{b}{۲a}$ (به شرط $-۱\leq-\frac{b}{۲a}\leq ۱$) محاسبه کنیم. با مقایسه مقادیر بدست آمده برای f ماکزیمم و می‌نیمم مطلق f بدست آمده و برد تابع محاسبه می‌شود. این روش با جایگزینی $\cos x$ به جای $\sin x$ نیز قابل

استفاده است.

تذکر۱۸. ممکن است برای حل این تست چنین بنویسید: [۳]

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \implies \begin{cases} ۰ \le \sin^۲ x \le ۱ \\ -۲ \le -۲\sin x \le ۲ \end{cases} \implies -۲ \le \sin^۲ x - ۲\sin x \le ۳ \,.$$

نابرابری بالا درست است اما از آن نمی‌توان نتیجه گرفت که برد برابر $[-۲,۳]$ می‌باشد. در حقیقت برد تابع زیر مجموعه‌ای از بازه اخیر است. برد تابع مقادیری است که تابع اتخاذ می‌کند در حالیکه f نمی‌تواند برابر -۲ شود. زیرا با توجه به نابرابری بالا $f(x) = -۲$ وقتی رخ می‌دهد که $\sin^۲ x = ۰$ و $-۲\sin x = -۲$ و واضح است که دو تساوی اخیر، همزمان رخ نخواهند داد.

۳-۲-۱ توابع معکوس مثلثاتی

توابع مثلثاتی یک به یک نیستند اما با محدود کردن دامنه، به توابعی یکنوا و معکوس‌پذیر تبدیل می‌شوند.

الف) تابع $f(x) = \sin x$ با دامنه $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ صعودی اکید و بنابراین دارای وارون است. وارون آنرا با نماد $\text{Arcsin}x$ یا $\sin^{-۱} x$ نمایش می‌دهیم.

$$-۱ \le x \le ۱ \quad , \quad -\frac{\pi}{۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۲} \quad : \quad \alpha = \text{Arcsin}x \iff \sin\alpha = x$$

۱) $\text{Arcsin}x$ تابعی صعودی اکید با دامنه $[-۱,۱]$ و برد $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ است.

۲) $\text{Arcsin}x$ تابعی فرد است، یعنی $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}x$.

۳) برای هر $-۱ \le x \le ۱$ و هر $-\frac{\pi}{۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۲}$ داریم $\sin(\text{Arcsin}\ x) = x$ و $\text{Arcsin}(\sin\alpha) = \alpha$.

ب) تابع $f(x) = \cos x$ با دامنه $[۰,\pi]$ نزولی اکید و بنابراین دارای وارون است. وارون آنرا با $\text{Arccos}x$ یا $\cos^{-۱} x$ نمایش می‌دهیم.

$$-۱ \le x \le ۱ \quad , \quad ۰ \le \alpha \le \pi \quad : \quad \alpha = \text{Arccos}x \iff \cos\alpha = x$$

۱) $\text{Arccos}x$ تابعی نزولی اکید با دامنه $[-۱,۱]$ و برد $[۰,\pi]$ است.

۲) $\text{Arccos}x$ نه زوج است و نه فرد و $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}x$.

۳) برای هر $-۱ \le x \le ۱$ داریم $\cos(\text{Arccos}x) = x$ و برای هر $۰ \le \alpha \le \pi$ داریم $\text{Arccos}(\cos\alpha) = \alpha$.

۴) $\text{Arcsin}x + \text{Arccos}x = \frac{\pi}{۲}$

ج) تابع $f(x) = \tan x$ با دامنه $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ صعودی اکید و دارای وارون است. وارون آنرا با $\text{Arctan}x$ یا $\tan^{-۱} x$ نمایش می‌دهیم.

$$x \in \mathbb{R} \quad , \quad -\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲} \quad : \quad \alpha = \text{Arctan}x \iff x = \tan\alpha$$

۱) $\text{Arctan}x$ تابعی صعودی اکید با دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ است.

---

[۳] این روشی است که برخی دانشجویان در کلاس آنرا پیشنهاد دادند و به جواب نادرست رسیدند.

۲) $\text{Arctan}x$ تابعی فرد است.

۳) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\tan(\text{Arctan}x) = x$ و برای هر $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ داریم $\text{Arctan}(\tan\alpha) = \alpha$.

۴) با توجه به (الف ـ ۳) در صفحه ۲۳:

$$\text{Arctan}x + \text{Arctan}y = \begin{cases} \text{Arctan}\dfrac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \pi + \text{Arctan}\dfrac{x+y}{1-xy} & xy > 1, x > 0 \\ -\pi + \text{Arctan}\dfrac{x+y}{1-xy} & xy > 1, x < 0 \end{cases}$$

۵) $\text{Arctan}x - \text{Arctan}y = \text{Arctan}\dfrac{x-y}{1+xy}$ (با شرط $xy > 0$)

د) تابع $f(x) = \cot x$ با دامنه $(0, \pi)$ نزولی اکید و دارای وارون است. وارون آن را با $\text{Arccot}x$ یا $\cot^{-1} x$ نمایش می‌دهیم.

$$x \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 < \alpha < \pi \quad : \quad \alpha = \text{Arccot}x \iff x = \cot\alpha$$

۱) $\text{Arccot}x$ تابعی نزولی اکید با دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, \pi)$ است.

۲) $\text{Arccot}x$ نه زوج و نه فرد است و $\text{Arccot}(-x) = \pi - \text{Arccot}x$

۳) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\cot(\text{Arccot}x) = x$ و برای هر $0 < \alpha < \pi$ داریم $\text{Arccot}(\cot\alpha) = \alpha$.

۴) $\text{Arctan}x = \text{Arccot}\dfrac{1}{x}$ برای هر $x > 0$.

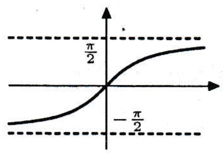
۵) $\text{Arctan}x + \text{Arccot}x = \dfrac{\pi}{2}$.

هـ) برای $|x| \geq 1$ توابع معکوس sec و csc به صورت زیر تعریف می‌شوند.

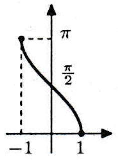
$$\text{Arcsec}x = \text{Arccos}\frac{1}{x} \quad , \quad \text{برد} = [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$$

$$\text{Arccsc}x = \text{Arcsin}\frac{1}{x} \quad , \quad \text{برد} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$$

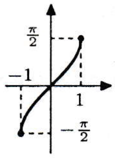
اگر نمودار توابع مثلثاتی را در دامنه مناسب نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم نمودار معکوس آنها حاصل می‌شود.



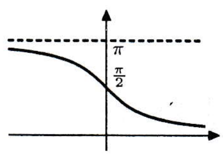
$y = \text{Arctan}x$



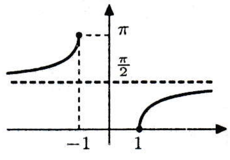
$y = \text{Arccos}x$



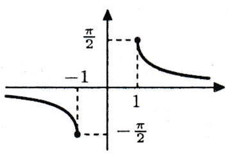
$y = \text{Arcsin}x$



$y = \text{Arccot}x$



$y = \text{Arcsec}x$



$y = \text{Arccsc}x$

مثال ۱۱. دامنه و برد تابع $f(x) = \mathrm{Arccos}\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}$ را به‌دست آورید.

برای تعیین دامنه تابع داریم:

$$\begin{cases} -۱ \le \sqrt{x+\frac{۱}{۲}} \le ۱ \\ x+\frac{۱}{۲} \ge ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+\frac{۱}{۲} \le ۱ \\ x \ge -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Longrightarrow -\frac{۱}{۲} \le x \le \frac{۱}{۲} \Longrightarrow D_f = [-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$$

برای تعیین برد با توجه به اینکه $۰ \le \sqrt{x+\frac{۱}{۲}} \le ۱$ و تابع Arccos نزولی اکید است و با اعمال آن بر نابرابری جهت آن عوض می‌شود و لذا $\mathrm{Arccos}(۱) \le f(x) \le \mathrm{Arccos}(۰)$ پس $R_f = [۰, \frac{\pi}{۲}]$.

تست ۱۱ اگر $\frac{\pi}{۲} \le x \le \pi$ در این صورت $\mathrm{Arcsin}(\cos ۲x)$ برابر است با: (مکانیک ۷۷)

۱) $\frac{\pi}{۲} - ۲x$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲} - ۲x$ ۳) $۲x - \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲x - \frac{۳\pi}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. اگر $x = \pi$ را در رابطه قرار دهیم داریم $\mathrm{Arcsin}(\cos ۲\pi) = \mathrm{Arcsin}(۱) = \frac{\pi}{۲}$ که فقط با گزینه (۴) مطابقت دارد!!

روش دوم. ابتدا باید cos را بر حسب sin بنویسیم. می‌دانیم $\cos ۲x = \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x)$ اما در این صورت $\mathrm{Arcsin}(\cos ۲x) = \sin^{-۱}(\sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x)) = \frac{\pi}{۲} - ۲x$ نادرست است. زیرا رابطه $\sin^{-۱}(\sin\alpha) = \alpha$ فقط برای $|\alpha| \le \frac{\pi}{۲}$ برقرار است ولی چون $\frac{\pi}{۲} \le x \le \pi$ پس $-\frac{۳\pi}{۲} \le \frac{\pi}{۲} - ۲x \le -\frac{\pi}{۲}$. اما با تذکر ۱۳ در صفحه ۲۴ داریم $\cos(۲x) = \sin(۲x - \frac{۳\pi}{۲})$ و اینکه $-\frac{\pi}{۲} \le ۲x - \frac{۳\pi}{۲} \le \frac{\pi}{۲}$ پس:

$$\mathrm{Arcsin}(\cos ۲x) = \mathrm{Arcsin}\big(\sin(۲x - \frac{۳\pi}{۲})\big) = ۲x - \frac{۳\pi}{۲}$$

روش سوم. یک ایده کلی (با توجه به گزینه‌ها) تشکیل دادن مشتق عبارت مورد نظر است. اگر $f(x) = \mathrm{Arcsin}(\cos ۲x)$ آنگاه:

$$f'(x) = \frac{-۲\sin ۲x}{\sqrt{۱ - \cos^۲ ۲x}} = \frac{-۲\sin ۲x}{\sqrt{\sin^۲ ۲x}} = \frac{-۲\sin ۲x}{|\sin ۲x|}$$

چون $\pi \le ۲x \le ۲\pi$ پس $\sin ۲x < ۰$ و $|\sin ۲x| = -\sin ۲x$ و لذا $f'(x) = ۲$. بنابراین $f(x) = ۲x + c$ چون $f(\pi) = \sin^{-۱}(\cos ۲\pi) = \sin^{-۱} ۱ = \frac{\pi}{۲}$ پس باید $c = -\frac{۳\pi}{۲}$ و لذا $f(x) = ۲x - \frac{۳\pi}{۲}$.

تست ۱۲ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\pi - ۳\mathrm{Arccos}x}$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $[-۱, \frac{۱}{۲}]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$ ۳) $[۰, \frac{۱}{۲}]$ ۴) $[\frac{۱}{۲}, ۱]$

حل: گزینه ۴ درست است. توجه کنید که باید $-۱ \le x \le ۱$.

$$\pi - ۳\cos^{-۱} x \ge ۰ \Longrightarrow \cos^{-۱} x \le \frac{\pi}{۳} = \cos^{-۱}\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{نزولی } \cos^{-۱}} x \ge \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} \le x \le ۱$$

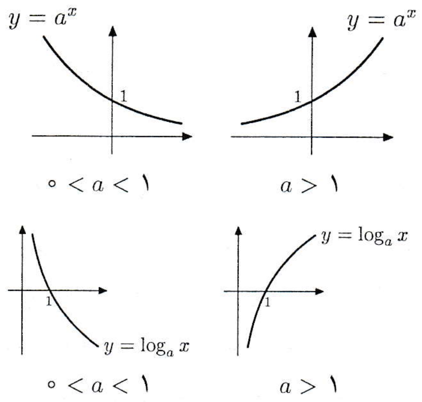
تست ۱۳ برد تابع $f(x) = \mathrm{Arctan}(x^۲ - ۱)$ برابر است با:

۱) $[-\frac{\pi}{۴}, +\infty)$ ۲) $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$ ۳) $[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$ ۴) $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $x^۲ - ۱ \geq -۱$ و تابع Arctan صعودی اکید است با اثر دادن آن روی نابرابری، جهت نابرابری تغییری نمی‌کند.

$$-\frac{\pi}{۴} = \text{Arctan}(-۱) \leq \text{Arctan}(x^۲ - ۱) < \text{Arctan}(+\infty) = \frac{\pi}{۲} \implies R_f = [-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$$

۱-۲-۴ توابع نمایی و لگاریتمی



برای $a > ۰$ و $a \neq ۱$ تابع $f(x) = a^x$ تابع **نمایی** نامیده می‌شود که دامنه آن $\mathbb{R}$ و برد آن $(۰, +\infty)$ است. برای $۰ < a < ۱$ این تابع نزولی اکید و برای $a > ۱$ صعودی اکید است.

با توجه به نمودار، این توابع وارون‌پذیر هستند که وارون آن تابع **لگاریتمی** $y = \log_a x$ است. پس نمودار توابع لگاریتمی قرینه نمودار نمایی نسبت به $y = x$ هستند که برای $۰ < a < ۱$ نزولی اکید و برای $a > ۱$ صعودی اکید هستند. دامنه آنها $(۰, +\infty)$ و برد آنها $\mathbb{R}$ است.

تذکر۱۹. a مبنای لگاریتم نامیده می‌شود و در حالتی که $a = ۱۰$ معمولاً آن را نمی‌نویسیم.(**لگاریتم اعشاری**) و در حالتی که $a = e$ (عدد نپر) لگاریتم را با نماد ln نمایش می‌دهیم، که **لگاریتم طبیعی** نامیده می‌شود.

خواص توابع نمایی و لگاریتمی

برای $a > ۰$ و $a \neq ۱$ داریم:

۱) $a^{x+y} = a^x . a^y$

۲) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

۳) $\log_a a = ۱$ و $\log_a ۱ = ۰$

برای هر $x, y > ۰$ داریم:

۴) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad , \quad \log_a(\dfrac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

۵) اگر $m \neq ۰$ داریم: $\log_{a^m} x^n = \dfrac{n}{m} \log_a x$

۶) $\log_a a^x = x \quad , \quad a^{\log_a x} = x$

۷) فرمول تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_y x = \frac{۱}{\log_x y} \quad : \quad x, y \neq ۱ \qquad \text{و} \qquad \log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y} \quad : \quad y \neq ۱$$

۸) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

۹) $x^y = a^{y \log_a x}$ و خصوصاً $x^y = e^{y \ln x}$.

مثال ۱۲. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{۲ - \log_۲(۱ - x)}$ را به‌دست آورید.

$$۲ - \log_۲(۱ - x) \geq ۰ \quad , \quad ۱ - x > ۰ \implies \log_۲(۱ - x) \leq ۲ = \log_۲ ۴ \quad , \quad x < ۱$$

حال چون $\log_۲$ صعودی اکید است، آنرا از دو طرف نابرابری حذف می‌کنیم و جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

$$۱ - x \leq ۴ \quad , \quad x < ۱ \implies -۳ \leq x < ۱ \implies D_f = [-۳, ۱)$$

مثال ۱۳. دامنه تابع $f(x) = \left(\log_{\frac{۱}{۲}} x\right)^x$ را به‌دست آورید.

در توابع به شکل $u(x)^{v(x)}$ طبق تعریف باید $u(x) > ۰$ پس باید $\log_{\frac{۱}{۲}} x > ۰$ و $x > ۰$. از نابرابری اول داریم $\log_{\frac{۱}{۲}} x > ۰ = \log_{\frac{۱}{۲}} ۱$ و با حذف $\log_{\frac{۱}{۲}}$ و با توجه به نزولی بودن آن جهت نابرابری عوض می‌شود و لذا $x < ۱$.
پس دامنه $۰ < x < ۱$ خواهد بود.

$\boxed{\text{تست ۱۴}}$ نمودارهای دو تابع $y = \log x$ و $y = \log_{\frac{۱}{۱۰}} x$ نسبت به کدام خط قرینه‌اند؟ (سیستم ـ آزاد ۷۶)

۱) نیمساز ناحیه دوم و چهارم
۲) نیمساز ناحیه اول و سوم
۳) محور x ها
۴) محور y ها

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به ویژگی (۵) داریم $y = \log_{\frac{۱}{۱۰}} x = \log_{۱۰^{-۱}} x = \frac{۱}{-۱}\log_{۱۰} x = -\log_{۱۰} x$
و لذا نمودارها نسبت به محور x ها قرینه یکدیگر هستند.

$\boxed{\text{تست ۱۵}}$ اگر $\ln ۲ = ۰/۷$ و $\ln ۵ = ۱/۶$ مقدار $\ln(۰/۰۱)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $-۴/۶$
۲) $-۴/۷$
۳) $-۳/۷$
۴) $-۳/۶$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\ln(۰/۰۱) = \ln ۱۰^{-۲} = -۲\ln ۱۰ = -۲(\ln ۲ + \ln ۵) = -۲(۰/۷ + ۱/۶) = -۴/۶$$

$\boxed{\text{تست ۱۶}}$ دامنه ضابطه $f(x) = \sqrt{\log(۲x - x^۲)}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $\{۱\}$
۲) $\{x : x \geq ۱\}$
۳) $\{x : x \leq ۱\}$
۴) $\{x : ۰ < x < ۲\}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$۲x - x^۲ > ۰ \quad \text{و} \quad \log(۲x - x^۲) \geq ۰ = \log ۱ \implies ۲x - x^۲ \geq ۱ \implies (x - ۱)^۲ \leq ۰ \implies x = ۱$$

تذکر ۲۰. چون دامنه فقط شامل یک عضو است، برد $R_f = \{f(۱)\} = \{۰\} = [۰, ۰]$ می‌باشد.

$\boxed{\text{تست ۱۷}}$ برد تابع با ضابطه $f(x) = ۲^{[x]-x}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $(\frac{۱}{۲}, ۱]$
۲) $(\frac{۱}{۲}, ۲)$
۳) $[۱, ۲)$
۴) $[\frac{۱}{۲}, ۲]$

حل: گزینه ۱ درست است. ۲^x تابعی صعودی اکید است. از خاصیت (۲) جزء صحیح در صفحه ۲۲:

$$۰ \leq x - [x] < ۱ \implies -۱ < [x] - x \leq ۰ \implies ۲^{-۱} < ۲^{[x]-x} \leq ۲^۰ \implies R_f = (\frac{۱}{۲}, ۱]$$

تست ۱۸ برد تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۲}(۸x - x^{۲})}$ کدام فاصله است؟ **(هواشناسی کشاورزی ۷۶)**

۱) $[۰, ۲]$ ۲) $[۰, ۲)$ ۳) $(۰, ۴]$ ۴) $[۰, +\infty)$

حل: گزینه ۱ درست است. چون نمودار $g(x) = ۸x - x^{۲}$ یک سهمی و $x = ۴$ رأس آن است، از نکته ۱ در صفحه ۱۵ داریم $g(x) \leq g(۴) = ۱۶$. با توجه به اینکه $\log_{۲}$ تابعی صعودی اکید است:

$$\log_{۲}(۸x - x^{۲}) \leq \log_{۲}(۱۶) = ۴ \implies f(x) \leq \sqrt{۴} = ۲ \quad \text{و} \quad f(x) \geq ۰ \implies R_f = [۰, ۲]$$

تست ۱۹ اگر $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + ۱}$ و $g(x) = \cos^{۲} x$، تابع $f^{-۱}\big(g(x)\big)$ برای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟
(هواشناسی کشاورزی ۷۶)

۱) $\ln \tan x$ ۲) $\ln \cot x$ ۳) $۲ \ln \cot x$ ۴) $۲ \ln \tan x$

حل: گزینه ۳ درست است. ابتدا $f^{-۱}(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y = \frac{e^x}{e^x + ۱} \implies ye^x + y = e^x \implies e^x = \frac{y}{۱ - y} \implies x = \ln \frac{y}{۱ - y}$$

$$\implies f^{-۱}(x) = \ln \frac{x}{۱ - x} \implies f^{-۱}\big(g(x)\big) = \ln \frac{\cos^{۲} x}{۱ - \cos^{۲} x} = \ln \cot^{۲} x = ۲ \ln \cot x$$

۱–۲–۵ توابع هیپربولیک

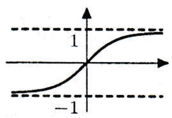
توابع هیپربولیک با روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathrm{ch}x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \qquad \mathrm{sh}x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

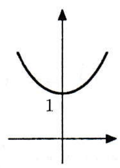
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \mathrm{th}x = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\mathrm{sech}x = \frac{۱}{\cosh x} = \frac{۲}{e^x + e^{-x}} \qquad \mathrm{csch}x = \frac{۱}{\sinh x} = \frac{۲}{e^x - e^{-x}}$$

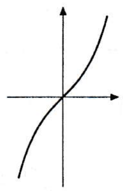
نمودار توابع هیپربولیک به صورت زیر است.

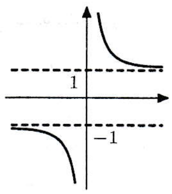


$y = \tanh x$

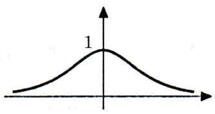


$y = \cosh x$

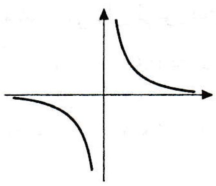

$y = \sinh x$



$y = \coth x$



$y = \mathrm{sech}x$


$y = \mathrm{csch}x$

نکاتی در مورد توابع هیپربولیک

۱) توابع $\cosh x$ و $\mathrm{sech} x$ زوج و فاقد وارون و بقیه توابع فرد و دارای وارون هستند. معمولاً برای وارون‌پذیری $\cosh x$ و $\mathrm{sech} x$ دامنه آنها به $x \geq 0$ محدود می‌کنیم.

۲) روابطی مشابه آنچه بین توابع مثلثاتی دیدیم بین توابع هیپربولیکی هم برقرار است.[۴]

۱) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

۲) $1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x$

۳) $\coth^2 x - 1 = \mathrm{csch}^2 x$

۴) $\cosh x + \sinh x = e^x$

۵) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

۶) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

۷) $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

۸) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

۹) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

۱۰) $\cosh^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$

۱۱) $\sinh^2 x = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

معکوس توابع هیپربولیک

مثال ۱۴. تابع وارون $f(x) = \cosh x$ را محاسبه کنید.

این تابع زوج و فاقد وارون است. اما می‌توان دامنه آنرا طوری محدود کرد که به تابعی یک به یک تبدیل گردد و برد آن نیز تغییر نکند. در واقع دامنه تابع را $I_1 = [0, +\infty)$ یا $I_2 = (-\infty, 0]$ در نظر می‌گیریم. قرارداد آن است که دامنه را I_1 در نظر بگیریم. ابتدا x را بر حسب y می‌یابیم.

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \implies e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \implies e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

ولی چون $x \geq 0$ پس $e^x \geq 1$. اما چون $y = \cosh x \geq 1$ پس

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = (y - \sqrt{y^2 - 1}) \times \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \leq \frac{1}{y} \leq 1$$

بنابراین باید علامت مثبت را انتخاب نماییم.

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \implies x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \implies \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

تذکر ۲۱. توجه کنید که اگر $I_2 = (-\infty, 0]$ به عنوان دامنه در نظر گرفته شود، داریم $e^x \leq 1$ و در این حالت باید علامت منفی را انتخاب کنیم و داریم $\cosh^{-1} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$.

با محاسبات مشابه می‌توان فرمول‌های زیر را برای توابع معکوس مثلثاتی به‌دست آورد.

۱) $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ و $x \in \mathbb{R}$

۲) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ و $x \geq 1$

۳) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ و $|x| < 1$

۴) $\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \dfrac{1}{x}$ و $|x| > 1$

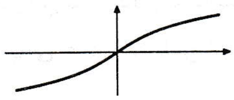
---

[۴] غالباً در اتحادهای مثلثاتی با تبدیل cos به cosh و sin به $i \sinh$ که $i = \sqrt{-1}$ اتحادهای هیپربولیک متناظر حاصل می‌شود.

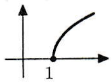
۵) $\operatorname{csch}^{-۱}x = \sinh^{-۱}\frac{۱}{x}$ و $x \neq ۰$

۶) $\operatorname{sech}^{-۱}x = \cosh^{-۱}\frac{۱}{x}$ و $۰ < x \leq ۱$

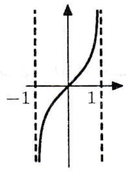
با قرینه کردن نمودار توابع هیپربولیک نسبت به خط $y = x$ نمودار معکوس آنها به‌دست می‌آید.



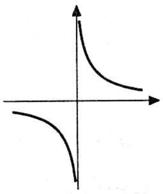
$y = \sinh^{-۱} x$



$y = \cosh^{-۱} x$

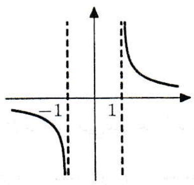


$y = \tanh^{-۱} x$



$y = \operatorname{csch}^{-۱} x$

$y = \operatorname{sech}^{-۱} x$



$y = \coth^{-۱} x$

$\boxed{\text{تست ۲۰}}$ جواب معادله $۳\sinh x + \frac{۹}{۵}\cosh x = -\frac{۹}{۵}$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۷۶)

۱) $x = -\ln ۲$ ۲) $x = \ln ۴$ ۳) $x = -\ln ۴$ ۴) $x = \ln ۲$

حل: گزینه ۳ درست است. با جایگذاری تعریف توابع هیپربولیک:

$$۳\left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right) + \frac{۹}{۵}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right) = -\frac{۹}{۵} \Longrightarrow \frac{۱۲}{۵}e^x - \frac{۳}{۵}e^{-x} = -\frac{۹}{۵} \xrightarrow{\times \frac{۵}{۳}e^x} ۴e^{۲x} + ۳e^x - ۱ = ۰$$

$$\Longrightarrow (e^x + ۱)(۴e^x - ۱) = ۰ \Longrightarrow e^x = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow x = \ln\frac{۱}{۴} = -\ln ۴$$

$\boxed{\text{تست ۲۱}}$ اگر $\sinh x = \frac{۳}{۴}$ آنگاه $\tanh x$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

حل: گزینه ۳ درست است. ابتدا $\cosh x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\cosh^۲ x = ۱ + \sinh^۲ x = ۱ + \frac{۹}{۱۶} \Longrightarrow \cosh x = \pm\frac{۵}{۴}$$

اما $\cosh x \geq ۱$ پس $\cosh x = \frac{۵}{۴}$ و لذا $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{۳}{۵}$.

$\boxed{\text{تست ۲۲}}$ برد تابع $f(x) = \coth(\sqrt{x})$ برابر است با:

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $(۱, +\infty)$ ۳) $\mathbb{R} - [-۱, ۱]$ ۴) $[۱, +\infty)$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به اینکه $\sqrt{x} > ۰$ پس باید نیمه سمت راست نمودار تابع $\coth$ را در نظر بگیریم که نتیجه می‌دهد برد به صورت $(۱, +\infty)$ است.

۱–۳ رسم نمودار برخی توابع

با داشتن نمودار f و با استفاده از قواعد زیر نمودار برخی توابع را می‌توان، سریعتر رسم نمود.

۱) نمودار $f(x) + a$

برای رسم نمودار این تابع، کافی است نمودار f به اندازه a در راستای محور y ها انتقال یابد. برای $a > 0$ این انتقال به بالا و برای $a < 0$ به پایین است.

۲) نمودار $f(x - a)$

برای رسم نمودار این تابع، کافی است نمودار f به اندازه a در راستای محور x ها انتقال یابد. برای $a > 0$ این انتقال به سمت راست و برای $a < 0$ به سمت چپ است.

۳) نمودار $kf(x)$

برای رسم نمودار این تابع برای $k > 0$، عرض نقاط نمودار f، k برابر می‌شوند (انبساط برای $|k| > 1$ و انقباض برای $|k| < 1$ در راستای محور y ها) اگر $k < 0$ ابتدا قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کرده و سپس نمودار منبسط یا منقبض می‌شود.

۴) نمودار $f(kx)$

برای $k > 0$ نمودار در راستای محور x ها منقبض (برای $k > 1$) یا منبسط (برای $k < 1$) می‌شود. اگر $k < 0$ ابتدا قرینه f را نسبت به محور y ها رسم کرده و سپس طبق توضیح بالا عمل می‌کنیم.

۵) $|f(x)|$

برای رسم نمودار این تابع، کافی است قسمتی از نمودار f که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه کنیم و قسمتی که بالای نمودار f است، تغییری نمی‌کند.

۶) $f(|x|)$

برای رسم نمودار این تابع باید قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y ها واقع است را حذف کرده و قسمتی از نمودار f که سمت راست محور y ها قرار دارد (در ربع اول و چهارم) را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

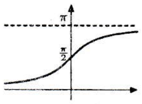
۷) $[f(x)]$

برای رسم نمودار این تابع، کافی است خطوط افقی $y = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ را رسم کنیم سپس قسمتی از نمودار f که بین دو خط $y = k$ و $y = k + 1$ قرار دارد $(k \leq y < k + 1)$ را روی خط $y = k$ تصویر کنیم.

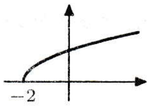
۸) $f([x])$

برای رسم نمودار این تابع، کافی است خطوط عمودی $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ را رسم کنیم سپس قسمتی از نمودار f که بین دو خط $x = k$ و $x = k + 1$ قرار دارد $(k \leq x < k + 1)$ را روی خط $y = f(k)$ تصویر نماییم.

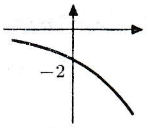
مثال ۱۵. نمودار توابع $f(x)=\frac{\pi}{2}+\text{Arctan}x$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ و $h(x)=-2e^x$ و $k(x)=\text{sech}^{-1}(-x)$ را رسم نمایید.



برای رسم نمودار f با توجه به (۱) به ازای $a=\frac{\pi}{2}$ باید نمودار $y=\tan^{-1}x$ را رسم کرده و سپس آن را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در راستای محور y ها به بالا منتقل کنیم. با توجه به اینکه $y=\pm\frac{\pi}{2}$ مجانبهای $y=\tan^{-1}x$ هستند پس تابع f دارای مجانبهای $y=0$ و $y=\pi$ خواهند بود.



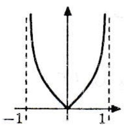
برای رسم نمودار g با توجه به (۲) به ازای $a=-2$ باید نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل نماییم.



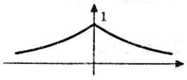
برای رسم نمودار h کافی است نمودار $y=e^x$ را نسبت به محور x قرینه کرده و سپس عرض نقاط را ۲ برابر نماییم. مثلاً نقطه برخورد با محور y ها دارای عرض ۲− خواهد بود.

برای رسم نمودار k باتوجه به (۴) کافی است، نمودار $y=\text{sech}^{-1}x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

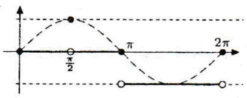
مثال ۱۶. نمودار توابع $f(x)=|\tanh^{-1}x|$ و $g(x)=(\frac{1}{2})^{|x|}$ و $h(x)=[\sin x]\ ,\ 0\leq x\leq 2\pi$ و $k(x)=[x]^2\ ,\ x>0$ را رسم نمایید.



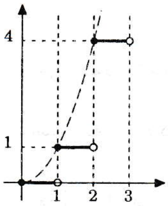
برای رسم نمودار f با توجه به (۵) ابتدا نمودار $y=\tanh^{-1}x$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمتهایی از این نمودار که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



برای رسم نمودار g با توجه به (۶) ابتدا نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمتهایی که در سمت چپ محور عرضها قرار دارد را حذف نموده و قسمت واقع در سمت راست این محور را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم.



برای رسم نمودار h با توجه به (۷) ابتدا نمودار $y=\sin x$ (نمودار نقطه‌چین در شکل مقابل) و خطوط افقی $y=0,\pm1$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمتی از نمودار $\sin x$ که بین خطوط $y=-1$ و $y=0$ قرار دارد را روی خط $y=-1$ و قسمتی که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد را روی خط $y=0$ تصویر می‌کنیم.



برای رسم نمودار k باتوجه به (۸) ابتدا نمودار $e(x)=x^2$ (نمودار نقطه‌چین در شکل مقابل) و خطوط قائم $x=0,1,2,\cdots$ را رسم کرده و قسمتی که بین $x=0$ و $x=1$ قرار دارد را روی خط $y=e(0)=0$ و قسمتی که بین $x=1$ و $x=2$ قررا دارد، روی $y=e(1)=1$ تصویر می‌کنیم و ....

۱ـ۴ بسط دوجمله‌ای و سه‌جمله‌ای

برای هر عدد طبیعی n فرمول بسط دوجمله‌ای (خیام ـ نیوتن) به صورت زیر است.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \qquad (۱ـ۷)$$

فرمول بالا را به صورت $(a+b)^n = \sum\limits_{i+j=n} \frac{n!}{j!i!} a^j b^i$ و $i, j \geq 0$ نیز می‌توان نوشت و در این صورت برای k جمله نیز به صورت زیر قابل تعمیم است.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k} \quad \text{و} \quad n_1, n_2, \cdots, n_k \geq 0 \qquad (۱ـ۸)$$

خصوصاً برای سه‌جمله به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k \quad \text{و} \quad i, j, k \geq 0 \qquad (۱ـ۹)$$

ویژگیهای بسط دوجمله‌ای

بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ دارای ویژگیهای زیر است.

۱) این بسط دارای $n+1$ جمله است و در هر جمله مجموع توان a و b برابر n است.

۲) جمله عمومی $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ برای $0 \leq k \leq n$ است.

۳) با جایگذاری $a = b = 1$ مجموع ضرایب بسط دوجمله‌ای برابر 2^n به‌دست می‌آید.

۴) با توجه به اتحاد پاسکال $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ جملاتی که از دو طرف بسط به یک فاصله باشند دارای ضرایب برابر هستند و به همین خاطر جمله وسط دارای بزرگترین ضریب است.

تذکر۲۲. در حالت کلی برای رابطه (۱ ـ ۸) تعداد جملات برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

مثال ۱۷. تحت چه شرایطی در بسط $(x^\alpha + \frac{1}{x^\beta})^n$ جمله ثابت (فاقد x) وجود دارد؟ این جمله را محاسبه نمایید.
جمله عمومی بسط دو جمله‌ای را با فرض $a = x^\alpha$ و $b = \frac{1}{x^\beta} = x^{-\beta}$ به دست می‌آوریم.

جمله عمومی : $\binom{n}{k} (x^\alpha)^k (x^{-\beta})^{n-k} = \binom{n}{k} x^{k(\alpha+\beta)-n\beta}$

پس جمله ثابت وقتی به دست می‌آید که توان x برابر صفر باشد و لذا $k = \frac{n\beta}{\alpha+\beta}$. پس شرط وجود جمله ثابت آن است که k عدد صحیح باشد و این جمله ثابت برابر $\binom{n}{k}$ خواهد بود.

مثال ۱۸. در عبارت $(x - \frac{1}{x} + 2)^5$ جمله فاقد x را محاسبه نمایید.
با فرض $a = x$ و $b = -\frac{1}{x} = -x^{-1}$ و $c = 2$ و $n = 5$ در فرمول (۱ ـ ۹) جمله عمومی به صورت زیر است.

$$\frac{5!}{i!j!k!}x^i(-x^{-1})^j 2^k = \frac{5! \times 2^k}{i!j!k!}(-1)^j x^{i-j}$$

که در آن $i+j+k=5$ و $i,j,k \geq 0$. پس جمله‌ای فاقد x است که در آن $i=j$ و در این صورت $2i+k=5$ و لذا $k=5-2i$. چون $k \geq 0$ پس $0 \leq i \leq \frac{5}{2}$ و لذا $i=0,1,2$. پس هر جمله فاقد x به صورت

$$A_i = \frac{5! \times 2^{5-2i} \times (-1)^i}{(i!)^2(5-2i)!} \quad \text{و} \quad i=0,1,2$$

است و لذا جمله فاقد x عبارتست از:

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{5! \times 2^5}{5!} - \frac{5! \times 2^3}{3!} + \frac{5! \times 2}{(2!)^2} = -68$$

تست ۲۳ در بسط $(x - \frac{1}{2x})^8$ مجموع ضرایب کدام است؟ **(مدیریت ۷۸)**

۱) $\frac{1}{256}$ ۲) $\frac{1}{64}$ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

حل: گزینه ۱ درست است. برای یافتن مجموع ضرایب در یک بسط کافی‌است به جای همه متغیرها عدد یک را قرار دهیم. پس مجموع ضرایب برابر $(1-\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{256}$ خواهد بود.

تست ۲۴ چند جمله گویا در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}$ وجود دارد؟ **(اقتصاد ۸۱)**

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

حل: گزینه ۳ درست است. با قرار دادن $b = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ و $a = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ و $n = 100$ در رابطه (۱ ــ ۷) در صفحه قبل:

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^{100} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(\sqrt[3]{3})^k(\sqrt{2})^{100-k} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}3^{\frac{k}{3}} \times 2^{\frac{100-k}{2}}$$

توجه کنید که $3^{\frac{1}{3}}$ و $3^{\frac{2}{3}}$ اعدادی گنگ هستند و بنابراین برای آنکه $3^{\frac{k}{3}}$ عددی گویا باشد، باید $\frac{k}{3}$ عددی صحیح باشد و به عبارتی k مضرب ۳ باشد. برای آنکه $2^{\frac{100-k}{2}}$ عددی گویا باشد، باید توان ۲ عددی صحیح شود و لذا $100-k$ وبنابراین k باید زوج باشد. پس باید $0 \leq k \leq 100$ مضرب ۶ باشد. این اعداد $0, 6, 12, 18, \cdots, 96$ است که تعداد آنها ۱۷ است.

تست ۲۵ تعداد جملات گویای بسط $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{3})^{12}$ برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به فرمول (۱ ــ ۹) جمله عمومی عبارت است از:

$$\frac{12!}{i!j!k!}(\sqrt{2})^i(\sqrt[3]{7})^j(\sqrt[5]{3})^k = \frac{12!}{i!j!k!}2^{\frac{i}{2}} \times 7^{\frac{j}{3}} \times 3^{\frac{k}{5}} \quad \text{و} \quad i+j+k=12$$

برای آنکه جمله‌ای از بسط بالا گویا باشد، باید شرایط زیر همزمان رخ دهد.

۱) k مضرب ۵ باشد و $0 \leq k \leq 12$ و لذا $k = 0, 5, 10$

۲) j مضرب ۳ باشد و $0 \leq j \leq 12$ و لذا $j = 0, 3, 6, 9, 12$

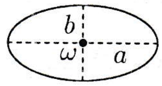
۳) i مضرب ۲ باشد و $0 \leq i \leq 12$ و $i+j+k=12$.

پس شرط (۳) را به این صورت تغییر می‌دهیم که $j+k$ زوج بوده و $0 \le j+k \le 12$. حال اگر $k = 0$ آنگاه j می‌تواند مقادیر ۱۲, ۶, ۰ را بپذیرد و لذا تا کنون سه جمله گویا به دست آمده است. اگر $k = 5$ آنگاه $j = 3$ و لذا یک جمله دیگر هم حاصل می‌شود و بالاخره اگر $k = 10$ آنگاه $j = 0$ قابل قبول است. پس ۵ جمله گویا وجود دارد.

۱—۵ مقاطع مخروطی

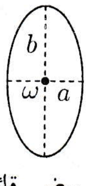
ضابطه درجه دوم $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ با شرط اینکه A و B همزمان صفر نباشند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند که در اثر تقاطع مخروط با یک صفحه پدید می‌آیند و به‌طور عمومی بیضی (در حالت خاص دایره)، هذلولی و سهمی هستند.

الف) اگر $AB > 0$ نمودار بیضی و در حالت خاص $A = B$ دایره است.



بیضی افقی

پس از مربع کامل کردن معادله کلی مقطع مخروطی شکل استاندارد معادله بیضی به‌صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ حاصل می‌شود که $\omega(\alpha, \beta)$ مرکز تقارن آن است. طول قطرهای بزرگ و کوچک آن $2a$ و $2b$ هستند. در حالت $a > b$ بیضی افقی با خروج از مرکز $\frac{c}{a}$ و برای $b > a$ بیضی قائم با خروج از مرکز $\frac{c}{b}$ است.

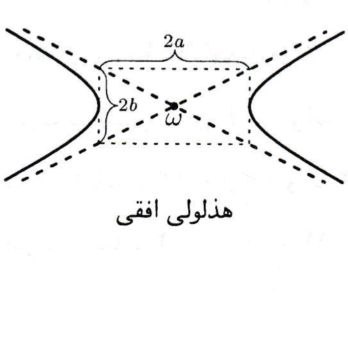


بیضی قائم

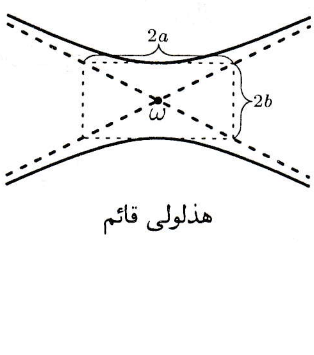
نکته ۱۲. مساحت بیضی عبارت است از πab.

نکته ۱۳. بیضی مکان هندسی نقاطی است که مجموع فواصل آن از دو نقطه ثابت (که کانون نامیده می‌شوند.) برابر مقداری ثابت (برابر طول قطر بزرگ) است. کانون‌ها روی قطر بزرگ و در فاصله c از ω قرار دارند. که c برای بیضی افقی از رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ و برای بیضی قائم از رابطه $b^2 = a^2 + c^2$ بدست می‌آید.

ب) اگر $AB < 0$ نمودار هذلولی است و در حالت خاص $A = -B$ به آن **هذلولی متساوی‌الساقین (قطرین)** گفته می‌شود. پس از مربع کامل کردن معادله استاندارد هذلولی افقی به‌صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ و معادله استاندارد هذلولی قائم به‌صورت $\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$ در می‌آید و $\omega(\alpha, \beta)$ مرکز تقارن آن است. اگر $c^2 = b^2 + a^2$، کانون‌ها بر قطر حقیقی (قطری که هذلولی را قطع می‌کند) و به فاصله c از ω قرار دارند.



هذلولی افقی



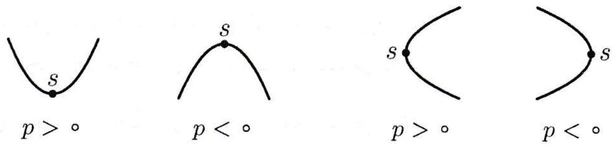
هذلولی قائم

نکته ۱۴. هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدرمطلق تفاضل فواصل آن از دو نقطه ثابت (کانون‌ها) مقدار ثابت (برابر طول قطر کانونی) است.

نکته ۱۵. حاصلضرب فواصل هر نقطه روی هذلولی از دو خط ثابت که مجانب نامیده می‌شوند مقداری ثابت است. مجانبها از ω می‌گذرند و دارای شیب $\pm\frac{b}{a}$ هستند. معادله مجانبها از مساوی صفر قرار دادن سمت راست معادله هذلولی به دست می‌آید.

نکته ۱۶. اگر معادله کلی مقاطع مخروطی را به‌صورت $F(x,y) = ۰$ نمایش دهیم در حالتی که $AB \neq ۰$ برای به‌دست آوردن مرکز تقارن مقطع مخروطی کافی است دستگاه $\begin{cases} F'_x = ۰ \\ F'_y = ۰ \end{cases}$ را حل کنیم که در آن F'_x و F'_y به‌ترتیب مشتق F نسبت به x و y را نمایش می‌دهد. ضمناً هریک از معادلات $F'_x = ۰$ یا $F'_y = ۰$ محور تقارن مقطع مخروطی را محاسبه می‌کند.

ج) اگر $AB = ۰$ نمودار یک سهمی است. در این حالت معادله به‌صورت $(x-\alpha)^۲ = ۴p(y-\beta)$ (سهمی قائم) یا $(y-\beta)^۲ = ۴p(x-\alpha)$ (سهمی افقی) است. در هر حالت $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی است.



نکته ۱۷. سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (کانون) برابر با فاصله آن از یک خط ثابت (خط هادی) است. کانون همواره داخل سهمی و روی محور تقارن سهمی به فاصله $|p|$ از رأس و خط هادی عمود بر محور تقارن و در خارج سهمی و به فاصله $|p|$ از رأس قرار دارد.

تست ۲۶ نمایش هندسی $۴x^۲ - y^۲ + ۲y - ۱ = ۰$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) بیضی ۲) هذلولی ۳) یک نقطه ۴) دو خط راست

حل: گزینه ۴ درست است. چون ضریب $x^۲$ و $y^۲$ علامت مخالف دارند، شکل باید هذلولی باشد اما اگر معادله داده شده را مربع کامل کنیم، به‌صورت $۴x^۲ - (y-۱)^۲ = ۰$ یعنی $۲x = \pm(y-۱)$ تبدیل می‌شود که نمایش دو خط راست متقاطع است.

نکته ۱۸. در هذلولی و بیضی مرکز تقارن روی نمودار قرار ندارد. در معادله کلی بیضی اگر مرکز تقارن در معادله، صدق کند شکل یک نقطه است و در هذلولی اگر مرکز تقارن در معادله صدق کند، شکل دو خط راست متقاطع است.

در این تست با فرض $F(x,y) = ۴x^۲ - y^۲ + ۲y - ۱$ و با حل دستگاه $\begin{cases} F'_x = ۸x = ۰ \\ F'_y = -۲y + ۲ = ۰ \end{cases}$ مرکز تقارن به‌صورت $\omega(۰,۱)$ به‌دست می‌آید و چون در معادله صدق می‌کند پس هذلولی به دو خط راست متقاطع تبدیل می‌شود.

تست ۲۷ مکان هندسی نقاطی را به دست آورید که مجموع مربعات فواصل آن از دو خط عمود بر هم $۵x + ۱۲y - ۴ = ۰$ و $۱۲x - ۵y + ۱۰ = ۰$ برابر ۵ باشد. (سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $۱۶۹x^۲ + ۱۶۹y^۲ - ۱۹۶y + ۲۰۰x - ۷۲۹ = ۰$

۲) $۱۶۹x^۲ + ۱۶۹y^۲ - ۱۶۹y + ۲۰۰x - ۷۲۹ = ۰$

۳) $۱۶۹x^۲ + ۱۶۹y^۲ + ۲۰۰x + ۲۰۰y - ۷۲۹ = ۰$

۴) $۱۶۹x^۲ + ۱۶۹y^۲ - ۲۰۰x - ۲۰۰y - ۷۲۹ = ۰$

حل: گزینه ۱ درست است. فاصله نقطه دلخواه $M(x,y)$ از خط اول $\frac{|۵x + ۱۲y - ۴|}{\sqrt{۲۵ + ۱۴۴}}$ و از خط دوم $\frac{|۱۲x - ۵y + ۱۰|}{\sqrt{۱۴۴ + ۲۵}}$ است پس:

$$\frac{(۵x + ۱۲y - ۴)^۲}{۱۶۹} + \frac{(۱۲x - ۵y + ۱۰)^۲}{۱۶۹} = ۵ \Longrightarrow ۱۶۹x^۲ + ۱۶۹y^۲ + ۲۰۰x - ۱۹۶y = ۷۲۹$$

نکته ۱۹. فاصله نقطه $p(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر $\frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ است.

تست ۲۸ در هذلولی $\frac{x^۲}{۱۶} - \frac{y^۲}{۴} = ۱$: (معماری کشتی ۷۹)

۱) کانون‌ها روی محور x و خط $y = ۲x$ یک مجانب می‌باشد.

۲) کانون‌ها روی محور y و خط $y = \frac{۱}{۲}x$ یک مجانب می‌باشد.

۳) کانون‌ها روی محور x و خط $y = \frac{۱}{۲}x$ یک مجانب می‌باشد.

۴) کانون‌ها روی محور y و خط $y = ۲x$ یک مجانب می‌باشد.

حل: گزینه ۳ درست است. چون ضریب $y^۲$ منفی است، هذلولی افقی است و چون $\omega(۰,۰)$ مرکز تقارن است خط $y = ۰$ محور حقیقی است پس کانون‌ها بر محور x ها واقعند. اگر معادله را برابر صفر قرار دهیم، معادله مجانبها به دست می آید.

$$\frac{x^۲}{۱۶} - \frac{y^۲}{۴} = ۰ \Longrightarrow y^۲ = \frac{x^۲}{۴} \Longrightarrow y = \pm\frac{۱}{۲}x$$

تست ۲۹ معادلات پارامتری زیر معرف کدام منحنی در صفحه است؟ (ریاضی ۷۵)

$$\begin{cases} x = ۱ + ۳\cosh t \\ y = ۲\sinh t \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty$$

۱) بیضی
۲) سهمی
۳) شاخه راست یک هذلولی
۴) هذلولی

حل: گزینه ۳ درست است. ابتدا پارامتر t را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} \cosh t = \frac{x - ۱}{۳} \\ \sinh t = \frac{y}{۲} \end{cases} \Longrightarrow (\frac{x - ۱}{۳})^۲ - (\frac{y}{۲})^۲ = ۱ \Longrightarrow \frac{(x - ۱)^۲}{۹} - \frac{y^۲}{۴} = ۱$$

که معادله یک هذلولی افقی است اما چون $\cosh t \geq ۱$ پس $x \geq ۴$ و لذا شاخه راست هذلولی به‌دست می‌آید.

خلاصه نکات مهم

۱) (روشهای تعیین برد)

الف) از رابطه $y = f(x)$، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم. کلیه مقادیری از y که به ازای آنها x تعریف شود،(x در دامنه f باشد.) برد تابع f خواهند بود.

ب) اگر دامنه f شامل تعداد متناهی (محدود) عضو باشد، برد f با قرار دادن مقادیر x در ضابطه f قابل محاسبه است.

ج) استفاده از برخی نابرابریها:

$i)\quad a > 0 \implies a + \frac{1}{a} \geq 2$ (تساوی فقط برای $a = 1$ رخ می‌دهد)

$ii)\quad a < 0 \implies a + \frac{1}{a} \leq -2$ (تساوی فقط برای $a = -1$ رخ می‌دهد)

$iii)\quad |x-a| + |x-b| \geq |b-a|$

$iv)\quad -|b-a| \leq |x-a| - |x-b| \leq |b-a|$

$v)\quad |a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

۲) تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ دارای دامنه $\mathbb{R}$ است. اگر $x_0 = -\frac{b}{2a}$:

$a > 0 \ : \ R_f = [f(x_0), +\infty)$ و $a < 0 \ : \ R_f = (-\infty, f(x_0)]$

۳) دوره تناوب $\sin^{2n+1} ax$ و $\cos^{2n+1} ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ و دوره تناوب $\tan^n ax$ و $\cot^n ax$ و $\sin^{2n} ax$ و $\cos^{2n} ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

۴) نمودار توابع نمایی و لگاریتمی و در بین توابع مثلثاتی و هیپربولیک، نمودار مربوط به sin و cos و tan (مثلثاتی و هیپربولیک) را به خاطر بسپارید.

۵) اتحادهای مثلثاتی که در فصلهای بعدی زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۲) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

۳) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

۴) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

۵) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

۶) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

۷) $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

۸) $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

۹) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)$

۱۰) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$

۱۱) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$

۱۲) $\text{Arctan}x - \text{Arctan}y = \text{Arctan}\frac{x-y}{1+xy}$ و $xy > 0$

۶) اتحادهای هیپربولیک که در فصلهای بعدی زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

۲) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

۳) $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$

۴) $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

۵) $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ و $x \in \mathbb{R}$

٦) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ و $x \geq 1$

۷) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ و $|x| < 1$

۷) نمودار $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ برای $a \neq b$ یک بیضی به مساحت πab و نمودار $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ یک هذلولی است.

۸) (بسط دوجمله‌ای و سه‌جمله‌ای)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k}$$

$$(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}a^i b^j c^k \quad \text{و} \quad i,j,k \geq 0$$

تستهای تکمیلی فصل ۱ ـ مبحث تابع (سؤالات سطح ۱)

مبحث تعاریف اولیه

۱. کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

۱) $y^۲ = x + ۱$ ۲) $y = x + |x|$ ۳) $|x| + |y| = ۱$ ۴) $x^۲ + y^۲ = ۱$

حل: گزینه ۲ درست است. یک رابطه ضمنی بر حسب x و y در صورتی تابع است، که به ازای هر x حداکثر یک مقدار برای y به‌دست آید. در گزینه (۲) به ازای هر x، یک مقدار y به‌دست می‌آید، در حالی که در سایر گزینه‌ها به ازای $x = ۰$ دو مقدار $۱\pm$ برای y به‌دست می‌آید.

۲. اگر $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \neq ۰$ باشد و $\forall x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x)f(y)$ آنگاه:
(تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۰)

۱) $f(۰) = ۰$ ۲) $f(۰) = ۱$ ۳) $f(۰) = ۲$ ۴) $f(۰) = ۳$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر در رابطه $x = y = ۰$ قرار دهیم:

$$f(۰) + f(۰) = ۲f(۰)f(۰) \implies f(۰) = f(۰)^۲ \xrightarrow{f(x)\neq ۰} f(۰) = ۱$$

۳. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{۲|x| - x^۲}$ کدام فاصله است؟ (صنایع غذایی، آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $[-۲, ۰]$ ۲) $[-۲, ۲]$ ۳) $[۰, ۲]$ ۴) $\mathbb{R} - (-۲, ۲)$

حل: گزینه ۲ درست است. باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد $۲|x| - x^۲ \geq ۰$.

$$\begin{cases} x \geq ۰ \ : \ ۲x - x^۲ \geq ۰ \implies ۰ \leq x \leq ۲ \\ x < ۰ \ : \ -۲x - x^۲ \geq ۰ \implies -۲ \leq x \leq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} D_f = [-۲, ۲]$$

۴. برد تابع $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۱}{x^۲}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) $[۱, +\infty)$ ۲) $(۱, +\infty)$ ۳) $(۰, +\infty)$ ۴) $(۰, ۱)$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. کافی است از $y = \dfrac{x^۲ + ۱}{x^۲}$، x را برحسب y محاسبه کنیم.

$$y = ۱ + \frac{۱}{x^۲} \implies \frac{۱}{x^۲} = y - ۱ \implies x^۲ = \frac{۱}{y - ۱} \implies |x| = \sqrt{\frac{۱}{y - ۱}} \implies y > ۱$$

روش دوم. توجه کنید که $f(x) = ۱ + \dfrac{۱}{x^۲}$ چون $\dfrac{۱}{x^۲}$ همه اعداد مثبت را اختیار می‌کند، برد f بازه $(۱, +\infty)$ است.

۵. برد تابع $f(x) = \dfrac{x^۲}{۱ + x^۲}$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۹)

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $[۰, ۱]$ ۳) $[۰, +\infty)$ ۴) $[۰, ۱)$

حل: گزینه ۴ درست است. محاسبه x بر حسب y می‌تواند وقت‌گیر باشد. اما $y = ۱ - \dfrac{۱}{۱ + x^۲}$ و $۱ + x^۲ \geq ۱$ پس $۱ \geq \dfrac{۱}{۱ + x^۲} > ۰$ و لذا $۰ > -\dfrac{۱}{x^۲ + ۱} \geq -۱$ بنابراین $۰ \leq y < ۱$.

۶. برد تابع $y = \frac{۲x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱}$ کدام فاصله است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $[-۲, ۱)$ ۲) $(-۲, ۱]$ ۳) $(-۱, ۲]$ ۴) $[-۱, ۲)$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $y = ۲ - \frac{۳}{x^۲ + ۱}$ و $۱ \leq \frac{۱}{x^۲ + ۱} > ۰$، پس:

$$۰ < \frac{۳}{x^۲ + ۱} \leq ۳ \implies -۳ \leq \frac{-۳}{x^۲ + ۱} < ۰ \implies -۱ \leq y < ۲$$

۷. اگر $f(x) = \begin{cases} -۱ & x \leq -۲ \\ x + ۱ & -۲ < x < ۱ \\ ۲ & x \geq ۱ \end{cases}$ حاصل $f \circ f(-۱) + \big(f(-۱)\big)^۲$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۲ درست است. عدد ۱− در ضابطه دوم قرار دارد.

$$f(-۱) = -۱ + ۱ = ۰ \quad , \quad f \circ f(-۱) = f\big(f(-۱)\big) = f(۰) = ۰ + ۱ = ۱$$

$$\implies f \circ f(-۱) + \big(f(-۱)\big)^۲ = ۱ + ۰ = ۱$$

۸. اگر $f(x) = x^۲ - ۲x \;;\; x > ۱$ و $g(x) = ۱ + \sqrt{۱ + x}$، ضابطه $(g \circ f)(x)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) x ۲) $x - ۱$ ۳) $۲ - x$ ۴) $۲ + x$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^۲ - ۲x) = ۱ + \sqrt{۱ + x^۲ - ۲x} = ۱ + |x - ۱| \xlongequal{x > ۱} ۱ + (x - ۱) = x$$

۹. اگر $f(\frac{۱}{x}) = \frac{x^۲}{۱ - x^۲}$، آنگاه $f(۱ - x)$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $\frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۲x}$ ۲) $\frac{x^۲ - ۱}{۲x - x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲x - x^۲}$ ۴) $\frac{۱}{x^۲ - ۲x}$

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا ضابطه f را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱}{x} = t \implies x = \frac{۱}{t} \implies f(t) = \frac{(\frac{۱}{t})^۲}{۱ - (\frac{۱}{t})^۲} = \frac{۱}{t^۲ - ۱} \implies f(۱ - x) = \frac{۱}{(۱ - x)^۲ - ۱} = \frac{۱}{x^۲ - ۲x}$$

۱۰. اگر $f(x) = x^۲ - ۶x$ و $g(x) = \sqrt{۷ - x}$، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $[-۷, ۱]$ ۲) $[-۱, ۷]$ ۳) $[۱, ۷]$ ۴) $\mathbb{R} - [۱, ۷]$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به اینکه $D_g = (-\infty, ۷]$ و $D_f = \mathbb{R}$، پس:

$$D_{gof} = \big\{x \in D_f : f(x) \in D_g\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : x^۲ - ۶x \leq ۷\big\} = \{x : (x + ۱)(x - ۷) \leq ۰\} = [-۱, ۷]$$

۱۱. اگر تابع $f(x) = ax \sin x + (b - ۲)x$ زوج و تابع $g(x) = (a + ۱)\cos x + bx^۳$ فرد باشند، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟ (مکانیک ماشینهای کشاورزی، آبیاری و زه‌کشی ۷۹)

۱) $(-۲, ۱)$ ۲) $(۱, -۲)$ ۳) $(۲, -۱)$ ۴) $(-۱, ۲)$

حل: گزینه ۴ درست است. f زوج است پس قسمت فرد آن یعنی $(b - ۲)x$ باید حذف شود، پس $b = ۲$. g فرد است، پس باید قسمت زوج آن یعنی $(a + ۱)\cos x$ حذف شود و لذا $a = -۱$.

۱۲. اگر تابع f در معادله تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند، آنگاه تابع f: (آمار ۸۰)

۱) زوج است. ۲) فرد است. ۳) نه فرد و نه زوج است. ۴) متناوب است.

حل: گزینه ۲ درست است.

$$x=y=\circ \implies f(\circ)=f(\circ)+f(\circ) \implies f(\circ)=\circ$$

$y=-x \implies \circ=f(x-x)=f(x)+f(-x) \implies f(-x)=-f(x) \implies$ f فرد است

۱۳. چنانچه $F(x)$ یک تابع زوج و $G(x)$ یک تابع فرد باشد، آنگاه: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $F(G(x))$ زوج و $G(F(x))$ فرد است. ۲) $F(G(x))$ فرد و $G(F(x))$ زوج است.

۳) $F(G(x))$ فرد و $G(F(x))$ فرد است. ۴) $F(G(x))$ زوج و $G(F(x))$ زوج است.

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به تعریف تابع زوج و فرد داریم $F(-x)=F(x)$ و $G(-x)=-G(x)$.

$F(G(-x))=F(-G(x))=F(G(x)) \implies$ $F(G(x))$ زوج است.

$G(F(-x))=G(F(x)) \implies$ $G(F(x))$ زوج است.

۱۴. اگر f تابعی با دامنه متقارن باشد، کدام یک از توابع زیر فرد هستند؟

۱) $\dfrac{f(x)+۲f(-x)}{۳}$ ۲) $\dfrac{f(x)+f(-x)}{۲}$ ۳) $\dfrac{f(x)-f(-x)}{۲}$ ۴) $f(-x)+f(۲x)$

حل: گزینه ۳ درست است. دامنه تابع $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{۲}$ متقارن است.

$g(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{۲}=-g(x) \implies$ g فرد است.

تذکر ۱. تابع $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{۲}$ زوج است و داریم $f(x)=h(x)+g(x)$ یعنی هر تابع با دامنه متقارن را می‌توان به صورت یکتا به شکل مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

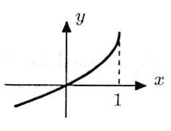
۱۵. اگر $f(x)=xe^x, x\geq \circ$ نمودار $f^{-۱}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۹)

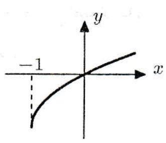
۱) $(e,۱)$ ۲) $(e,-۱)$ ۳) $(۱,e)$ ۴) $(۱,\frac{۱}{e})$

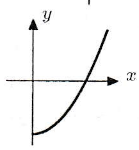
حل: گزینه ۱ درست است. با استفاده از نکته ۲ در مورد تابع وارون در صفحه ۱۹:

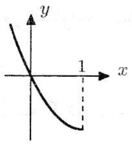
$$f(۱)=e \implies (۱,e)\in f \implies (e,۱)\in f^{-۱}$$

۱۶. شکل نمودار معکوس تابع با ضابطه $f(x)=۱-\sqrt{۱+x}$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. چون $f(x)=۱-\sqrt{۱+x}\leq ۱$ پس باید $D_{f^{-۱}}=(-\infty,۱]$. یعنی گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست هستند و چون $R_{f^{-۱}}=D_f=[-۱,+\infty)$ پس گزینه ۱ نیز نادرست است.

روش دوم. ضابطه $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$y=۱-\sqrt{۱+x} \implies \sqrt{۱+x}=۱-y \implies ۱+x=(y-۱)^۲ \implies f^{-۱}(x)=(x-۱)^۲-۱$$

که نمودار آن سهمی با رأس $(-1, 1)$ است اما چون $f(x) \geq 1$ پس نیمه سمت چپ آن قابل قبول است.

۱۷. اگر $f(x) = x\sqrt{x} + 1$ ضابطه تابع f^{-1} برابر کدام است؟ **(صنایع غذایی ۷۹)**

۱) $\sqrt[3]{(x-1)^2}, x \geq 1$ ۲) $\sqrt[3]{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R}$ ۳) $\sqrt[3]{x^2-1}, x > 1$ ۴) $\sqrt[3]{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y = x\sqrt{x} + 1 = x^{\frac{3}{2}} + 1 \implies x = (y-1)^{\frac{2}{3}} \implies f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

چون $x \geq 0$ پس $y \geq 1$ برد f است و لذا دامنه f^{-1} برابر $[1, +\infty)$ است.

۱۸. کدام تابع با ضابطه زیر کراندار و یک‌به‌یک است؟ **(مکانیک ۷۷)**

۱) $y = \cos x \ , \ 0 \leq x < \pi$ ۲) $y = \sin x \ , \ 0 \leq x < \pi$

۳) $y = e^x \ , \ -\infty < x < +\infty$ ۴) $y = x^2 \ , \ x > 0$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ پس این تابع کراندار است و با توجه به نمودار آن در صفحه ۲۷ در بازه $[0, \pi)$ نزولی اکید و لذا یک‌به‌یک می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه (۲) تابع کراندار ولی با توجه به نمودار آن یک‌به‌یک نمی‌باشد. در گزینه (۳) و (۴) توابع یک‌به‌یک بوده ولی چون حد آنها در $+\infty$ برابر $+\infty$ است، کراندار نیستند.

۱۹. دوره تناوب اصلی تابع $\frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x}$ برابر است با:

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه ۳ درست است. وقتی با توابع کسری از سینوس و کسینوس روبرو هستیم باید تابع را ساده کنیم.

$$f(x) = \frac{\tan 2x + 1}{\tan 2x - 1} \implies T = \frac{\pi}{2}$$

۲۰. اگر f کثیرالجمله غیر صفر باشد و $f(x) = f(x-1)$ آنگاه $f(x)$ تابعی $\cdots$ است. **(ریاضی ۷۶)**

۱) زوج ۲) فرد ۳) منفی ۴) مثبت

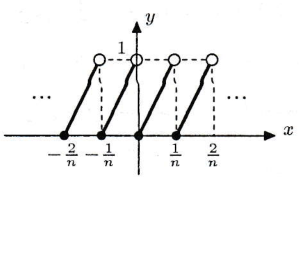
حل: گزینه ۱ درست است. اگر در رابطه داده شده x را به $x + 1$ تبدیل کنیم، آنگاه $f(x) = f(x+1)$ که نشان می‌دهد f تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 1$ است و می‌دانیم به جز چند جمله‌ای ثابت $f(x) = c$ سایر چندجمله‌ایها متناوب نیستند. پس f تابع ثابت و لذا تابعی زوج است.

۲۱. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = nx - [nx]$ برای $n > 0$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{n}$ ۳) $\frac{1}{n}$ ۴) متناوب نمی‌باشد

حل: گزینه ۳ درست است. اگر T دوره تناوب f باشد آنگاه:

$$f(x+T) = f(x) \implies n(x+T) - [nx+nT] = nx - [nx] \implies nT = [nx+nT] - [nx] \in \mathbb{Z}$$



پس $nT = 1, 2, \cdots$. توجه کنید که این مقادیر در تساوی بالا صدق می‌کنند. اما چون دوره تناوب اصلی، کوچکترین دوره تناوب است پس $nT = 1$ و $T = \frac{1}{n}$. نمودار f مطابق شکل است.

۲۲. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^{۲} ۳x$ برابر دوره تناوب اصلی تابع $g(x) = \cos \frac{x}{a}$ است، $|a|$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۶

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به نکته ۹ در صفحه ۲۱:

$$T_f = \frac{\pi}{۳} \quad \text{و} \quad T_g = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{|a|}} = ۲|a|\pi \implies ۲|a| = \frac{۱}{۳} \implies |a| = \frac{۱}{۶}$$

مبحث توابع خاص

۲۳. اگر $\frac{x}{۲} \leq [x]$، مجموعه جواب x برابر کدام بازه است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $[۰, +\infty)$ ۲) $[۰, ۱]$ ۳) $(-۱, ۱]$ ۴) $(-\infty, ۱)$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. در سه گزینه اول عدد $x = ۱$ وجود دارد که در نابرابری صدق نمی‌کند، پس گزینه (۴) درست است.

روش دوم. چون $x = [x] + \{x\}$ پس باید $x = [x] + \{x\} \leq ۲[x]$ و لذا $\{x\} \leq [x]$. اما $۰ \leq \{x\} < ۱$ و بنابراین نابرابری مورد نظر فقط وقتی برقرار است که $۰ \leq [x]$ و لذا $x < ۱$.

۲۴. هرگاه $\pi < x < ۲\pi$ باشد، حاصل $\frac{۲}{\sqrt{۱ - \cos ۲x}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) $\sqrt{۲} \csc x$ ۲) $-\sqrt{۲} \csc x$ ۳) $-\csc x$ ۴) $\csc x$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\frac{۲}{\sqrt{۱ - \cos ۲x}} = \frac{۲}{\sqrt{۲ \sin^{۲} x}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}|\sin x|} \overset{\pi<x<۲\pi}{=\!=\!=} \frac{۲}{-\sqrt{۲} \sin x} = -\sqrt{۲} \csc x$$

۲۵. حاصل $A = \frac{\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x}{\cos x + \cos ۲x + \cos ۳x}$ برابر است با:

۱) $\tan x$ ۲) $\tan ۲x$ ۳) $\cot x$ ۴) $\cot ۲x$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به فرمول تبدیل جمع به ضرب:

$$A = \frac{(\sin x + \sin ۳x) + \sin ۲x}{(\cos x + \cos ۳x) + \cos ۲x} = \frac{۲ \sin ۲x \cos x + \sin ۲x}{۲ \cos ۲x \cos x + \cos ۲x} = \frac{\sin ۲x(۲ \cos x + ۱)}{\cos ۲x(۲ \cos x + ۱)} = \tan ۲x$$

۲۶. حاصل $\text{Arcsin}(۱) - \text{Arcsin}(-۱)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\sin \frac{\pi}{۲} = ۱$ پس:

$$\text{Arcsin}(۱) = \frac{\pi}{۲}, \ \text{Arcsin}(-۱) = -\text{Arcsin}(۱) = -\frac{\pi}{۲} \implies \text{جواب} = \frac{\pi}{۲} - (-\frac{\pi}{۲}) = \pi$$

۲۷. اگر داشته باشیم $f\left(\text{Arccos}(x - ۱)\right) = \frac{x - ۱}{x}$، مقدار $f(x)$ کدام است؟ (سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\cos x}{۱ - \cos x}$ ۲) $\frac{۱ + \cos x}{\cos x}$ ۳) $\frac{۱ - \cos x}{\cos x}$ ۴) $\frac{\cos x}{۱ + \cos x}$

حل: گزینه ۴ درست است. اگر قرار دهیم $t = \cos^{-۱}(x - ۱)$ داریم $x - ۱ = \cos t$.

$$x = ۱ + \cos t \implies f(t) = \frac{۱ + \cos t - ۱}{۱ + \cos t} = \frac{\cos t}{۱ + \cos t} \implies f(x) = \frac{\cos x}{۱ + \cos x}$$

۲۸. اگر $-\frac{\pi}{۲} < x < ۰$ حاصل $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ برابر است با:

۱) x ۲) $\frac{\pi}{۲} - x$ ۳) $-x$ ۴) $\frac{\pi}{۲} + x$

حل: گزینه ۳ درست است. $\cos$ و $\cos^{-۱}$ وقتی با هم حذف می‌شوند که زاویه در فاصله $[۰, \pi]$ باشد. با توجه به زوج بودن این تابع داریم $\cos(-x) = \cos x$ و در این صورت $۰ < -x < \frac{\pi}{۲}$ پس:

$$\operatorname{Arccos}(\cos x) = \operatorname{Arccos}(\cos(-x)) = -x$$

۲۹. $\tan(\operatorname{Arctan}\frac{۱}{۹} + \operatorname{Arctan}\frac{۴}{۵})$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $\alpha = \operatorname{Arctan}\frac{۱}{۹}$ و $\beta = \operatorname{Arctan}\frac{۴}{۵}$ داریم:

$$\tan\alpha = \frac{۱}{۹} \text{ و } \tan\beta = \frac{۴}{۵} \Longrightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{۱}{۹} + \frac{۴}{۵}}{۱ - \frac{۱}{۹} \times \frac{۴}{۵}} = ۱$$

۳۰. مقدار $\tan^{-۱}\frac{۱}{۲} + \tan^{-۱}\frac{۱}{۳}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} < ۱$، با استفاده از فرمول (ج ـ ۴) در صفحه ۲۹:

$$\tan^{-۱}\frac{۱}{۲} + \tan^{-۱}\frac{۱}{۳} = \tan^{-۱}\frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}} = \tan^{-۱} ۱ = \frac{\pi}{۴}$$

۳۱. $۲\operatorname{Arctan}\frac{۱}{۲}$ برابر کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $\operatorname{Arctan}\frac{۴}{۳}$ ۲) $\operatorname{Arctan}\frac{۳}{۴}$ ۳) $\operatorname{Arctan}\frac{۲}{۳}$ ۴) $\operatorname{Arctan}\frac{۳}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. با استفاده فرمول (ج ـ ۴) در صفحه ۲۹:

$$۲\operatorname{Arctan}\frac{۱}{۲} = \operatorname{Arctan}\frac{۱}{۲} + \operatorname{Arctan}\frac{۱}{۲} = \operatorname{Arctan}\frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}} = \operatorname{Arctan}\frac{۴}{۳}$$

۳۲. $\operatorname{Arctan}x + \operatorname{Arccot}x$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) π ۳) ۲ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. فرمول (د ـ ۵) در صفحه ۲۹ را ملاحظه کنید.

۳۳. a و b و x اعداد حقیقی مثبت هستند. لگاریتم b^x به پایه a^x برابر است با: (فلسفه ۸۲)

۱) $\log_a b$ ۲) $e^{\frac{b}{a}x}$ ۳) $\log_{\frac{b}{a}} x$ ۴) $\frac{a}{b}\ln x$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به خاصیت ۵ در صفحه ۳۱:

$$\log_{a^x} b^x = x\log_{a^x} b = \frac{x}{x}\log_a b = \log_a b$$

۳۴. اگر $\log_۳ a = ۲$ باشد، حاصل $a^{۱+\log_۳ x}$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) $(x+۳)^۲$ ۲) $(\frac{x}{۳})^۲$ ۳) $(۳x)^۲$ ۴) $(x-۳)^۲$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به رابطه داده شده $a = ۳^۲ = ۹$.

$$a^{۱+\log_۳ x} = ۹^{\log_۳ ۳ + \log_۳ x} = ۹^{\log_۳(۳x)} = (۳x)^{\log_۳ ۹} = (۳x)^۲$$

۳۵. دامنه تابع $f(x)=\sqrt{1+2\log_4 x}$ **کدام است؟** (صنایع غذایی ۷۹)

۱) $[-2,2]$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $[\frac{1}{2},+\infty)$ ۴) $(2,+\infty)$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$1+2\log_4 x\geq 0 \quad , \quad x>0 \implies \log_4 x\geq -\frac{1}{2}=\log_4 4^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{صعودی } \log_4} x\geq 4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

۳۶. دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\ln(x-[x])$ **کدام است؟** (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}^+-\mathbb{N}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

حل: گزینه ۴ درست است. باید $x-[x]>0$. چون $0\leq x-[x]<1$ پس $x\neq[x]$ و بنابراین $x\notin\mathbb{Z}$ ولذا $D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

۳۷. اگر $f(x)=\log_2(x-2)$ **و** $g(x)=\sqrt{4-x}$**، دامنه تابع** gof **کدام است؟** (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $[2,4]$ ۳) $(2,16]$ ۴) $(2,18]$

حل: گزینه ۴ درست است. دامنه f برابر $x>2$ و دامنه g برابر $x\leq 4$ است.

$$D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\} \implies x>2,\log_2(x-2)\leq 4 \implies x>2 \quad , \quad x-2\leq 2^4=16$$

پس دامنه برابر $(2,18]$ است.

۳۸. برد تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^{|x|-3}$ **برابر است با:** (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $(0,8]$ ۲) $(\frac{1}{8},8]$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $[8,+\infty)$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $|x|-3\geq -3$ و تابع $(\frac{1}{2})^x$ نزولی اکید است پس:

$$-3\leq |x|-3<+\infty \implies (\frac{1}{2})^{+\infty}<f(x)\leq(\frac{1}{2})^{-3} \implies R_f=(0,8]$$

۳۹. کدام تابع با ضابطه زیر بر بازه $(0,1)$ یک به یک است؟ (آمار ۷۷)

۱) $f(x)=[x+\frac{1}{2}]$ ۲) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ۳) $f(x)=\sin 4x$ ۴) $f(x)=|2x-1|$

حل: گزینه ۲ درست است. f ترکیب تابع‌های یک به یک $\frac{1}{x}$ و نمایی و بنابراین یک به یک (نزولی اکید) است.

۴۰. اگر $f(x)=\ln\frac{2x+1}{x}$ **باشد،** $f^{-1}(\ln 3)$ **کدام است؟** (معدن ۸۰)

۱) 1 ۲) 2 ۳) e^2-1 ۴) $\ln\frac{3}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$x=f^{-1}(\ln 3) \implies \ln 3=f(x)=\ln(\frac{2x+1}{x}) \implies 3=\frac{2x+1}{x} \implies 3x=2x+1 \implies x=1$$

۴۱. معکوس تابع $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$ **کدام است؟** (معدن ۷۵)

۱) $y=\frac{2e^x-1}{2e^x+1}$ ۲) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ ۳) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ۴) $y=\frac{e^x-2}{e^x+2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$y=\ln\frac{x+1}{x-1} \implies \frac{x+1}{x-1}=e^y \implies x=\frac{e^y+1}{e^y-1} \implies f^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

۴۲. مقدار $\sinh(\ln ۲)$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\sinh(\ln ۲) = \frac{e^{\ln ۲} - e^{-\ln ۲}}{۲} = \frac{۲ - e^{\ln \frac{۱}{۲}}}{۲} = \frac{۲ - \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

۴۳. تابع $\tanh x$ برابر است با:

۱) $\frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$ ۲) $\frac{e^{۲x} + ۱}{e^{۲x} - ۱}$ ۳) $\frac{e^{x} - ۱}{e^{x} + ۱}$ ۴) $\frac{e^{x} + ۱}{e^{x} - ۱}$

حل: گزینه ۱ درست است. می دانیم $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ با ضرب کردن صورت و مخرج در e^x رابطه $\tanh x = \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$ به دست خواهد آمد.

۴۴. کدام یک از عبارات زیر در مورد توابع هیپربولیک (هذلولی) صحیح است؟ (مدیریت نساجی ۸۲)

۱) $\text{ch}^۲x - \text{sh}^۲x = ۱$ ۲) $\text{ch}^۲x + \text{sh}^۲x = ۱$ ۳) $\coth x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ۴) $\tanh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

حل: گزینه ۱ درست است. گزینه ۳ تعریف $\tanh x$ و گزینه ۴ تعریف $\coth x$ است.

۴۵. e^{-x} برابر است با: (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $\cosh x + \sinh x$ ۲) $\cosh x - \sinh x$ ۳) $-\cosh x - \sinh x$ ۴) $-\cosh x + \sinh x$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \quad \text{و} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} \implies e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

۴۶. اگر $-\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $\sinh(x) = \tan\theta$، $\cosh(x)$ برابر کدام است؟ (مکانیک ۷۸)

۱) $\cos\theta$ ۲) $\csc\theta$ ۳) $\sec\theta$ ۴) $\sin\theta$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\cosh^۲ x = ۱ + \sinh^۲ x = ۱ + \tan^۲\theta = \sec^۲\theta \implies \cosh x = \pm\sec\theta$$

اما $\cosh x > ۰$ و با توجه به محدوده θ داریم $\sec\theta > ۰$ و بنابراین $\cosh x = \sec\theta$.

۴۷. اگر $f(x) = \sinh x$، $f^{-۱}(\frac{۳}{۴})$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ۷۶)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\ln\sqrt{۲}$ ۴) $\ln ۲$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$f^{-۱}(x) = \sinh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱}) \implies f^{-۱}(\frac{۳}{۴}) = \ln(\frac{۳}{۴} + \sqrt{\frac{۹}{۱۶} + ۱}) = \ln(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴}) = \ln ۲$$

۴۸. دامنه تابع $f(x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^۲ + ۱}\right)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[-۱, ۱]$ ۴) $\mathbb{R} - (-۱, ۱)$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. باید $-x + \sqrt{x^۲ + ۱} > ۰$ این نابرابری برای $x \leq ۰$ برقرار است و برای $x > ۰$:

$$\sqrt{x^۲ + ۱} > x \implies x^۲ + ۱ > x^۲$$

نابرابری بالا همواره برقرار است و لذا دامنه $\mathbb{R}$ می‌باشد.

روش دوم.

$$\sinh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱}) \implies f(x) = \sinh^{-۱}(-x) = -\sinh^{-۱} x$$

و با توجه به نمودار آن در صفحه ۳۵، دامنه برابر $\mathbb{R}$ است.

۴۹. تابع معکوس کسینوس هیپربولیک ($y = \text{ch}^{-۱}x$) در کدام یک از فواصل زیر قابل تعریف است؟

(شیمی نساجی ۸۲)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۰, ۱]$ ۳) $[۱, ۲]$ ۴) $[-۱, ۱]$

حل: گزینه ۳ درست است. چون دامنه $\cosh^{-۱} x$ برابر $[۱, +\infty)$ است پس این تابع برای $۱ \leq x \leq ۲$ قابل قبول است.

۵۰. برد تابع $f(x) = \dfrac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$ برابر است با:

۱) $[-۱, ۱]$ ۲) $[۰, ۱]$ ۳) $(-۱, ۱)$ ۴) $(۰, ۱)$

حل: گزینه ۳ درست است. با ضرب صورت و مخرج در e^{-x} داریم $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x$ و با توجه به شکل توابع هیپربولیک در صفحه ۳۳، برد آن $(-۱, ۱)$ است.

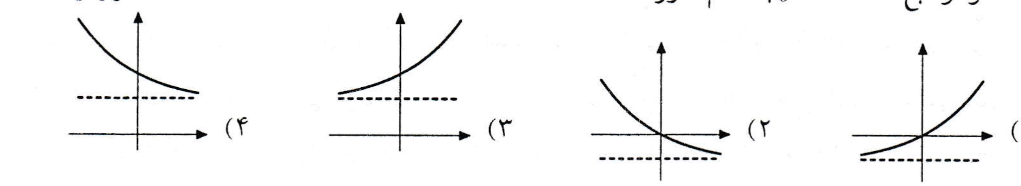
۵۱. دامنه وارون تابع با ضابطه $y = \text{sech}x$ کدام بازه است؟ **(هسته‌ای ۷۸)**

۱) $(۰, ۱]$ ۲) $(-۱, ۱)$ ۳) $(۰, +\infty)$ ۴) $(-۱, ۱]$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به شکل $\text{sech}^{-۱}x$ در صفحه ۳۵، دامنه برابر $(۰, ۱]$ است.

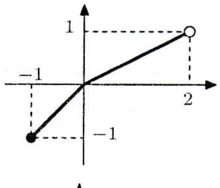
مبحث رسم نمودار برخی توابع

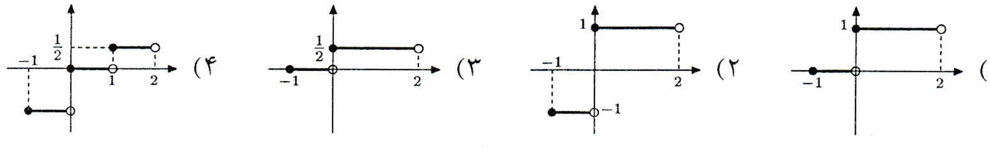
۵۲. نمودار تابع $y = e^x - ۱$ به کدام صورت است؟ **(ژئوفیزیک ۷۸)**



حل: گزینه ۱ درست است. نمودار مورد نظر همان $y = e^x$ است که یک واحد به سمت پایین منتقل شده است.

۵۳. اگر نمودار f بر $[-۱, ۲)$ به‌صورت شکل مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطه $y = f([x])$ بر $[-۱, ۲)$ کدام است؟ **(ژئوفیزیک و سیستم ۸۱)**





حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا دقت کنید که برای $۰ \le x < ۲$ تابع f به‌صورت $f(x) = \frac{x}{۲}$ است. اگر $-۱ \le x < ۰$ داریم $y = f([x]) = f(-۱) = -۱$. برای $۰ \le x < ۱$ داریم $y = f([x]) = f(۰) = ۰$ و برای $۱ \le x < ۲$ داریم $y = f([x]) = f(۱) = \frac{۱}{۲}$. پس نمودار گزینه (۴) بدست می‌آید.

مبحث بسط دوجمله‌ای و سه‌جمله‌ای

۵۴. در بسط $(x + \frac{۱}{x})^{۸}$ ضریب $x^{۲}$ برابر است با: (مدیریت ۸۰)

۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به فرمول بسط دوجمله‌ای، جمله عمومی عبارت است از:

$$\binom{۸}{k} x^{k} (\frac{۱}{x})^{۸-k} = \binom{۸}{k} x^{۲k-۸}$$

پس جمله شامل $x^{۲}$ وقتی حاصل می‌شود که $۲k - ۸ = ۲$ و یا $k = ۵$ و لذا ضریب آن برابر $\binom{۸}{۵} = \frac{۸!}{۵! \times ۳!} = ۵۶$ خواهد بود.

مبحث مقاطع مخروطی

۵۵. معادله دایره‌ای را به‌دست آورید که از نقطه $(۲,۴)$ و $(-۱,۲)$ بگذرد و مرکز آن روی خط $x - ۳y = ۸$ باشد. (سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $(x - \frac{۷}{۲})^{۲} + (y + \frac{۳}{۲})^{۲} = \frac{۱۳۰}{۴}$

۲) $(x + \frac{۷}{۲})^{۲} + (y - \frac{۳}{۲})^{۲} = \frac{۱۳۰}{۴}$

۳) $(x - \frac{۷}{۲})^{۲} + (y - \frac{۳}{۲})^{۲} = ۴۵$

۴) $(x + \frac{۷}{۲})^{۲} + (y + \frac{۳}{۲})^{۲} = ۴۵$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. تنها گزینه‌ای که مرکز آن در معادله خط صدق می‌کند گزینه ۱ است!!

روش دوم. معادله خطی که از وسط دو نقطه داده شده یعنی $(\frac{۱}{۲},۳)$ می‌گذرد و بر خط واصل آنها عمود است (عمود منصف) را می‌نویسیم که $y = -\frac{۳}{۲}x + \frac{۱۵}{۴}$ است. حاصل تلاقی این خط با خط داده شده یعنی $\omega(\frac{۷}{۲}, -\frac{۳}{۲})$ مرکز دایره خواهد بود و فاصله یکی از نقاط داده شده تا مرکز برابر $R = \frac{\sqrt{۱۳۰}}{۲}$ و شعاع دایره است. می‌دانیم معادله دایره به مرکز $\omega(\alpha,\beta)$ شعاع R به صورت $(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲}$ است و لذا گزینه (۱) حاصل می‌شود.

۵۶. مساحت بیضی به معادله $۹x^{۲} + ۱۶y^{۲} = ۱۴۴$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) ۱۸π ۲) ۱۲π ۳) ۱۶π ۴) ۱۴π

حل: گزینه ۲ درست است. معادله بیضی را به‌صورت $\frac{x^{۲}}{۱۶} + \frac{y^{۲}}{۹} = ۱$ می‌نویسیم پس $b = ۳$ و $a = ۴$ و لذا مساحت آن $\pi ab = ۱۲\pi$ است.