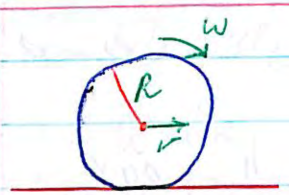
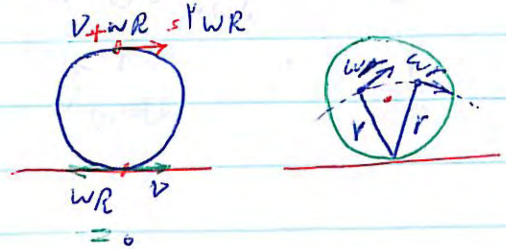
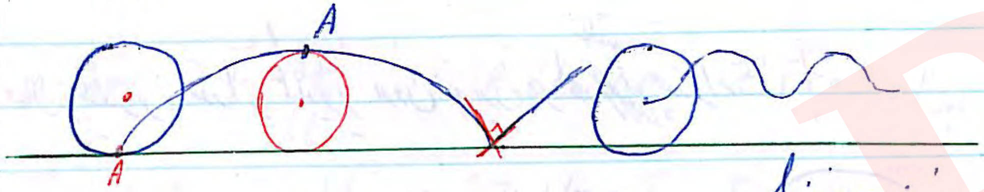
حرکت انتقالی توأم دورانی :



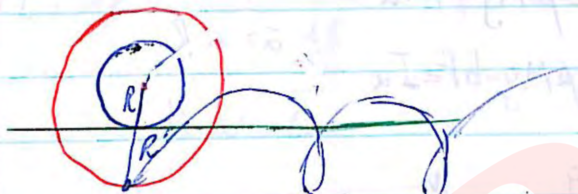
شرط غلتش کامل $\omega R = v$



در غلتش کامل می‌توان نشان داد :

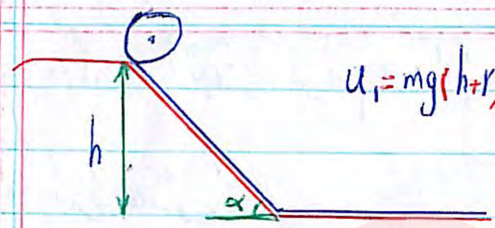


منحنی چرخ زاد



مثال : یک حلقه به جرم m و شعاع r از یک سطح شیب‌دار با زاویه شیب α به پایین می‌غلتد و در ضمن حرکت یک نوار باریک با چگالی خطی ρ را از روی خود می‌پیچد درهم با ملاحظه‌ای از پای سطح شیب را حلقه می‌ایستد فرض کنید سطح شیب را به آرامی به سطح افقی تبدیل

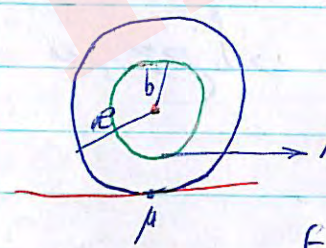
می شود



$u_1 = mg(h+r) + \rho \frac{h}{\sin\alpha}\cdot\frac{h}{2}\cdot g$

$u_2 = mgr + \left(S + \frac{h}{\sin\alpha}\right)\rho g r$

مثال: بیشترین مقدار F که بدون لغزیدن خواهد غلتید چقدر است؟



$$\begin{cases} F - \mu Mg = Ma \\ R\mu Mg - bF = I\alpha \end{cases} \qquad a = \alpha R$$

$$\frac{F - \mu mg}{\mu R mg - Fb} = \frac{M}{\frac{1}{2}MR^2}\cdot R \Rightarrow F_{min} = \frac{3\mu mgR}{R + 2b}$$

مثال: یک توپ بولینگ با سرعت v_0 در راستای [illegible] پرتاب می شود

ابتدا بدون غلتش می لغزد اما بواسطه اصطکاک شروع به غلتش

می کند نشان دهید سرعت توپ وقتی که شروع به غلتش می کند برابر است با: $v = \frac{5}{7}v_0$

$$\begin{cases} Rf_k = I\alpha \\ \omega = \alpha t \\ -f_k = ma \\ v = v_0 + at \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{Rf_k}{I}t$$

$$v = v_0 - \frac{f_k}{m}\left(\frac{\frac{v}{R}\cdot I}{Rf_k}\right) \Rightarrow v = v_0 - \frac{2}{5}v \Rightarrow v_f = \frac{5}{7}v_0$$

تکانه زاویه‌ای و پایستگی تکانه زاویه‌ای:

خطی: $\vec p = m\vec v$ $\quad \vec F = \frac{d\vec p}{dt}$ $\quad \int \vec F\,dt = \Delta \vec p$ $\quad \Sigma \vec F = 0 \to \vec P$ ثابت

زاویه‌ای: $\vec L = m\vec r\,\vec v$ $\quad \vec\tau = \frac{d\vec L}{dt}$ $\quad \int \vec\tau\,dt = \Delta \vec L$ $\quad \Sigma \tau = 0 \to \vec L$ ثابت

$I\omega = \vec L$ برای محور ثابت

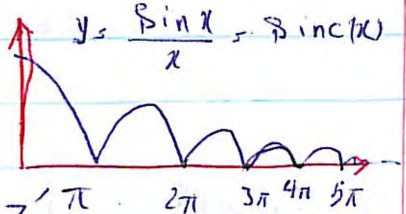
$$\begin{cases} -FR = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \\ FR = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \end{cases} \qquad \frac{d(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)}{dt} = 0$$

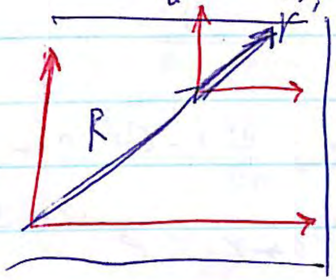
$I_1\omega_1 + 0 = I_1\omega_1' + I_2\omega_2'$ $\quad \omega = \frac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2}$ $\quad r_1\theta_1 = r_2\theta_2$

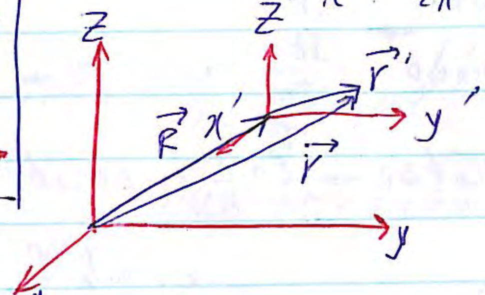
باسمه تعالی

$$\vec{V} = \frac{\int_a^b V\,dt}{\int_a^b dt} = \frac{\int_{r_a}^{r_b} d\vec{r}}{\int_a^b dt} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$y = \frac{\sin x}{x} = \operatorname{sinc}(x)$$

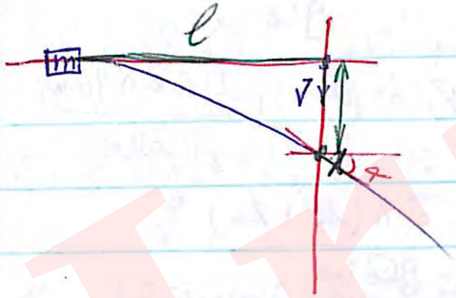




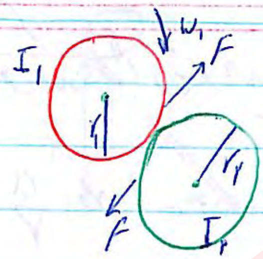


$$\vec{R} + \vec{r}' = \vec{r} \rightarrow \vec{V} = \vec{V} + \vec{V}' \rightarrow \vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$$

$$\vec{V}' = \lim_{\Delta' \to 0} \frac{\vec{r}'(t'+\Delta') - \vec{r}'(t')}{\Delta'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



مثال: x و α را بیابید



مثال: شتاب جسم ۲ را بدست آورید

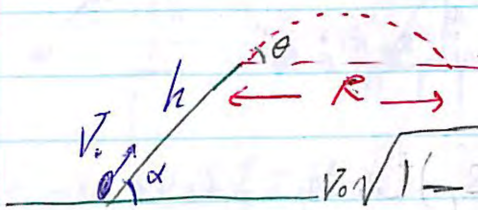
$$\begin{cases} -Fr_1 = I_1 \times \dfrac{d\omega_1}{dt} \\ Fr_2 = I_2 \times \dfrac{d\omega_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{I_1\omega_1}{r_1} + \frac{I_2\omega_2}{r_2}\right)$$

$$\frac{I_1\omega_1}{r_1} + 0 = \frac{I_1\Omega_1}{r_1} + \frac{I_2\Omega_2}{r_2} \qquad \Omega_1 r_1 = \Omega_2 r_2$$

$\rightarrow 4\tan\alpha\cos(\theta+\alpha)+2\cos(2\theta+2\alpha)=0\rightarrow$

$$2\tan\alpha=\frac{\cos(2\theta+2\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)}$$

مثال: θ را طوری بیابید که R Max شود.



$$\frac{1}{2}mV_0^2=mgh\sin\theta+\frac{1}{2}mV^2\rightarrow$$

$$V_0\sqrt{1-\sin\theta}=V$$

$$R=V\cos\theta\, T \qquad 0=\frac{-gT^2}{2}+V\sin\theta\, T\rightarrow$$

$$\frac{2V\sin\theta}{g}=T \qquad V_0^2=2gh\rightarrow h=\frac{V_0^2}{2g}$$

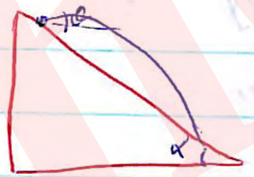
$$R=\frac{V^2\sin(2\theta)}{g}\rightarrow R=\frac{V_0^2}{g}(1-\sin\theta)\sin(2\theta)\rightarrow$$

$$R=(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\cos\theta)\frac{2V_0^2}{g}\rightarrow$$

$$\cos(2\theta)+\sin^3\theta-\sin(2\theta)=0$$

$$\begin{cases}\dot r=-V\cos 30\\ r\dot\theta=V\sin 30\end{cases}\rightarrow\frac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\theta}{dt}}=-\cot 30\rightarrow\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=-\cot 30\rightarrow$$

$$\frac{dr}{r}=-d\theta\cot 30\rightarrow\ln\frac{r}{r_0}=-\Delta\theta\cot 30\rightarrow r=r_0e^{-\theta\cot 30}$$



مثال: $\theta_{R_{Max}}$, R_{Max} را بیابید.

$$R=\frac{g\sin\alpha}{2}t^2+V_0\cos(\theta+\alpha)t$$

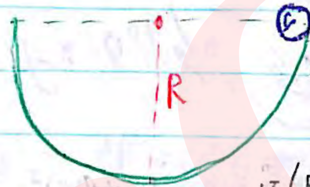
$$0=\frac{-g\cos\alpha\, t^2}{2}+V_0\sin(\theta+\alpha)t\rightarrow t=\frac{2V_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}$$

$$R=\frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{4V_0^2\sin^2(\theta+\alpha)}{g^2\cos^2\alpha}\right)+V_0\cos(\theta+\alpha)\left(\frac{2V_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}\right)$$

$$R=\frac{2V_0^2\sin\alpha\sin^2(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}+\frac{V_0^2\sin(2\theta+2\alpha)}{g\cos\alpha}$$

$$\frac{dR}{d\theta}=0\rightarrow R=\frac{V_0^2}{g\cos\alpha}\left(\frac{2\sin\alpha\sin^2(\theta+\alpha)}{\cos\alpha}+\sin(2\theta+2\alpha)\right)$$

مثال: جسم مقابل را از بالای نیم کره رها می‌کنیم. شعاع نیم کره و ~~گلوله~~ حلقه به ترتیب R و r است و لختی دورانی I است. دوره تناوب را بدست آورید.



$$E = mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v = (R-r)\dot\theta \qquad \omega = \frac{R-r}{r}\dot\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1-\frac{\theta^2}{2} \qquad \lim_{\theta\to 0}\sin\theta = \theta$$

$$I_{\text{حلقه}} = \frac{1}{2}mr^2 \qquad I_{\text{کره}} = \frac{2}{5}mr^2$$

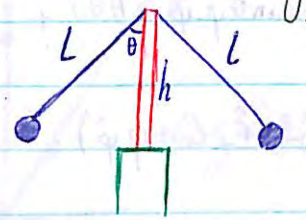
$$E = mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot\theta^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \to mg(R-r)\sin\theta\dot\theta + m(R-r)^2\dot\theta\ddot\theta + \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot\theta\ddot\theta = 0 \to$$

$$\ddot\theta\left[m(R-r)^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\right] + \theta mg(R-r) = 0 \to \frac{3}{2}\ddot\theta(R-r) + \theta g = 0 \to$$

$$\ddot\theta + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0$$

مثال: در شکل مقابل دو میله به طول l را به میله‌ای به طول h جوش داده شده‌اند. زاویه بین l و h θ است. دوره تناوب را بدست آورید.



$$U_1 = [h\cos\varphi - l\cos(\theta-\varphi)]mg$$

$$U_2 = [h\cos\varphi + l\cos(\theta+\varphi)]mg$$

$$E = U_1 + U_2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2$$

$$\hat r = (\hat r\cdot\hat x)\hat x + (\hat r\cdot\hat y)\hat y + (\hat r\cdot\hat z)\hat z \to \hat r = \cos\theta\,\hat z + \sin\theta\underbrace{(\hat x\cos\varphi + \hat y\sin\varphi)}_{\hat\rho}$$

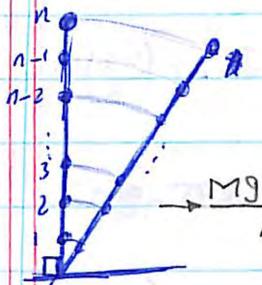
$$\frac{d\vec r}{dt} = \dot r\hat r + r\frac{d\hat r}{dt} \to \frac{d\hat r}{dt} = -\sin\theta\dot\theta\hat z + \cos\theta\cos\varphi\dot\theta\hat x - \sin\theta\sin\varphi\dot\varphi\hat x +$$

$$\dot\theta\cos\theta\sin\varphi\,\hat y + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi\,\hat y$$

$$r,\theta = c \to \delta\hat r = r\sin\theta(-\delta\varphi\sin\varphi)\hat x + r\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\hat y$$

$$\frac{\delta\vec r}{|\delta\vec r|} = -\sin\varphi\,\hat x + \cos\varphi\,\hat y = \hat e_\varphi$$

مثال: n توپ را روی میله به طول l قرار می‌دهیم. جرم توپ‌ها m است. سیستم را از حالت سکون رها می‌کنیم. $\dot\theta$ ، $\ddot\theta$ و θ را بدست آورید.



$$\sum \left(i\frac{l}{n}\right)\cdot\frac{M}{n}\cos\theta\cdot g+\frac{1}{2}\sum\frac{M}{n}\left(i\frac{l}{n}\right)^2\dot\theta^2=\sum\left(i\frac{l}{n}\right)\cdot\frac{M}{n}g$$

$$\rightarrow \frac{Mgl\cos\theta}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\frac{Ml^2\dot\theta^2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{Mgl}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\rightarrow g\cos\theta+l\frac{2n+1}{6n}\dot\theta^2=g\rightarrow\dot\theta^2=\frac{g}{l}(1-\cos\theta)\frac{6n}{2n+1}$$

$$2\dot\theta\ddot\theta=\frac{g}{l}\cdot\frac{6n}{2n+1}\cdot\sin\theta\,\dot\theta\rightarrow\ddot\theta=\frac{g}{l}\cdot\frac{3n}{2n+1}\sin\theta$$

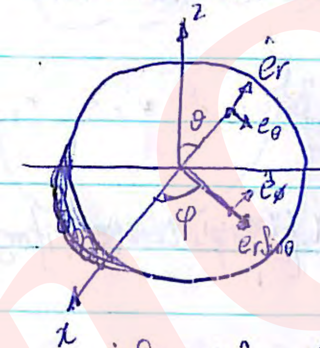
$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\qquad\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{cases} x_i=i\frac{l}{n}\sin\theta\rightarrow\dot x_i=\frac{il}{n}\cos\theta\,\dot\theta\rightarrow\ddot x_i=\frac{il}{n}\left(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta\right)\\ y_i=i\frac{l}{n}\cos\theta\rightarrow\dot y_i=-\frac{il}{n}\sin\theta\,\dot\theta\rightarrow\ddot y_i=-\frac{il}{n}\left(\ddot\theta\sin\theta+\dot\theta^2\cos\theta\right)\end{cases}$$

$$F_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{M}{n}\ddot x_i\rightarrow F_x=\frac{M}{n}\cdot\frac{l}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\left(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta\right)$$

$$\varphi, r=C\rightarrow\delta\vec r=-r\sin\theta\,\delta\theta\,\hat z+r\cos\theta\,\delta\theta\cos\varphi\,\hat x+r\cos\theta\,\delta\theta\sin\varphi\,\hat y$$

$$\hat\theta\equiv\hat e_\theta=-\sin\theta\,\hat z+\cos\theta\cos\varphi\,\hat x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat y$$

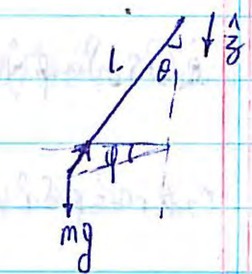


$$\vec a=\ddot r\hat r+\dot r\left(\sin\theta\dot\varphi\hat\varphi+\dot\theta\hat\theta\right)+\dot r\dot\theta\hat\theta+r\ddot\theta\hat\theta+r\dot\theta\left(-\dot\theta\hat r+\cos\theta\dot\varphi\hat\varphi\right)+$$

$$\dot r\sin\theta\dot\varphi\hat\varphi+r\cos\theta\dot\theta\dot\varphi\hat\varphi+r\sin\theta\ddot\varphi\hat\varphi+r\sin\theta\dot\varphi\left(-\dot\varphi\left(\hat r\sin\theta+\hat\theta\cos\theta\right)\right)\rightarrow\vec a=\left(\ddot r-r\dot\theta^2-r\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)\hat r+\left(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta-r\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2\right)\hat\theta+$$

$$\left(2\dot r\dot\varphi\sin\theta+2r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta+r\sin\theta\ddot\varphi\right)\hat\varphi$$

$$\vec g=g\left(\hat r\cos\theta-\hat\theta\sin\theta\right)$$



$$\hat r:\ -T+mg\cos\theta=m\left(\ddot r-r\dot\theta^2-r\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)$$

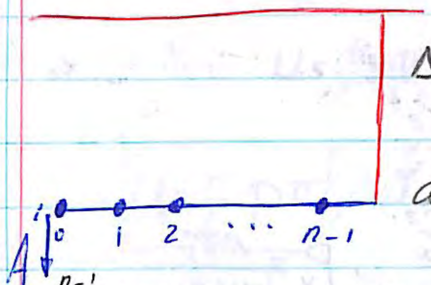
$(\frac{l}{n})\theta \cdot \frac{n(n+1)}{2} g = \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2\dot\theta^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to g\theta = \frac{l\dot\theta^2(2n+1)}{6n} \to$

$g\dot\theta = \frac{l(2n+1)}{6n}\cdot 2\dot\theta\ddot\theta \to \ddot\theta = \frac{3g}{(2n+1)l}$

$n(\frac{M}{n})g - T_0 = \sum (\frac{M}{n})(i\frac{l}{n})\ddot\theta \to Mg - T_0 = \frac{M}{n}\cdot\frac{l}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{3g}{(2n+1)l}$

$\to Mg - T_0 = \frac{3Mg(n+1)}{2(2n+1)} \to T_0 = \frac{Mg(n-1)}{2(2n+1)}$

اگر جای طناب کش بگذاریم شتاب A' را بدست آورید.



$\Delta y_i = \Delta y_0 - i\frac{l}{n}\theta \to v_i = v_0 - i\frac{l}{n}\dot\theta \to$

$a_i = a_0 - i\frac{l}{n}\ddot\theta$

$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{M}{n})g\cdot y_i - \frac{Mg(n-1)}{2n}y_n = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1}(\frac{M}{n})\dot y_i^2 \to$

$\frac{1}{2}g(nA' + \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\ddot\theta) - \frac{g(n-1)}{2}(A' - l\ddot\theta) =$

$\frac{1}{2}(nA'^2 - 2A'\frac{l}{n}\frac{n(n-1)}{2}\ddot\theta + \frac{l^2\ddot\theta^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6})$

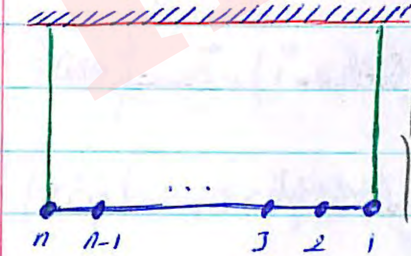
$F_y - n(\frac{M}{n})g = \sum_{i=1}^{n}(\frac{M}{n})\ddot y_i$

$F_x = \frac{Ml(n+1)}{2n(2n+1)}\cdot\frac{g}{l}\cdot 3n\left(\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta(1-\cos\theta)\right) \to$

$F_x = Mg\sin\theta\cdot\frac{3(n+1)}{2(2n+1)}\cdot(3\cos\theta - 2)$

$F_y = Mg\left(1 - \frac{3(n+1)}{2(2n+1)}\right)(1 + 2\cos\theta - 3\cos^2\theta)$

مثال: اگر سیستم در حال تعادل باشد T و T' را بیابید.



$T' = \frac{M}{n}g + \frac{(n-1)M}{2n}g \to T' = \frac{(n+1)M}{2n}g$

$T = \frac{M(n-1)}{2n}g$

مثال: اگر طناب سمت چپ پاره شود، کشش طناب سمت راست چقدر می‌شود؟

$n(\frac{M}{n})g - T_0 = \sum(\frac{M}{n})(i\frac{l}{n})\ddot\theta$

$\sum(\frac{M}{n})g(i\frac{l}{n})\theta = \frac{1}{2}\sum\frac{M}{n}(i\frac{l}{n})^2\dot\theta^2$

بسمه تعالی

$$\to 3P = \frac{2}{V}\sum \frac{1}{2} m_i \left(v_{x_i}^2+v_{y_i}^2+v_{z_i}^2\right) \to 3P = \frac{2}{V}U \to \boxed{U=\frac{3}{2}PV}$$

$$P=\frac{\sum m_i v_i}{V},\ \bar E = \left\langle \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_B T \to P = \frac{2N\left\langle \frac{1}{2} m_i v_i^2\right\rangle}{V}$$

$$\to P = \frac{2N\bar E}{V} = \frac{N k_B T}{V},\ N = n N_A \to P = \frac{n(k_B N_A)T}{V}$$

$$\to PV = n(\underbrace{k_B N_A}_{R})T \to \boxed{PV = nRT}$$

$$N_A \cdot k_B = 6.02\times10^{23}\times1.38\times10^{-23} \to R = 8.314$$

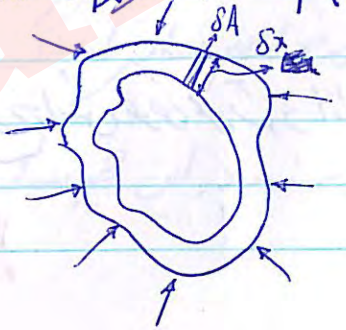
تک اتمی: $U=\frac{3}{2}PV$ دو اتمی: $U=\frac{5}{2}PV$

$\boxed{U=\frac{r}{2}PV}$ / 3 , 5 , 7 / $U=\frac{7}{2}PV$: سه اتمی

$\boxed{\Delta U = Q + W}$ $W = F\Delta x = P\delta A\,\delta x = P\delta V = P(V_1 - V_2)$

$\to W = -P\Delta V \to \boxed{dW = -P\,dV}$

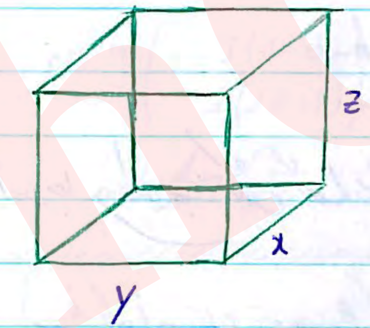
ایستاوار



$$gnA' + \frac{n-1}{2}\left(A' - g\frac{n+1}{n}\right)\frac{n}{n-1}g - \frac{g}{2}(n-1)\left(A' - \frac{n}{n-1}A' + g\frac{n+1}{n-1}\right) =$$

$$\frac{nA'^2}{2} - \frac{A'}{2}(n-1)\frac{n}{n-1}\left(A' - g\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2}\frac{(n-1)(2n-1)}{}$$

مثال: $\bar F$ را اگر سرعت در راستای محورهای x ، y و z به ترتیب v_x , v_y , v_z باشد بیابید.



$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{n(2mv)}{n\frac{2d}{v}} = \bar F = \frac{mv^2}{d} \to$$

$$\bar F_x = \frac{mv_x^2}{x},\quad \bar F_y = \frac{mv_y^2}{y},\quad \bar F_z = \frac{mv_z^2}{z}$$

$$\bar P_z = \frac{\bar F_z}{xy} \to \bar P_z = \frac{mv_z^2}{xyz},\quad \bar P_x = \frac{mv_x^2}{xyz},\quad \bar P_y = \frac{mv_y^2}{xyz}$$

$$\bar F_e = \frac{\sum m_i v_{ie}^2}{e} \qquad \bar P_e = \frac{\sum m_i v_{ie}^2}{xyz}$$

$P_e = \frac{\sum m_i v_{ie}^2}{V} = \bar P$ اگر هر کدام از P ها بیشتر باشد در نهایت مساوی می‌شوند

مثال: انرژی درونی یک لیتر هوا در زمستان سرد با دمای $-3^\circ c$ و فشار ۱ بار چند ژول است؟ (هوا را گازی دو اتمی شامل N و O فرض کنید)

انرژی درونی یک لیتر هوای گرم تابستان در دمای $47^\circ c$ و فشار ۱ بار چقدر است؟

مثال: گازی داریم با تعداد درجه آزادی 5. هیدروژن است. دمای -3° است. ناگهان یک فرد دروغ گو در گوش هیدروژن می‌گوید تو هیدروژن نیستی بادمجانی و درجه آزادی تو باید 3 باشد. (1 Lit)

الف) انرژی درونی هیدروژن را بیابید.

ب) وقتی هیدروژن بادمجان می‌شود انرژی درونی اش عوض نمی‌شود اما دمای آن تغییر می‌کند. دمای آن چقدر می‌شود؟

$U_1 = U_2 \to r_1 n_1 T_1 = r_2 n_2 T_2 \to T_2 = 450$

مثال: دو مخزن ~~...~~ با یکدیگر تبادل گرمایی می‌کنند. سیستم منزوی است. T تعادل را بیابید.

$\Delta U = 0 \to U_1 = U_2$ (I)

$U_1 = \frac{3}{2}\times R\times 300 + \frac{7}{2}\times R\times 500 \to U_1 = \frac{R}{2}\times 4400$

$U_2 = \frac{3}{2}RT + \frac{7}{2}RT = 5RT \xrightarrow{I} 5RT = \frac{R}{2}\times 4400 \to T = 440$

$n=1$	$n=1$
$r=3$	$r=7$
$T=300$	$T=500$

مثال: یک کپسول به حجم 10 Lit و فشار 11 atm داریم. می‌خواهیم تعدادی بادکنک را چنان باد کنیم تا از حجم 0 به حجم 2 Lit برسند. در این حجم فشار بادکنک 1.1 atm است. با این کپسول

چند بادکنک می‌توان باد کرد؟

$$PV = kP'V' + P'V \rightarrow$$

$$k = \left[\frac{P - P'}{P'V'}\right]V$$

مثال: طی یک فرآیند هم‌حجم گاز از شرایط T_0 ، V_0 و P_0 به $P_0 + \Delta P$ ، می‌رود. الف) ΔT را بیابید. ب) n را محاسبه کنید. ج) $W = ?$

د) ΔU ه) $Q = ?$ و) $C_{MV} = \frac{Q}{n\Delta T}$ ، $C_{MV} = ?$

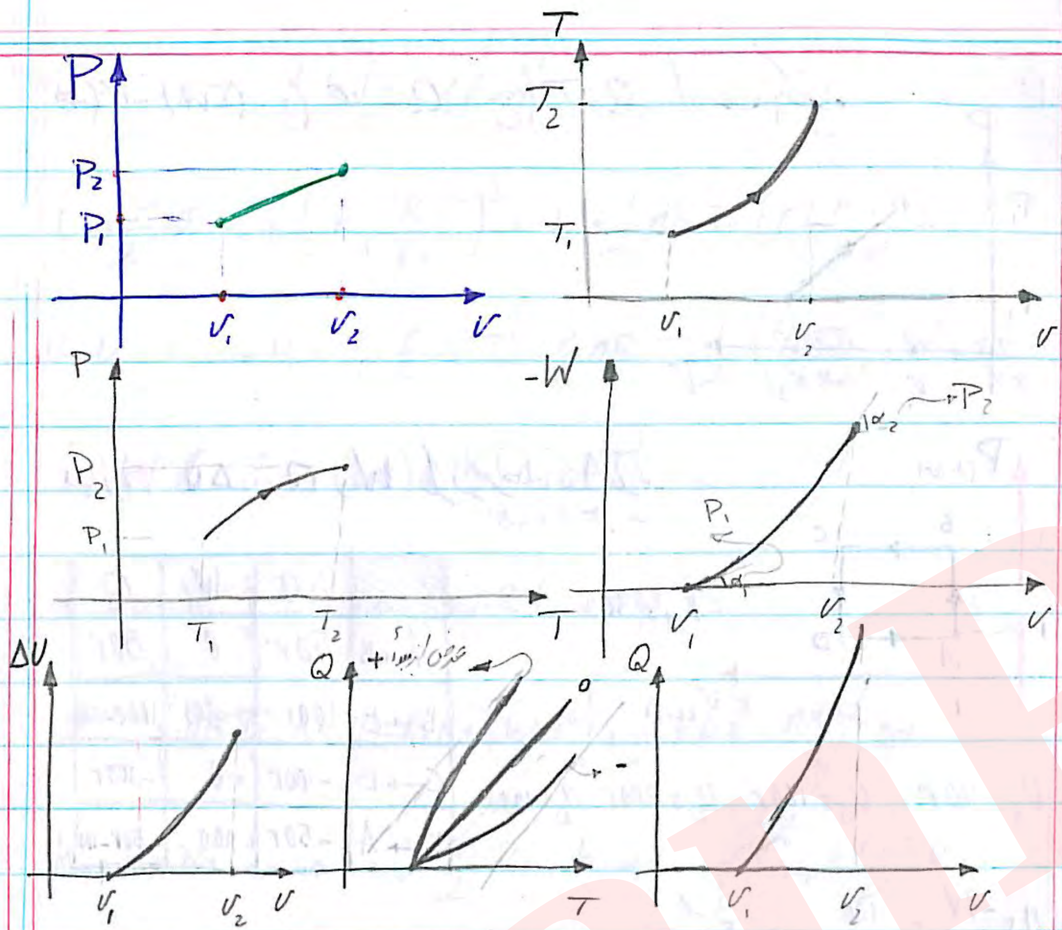
مثال: مسئله بالا را برای هم‌فشار حل کنید.

$$W = -P_0 \Delta V \quad , \quad \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta V}{V_0} \quad , \quad \Delta U = \frac{r}{2} P_0 \Delta V \quad , \quad Q = \left(\frac{r}{2}+1\right) P_0 \Delta V$$

$$C_{MP} = \frac{r+2}{2} R \quad , \quad C_{MP} - C_{MV} = R$$

مثال: نمودارهای الف) $T-V$ ب) $P-T$ ج) $\Delta U - V$ د) $-W - V$

ه) $Q - V$ و) $Q - T$ را رسم کنید.



$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\left(\frac{r}{2}+1\right)(P_1 - mV_1) + (r+1)mV}{(P_1 - mV_1) + 2mV} \rightarrow \frac{d^2Q}{dT^2} = -m(P_1 - mV_1)$$

$$r \rightarrow \infty : \frac{dQ}{dT} = \frac{r+1}{2}$$

نمودارهای الف) $T-V$ ب) $P-T$ ج) $\Delta U - P$ د) $\Delta U - T$

$$\begin{cases} U = \frac{r}{2} nRT + \frac{1}{2}k\left(l_0-(l-x)\right)^2 \\ U_0 = \frac{r}{2}nRT_0 + \frac{1}{2} k\left(\frac{nRT_0}{kx_0}\right)^2 \to U_0 = \frac{1}{2} nRT_0\left(r+\frac{nRT_0}{kx_0^2}\right)\end{cases}$$

$$U = U_0 + Q \to U_0 + Q = \frac{r}{2} nRT_0 + \frac{r}{2} nR\Delta T + \frac{1}{2} k\left(\left(\frac{nRT_0}{kx_0}\right)^2 + \Delta x^2 + \frac{2nRT_0}{kx_0}\Delta x\right)$$

$$\to k(l_0 - l + x_0 + \Delta x) = \frac{nR(T_0+\Delta T)}{x_0+\Delta x} \to$$

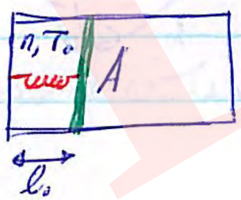
$$(x_0+\Delta x)\left(\frac{nRT_0}{x_0} + k\Delta x\right) = nR(T_0+\Delta T) \to$$

$$Q = \frac{r}{2}\left(\frac{nRT_0}{x_0}\Delta x + kx_0\Delta x + k\Delta x^2\right) + \frac{1}{2} k\Delta x^2 + \frac{nRT_0}{x_0}\Delta x$$

$$k\to\infty : \Delta x \to 0 \to C_{MV} = \frac{r}{2} R \quad , \quad k\to 0 \to C_{MP} = \frac{r+2}{2}R$$

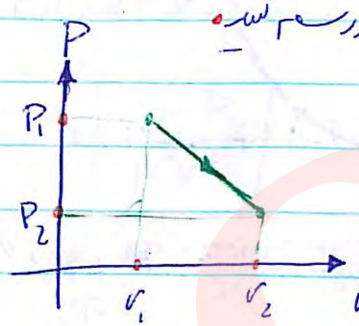
مثال: اگر فنری با طول اولیه صفر داشته باشیم، مطلوبست:

الف) $k=?$ ب) U_0 ج) Q چقدر باشد تا طول تعادلی دو برابر شود؟

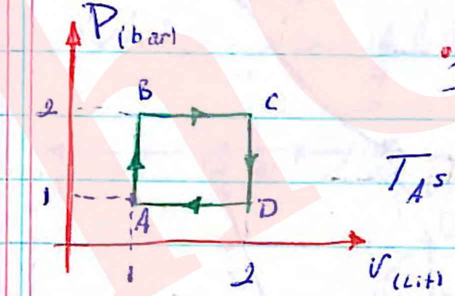


$$kl_0 = \frac{nRT_0}{l_0} \to k = \frac{nRT_0}{l_0^2}$$

ه) $(-W)-V$ و) $Q-V$ ج) $Q-T$ را رسم کنید.



مثال: W , Q , ΔU را در هر مرحله بیابید.



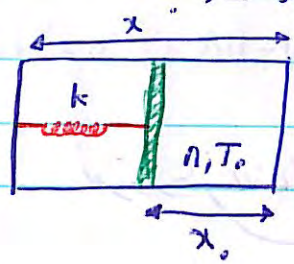
$T_A = 300$

	ΔU	W	Q
$A\to B$	$50r$	0	$50r$
$B\to C$	$100r$	-200	$100r-200$
$C\to D$	$-100r$	0	$-100r$
$D\to A$	$-50r$	100	$-50r-100$

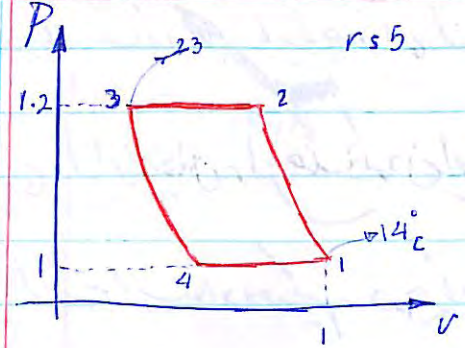
$U_A = 50r$, $U_B = 100r$, $U_C = 200r$, $U_D = 100r$

$$\eta = \frac{-W}{Q_H} = \frac{100}{150r+200} = \frac{2}{3r+4}$$

مثال: الف) $l_0 = ?$ ب) $U_0 = ?$ ج) $Q \to \Delta x = ?$, $\Delta T = ?$, $C_M = ?$



$$k(l_0 - l + x) = \frac{nRT_0}{x_0} \to l_0 = \frac{nRT_0}{kx_0} + l - x$$



	P	v	T_k	T_{c°	U
1	1	1	287	14	250
2	1.2	0.8779	302.35	29.35	263.37
3	1.2	0.8585	296	23	257.85
4	1	0.9790	280.98	7.98	244.75

	ΔU	W	Q
1 → 2	13.37	13.37	0
2 → 3	-5.52	2.21	-7.73
3 → 4	-13.10	-13.10	0
4 → 1	5.25	-2.1	+7.35

$Q_H = -7.73$ — یخچال

$W = 0.27 + 0.11 = 0.38$

$Q_c = 7.35$

مثال: توان یک بخاری معمولی گازسوز حدود $10000\,\frac{kcal}{h}$ است.

الف) توان این بخاری چند وات است؟

$P = \frac{7}{6} \times 10^4$

ب) این بخاری می‌تواند در دمای $-5^\circ c$ دمای اتاق را روی 20° ثابت نگه دارد

در تابستانی که دمای هوای بیرون 35° است برای خنک نگه داشتن خانه در دمای

$$U_\circ = \frac{1}{2}k l_\circ^2 + \frac{r}{2} nRT_\circ \rightarrow U_\circ = \frac{nRT_\circ}{2}(1+r)$$

$$U = U_\circ + Q \rightarrow \frac{1}{2}k \cdot 4l_\circ^2 + \frac{r}{2}nRT = \frac{1}{2}kl_\circ^2 + \frac{r}{2}nRT_\circ + Q \rightarrow$$

$$k \cdot 2l_\circ = \frac{nRT}{2l_\circ} \rightarrow T = \frac{4kl_\circ^2}{nR} \rightarrow$$

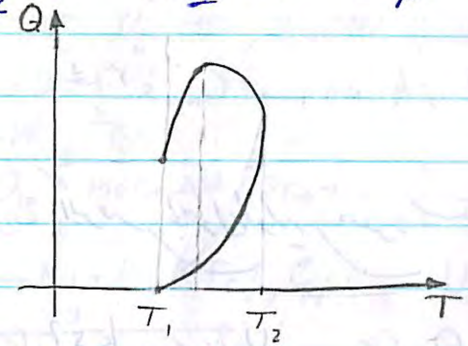
$$2nRT_\circ + 2rnRT_\circ = \frac{nRT_\circ}{2} + \frac{r}{2}nRT_\circ + Q \rightarrow Q = \frac{3nRT_\circ}{2}(1+r)$$

نقطه عطف: (بی‌دررو)

$$dQ = 0 \rightarrow pdv + d\left(\frac{r}{2}pv\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{r+2}{2}pdv = -\frac{r}{2}vdp \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{r+2}{r}\frac{dv}{v} \rightarrow \boxed{\frac{dp}{dv} = -\gamma\frac{p}{v}}$$

ج)



توان

$20^\circ c$ یک کولر باید چه توانی از این اتاق گرما بگیرد؟ $P = 7000\ W$

ج) از این یخچال برای خنک کردن این اتاق در حالتی که در قسمت ب تشریح شده است استفاده می‌کنیم. در هر ثانیه چند بار چرخه باید تکرار شود؟

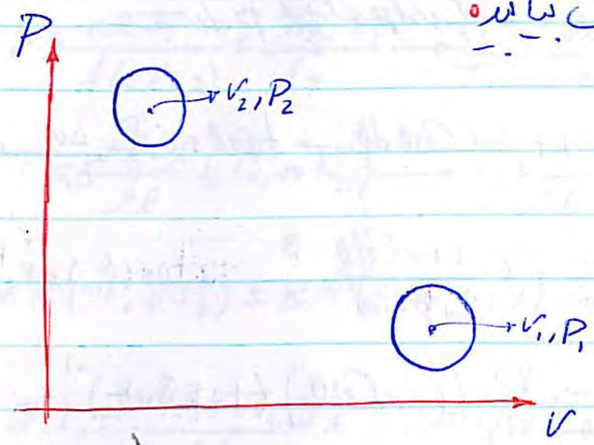
د) توان مصرفی برق یخچال چقدر خواهد بود؟

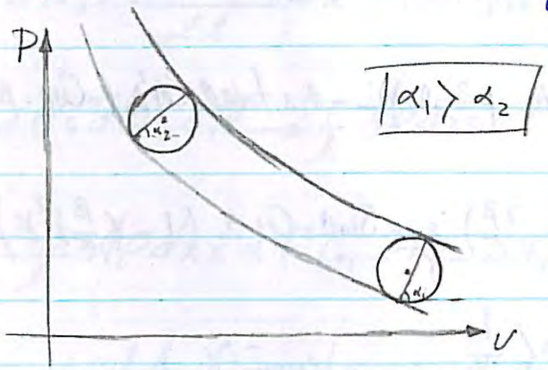
ماشین گرمایی:
$$\begin{cases} \eta = \dfrac{-W}{Q_H} & Q_H > 0\ ,\ W, Q_c < 0 \\[2ex] K = \dfrac{Q_c}{W} & Q_H < 0\ ,\ Q_c, W > 0 \end{cases}$$

کارنو: $Q_c = Pt\ ,\ W = Pt$

$$1 = \frac{Q_c}{W} = \frac{-Q_H - W}{W} = \frac{1}{\eta} - 1 \to \eta = \frac{1}{2} \to 1 - \frac{T_c}{T_H} = \frac{1}{2} \to T_c = \frac{T_H}{2}$$

مثال: در شکل مقابل مختصات مراکز به ترتیب $(V_2,P_2),(V_1,P_1)$ می‌باشد. الف) α ها را با هم مقایسه کنید. ب) موقعیت مراکز را نسبت به خط واصل نقاط عطف بیابید.





$$\boxed{\alpha_1 > \alpha_2}$$

$$\begin{cases} P = P_0 + \Delta P\cos\theta \\ V = V_0 + \Delta V\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dP = -\Delta P\sin\theta\, d\theta\ , & \dfrac{\Delta P}{P_0} = \alpha \\[2ex] dV = \Delta V\cos\theta\, d\theta\ , & \dfrac{\Delta V}{V_0} = \beta \end{cases}$$

$$dQ = dU - dW = \frac{r}{2}(PdV + VdP) - (-PdV) \longrightarrow$$

$$P=\frac{nRT_1}{A(2l-x)}=\frac{nRT_2}{Ax}\longrightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{2l-x}{x}\longrightarrow\frac{T_1}{T_1+T_2}=\frac{2l-x}{2l}\longrightarrow$$

$$T_1=\frac{2l-x}{2l}(T_{01}+T_{02})\longrightarrow T_2=\frac{x}{2l}(T_{01}+T_{02})$$

$$nR(T_1+T_2)=PA(2l-x+x)\longrightarrow P=\frac{nR(T_{01}+T_{02})}{2Al}$$ ثابت

$$dT_1=-\frac{T_{01}+T_{02}}{2l}dx\quad,\quad dT_2=\frac{(T_{01}+T_{02})}{2l}dx$$

$$dU=dQ+dW\longrightarrow\frac{r}{2}APdx=\alpha(T_1-T_2)dt+(-PAdx)\longrightarrow$$

$$\frac{r+2}{2}APdx=\alpha(T_{01}+T_{02}-2T_2)dt\longrightarrow v=\frac{4\alpha(l-x)}{(r+2)nR}$$

مثال: اگر گازی را با فشار P_0 و چگالی ρ_0 و ضریب اتمیسیته γ را وارد لوله کنیم و فرآیند بی دررو باشد، معادله‌ی برنولی را بیابید.

$$\begin{cases}\rho A v=C\longrightarrow \rho v=\rho_0 v_0\\[2mm](P_x-P_{(x+dx)})A=\rho A dx\frac{dv}{dt}\longrightarrow -dP=\rho v dv\longrightarrow P+\rho_0 v_0 v=\end{cases}$$ ثابت

$$dQ=\frac{r}{2}vdP+\frac{r+2}{r}Pdv=0\longrightarrow\frac{-r}{2}vdP=\frac{r+2}{2}Pdv\longrightarrow$$

$$-rv(-\Delta P\sin\theta)d\theta=(r+2)P\Delta v\cos\theta d\theta\longrightarrow\tan\theta=\gamma\frac{P}{v}\frac{\Delta v}{\Delta P}\longrightarrow$$

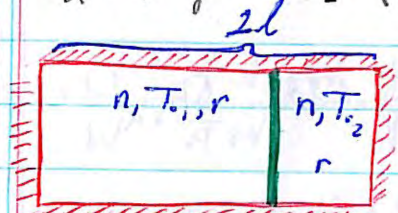
$$\tan\theta=\gamma\frac{P_0+\Delta P\cos\theta}{v_0+\Delta v\sin\theta}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta P}=\gamma\frac{1+\alpha\cos\theta}{1+\beta\sin\theta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\longrightarrow\tan(\theta_{(0)})=\gamma\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\tan(\theta_0+\theta_1)=\tan\theta_0+\frac{\theta_1}{\cos^2\theta}=\frac{\gamma\beta}{\alpha}(1+\alpha\cos\theta_0)(1+\beta\sin\theta_0)^{-1}\longrightarrow$$

$$\tan\theta_0+\frac{\theta_1}{\cos^2\theta_0}=\frac{\gamma\beta}{\alpha}(1+\alpha\cos\theta_0-\beta\sin\theta_0)\longrightarrow\theta_1=\tan\theta_0\cos^2\theta_0(\alpha\cos\theta_0-\beta\sin\theta_0)$$

$$\longrightarrow\theta_1=\alpha\sin\theta_0\cos^2\theta_0\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma\beta}{\alpha}\right)=\alpha\sin\theta_0\cos^2\theta_0\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\gamma\right)$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2>\frac{1}{\gamma}\quad \text{یا}\quad\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2<\frac{1}{\gamma}$$



مثال: سرعت دیواره را بیابید.

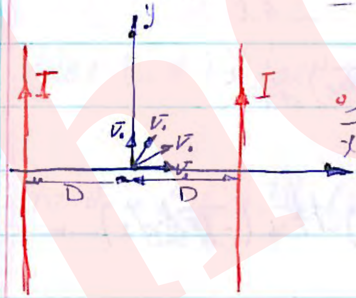
$$\frac{dQ}{dt}=\alpha\Delta T$$

$$U=\frac{r}{2}nR(T_1+T_2)\longrightarrow T_1+T_2=T_{01}+T_{02}$$

مثال: حلقه‌ای در یک میدان مغناطیسی یکنواخت که جریان I از آن می‌گذرد در نظر بگیرید گشتاور و نیروی وارد بر آن را بیابید.

مثال: مسیر حرکت ها متناوب را بدست آورید.

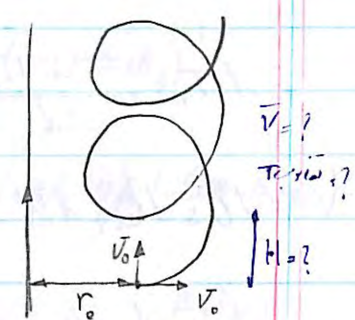
$r_0^2 = r_{min} r_{max}$



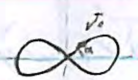
خودتان $B_{(x)}$ را بدست آورید.

و $B_{(x)}$ را بدست آورید.

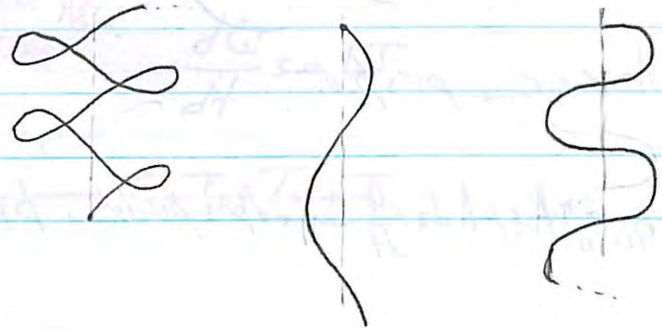
مسیر تقریبی را بدست آورید.



اگر θ را بدهیم مسیر را رسم کنید.



؟؟ اگر مسیر حرکت مثال 3 باید این شود α را بیابید.

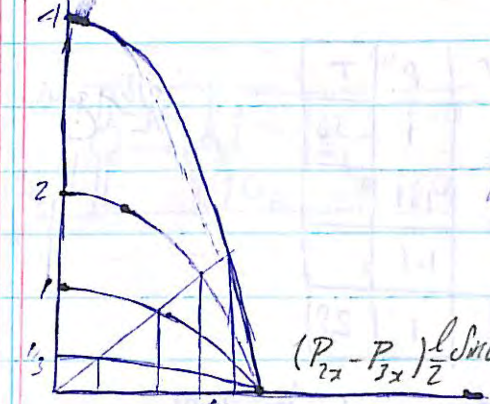


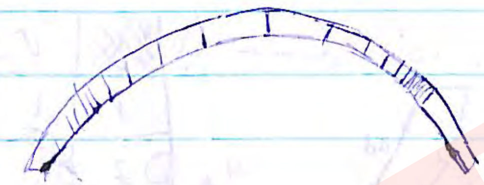
$$x_{\substack{max \\ min}} = \pm D\left(1 - e^{\frac{v_0}{8}(1+\sin\alpha)}\right)^{1/2}$$

نکته: در رسم تقریبی مسیر از شعاع لحظه استفاده می‌کنیم.

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$\tau = k\theta - |\vec{m}\times\vec{B}| = 0 \rightarrow k\theta = iAnB\sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta) \rightarrow \theta = \frac{iAnB}{k}\cos\theta$$





$$(P_{2x}-P_{3x})\frac{l}{2}\sin\theta + P_{2y}\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{ml^2}{12}\omega_2$$

$$\begin{cases} P - 2P_{1y} = mV_0 \\ P_{1y} - P_{2y} = mV_{1y} \\ P_{1x} - P_{2x} = mV_{1x} \end{cases}$$

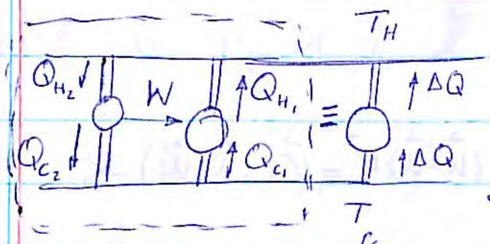
$$(P_{1x}+P_{2x})\frac{l}{2}\sin 2\theta - (P_{1y}+P_{2y})\frac{l}{2}\cos 2\theta = \frac{1}{12}ml^2\omega_1^2$$

$P_{2x}+P_{3x} = mV_{2x}$, $mV_{2y} = P_{2y}$,

هیچ چرخه‌ای با بازده بیشتر از [illegible] نداریم.

اگر دو ~~[illegible]~~ جسم گرم و سرد داشته باشیم انتقال گرما خود به خود انجام می‌شود.

حکم: اگر C_1 چرخه‌ای بازگشت‌پذیر و C_2 چرخه‌ای دلخواه باشد که این دو بین دو دمای T_H و T_C کار کنند $\longrightarrow \eta_{C_1} > \eta_{C_2}$

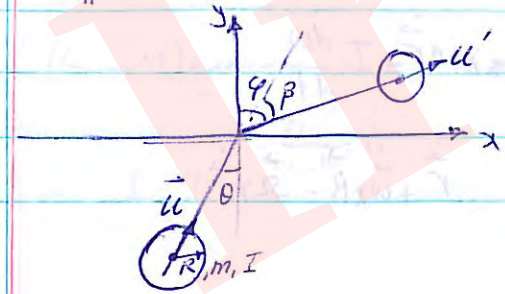


برهان خلف:

$$\begin{cases} Q_{H_2} = Q_{C_2} + W \\ Q_{H_1} = Q_{C_1} + W \end{cases}$$

$$\eta_2 > \eta_1 \rightarrow \frac{W}{Q_{H_2}} > \frac{W}{Q_{H_1}} \rightarrow Q_{H_1} > Q_{H_2} \rightarrow Q_{C_1} - Q_{C_2} = Q_{H_1} - Q_{H_2} = \Delta Q$$

$$\frac{W_{max}}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

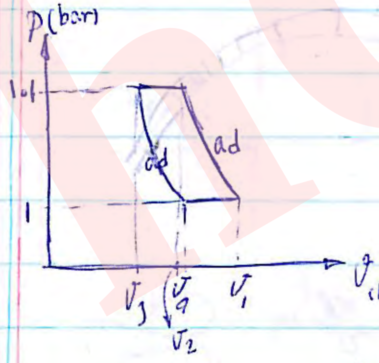


درس 10 امتحان جامع 77,12,3

$$(P_{2x} - P_{3x})\frac{l}{2}\sin\theta + P_{2y}\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{ml^2}{12}\omega_2$$

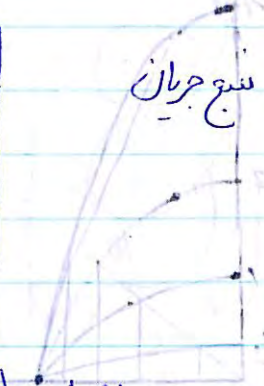
$$V_{1y} = V_0 - \frac{l}{2}\omega_1\cos(2\theta) \quad \Big| \quad V_{2y} = V_0 - l\omega_1\cos(2\theta) - \frac{l}{2}\omega_2\cos\theta$$

$$V_{1x} = \frac{l}{2}\omega_1\sin(2\theta) \quad \Big| \quad V_{2x} = l\omega_1\sin(2\theta) - \frac{l}{2}\omega_2\sin\theta \rightarrow 2\omega_1\sin\theta\cos\theta = \omega_2\sin\theta \rightarrow \boxed{\omega_2 = 2\omega_1\cos\theta}$$

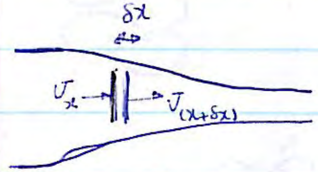


	V	P	T
1	1	1	30
2		1.01	
3		1.01	
4		1	29

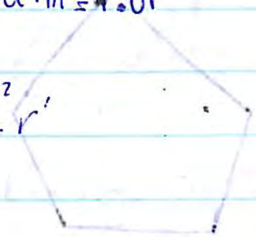
شبه جریان



$$1\ bar = 10^5\ Pa \quad , \quad 1\ atm = 1.01$$



$$V_x = \frac{V_0 r_0^2}{r^2} \rightarrow V'_x = -\frac{2V_0 r_0^2}{r^3} r'$$



$$\frac{d\,\delta x}{dt} = V_{(x+\delta x)} - V_x = \delta x\, V'_{(x)} = -\frac{2V_0 r_0^2 \delta x}{r^3} r'$$

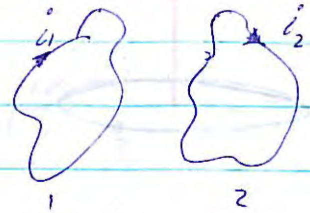
$$\frac{d\,\delta x}{dx} = \frac{r^2}{V_0 r_0^2}\left(-\frac{2V_0 r_0^2}{r^3}\right)\delta x\, r'$$

$$\frac{d\,\delta x}{\delta x} = -2\frac{dr_{(x)}}{r_{(x)}} \rightarrow \delta x \sim r_{(x)}^{-2}$$

$$\longrightarrow \ddot{\vec{r}} - \vec{R}\times\left(\frac{\vec{R}\times M\ddot{\vec{r}}}{I}\right) = \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} \longrightarrow \ddot{\vec{r}} + \frac{MR^2}{I}\ddot{\vec{r}} = \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}$$

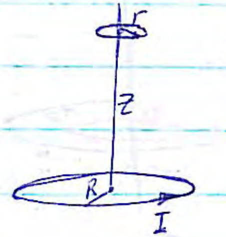
$$\ddot{\vec{r}}\left(1+\frac{MR^2}{I}\right) = \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}$$

$$\int \vec{B}_{1\to 2}\cdot d\vec{s} = \phi_{12} = M_{2\to 1}\, i_2$$



$$\int \vec{B}_{2\to 1}\cdot d\vec{s} = \phi_{21} = M_{1\to 2}\, i_1$$

$M_{12} = M_{21}$ ، $M_{ji} = M_{ij}$ ضریب القای متقابل 2 مدار: M_{21}



$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \quad , \quad \phi \simeq \frac{\mu_0 \pi I R^2 r^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \longrightarrow M \simeq \frac{\mu_0 \pi R^2 r^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\longrightarrow \cancel{M_{\text{دقیق}} = \frac{\mu_0 \pi R^2 r^2}{2(R^2+z^2+r^2)^{3/2}}} \longrightarrow L_{\text{خودالقایی}} = \frac{\mu_0 \pi}{4\sqrt{2}} R$$

مثال: حلقه‌ای با جریان اولیه I_0 داریم که مقاومت R دارد. در مقابل آن حلقه‌ای با مقاومت 0 می‌گذاریم. I و I' برحسب t را بیابید. (L, L', M)

$$I = I_0 e^{-\frac{RL'}{LL'-M^2}t} \quad , \quad i = \frac{M}{L'} I_0 \left(1 - e^{-\frac{RL'}{LL'-M^2}t}\right)$$

$$\begin{cases} m\vec{u}' = m\vec{u} + \vec{J} \\ I\vec{\omega}' = I\vec{\omega} - \vec{R}\times\vec{J} = I\vec{\omega} - \vec{R}\times(m\vec{u}' - m\vec{u}) \longrightarrow m\vec{R}\times(\vec{u}'-\vec{u}) = I(\vec{\omega}'-\vec{\omega}) \\ \vec{u} + \vec{R}\times\vec{\omega} = 0 \\ \vec{u}' + \vec{R}\times\vec{\omega}' = \vec{v} \end{cases} \longrightarrow \vec{R}\times(\vec{\omega}'-\vec{\omega}) = \vec{v} + \vec{u} - \vec{u}'$$

$$\frac{m}{I}\vec{R}\times\left(\vec{R}\times(\vec{u}'-\vec{u})\right) = \vec{v} + \vec{u} - \vec{u}' = -\frac{m}{I}(\vec{u}'-\vec{u})R^2 = \vec{v} + (\vec{u}-\vec{u}') \longrightarrow$$

$$\vec{u}' - \vec{u} = -\frac{I\vec{v}}{mR^2+I} \longrightarrow \vec{u}' = \vec{u} - \frac{I}{mR^2+I}\vec{v}$$

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = k\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} \\ \vec{r}_{cm} = \vec{r} - \vec{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_{cm} = \dot{\vec{r}} \\ \vec{a}_{cm} = \ddot{\vec{r}} \end{cases}$$

$$\vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{R} = \vec{\Omega}\times\vec{r} \qquad \vec{R}\times M\ddot{\vec{r}} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \longrightarrow$$

$$\dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times\vec{R} = \vec{\Omega}\times\vec{r} \quad \text{شرط غلتش} \qquad \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{R} = \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}$$

① : $-\left(2(K-1)\alpha+\beta\right) > -\pi$　　② : $-\left(2K\alpha-\beta\right) > -\pi$

③ : $2K\alpha-\beta < \pi+\alpha$　　④ : $2K\alpha+\beta < \pi+\alpha$

$$K_1-1=\left[\frac{\pi-\beta}{2\alpha}\right] \quad , \quad K_2=\left[\frac{\pi+\beta}{2\alpha}\right]$$

$$K_3=\left[\frac{\pi+\alpha+\beta}{2\alpha}\right] \quad , \quad K_4=\left[\frac{\pi+\alpha-\beta}{2\alpha}\right]$$

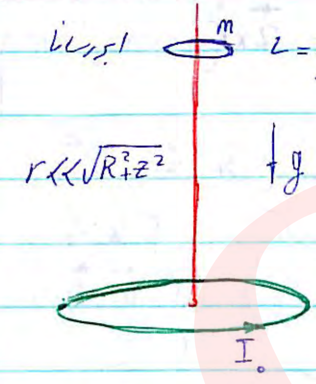
$$n=1+\left[\frac{\pi-\beta}{2\alpha}\right]+\left[\frac{\pi-\beta}{2\alpha}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\pi+\beta}{2\alpha}\right]+\left[\frac{\pi+\beta}{2\alpha}+\frac{1}{2}\right] \longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]=[nx]$$

$$n=1+\left[\frac{\pi-\beta}{\alpha}\right]+\left[\frac{\pi+\beta}{\alpha}\right] \longrightarrow n=\left[\frac{\pi+\overbrace{\alpha-\beta}^{\beta'}}{\alpha}\right]+\left[\frac{\pi+\beta}{\alpha}\right] \longrightarrow$$

$$n=\left[\frac{\pi+\beta'}{\alpha}\right]+\left[\frac{\pi+\beta}{\alpha}\right]$$

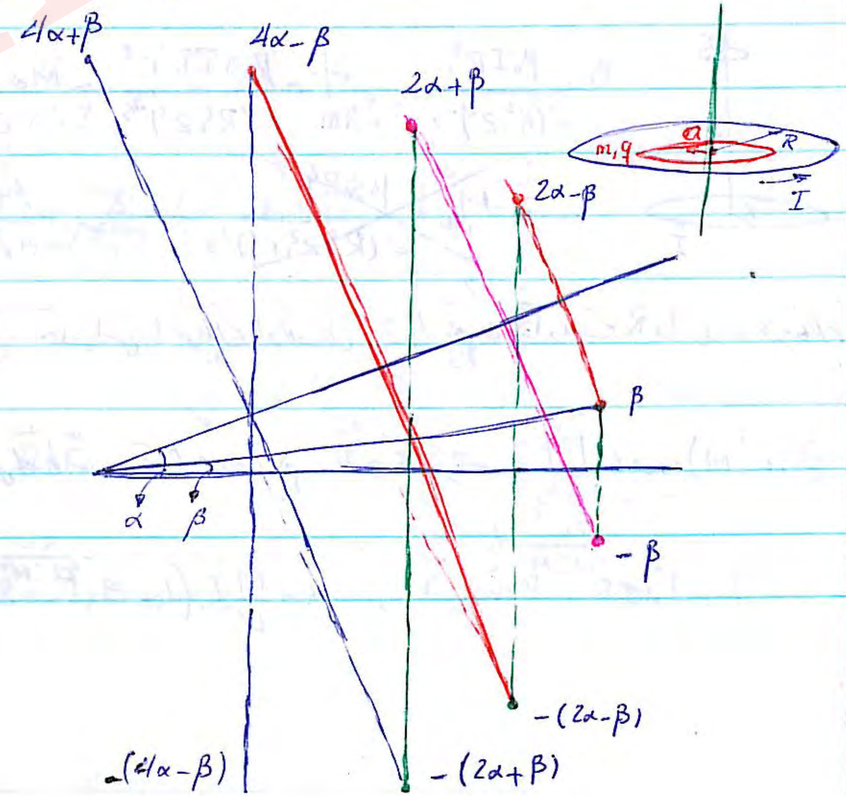
مثال: در شکل مقابل جریان I از لوله‌ای می‌گذرد. $n_{(r)}$ تعداد بارهای الکتریکی در واحد حجم را با فرض $n_0+\delta n_{(r)}$ داریم $\frac{\delta n_{(r)}}{n_0} \ll 1$ حل کنید.

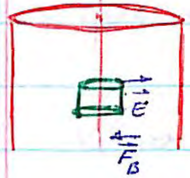


مثال: مطلوب است: الف) m از چه پارامترهای حلقه‌ی کوچک چقدر باشد تا حلقه‌ی بالایی معلق بماند؟

ب) معادله‌ی حرکت را برای m نوشته و آن را حل کنید. $(\Delta z \ll z_0)$

مثال: حلقه‌ای را با سرعت اولیه v_0 به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. ارتفاع ماکسیمم را بیابید.





$I = n_0 \pi R^2 e v$

$B_{(r)} = \dfrac{\mu_0 i_{(r)}}{2\pi r}$; $i_{(r)} = \lambda_{(r)} + n_0 \pi r^2 e$

$\lambda_{(r)} = e\int_0^r \delta n_{(r')} 2\pi r' dr'$ $\qquad$ $B_{(r)} v e = \dfrac{\lambda_{(r)}}{2\pi \varepsilon_0 r} e \rightarrow$

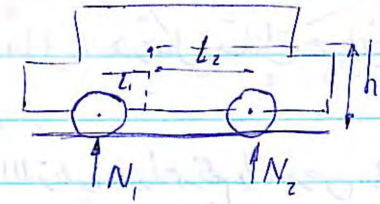
$\dfrac{\mu_0 (\lambda_{(r)} + n_0 \pi r^2 e)}{2\pi r} v^2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow \lambda = n_0 \pi r^2 e \mu_0 \varepsilon_0 v^2 = n_0 \pi r^2 e (\frac{v}{c})^2$

$= e\int_0^r \delta n_{(r')} 2\pi r' dr' \rightarrow n_0 r^2 (\frac{v}{c})^2 = 2\int_0^r \delta n_{(r')} r' dr' \rightarrow \delta n = n_0 (\frac{v}{c})^2$

$n_{(r)} = n_0 (1 + (\frac{v}{c})^2) \rightarrow \boxed{n_{(r)} = n_0 \left(1 + (\frac{I}{n_0 \pi R^2 e c})^2\right)}$

$b \times 2\pi R l = \pi R^2 e l \, \delta n \rightarrow b = e \dfrac{\delta n R}{2} \rightarrow \boxed{b = \dfrac{Re}{2n_0} \left(\dfrac{I}{\pi R^2 e c}\right)}$

مثال: الف) ماشینی به جرم M مطابق شکل ساکن است. N_1 و N_2 = ?

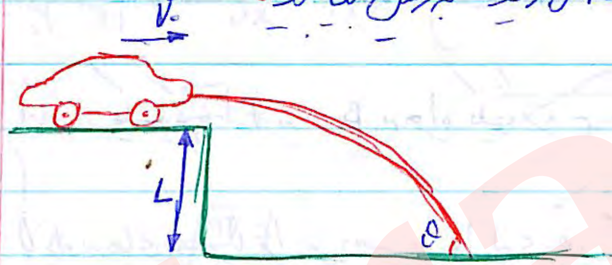


$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{l_1}{l_1+l_2} Mg \\ N_2 = \dfrac{l_2}{l_1+l_2} Mg \end{cases}$$

ب) اگر شتاب a داشته باشد N_1 و N_2 را بیابید.

ج) اگر ماشین دیفرانسیل عقب باشد شتاب آن a_{2MAX} و اگر دیفرانسیل جلو باشد شتاب آن a_{1MAX} است. با فرض این که ضریب اصطکاک لاستیک ها با زمین μ باشد a_{1MAX} و a_{2MAX} را بدست آورید.

2) ماشینی را در نظر بگیرید که از سکویی به ارتفاع L با سرعت اولیه v_0 پرتاب می شود. θ ی آن را لحظه ی رسیدن به زمین بیابید.



(3

$$N a_2 \cos\left(\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\right)+N a_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta+\alpha+\beta\right)=0 \rightarrow$$

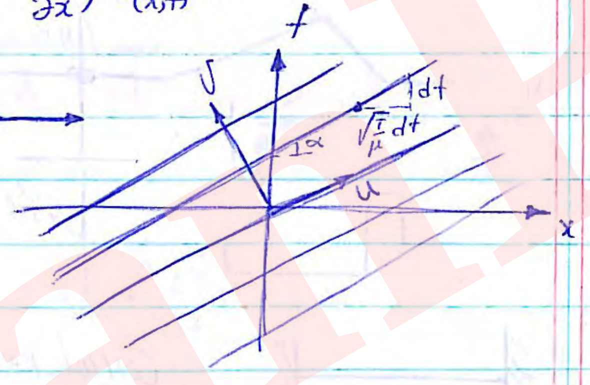
$$a_1\sin(\alpha+\beta+\theta)=a_2\sin\beta$$

$$dT_y = dm\,\ddot{y} \rightarrow T_0\, y''\, dx = \lambda\, dx\, \ddot{y} \rightarrow$$

$$\left(\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y_{(x,t)}=0$$

$$\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial t}-\sqrt{T}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial t}+\sqrt{T}\frac{\partial}{\partial x}\right)y_{(x,t)}=0$$

$$\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial t}+\sqrt{T}\frac{\partial}{\partial x}\right)y_{(x,t)}=0 \longrightarrow$$



$$\begin{cases} v = x-\sqrt{\frac{T}{\mu}}\,t \\ u = x+\sqrt{\frac{T}{\mu}}\,t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f_{(v)} \\ y = g_{(u)} \end{cases} \rightarrow y = f_{(v)}+g_{(u)}$$

$$F = q_0\frac{E_0}{r_0}r \rightarrow \frac{dW}{dt}=\frac{q_0E_0}{r_0}r\,v=\frac{dK}{dt}=mva \rightarrow m\frac{dv}{dt}=\frac{q_0E_0}{r_0}r$$

$$,\ \frac{mv}{qB}=r \rightarrow m\frac{dv}{dt}=\frac{q}{2}\frac{dB}{dt}\frac{mv}{qB} \rightarrow \frac{dv}{v}=\frac{dB}{2B} \rightarrow \frac{v^2}{B}=cte$$

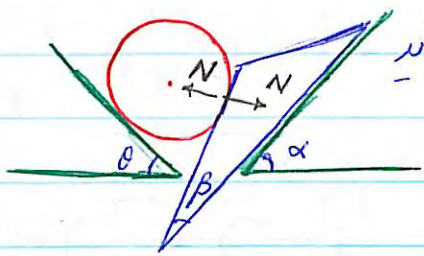
$$\rightarrow Br^2 = cte$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow \frac{E_0}{r_0}=\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}$$

$$E=\frac{E_0}{r_0}r\,\hat{\theta} \qquad \oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int\vec{\nabla}\times\vec{E}\,d\vec{A} \rightarrow$$

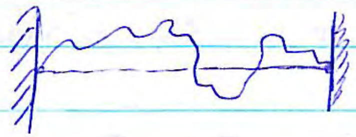
$$\frac{E_0}{r_0}r^2(2\pi)=\frac{2E_0}{r_0}(A)\ \cancel{E}=\int\nabla\times\vec{E}\,d\vec{A} \rightarrow \vec{\nabla}\times E=\frac{2E_0}{r_0}$$

مثال: یک گوه با زاویه‌ی β به همراه یک کره به ترتیب روی سطح شیب دارهایی با زاویه‌های α و θ قرار می‌دهیم. معادله‌ی قید را بدست آورید.

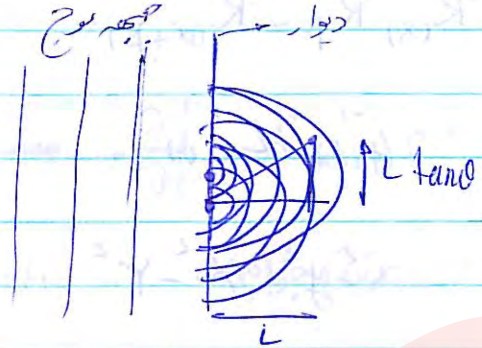


بقای انرژی داریم، پس مجموع کار نیروی N صفر است. $\vec{N}\cdot(\vec{a}_1-\vec{a}_2)=0$

$$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, Sin(2\pi n x)$$



$$y = \frac{A'}{r} Sin(\omega t - kr + \theta_0)$$



$$y = A Sin(\underbrace{\omega t - kx + \theta_0}_{\text{فاز } \varphi})$$

$$y = Sin\varphi + Sin\left(\varphi + \frac{2\pi d \, Sin\theta}{\lambda}\right) =$$

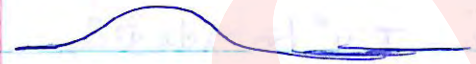
$$2 \, Cos\left(\frac{\pi d \, Sin\theta}{\lambda}\right) Cos\left(\varphi + \frac{d \, Sin\theta \, \pi}{\lambda}\right)$$

$$\cancel{\Delta t = \frac{\Delta L}{v_s - v}} \quad \Delta t = \frac{\Delta L}{v_s - u} \qquad f' = f \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

$$f' = f \left(\frac{v_s - v}{v_s - u}\right)$$

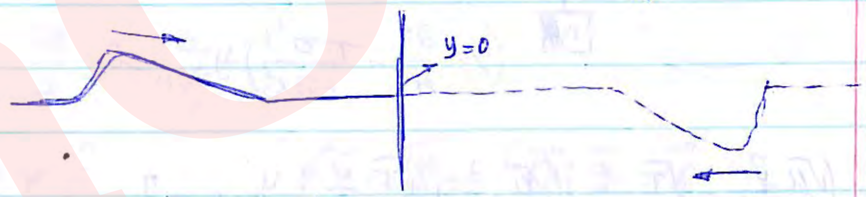
$$t = 0 : \begin{cases} y_{(x,t)} = y = f_{(x)} + g_{(x)} \rightarrow y' = f'_{(x)} + g'_{(x)} \\ \dot{y}_{(x,t)} = \dot{y} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \left(g'_{(x)} - f'_{(x)}\right) \end{cases}$$

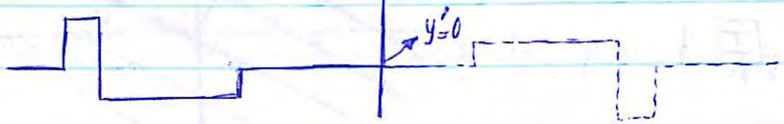
→ معادلات را حل و انتگرال گیری می‌کنیم.



$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \, , \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega} v$$

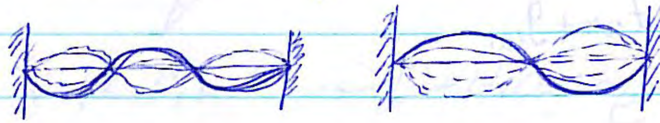
$$\lambda = \frac{v}{f}$$





$$Cos(\omega t - kx) - Cos(\omega t + kx) = 2 \, Sin(\omega t) \, Sin(kx) = 0$$

$$\rightarrow Sin(kx) = 0 \rightarrow K = \frac{\pi n}{L} \, , \quad n \in N$$



معادله‌ی پخش تحت تبدیلات گالیله ناوردا نیست.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\nabla^2 f=0$$

برای حالت 1+1D : $f_{(x,t)}=H_{(x-ct)} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=H''_{(x-ct)}c^2$

$, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=H''_{(x-ct)} \rightarrow H_{(x-ct)}$ جواب (راست‌رونده)

$f_{(x,t)}=H_{(x-ct)}+G_{(x+ct)}$ اینهم جواب

امواج تخت : $\phi=\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t$ فاز

$\vec{k}$: بردار موج ω : بسامد زاویه‌ای

$f_{(\vec{r},t)}=\overset{\text{دامنه}}{A}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)=A\sin(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\omega^2 f \quad , \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-k_x^2 f \quad , \dots \longrightarrow k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$ رابطه‌ی پاشندگی

پس بینهایت جواب داریم. زیرا هر k_x، k_y، k_zی که در رابطه صدق کند جواب است.

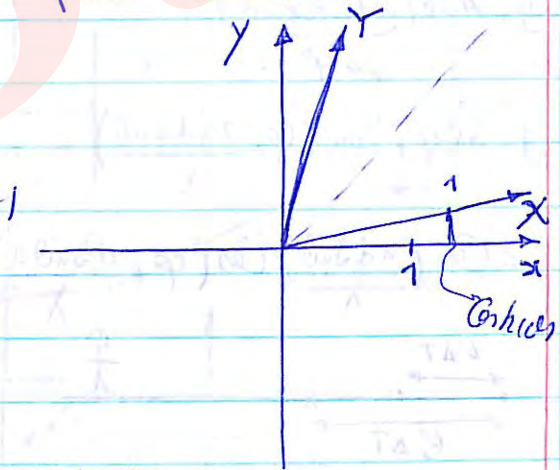
ماتریس دوران : $R_{(\theta)}$

$R_{(\alpha)}R_{\beta}=R_{(\alpha+\beta)} \quad , \quad R^{-1}_{(\theta)}=R_{(-\theta)}$

$L^{-1}_{(\theta)}=L_{(-\theta)} \qquad \begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix}=L_{(\theta)}$

$x^2-y^2=X^2-Y^2$

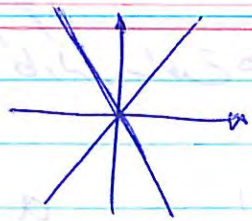
$$\begin{cases} x=X\cosh(\theta)+Y\sinh(\theta)\\ y=X\sinh(\theta)+Y\cosh(\theta)\end{cases}$$



$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla} \quad , \quad \vec{\nabla}'=\vec{\nabla}$

$\frac{\partial \rho'}{\partial t'}+\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}'=0 \rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho'+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}'=0 \rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\vec{j}'+\vec{v}\rho')=0$

$$\rightarrow \begin{cases}\rho'=\rho\\ \vec{j}=\vec{j}'+\vec{v}\rho'\end{cases}$$



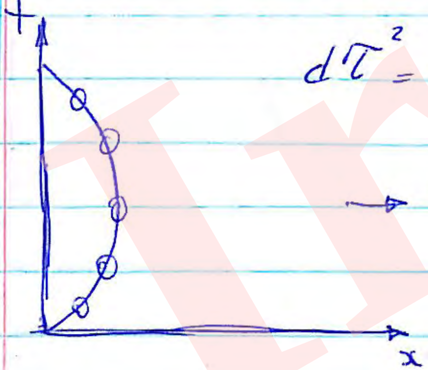
$x^2 - c^2t^2 = 0$ در فضای ۱+۱ بعدی. مخروط یک بعدی

$\cancel{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

$$1-u^2 = \frac{(1-u'^2)(1-v^2)}{(1+vu'_x)^2} \rightarrow \begin{cases} u<c \Leftrightarrow u'<c \\ u=c \Leftrightarrow u'=c \\ u>c \Leftrightarrow u'>c \end{cases}$$

tachyon : ذراتی که سرعتشان از نور بیشتر است ولی هنوز مشاهده نشده اند. (تاخیون) یونانی است به معنی تند.

$$\gamma_{(u)} = \gamma_{(v)}\gamma_{(u')}\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)$$



$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2} = dt^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

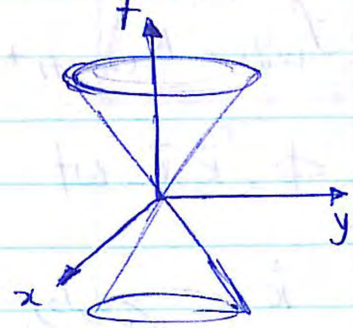
$$\rightarrow \tau = \int_0^T \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,dt \rightarrow \tau \leq T$$

چون مجموعه‌های فاز ثابت صفحه اند به آن موج تخت می‌گوییم.

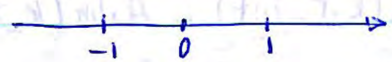
موج کروی : $f = \frac{A}{r}\sin(kr - \omega t)$

موج دایره‌ای : تابع بسل $\Phi = k\rho - \omega t$

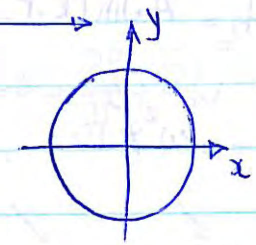
$\sqrt{x^2+y^2} = ct \rightarrow c^2t^2 - x^2 - y^2 = 0$ مخروط موج



$x^2 = 1 \quad \subset \mathbb{R}$

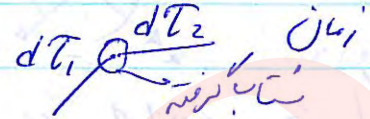


$x^2 + y^2 = 1 \quad \subset \mathbb{R}^2$

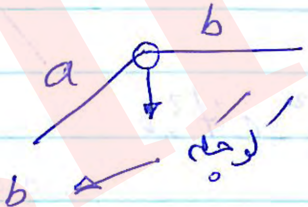


$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \subset \mathbb{R}^3$

فرض ساعت ها: کارکرد ساعت ها به شتاب آنها بستگی ندارد.

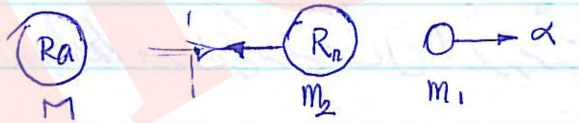


$\cancel{d\tau_1 + d\tau_2 = d\tau}$



$L = a + b$

در نمودار مینکوفسکی بلندترین طول بین دو نقطه خط واصل آنهاست.



$m_1 < m_2 : K_1 > K_2$

باسمه تعالی

$$\vec A = \frac{\vec P\times \vec L}{m} - \frac{c\vec r}{r} \quad , \quad \frac{c}{r}=U \longrightarrow \frac{d\vec A}{dt} = \frac{d\vec P}{dt}\times\frac{\vec L}{m} + \frac{\vec P}{m}\cdot \cancelto{0}{\frac{d\vec L}{dt}} - \frac{c\dot{\vec r}}{r} + \frac{c(\vec r\cdot\dot{\vec r})\vec r}{r^3}$$

$$\longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{-c}{r^3}\vec r\times(\vec r\times\dot{\vec r}) - \frac{c\dot{\vec r}}{r} + \frac{c(\vec r\cdot\dot{\vec r})\vec r}{r^3} =$$

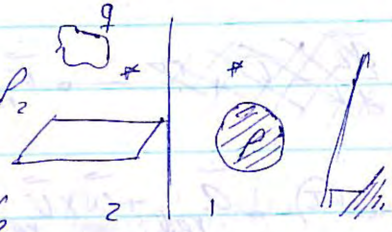
$$-\frac{c}{r^3}\left[\vec r(\vec r\cdot\dot{\vec r}) - \dot{\vec r}(\vec r\cdot\vec r)\right] - \frac{c\dot{\vec r}}{r} + \frac{c(\vec r\cdot\dot{\vec r})\vec r}{r^3} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec A = \text{const}}$$

قضیه‌ی دوجابجایی گرین:

$$\int_{\text{تمام فضا}} \rho_1 V_2\, d\tau = \int \rho_2 V_1\, d\tau$$

ρ_1 , ρ_2: چگالی بار در حالت ۱ و ۲

V_1 , V_2: پتانسیل بار در حالت ۱ و ۲



اثبات:

$$\int \rho_1 V_2\, d\tau = \int (\nabla\cdot\vec E_1)V_2\, d\tau = \int \nabla\cdot(V_2\vec E_1)\, d\tau + \int \vec E_1\cdot\vec E_2\, d\tau =$$

$$\int_{\text{تمام فضا}} \cancelto{0}{(V_2\vec E_1)\cdot d\vec s} + \int \vec E_1\cdot\vec E_2\, d\tau \quad , \quad \nabla\cdot(V_2\vec E_1) = \nabla V_2\cdot\vec E_1 + V_2\,\nabla\cdot\vec E_1$$

چون در تمام فضاست صفر می‌شود.

$$q_1 V_2 = q_2 V_1 \quad , \quad \int \sigma_1 V_2\, ds = \int \sigma_2 V_1\, ds$$

بسمه تعالی

$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' = x\hat{x} + y\hat{y} \longrightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' \rightarrow (\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}') + (x'\dot{\hat{x}}' + y'\dot{\hat{y}}')$$

$$\begin{cases} \hat{x}' = \hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin(\omega t) \\ \hat{y}' = \hat{y}\cos(\omega t) - \hat{x}\sin(\omega t) \end{cases} , \quad \begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{x}' \\ \dfrac{d\hat{y}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{y}' \end{cases} , \quad \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{e}_i$$

$$\longrightarrow \dot{\vec{r}}' = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}' \longrightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}' \longrightarrow \vec{v}_{rel} = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}} - \vec{\omega}\times\vec{r}' \quad (\mathrm{I})$$

$$\longrightarrow \dot{\vec{v}}_{rel} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}')$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{I}) \rightarrow \vec{a}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - \vec{\omega}\times(\vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{F}_{\text{واقعی}} + \vec{F}_{\text{مجازی}}$$

بسمه تعالی

درس 10 نفر

نسبت به زمین — در قسمت نشان داده است

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{N} + m\vec{g} - m(\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})) - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}) \longrightarrow mR\ddot{\theta} = (-m\omega^2 R\sin\theta)\cos\theta$$

$+ \cdots$

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} , \quad \hat{N} = \frac{\frac{\partial\hat{T}}{\partial t}}{\left|\frac{\partial\hat{T}}{\partial t}\right|} , \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = \tau\hat{N} , \quad \frac{1}{R} = \frac{|d\hat{T}|}{ds} = k \quad \text{شعاع انحنا} = R$$

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N}$$

مشاهده ۴: $\vec{F}_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t+\delta t)$

$$\vec{F}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t,\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = 0 \\ \dot{\vec{r}}_2 = 0 \end{cases} \text{حالت خاص}$$

مشاهده ۵: $\vec{F}_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1+\vec{b},\vec{r}_2+\vec{b})$

$$\rightarrow \vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

$$\vec{b} = -\vec{r}_1 \rightarrow \vec{F}_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}(0,\vec{r}_2-\vec{r}_1) \rightarrow \vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}) , \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$\vec{F}_{12}(\tilde{R}\vec{r}) = \tilde{R}F_{12}(\vec{r})$ | $\tilde{R}\vec{r} = \vec{r}$: محور دوران r است | $\vec{F}_{12}(\vec{r}) = \tilde{R}\vec{F}_{12}(\vec{r}) \rightarrow$

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}) = f_{12}(\vec{r})\vec{r} , \quad \tilde{R}\vec{r} = r' \rightarrow F_{12}(\vec{r}') = \underbrace{f_{12}(\vec{r}')}_{f_{12}(\tilde{R}\vec{r})}\vec{r}' \Rightarrow \tilde{R}\vec{F}_{12}(\vec{r}') =$$

$$f_{12(\tilde{R}\vec{r})}\tilde{R}\vec{r} \to \tilde{R} f_{12(\vec{r})}\vec{r} = \tilde{R} f_{12}(\tilde{R}\vec{r})\vec{r} \to f_{12(\vec{r})} = f_{12(\vec{r'})}$$

$$f_{(\vec{r})} = f_{(|\vec{r}|)} = f_{(r)} \to f_{(r)} \sim \frac{1}{r^3}$$ مشاهده $$\to f_{(r)} = \frac{A_{12}}{r^3} \to \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \to$$

$$f_{12(r)}\vec{r} + f_{21(r)}(-\vec{r}) = 0 \to f_{12} = f_{21} \to A_{12} = A_{21}$$

0 $\{i\}$ $\{j\}$

$\frac{f_{13}}{f_{12}}$ مستقل از جسم ۱ $= g_{(2,3)} \to \frac{A_{13}}{A_{12}} = g_{(2,3)}$ | 0: جسم استاندارد $\to A_{0i} = Q_i \to$

$$\frac{A_{ij}}{A_{i0}} = g_{(j,0)} \quad \Big| \quad \frac{A_{0j}}{A_{00}} = g_{(j,0)} \quad , \quad \frac{A_{ij}}{A_{i0}} = \frac{A_{0j}}{A_{00}} \to A_{ij} = \frac{A_{0j} \times A_{i0}}{A_{00}} = \frac{A_{0j}A_{0i}}{A_{00}} = \frac{Q_iQ_j}{A_{00}}$$

$$\to \frac{1}{A_{00}} = k \to A_{ij} = kQ_iQ_j \Rightarrow f_{ij}(r) = \frac{kQ_iQ_j}{r^3} \to \vec{F}_{ij(\vec{r})} = \frac{kQ_iQ_j}{r^3}\vec{r}$$

$$b = -\frac{qz}{2\pi(r^2+z^2)^{3/2}}$$ دوره ۱۰ نفره 82

$$K_{(r)}2\pi r - K_{(r+dr)}2\pi(dr+r) = \frac{\partial}{\partial t}(b\,2\pi r dr) \Rightarrow$$

$$d(2\pi r k) = \frac{q}{2\pi}\dot{z}\frac{r^2-z^2}{(r^2+z^2)^{5/2}} \times 2\pi r dr \to kr = \frac{q}{2\pi} \times \dot{z} \times \frac{-r^2}{(r^2+z^2)^{5/2}} \to$$

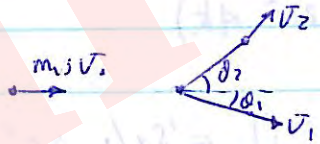
$$\int \frac{k^2}{\alpha} r dr d\theta = \frac{q^2\dot{z}^2}{2\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{r^3 dr}{(r^2+z^2)^3} = \frac{q^2\dot{z}^2}{2\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{r^2 \cdot r dr}{(r^2+z^2)^3} = \frac{q^2\dot{z}^2}{8\pi\alpha z^2}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta = mg \\ -T\sin\theta + \beta x = \ddot{x}m \end{cases} \longrightarrow x\left(\frac{mg}{L} - \beta\right) + m\ddot{x} = 0 \to E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \left(\frac{mg}{\ell} - \beta\right)\frac{x^2}{2}$$

$$\to \ddot{x} + \left(\frac{g}{\ell} - \frac{\beta}{m}\right)x + \frac{q^2\dot{x}}{4\pi\alpha d^2} = 0$$

$E_A = E_{cm} + E_{A/cm}$ | $m_1 \xrightarrow{v_0}$ m_2 $\tan(\theta_1+\theta_2) = f_{(\frac{m_1}{m_2})}\tan\theta_2$

با استفاده از دستگاه مرکز جرم و با برگرداندن در دستگاه مرکز جرم.



$$v_{cm} = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \quad , \quad v_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_0$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \quad , \quad \tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\theta}{m_1+m_2\cos\theta}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{v_2\sin\theta}{v_{cm}-v_2\cos\theta} \quad , \quad \tan\theta_1 = \frac{v_1\sin\theta}{v_{cm}+v_1\cos\theta}$$

$$f_{(m_1,m_2)} = \frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}$$

مثال: ثابت کنید اگر n بار نقطه ای در n رأس یک n ضلعی منتظم قرار دهیم حداقل

در $N+1$ نقطه میدان صفر می‌شود.

//

مثال: تغییرات U را برای دی‌الکتریک بین صفحات خازن به ازای جابجایی

//

Δx دی‌الکتریک بیابید.

$$\begin{cases} E \to E(2-K) \\ \qquad\qquad \delta x > 0 \\ E \to KE \end{cases}$$

$$E^2\delta x\left(K^2-1+(2-K)^2-1\right)=$$

$$\begin{cases} E \to KE \\ 0 \to (1-K)E \end{cases}$$

$$E^2\delta x\left(-1+2K^2-4K\right)$$

$$E^2\delta x\left[-K^2+1-(1-K)^2+1\right]=E^2\delta x\left(1-2K^2+2K\right)$$

$$\vec{F}_{12}=\frac{3K}{r^5}\left[(\vec{P}_1\cdot\vec{r})\vec{P}_2+(\vec{P}_2\cdot\vec{r})\vec{P}_1+(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)\vec{r}-\frac{5(\vec{P}_1\cdot\vec{r})(\vec{P}_2\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2}\right]$$